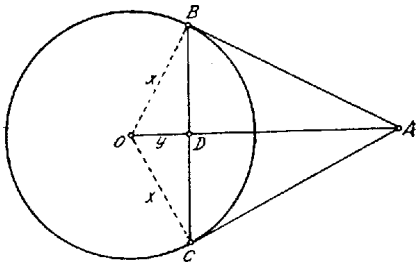
A BC húr felezőpontja legyen D, továbbá a kör sugara $OB = OC = x$ és $OD = y$.



Az OAB derékszögű háromszögben

$$\overline{OB}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OD}, \quad \text{azaz} \quad x^2 = ay \tag{1}$$

és

$$\overline{BD}^2 = \overline{OD} \cdot \overline{DA}, \quad \text{azaz} \quad \ell^2 = y(a-y). \tag{2}$$

(1)-ből $y = \dfrac{x^2}{a}$. Helyettesítve ezt (2) be, a törtek eltávolítása után az

$$x^4 - a^2x^2 + a^2\ell^2 = 0 \tag{3}$$

egyenlethez jutunk, mely x^2-re nézve másodfokú. Ezen egyenlet gyökei megfelelnek, ha valósak, pozitívek, a^2-nél kisebbek, de ℓ^2-nél nagyobbak.

A (3) gyökei valósak, ha $a^4 - 4a^2\ell^2 \geq 0$, ill. ha $a^2 \geqq 4\ell^2$, tehát, ha

$$2\ell \leqq a.$$

Ha valósak, nyilván pozitívek, mert összegük (t. i. a^2) és szorzatuk (t. i. $a^2\ell^2$) pozitív.

Minthogy (3) alapján $x^2(a^2 - x^2) = a^2\ell^2 > 0$, a gyökök mindegyike a^2 nél kisebb.

Azt kell még megvizsgálnunk, hogy a gyökök nagyobbak-e ℓ^2-nél? Meg kell néznünk tehát $x^2 = z$ helyettesítésével az

$$f(z) = z^2 - a^2z + a^2\ell^2$$

függvény előjelét a $z = 0$ és $z = \ell^2$ helyeken.

$$f(O) = a^2\ell^2 > 0 \quad \text{és} \quad f(\ell^2) = \ell^4 - a^2\ell^2 + a^2\ell^2 = \ell^4 > 0,$$

azaz: vagy mind a két gyök 0 és ℓ^2 között, vagy mind a kettő a 0 és ℓ^2 közén kívül van.

Minthogy az $f(z) = 0$ egyenlet gyökeinek félösszege $\dfrac{a^2}{2} > \ell^2$, (mert $a^2 \geqq 4l^2$), *a gyökök mindegyike nagyobb ℓ^2-nél.*

Eszerint a feladat megoldható, ha a BC húr hossza nem nagyobb az OA távolságnál. Két megoldás van, ha $2\ell > a$, egy megoldás ha $2\ell = a$.

A (3) gyökei

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{2 \pm 2\sqrt{1 - \frac{4\ell^2}{a^2}}}.$$

alakban írhatók.

Mandl Béla (Zrínyi Miklós rg. VI. o. Bp. VIII.)

Geometriai megoldás. A B pont két mértani helyen fekszik. Az egyik mértani hely az OA átmérő felett szerkesztett kör (u. i. $OBA\sphericalangle = 90°$. A másik mértani hely az OA-val párhuzamos egyenes, melynek távolsága OA-tól $= \ell$. Ezen egyenes az előbbi kört két pontban metszi, ha $\ell < \dfrac{a}{2}$, érinti, ha $\ell = \dfrac{a}{2}$. Nincs közös pontjuk, ha $\ell > \dfrac{a}{2}$.

Jakab Károly (Jézustársasági g. VI. o. Kalocsa.)