Száz éve, 1907. február 13-án született *Kárteszi Ferenc* professzor. Utolsó cikke [3] egyik kedvenc témájával, Desargues tételével foglalkozik. Ehhez kapcsolódik két cikkünk, melyet Kárteszi professzor egykori diákjai írtak szeretett tanáruk születésének centenáriumára emlékezve. Az első cikk ([6]) lapunk márciusi számában jelent meg. A jelen dolgozat szorosan kapcsolódik az említett két cikkhez. Mielőtt a címben jelzett témára rátérnénk, először lássuk, mit is neveznek ma „axiomatikus geometriának".

A geometria axiomatizálása *Eukleidésszel* kezdődött, s ez az axiómarendszer a XIX. század végéig változatlan maradt. Az axiomatizálás célja az embert körülvevő fizikai tér minél pontosabb absztrakt leírása volt. A geometria egyik központi kérdése az volt, hogy a párhuzamossági axióma levezethető-e a geometria többi euklidészi axiómájából. A XIX. század elején *Bolyai* és *Lobacsevszkij* megmutatták, hogy erre a kérdésre a válasz tagadó, felépítették az első nem-euklidészi geometriákat. Munkásságuk nyomán már nem tűnt olyan idegennek az euklidészitől különböző geometriákat elképzelni. Amikor *Hilbert* 1899-ben megadta az euklidészi geometria axiómarendszerét (l. Reiman [10], 366. old.), az axiómákat öt csoportba osztotta (illeszkedési, rendezési, egybevágósági, folytonossági és párhuzamossági), és megvizsgálta külön-külön is ezek következményeit. Így például csupán az illeszkedési axiómákat tekintve megadhatók olyan, a szemlélettől eltérő objektumok is, amelyek az axiómáknak eleget tesznek. Annak, hogy a XX. század elején az axiómákkal már sok lehetséges geometria közös tulajdonságait próbálták megragadni, Bolyaiék munkásságán túl, másik oka az absztrakt algebra fejlődése volt (itt a tipikus axiómarendszerek kevés axiómából állnak és sok lényegesen különböző nekik eleget tevő struktúra van). Hogy konkrétan is lássunk egy ilyen sok geometriát megengedő axiómarendszert, nézzük az *„absztrakt affin síkok"* alábbi illeszkedési axiómáit:

A síkot, mint egy Σ *ponthalmazt* képzeljük el, az *egyenesek* pedig bizonyos kitüntetett részhalmazok. Ha egy pont eleme egy egyenesnek, azt a „pont illeszkedik az egyenesre" szóhasználattal is kifejezzük.

I_1 Két különböző pontra egy és csak egy egyenes illeszkedik.

I_2 Egy egyeneshez és egy rajta kívüli ponthoz egy és csak egy olyan egyenes van, amelynek az adott egyenessel nincs közös pontja és az adott pontra illeszkedik.

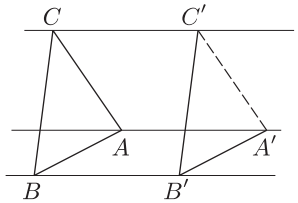
I_3 Van három olyan pont, amely nem illeszkedik egy egyenesre.

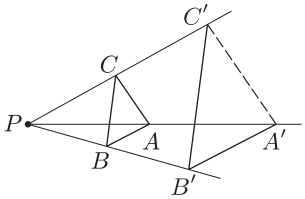
Az I_2 axiómában szereplő egyeneseket a szokásos terminológiával *párhuzamosnak* mondjuk. Az I_3 axióma csupán a teljesen banális struktúrák kizárására szolgál. Axiómáink legegyszerűbb modellje az alábbi: legyen pontjaink halmaza egy 4 elemű halmaz, az egyenesek ennek kételemű részhalmazai. Az Olvasó könnyen ellenőrizheti, hogy az axiómák teljesülnek. További (véges és nem véges) modelleket találhatunk Kárteszi [4], *Montágh* [9] cikkeiben, valamint a *Lovász, Pelikán, Vesztergombi* [8] könyvben. Természetesen jogos a félelem, hogy ezek a nagyon egyszerű axiómák túl gyöngék ahhoz, hogy segítségükkel nem-triviális tételeket vezessünk le. Azért, hogy érdekesebb „geometriákhoz" jussunk, kézenfekvő kibővíteni axiómarendszerünket. További axiómaként választhatunk például egy olyan, a klasszikus geometriában megismert tételt, amelynek megfogalmazásához csupán az összekötés, metszés és párhuzamosság szükséges, hiszen ezeket már I_1 és I_2 alapján értelmezhetjük. Hilbert munkái mutatnak rá, hogy a *Desargues-tétel* (a későbbiekben röviden $\boldsymbol{D}$-tétel) alkalmas erre a célra.

