I. Megoldás. *a)* Legyen $OMN\triangle$ egyenlőszárú, $OM = ON$. Az MN alapon felvett P pontból a másik két oldalra bocsátott merőleges PQ, ill. PR. Ha P pont végigfut az MN alapon, akkor

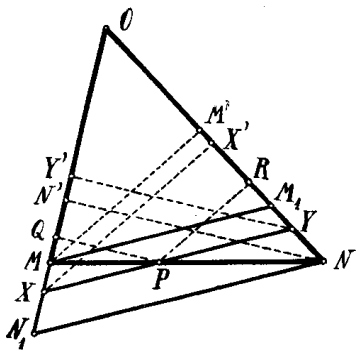
$$PQ + PR = \text{ constans } = MM' = NN',$$

ahol MM' és NN' az $OMN\triangle$ egyenlő oldalaihoz tartozó magasságok. (L. 8. feladatot az I. évf. 3. számában)

b) Az OMN általános háromszög MN oldalán vegyük fel ismét a P pontot; legyen $OM < ON$. A háromszögben nagyobb oldalhoz kisebb magasság tartozik, mint a nagyobbikhoz (l. 35. gyakorlatot a II. évf. 3. számában), tehát $MM' < N'N'$. Ebben az esetben

$$MM' \leqq PQ + PR \leqq NN',$$

oly módon, hogy a $PQ + PR$ összeg állandóan növekedik MM'-től NN'-ig, ha a P pont M-ből kiindulva végig fut az MN oldalon N-ig.



Hogy ezt kimutassuk, az $OMN\triangle$-nek OM oldalára mérjük fel az $ON_1 = ON$, az ON oldalára az $OM_1 = OM$ távolságokat. Így $OMM_1\triangle$ és $ONN_1\triangle$ egyenlőszárú: $MM_1 \parallel NN_1$. Az $ONN_1\triangle$ egyenlő oldalaihoz tartozó magasságok mindegyike $= NN'$, az $OMM_1\triangle$ egyenlő oldalaihoz tartozó magasságok mindegyike $= MM'$. Az MN oldalon felvett P ponton át húzzunk az $NN_1 \parallel MM_1$ egyenesekkel párhuzamosat, mely az $MON\triangle$ szárait az X, ill. Y pontban metszi; ekkor $OXY\triangle$ egyenlő szárú: $OX = OY$. Az *a)* segédtétel szerint

$$PQ + PR = XX' = YY',$$

ahol XX' ill. YY' az $OXY\triangle$ egyenlő oldalalhoz tartozó magasságok. Azonban nyilvánvaló, hogy

$$MM' \leqq XX' = YY' \leqq NN',$$

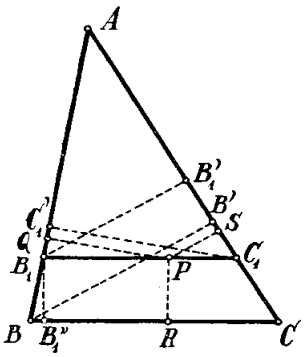
tehát

$$MM' \leqq PQ + QR \leqq NN'.$$

Az egyenlőségi jel akkor érvényes, ha P az M, ill. N pontba esik.

c) Legyen már most az általános $ABC\triangle$-ben $BC < AB < AC$, tehát a magasságok között legkisebb az AC oldalhoz tartozó BB'.

A háromszögön belül felvett P pontból az AB, BC, CA oldalakra bocsátott merőlegesek rendre PQ, PR, PS.



Húzzunk a P ponton át a háromszög legkisebb oldalával párhuzamosat, B_1C_1-t. Az $AB_1C_1\triangle$-ben, az $ABC\triangle$-gel való hasonlósága miatt $AC_1 > AB_1$, tehát $B_1B_1' < C_1C_1'$, ha ezek az AC_1 ill. AB_1 oldalakhoz tartozó magasságok. A *b)* segédtétel szerint

$$PQ + PS > B_1B_1'$$

és így

$$PQ + PR + PS \geqq B_1B_1' + B_1B_1'',$$

ha B_1'' a B_1 vetülete a BC oldalon; ekkor ugyanis $PR = B_1B_1''$.

Azonban, ugyancsak a *b)* segédtételnél fogva

$$B_1B_1' + B_1B_1'' \geqq BB'.$$

Eszerint a $PQ + PR + PS$ összeg minimuma BB', a háromszög legkisebb magasságvonalával egyenlő és ezt akkor éri el, ha P a B csúcsba (a legnagyobb szög csúcsába) kerül.

Ha a háromszög egyenlő oldalú, akkor a $PQ+PR+PS$ összeg állandó és a háromszög magassági vonalával egyenlő.[1]

NB. A szóban forgó összeg maximuma a *b)* segédtétel szerint a háromszög legnagyobb magassági vonalával egyenlő és ezt akkor éri el, amikor a P pont a háromszög legkisebb szögének csúcsába esik.

II. Megoldás. Jelentse rendre x_1, x_2, x_3 a P pontnak a háromszög a_1, a_2, a_3 oldalaitól való távolságát, t a háromszög területét. Nyilván

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 2t.$$

Jelölje a az a_1, a_2, a_3 oldalak legnagyobbikát, m_a az ehhez tartozó magasságot. Ekkor

$$a\,(x_1 + x_2 + x_3) \geqq 2t \quad \text{ill.} \quad a\,(x_1 + x_2 + x_3) \geqq am_a,$$

tehát

$$x_1 + x_2 + x_3 \geqq m_a.$$

Az egyenlőségi jel akkor áll elő, amidőn a P pont a legnagyobb oldallal szemben fekvő csúcsba kerül. Eszerint az $x_1 + x_2 + x_3$ összeg minimuma m_a (a háromszög legkisebb magassága).

Vass Tibor (Kegyesrendi g. VII. o. Bp.).

Jegyzet. Ha adva van egy tetraéder és keressük azon P pontot a tetraéderen belül, ill. határlapjain, amelyre nézve a tetraéder oldallapjaitól való távolságainak összege minimum, akkor az ilyen tulajdonsággal bíró P pont a tetraéder azon csúcsa, amelyik a legnagyobb területű oldallappal fekszik szemben és a szóban forgó összeg minimuma a tetraédernek ezen oldallaphoz tartozó – tehát a legkisebb – magassága.

Weiszfeld Endre (Kemény Zsigmond r. VIII. o. Bp.).

[1] L. A 61. gyakorlatot a II. évf. 3. számában.