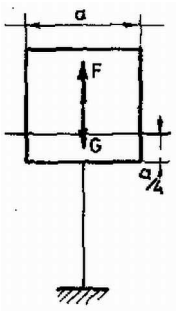
Amikor a kocka úszik a vízen, a gumiszál feszítetlen, ezért a kockára ható $G = mg = \varrho_{\text{kocka}} \cdot a^3 \cdot g$ súlyerő és az Arkhimédész törvénynek megfelelő $F = \varrho_{\text{víz}} \cdot a^2 \cdot (a/4) \cdot g$ felhajtóerő eredője zérus:

$$F - G = \varrho_{\text{víz}} \cdot a^2 \cdot (a/4) \cdot g - \varrho_{\text{kocka}} \cdot a^3 \cdot g = 0, \tag{1}$$

ahol ϱ a sűrűség, g a gravitációs állandó (1. a) ábra)



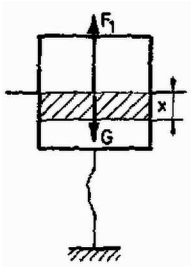
1.a ábra

A fenti egyenletből

$$\varrho_{\text{kocka}} = \varrho_{\text{víz}}/4 = 250 \text{ kg/m}^3,$$

és a kocka m tömege

$$m = \varrho_{\text{kocka}} \cdot a^3 = 0{,}25 \text{ kg}.$$



1.b ábra

Ha most kockánkat egyensúlyi helyzetéhez képest x mélységre lenyomjuk (1. b) ábra), akkor arra a megnövekedett F_1 felhajtóerő és a változatlan G súlyerő hat, így a mozgásegyenlet (a vektorok irányát úgy jellemezzük, hogy a felfelé mutató vektorokat vesszük pozitívnak):

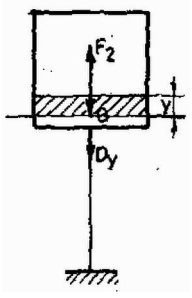
$$ma_x = F_1 - G = \varrho_{\text{víz}} \cdot a^2 \cdot x \cdot g + F - G = \varrho_{\text{víz}}\, a^2 \cdot x \cdot g, \tag{2}$$

hiszen $F - G = 0$ az (1) egyenlet miatt.

A (2) összefüggés egy

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\varrho_{\text{víz}} \cdot a^2 g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\varrho_{\text{kocka}} a^3}{\varrho_{\text{víz}} \cdot a^2 \cdot g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\varrho_{\text{kocka}}}{\varrho_{\text{víz}}} \cdot \frac{a}{g}} = \frac{\pi}{10}\,\text{s} \tag{3}$$

periódusidejű harmonikus rezgés mozgásegyenlete.



1.c ábra

Ez a meggondolás azonban nem érvényes akkor, amikor a kocka a D direkciós erejű gumiszál megfeszítése közben eredeti egyensúlyi helyzete fölé kerül (1. c) ábra). Ekkor a mozgásegyenlet

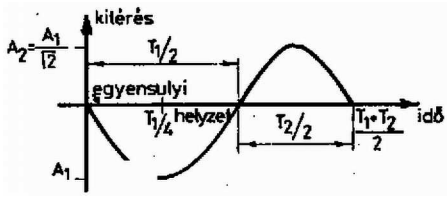
$$ma_y = F_2 - G - Dy = F - \varrho_{\text{víz}} \cdot a^2 \cdot y \cdot g - G - Dy = -(\varrho_{\text{víz}} a^2 g + D)y, \tag{4}$$

ahol ismét felhasználtuk, hogy $F - G = 0$.

A (4) mozgásegyenlet ismét egy harmonikus rezgőmozgást ír le

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\varrho_{\text{víz}} a^2 g + D}} = \frac{\pi}{10\sqrt{2}}\,\text{s}, \tag{5}$$

periódusidővel.



2. ábra

A kocka mozgása tehát két különböző frekvenciájú, egymást félperiódusonként felváltva követő harmonikus rezgőmozgás (2. ábra), amelynek T periódusideje

$$T = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} = \frac{\pi}{20}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0{,}27\text{s}.$$

Megjegyzés. Számolásunk során végig feltételeztük, hogy a kocka állandóan érintkezik a vízzel. Mi ennek a feltétele? Ha a kocka maximális kitérése a rezgőmozgás során lefelé A_1, felfelé A_2, akkor az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor mozgási energiája

$$E_{\text{mozg}} = (1/2)mA_1^2\omega_1^2 = (1/2)mA_2^2\omega_2^2,$$

ahonnan

$$A_1 = A_2\,\frac{\omega_2}{\omega_1} = A_2\,\frac{T_1}{T_2} = A_2\sqrt{2}. \tag{6}$$

A kocka akkor érintkezik mozgása során a vízzel, ha A_2 nem nagyobb, mint $A_{2\,\max} = (1/4)a$, így kezdetben a kockát legfeljebb $A_{1\,\max} = A_{2\max} \cdot \sqrt{2} = (a/4) \cdot \sqrt{2} = 0{,}35$ dm-rel nyomhatjuk lejjebb.

Megjegyzés. A valóságban a kocka rezgése során a víz egy része is rezgésbe jön, és így a tényleges rezgő tömeg nagyobb, mint a kocka tömege. A valóságban tehát a periódusidő a fenti értéknél valamivel nagyobb lesz.