Ha az ABC, $A'B'C'$ háromszögek olyanok, hogy az AA', BB', CC' egyenesek egy közös ponton mennek át, akkor az AB, $A'B'$; BC, $B'C'$; CA, $C'A'$ egyenespárok X, Y, és Z metszéspontjai egy egyenesen vannak.

A $\boldsymbol{D}$-tétel érdekes sajátossága, hogy belőle könnyen adódik megfordítása is. Érdemes megemlíteni, hogy a $\boldsymbol{D}$-tétel igaz marad akkor is, ha kimondásában az „egyenesek egy közös ponton mennek át" feltételt az „egyenesek párhuzamosak" feltétellel cseréljük fel. Így többek között a $\boldsymbol{D}$-tétel alábbi két fontos speciális esetét fogalmazhatjuk meg, melyeket rendre $\boldsymbol{D_0}$-tételnek és $\boldsymbol{D_1}$-tételnek nevezünk.

$\boldsymbol{D_0}$-tétel. *Ha az ABC és az $A'B'C'$ háromszögek úgy helyezkednek el a síkon, hogy az AA', BB' és CC' egyenesek párhuzamosak, továbbá az AB egyenes párhuzamos az $A'B'$ egyenessel, a BC egyenes pedig párhuzamos a $B'C'$ egyenessel, akkor a CA egyenes is párhuzamos a $C'A'$ egyenessel.*





$\boldsymbol{D_1}$-tétel. *Ha az ABC és az $A'B'C'$ háromszögek úgy helyezkednek el a síkon, hogy az AA', BB' és CC' egyenesek egy közös P ponton mennek át, továbbá az AB egyenes párhuzamos az $A'B'$ egyenessel, a BC egyenes pedig párhuzamos a $B'C'$ egyenessel, akkor a CA egyenes is párhuzamos a $C'A'$ egyenessel.*

A Desargues-tételről részletesen olvashatunk Kiss György [6] cikkében, valamint Kárteszi [4, 5], Lánczos [7] és Coxeter [1, 2] könyveiben és persze Kárteszi [3] cikkében.

Most már rátérhetünk az egyszerű transzformációval származtatott affin síkunk vizsgálatára. Jelölje $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát, f alkalmas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, f^* pedig az f grafikonját, mint ponthalmazt az euklidészi síkon. Definiáljunk új egyeneseket a régi pontok halmazán a következő módon: egyrészt a függőleges egyenesek, másrészt f^* összes eltoltjai legyenek az új egyenesek. Persze semmi sem garantálja, hogy ilyen módon affin síkot kapunk. Arra a kérdésre, hogy ilyen módon mikor jutunk affin síkhoz, az alábbi állítás válaszol.

1. tétel. *A fenti módon definiált új egyenesek meghatározta sík pontosan akkor affin sík, ha teljesül a következő feltétel:*

S) minden nem-függőleges $\mathbf{v}$ *vektorhoz pontosan egy olyan* (P_1, P_2) *pontpár van* f^**-on, amelyre* $\overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{v}$.

Bizonyítás. Csak azt látjuk be, hogy ha az S) feltétel teljesül, akkor az új egyenesek meghatározta sík affin sík, az itt csak vázlatosan szereplő részek és a másik irány bizonyítását feladatnak hagyjuk.

Az I_1 axióma ellenőrzéséhez legyen $A_1 \neq A_2$ a sík két pontja, és $\mathbf{v} = \overrightarrow{A_1A_2}$. Ha $\mathbf{v}$ függőleges, I_1 könnyen ellenőrizhető. Ha nem az, akkor S) szerint egyértelműen van olyan (P_1, P_2) pontpár f^*-on, amelyre $\overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{v}$. Ha f^*-ot az $\overrightarrow{P_1A_1}$ vektorral eltoljuk, akkor megkapjuk az A_1, A_2 pontokat összekötő „új egyenest". Az összekötő egyenes egyértelműsége a (P_1, P_2) pontpár egyértelműségéből következik, mivel az eltolás kölcsönösen egyértelmű.

Az S) feltétel azt is maga után vonja, hogy ha f^*-ot egy nem-függőleges $\mathbf{v}$ vektorral eltoljuk, akkor ez az eltolt metszi f^*-ot, mégpedig azon P_2 pontban, amelynek létezését az S) feltétel garantálja. Ebből az következik, hogy két „új egyenes" akkor és csak akkor párhuzamos az új síkon, ha egymásból függőleges eltolással kapható.

Az I_3 axióma ellenőrzése nagyon egyszerű: legyen A_1 és A_2 két különböző pont az f^* „új egyenesen", A_3 pedig legyen az A_1-en átmenő függőleges egyenes egy A_1-től különböző pontja. Ekkor az A_1, A_2, A_3 ponthármas nincs egy egyenesen. □

Persze most az a kérdés, hogy vannak-e egyáltalán az S) feltételnek eleget tevő függvények. A [3] dolgozat egyik eredménye szerint például a normálparabola (az $f\colon x \mapsto x^2$ grafikonja) ilyen. A kérdés megválaszolásához lássuk az S) feltétel algebrai megfogalmazását.

2. tétel. *Az* f *függvény grafikonjára akkor és csak akkor teljesül az* S) *feltétel, ha minden* $a \neq 0$ *valós számra a*

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = f(x+a) - f(x)$$

valós függvény kölcsönösen egyértelmű.

Bizonyítás (vázlat). A feltétel azt mondja, hogy minden $a \neq 0$-ra és minden b-re az $f(x+a) - f(x) = b$ egyenletnek pontosan egy x_0 megoldása van. Ez a $\mathbf{v} = (a, b)$ vektorra biztosítja az S) feltétel teljesülését: P_1 az x_0, P_2 pedig az $x_0 + a$ abszcisszájú pont az f^* grafikonon. A részletes bizonyítást feladatnak hagyjuk. □

A 2. tételből azonnal következik, hogy az $f(x) = x^2$ függvényre teljesül az S) feltétel, hiszen ebben az esetben $f(x+a) - f(x) = 2ax + a^2$ lineáris függvény, így $a \neq 0$ esetén kölcsönösen egyértelmű.

Lássuk ugyanennek egy szemléletes bizonyítását is. Keressük meg az f^* normálparabola egy olyan érintőjét, amely párhuzamos $\mathbf{v}$-vel. Ez az érintő (igazi egyenes) teljesen f^* alatt marad. Kezdjük el ezt az egyenest önmagával párhuzamosan felfelé mozgatni. Ezek az egyenesek a normálparabolát két pontban metszik. Az elmozgatáskor ennek a két metszéspontnak a távolsága szigorúan monoton nő és folytonosan változik, így pontosan egy olyan helyzet lesz, amikor a két metszéspont távolsága éppen $\mathbf{v}$ hossza lesz. Ekkor az S) feltételben szereplő P_1, P_2 pontok ezen metszéspontok lesznek (az egyik sorrend esetén a $\mathbf{v}$, a másik sorrend esetén a $-\mathbf{v}$ vektorhoz tartoznak).

Ez a szemléletes okoskodás azt is mutatja, hogy meglehetősen sok olyan függvény van, amely eleget tesz az S) feltételnek. A rövidség kedvéért az S) feltételt kielégítő függvényeket *planáris függvényeknek* fogjuk nevezni. A következő tétel szemléletes tartalma az, hogy ha egy függvény grafikonja „hasonlít" a parabolához, akkor az planáris.

3. tétel. *Ha egy* f *függvény alulról szigorúan konvex, továbbá*

$$\lim_{-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty, \qquad \lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

akkor a függvény planáris.

A *szigorúan* szó itt azt jelenti, hogy f grafikonja nem tartalmazhat egyenes szakaszt. Az előző szemléletes bizonyítás ilyen függvényekre szinte szó szerint lemásolható, érintő helyett $\mathbf{v}$-vel párhuzamos támaszegyenest keresünk. A határértékekre vonatkozó feltételek azt biztosítják, hogy akármilyen meredek támaszegyenes létezzék, a konvexitás pedig azt, hogy a támaszegyenes elmozgatása során két metszéspont legyen, amelyek távolsága szigorúan monoton nő és folytonos módon változik. A 2. tételre is hivatkozhatnánk, a konvexitás azt jelenti, hogy az itteni g függvény $a > 0$-ra szigorúan monoton növő, $a < 0$-ra pedig szigorúan monoton csökkenő. A határértékekre vonatkozó feltételek azt garantálják, hogy g értékkészlete a teljes $\mathbb{R}$ legyen.

Azt sem lenne túl nehéz megmutatni, hogy a folytonos függvények között éppen a 3. tétel feltételeit teljesítő függvények és ezek ellentettjei lesznek planárisak, ezt feladatnak hagyjuk. Persze ennek a feladatnak a megoldásához szükség van a konvex függvényekkel kapcsolatos ismeretekre.

Jelölés. *Ha f planáris függvény, akkor a belőle a fent leírt eljárással kapott új síkot $I(f)$-fel jelöljük.*

Kárteszi tanár úr [3] dolgozatában a fő kérdés az volt, hogy új síkunkon mikor teljesül Desargues tétele. Régi és új síkunk között alkalmas transzformációt keresve, amely a régi egyeneseket „elgörbíti", megmutatható az alábbi fontos tétel:

4. tétel. *Ha f másodfokú függvény, akkor $I(f)$ izomorf az euklidészi síkkal.*

Ebben a tételben az *izomorf* szó azt jelenti, hogy a régi és új sík pontjai között megadható olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, amely a régi egyeneseket éppen az új egyenesekbe viszi.

Mi most csupán arra szeretnénk példát mutatni, hogy planáris függvények segítségével elég egyszerűen adhatunk meg olyan affin síkot, amelyen a $\boldsymbol{D}$-tétel nem teljesül. A dolgozat végén egy feladatsort találunk, amely planáris függvények és az általuk származtatott síkok további tulajdonságaira mutat rá.

Hogy a szokásos kooordináta-geometriához hasonlóan számolhassunk az $I(f)$ affin síkon is, Kárteszi [3] dolgozatához hasonlóan vezessünk be egy kölcsönösen egyértelmű pont-transzformációt. Jelöljük a szokásos módon az eredeti euklidészi sík koordinátáit x-szel és y-nal. Ekkor az új egyenesek f^*-ból a $(-a, B)$ vektorral való eltolással kaphatók, így egyenletük ebben a koordináta-rendszerben

$$x = c \quad \text{vagy} \quad y = f(x + a) + B$$

alakú (c, illetve a és B állandók). Írjuk át $f(x + a)$-t a következőképpen:

$$f(x + a) = f(x) + g(x, a) + f(a).$$

Ez a felírás, legalábbis akkor, ha f polinom, a binomiális tétel miatt kézenfekvő. A 2. tétel miatt is hasznos olyan kifejezést bevezetni, ami tartalmazza az $f(x+a)-f(x)$ különbséget, hiszen erről tudjuk, hogy kölcsönösen egyértelmű. Ezzel a g függvénnyel f^* eltoltjainak egyenlete

$$y = f(x + a) + B = f(x) + g(x, a) + \big(f(a) + B\big)$$

alakú lesz. Vezessük be az

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y - f(x) \end{aligned}$$

új koordinátákat. Így az új egyenesek egyenlete x', y' felhasználásával

$$x' = c, \quad \text{vagy} \quad y' = g(x', a) + b$$

alakban írható. Ha $f(x) = x^2$, akkor ez a pont-transzformáció megegyezik a Kárteszi [3] dolgozatában található transzformációval. Ebben az esetben

$$(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2, \quad \text{vagyis} \quad g(x, a) = 2xa.$$

Ez lényegében a valós számok szorzása, kicsit elügyetlenkedve. Ha most az általános esetben is bevezetünk egy új „szorzást" az $u * a = g(u, a)$ definícióval, akkor az egyenesek egyenlete kísértetiesen emlékeztet az egyenes szokásos egyenletére. Persze ez csak formális hasonlóság abban az értelemben, hogy ez a szorzás általában sokkal kevesebbet teljesít a megszokott műveleti tulajdonságok közül (például általában nem asszociatív). Húzzuk alá még egyszer, hogy $u * a = f(u + a) - f(u) - f(a)$. Ez a felírás mutatja, hogy $*$ kommutatív. Az új szorzást mi lényegében arra fogjuk használni, hogy az $I(f)$ síkon a koordinátákkal végzett számolásaink jobban hasonlítsanak a szokásos koordinátákkal való számolásokhoz.

A továbbiakban csak a legegyszerűbb ilyen függvényekkel, az $y = x^{2k}$ alakú általánosított parabolákkal foglalkozunk. Ekkor

$$a * b = (a + b)^{2k} - a^{2k} - b^{2k} = \sum_{i=1}^{2k-1} \binom{2k}{i} a^{2k-i} b^i.$$

Az, hogy ezek a függvények planárisak, abból következik, hogy grafikonjuk nagyon hasonlít a parabolára (v.ö. 3. tétel). A $k = 2$ speciális eset egy kicsit még egyszerűbb, ekkor csak másodfokú egyenletekre vezető egyenletrendszerek fordulnak elő. Vizsgáljuk meg, vajon a $\boldsymbol{D_0}$-tétel teljesül-e új síkunkon. Próbáljunk meg felépíteni egy a $\boldsymbol{D_0}$-tételben látható ábrát. Válasszunk az új síkon három párhuzamos egyenest, azaz például az eredeti f^* három függőleges eltoltját. Az x', y' koordinátákban ezek egyenlete a vízszintes egyenesekére emlékeztet. A háromszögek megfelelő

oldalainak párhuzamosaknak kell lenniük, legyen egy oldalpár függőleges, a másik kettő meredeksége pedig legyen $+1$ és -1. Ez pontosan azt jelenti, hogy az oldalak egyenlete rendre

$$x' = c, \qquad y' = x * 1 + \ldots, \qquad y' = x * (-1) + \ldots$$

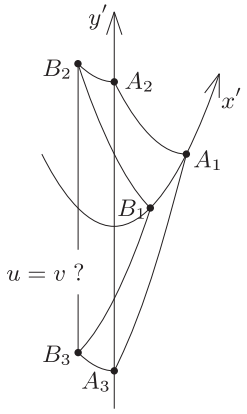
alakú. Legyen az A_1 csúcs az $y' = 0$ vízszintes egyenesen, mondjuk legyen A_1 az $(1;0)$ pont (új koordinátákban). Mivel az $A_1A_2A_3$ háromszög A_1A_3 és A_1A_2 oldalainak meredeksége $+1$ és -1, így az oldalak egyenlete rendre:

$$y' = x' * 1 + b_1, \qquad y' = x' * (-1) + b_2,$$

ahol a b_1, b_2 számok abból a feltevésből határozhatók meg, hogy az A_1 pont rajta legyen az egyeneseken. Így $b_1 = -(1 * 1)$, míg

$$b_2 = -\big(1 * (-1)\big) = -\big((1-1)^{2k} - 1 - 1\big) = 2.$$

Eszerint A_2 a $(0;2)$, A_3 pedig a $\big(0; -(1*1)\big)$ pont, hiszen azt akarjuk, hogy az A_2A_3 egyenes függőleges legyen. Hasonló módon legyen B_1 is az $y' = 0$ egyenletű új egyenesen, legyen mondjuk B_1 az $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ pont (új koordinátákban). A B_2, B_3 pontokat úgy kell felvenni, hogy B_1B_2 meredeksége $+1$, míg B_1B_3 meredeksége -1 legyen, továbbá, hogy az A_2B_2 és A_3B_3 egyenesek vízszintesek legyenek, vagyis egyenletük $y' = c$ alakú legyen. Eszerint B_2 nem más, mint az $y' = 2$ és $y' = x' * (-1) + 1$, B_3 pedig az $y' = -(1 * 1)$ és $y' = x' * 1 - \left(1 * \left(\frac{1}{2}\right)\right)$ egyenesek metszéspontja. Ugyanúgy, mint A_2 és A_3 meghatározásánál, a ferde egyenesek egyenletében szereplő konstansokat itt is úgy határoztuk meg, hogy az $x' = \frac{1}{2}$, $y' = 0$ érték kielégítse az egyenleteket, azaz B_1 rajta legyen az egyeneseken. Ennek alapján B_2 koordinátái $(u;2)$, B_3-é pedig $\big(v; -(1*1)\big)$, alkalmas u, v számokkal. Most már lényegében készen áll a $\boldsymbol{D_0}$-tételben szereplő konfiguráció, a háromszögek megfelelő csúcsait összekötő egyenesek egymással párhuzamosak, valamint a háromszögek megfelelő oldalai legfeljebb a B_2B_3 és A_2A_3 oldalpár kivételével szintén párhuzamosak. Ha új síkunkon teljesül a $\boldsymbol{D_0}$-tétel, akkor B_2B_3 és A_2A_3 is párhuzamos kell legyen. Ez a B_2 és B_3 pontok koordinátáira pontosan azt jelenti, hogy $u = v$.



Behelyettesítve B_2, illetve B_3 koordinátáit a B_1B_2 és B_1B_3 egyenesek egyenletébe az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$u * (-1) = 1, \qquad u * 1 = -(1 * 1) + \left(1 * \left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

Beírva a $*$ művelet definícióját, ez azt jelenti, hogy

$$\sum_{i=1}^{2k-1} \binom{2k}{i} u^{2k-i} (-1)^i = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{2k-1} \binom{2k}{i} u^{2k-i} = -2^{2k} + 2 + \left(\frac{3}{2}\right)^{2k} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} - 1.$$

Összeadva a két egyenletet, a páratlan kitevős tagok kiesnek:

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \binom{2k}{2i} u^{2k-2i} = -2^{2k} + \left(\frac{3}{2}\right)^{2k} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} + 2,$$

ami viszont lehetetlen, mert a bal oldal pozitív, míg a jobb oldal negatív. Ez tehát azt jelenti, hogy a felrajzolt esetben B_2B_3 nem függőleges, azaz a $\boldsymbol{D_0}$-tétel nem teljesül általában.

Érdemes külön kiemelni, hogy a $k=2$ esetben, azaz az $f\colon x\mapsto x^4$ választásnál a binomiális tétel helyett az összeg négyzetreemeléséről szóló azonosság kétszeri alkalmazása is megteszi, s ebben az esetben a végső ellentmondás is egy másodfokú egyenlet megoldhatatlansága. Ebben az $f(x)=x^4$ esetben a $\boldsymbol{D_1}$-tétel érvényességét is megvizsgálhatjuk az említett egyszerű módon. Igazából itt a $\boldsymbol{D_1}$-tétel megfordítását ellenőrizzük, de mint azt a Desargues-tételnél említettük, a $\boldsymbol{D}$-tételből annak megfordítása is következik. Ez mindkét általunk használt speciális esetre is így van, ennek meggondolását feladatnak hagyjuk. A $\boldsymbol{D_1}$-tétel nem-teljesülését sokkal kevésbé részletesen tárgyaljuk, mint az előző esetben. Könnyen látható, hogy az

$$A_1(0;-1);\quad A_2\left(\frac{1}{2};-1\right);\quad A_3\left(\frac{1}{2};3\right)$$

és

$$B_1(0;-2);\quad B_2(1;-2);\quad B_3(1;12)$$

háromszögek (ahol $12=1*1-2=(1+1)^4-1-1-2$) a $\boldsymbol{D_1}$-tételben szereplő konfigurációt alkotnak, melyben a $\boldsymbol{D_1}$-tételbeli P pont csak az origó lehet. Így a $\boldsymbol{D_1}$-tétel pontosan akkor teljesül, ha az origó, az A_3 és a B_3 pontok kollineárisak, azaz ha van olyan a szám, amelyre A_3B_3 egyenlete $y'=x'*a$ alakú, vagyis, ha

$$a*\left(\frac{1}{2}\right)=3\quad\text{ és }\quad a*1=12$$

egyszerre teljesül. Beírva a $*$ művelet definícióját azt kapjuk, hogy

$$4a^3+6a^2+4a=12,$$

$$2a^3+\frac{3a^2}{2}+\frac{a}{2}=3.$$

A második egyenletet 2-vel szorozva, majd a két egyenletet kivonva a

$$3a^2+3a-6=0$$

egyenletet kapjuk, amelynek gyökei 1 és -2, a visszahelyettesítés azonban mutatja, hogy ezek az eredeti egyenleteknek nem gyökei. Így síkunkon a $\boldsymbol{D_1}$-tétel sem teljesül univerzálisan.

A bemutatott példák is mutatják, hogy planáris függvény segítségével származtatott síkon tipikusan még a $\boldsymbol{D_0}$-tétel sem teljesül. A most következő feladatsorozat megoldói azt láthatják be, hogy a *folytonos planáris függvények közül pontosan a parabolák azok, amelyekből származtatott síkon a* $\mathbf{D_0}$*-tétel teljesül.* A feladatsor lényegében a [11] dolgozatot követi.

1. feladat. *Legyen f tetszőleges valós függvény. Új síkunk egyenesei a függőleges egyenesek mellett legyenek az $y=f(x)+ax+b$ grafikonok, az összes a, b-re. Mutassuk meg, hogy ez az eljárás mindig az eredeti euklidészi síkkal izomorf síkot ad.*

2. feladat. *Mutassuk meg, hogy a* $\mathbf{D}$*-tételből annak megfordítása is következik, sőt ugyanez igaz a* $\mathbf{D_0}$*- és a* $\mathbf{D_1}$*-tételre is.*

3. feladat. *Bizonyítsuk be az 1. tétel nem bizonyított részeit.*

4. feladat. *Részletesen gondoljuk meg a 2. tétel bizonyítását. Ezt felhasználva adjunk bizonyítást arra, hogy az $x\mapsto x^4$, illetve általában az $x\mapsto x^{2n}$ függvények planárisak.*

5. feladat. *Mutassuk meg, hogy ha egy folytonos valós f függvény planáris, akkor f (vagy $-f$) olyan szigorúan konvex függvény kell legyen, amelyre teljesülnek a 3. tétel feltételei.*

A továbbiakban tegyük fel, hogy f olyan szigorúan konvex függvény, amelyre teljesülnek a 3. tétel feltételei.

6. feladat. *Mutassuk meg, hogy a bevezetett $*$ műveletre igaz, hogy bármely $a\neq b$-re és tetszőleges c-re pontosan egy olyan x van, amelyre $a*x-b*x=c$ teljesül.*

7. feladat. *Az $f(x)=x^4$ esetre adott bizonyítást lemásolva mutassuk meg, hogy minden A, B-re és j-re van olyan u, amelyre teljesül, hogy*

$$\begin{aligned}f(u+j)+f(u-j)-2f(u)+\big(f(A+j)+f(A-j)-2f(A)\big)=\\=\big(f(B+j)+f(B-j)-2f(B)\big)+\big(f(j)+f(-j)-2f(0)\big).\end{aligned}$$

A feladat megoldásában A, B az A_1, B_1 pontok x'-koordinátáját jelöli, a korábbi bizonyításban szereplő $+1$, -1 meredekségek szerepét itt a $+j$, $-j$ veszi át.

8. feladat. *Mutassuk meg, hogy ha az f függvény nem deriválható, akkor az $I(f)$ affin síkon nem teljesülhet univerzálisan a* $\mathbf{D_0}$*-tétel.*

9. feladat. *Definiáljuk a d_j függvényt a*

$$d_j(x) = f(x+j) + f(x-j) - 2f(x)$$

képlettel. Mutassuk meg, hogy a d_j függvény állandó, azaz van olyan D_j, amelyre $d_j(x) = D_j$ minden x-re.

10. feladat. *Mutassuk meg, hogy ha az f függvényre $d_j(x) = D_j$, akkor f másodfokú függvény.*

Végezetül jegyezzük meg, hogy az eredeti euklidészi sík eltolásai illeszkedéstartó leképezések (kollineációk) $I(f)$-en, amelyekkel minden pontot minden más pontba el tudunk vinni, ezek a kollineációk azonban nem eltolások az $I(f)$ síkon (kivéve azokat, amelyek függőleges irányúak). Affin sík egy kollineációja eltolás, ha nincs fixpontja és minden egyenes párhuzamos a képével. Mivel az eredeti sík függőleges eltolásai eltolások maradnak $I(f)$-en, így $I(f)$-en a $\boldsymbol{D_0}$-tétel teljesül, ha a két háromszög egymásnak megfelelő csúcsait összekötő egyenesek (az AA', BB' és CC' egyenesek) függőlegesek. Ezt a [6]-ban szereplő bizonyítást lemásolva láthatjuk.

A jelen dolgozat első változata közel húsz éve keletkezett. Ekkor *Lovász László, Szász Gábor* és *Wettl Ferenc* fűzött hozzá értékes megjegyzéseket. Az új változattal kapcsolatban *Ambrus András, Hermann Péter, Kiss György, Károlyi Gyula* tett részletes módosítási javaslatokat. Mindannyiuk segítségét nagyon köszönjük.

Irodalom

[1] Coxeter, H. S. M.: *A geometriák alapjai,* Műszaki Könyvkiadó (Budapest, 1973).

[2] Coxeter, H. S. M.: *Projektív geometria,* Gondolat Kiadó (Budapest, 1986).

[3] Kárteszi Ferenc: Egy érdekes és egyszerű transzformációval származtatott affin sík, *KöMaL,* **57** (1978. november), 97–103.

[4] Kárteszi Ferenc: *Bevezetés a véges geometriákba,* Akadémiai Kiadó (Budapest, 1973).

[5] Kárteszi Ferenc: *Lineáris transzformációk,* Tankönyvkiadó (Budapest, 1976).

[6] Kiss György: Desargues tétele, *KöMaL,* **57** (2007. március), 130–137.

[7] Lánczos Kornél: *A geometriai térfogalom fejlődése,* Gondolat Kiadó (Budapest, 1976).

[8] Lovász László, Pelikán József, Vesztergombi Katalin: *Diszkrét matematika,* Typotex Kiadó (Budapest, 2006).

[9] Montágh Balázs: Salakmotor-versenyek és véges affin síkok, *Új matematikai mozaik* (szerk.: Hraskó András), Typotex Kiadó (Budapest, 2002).

[10] Reiman István: *A geometria és határterületei,* Műszaki Könyvkiadó (Budapest, 1986).

[11] Szőnyi Tamás: Note on planar functions over the reals, *Note di Matematica (Lecce),* **10** (1990), 59–65.