Olimpiai megjegyzések II.

Az első részben az idei Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 2. feladatára mutattunk egy lehetséges megoldást. Most a 6. feladatot vizsgáljuk meg közelebbről. A feladatra két megoldást is mutatunk.

Az első – hasonlóan a 2. feladat megoldásához – nem használ semmilyen különleges ötletet vagy a középiskolai anyagon túlmutató ismeretet. Viszont egy olyan lépéssel kezdődik, amely első pillantásra talán túl ijesztő lehet.

A második megoldás jóval több ismeretet igényel. Ez a megoldás az egész számok halmazának egy kiterjesztése, az úgynevezett Euler-egészek elméletét használja fel. Cserébe viszont megmutatja a feladat valószínű eredetét.

A 6. feladat. *Legyenek* a, b, c, d *egészek, amelyekre* $a>b>c>d>0$. *Tegyük fel, hogy*

$$ac+bd=(b+d+a-c)(b+d-a+c). \tag{6}$$

Bizonyítsuk be, hogy $ab+cd$ *nem prímszám.*

A (6) egyenletet átrendezve,

$$a^2-ac+c^2=b^2+bd+d^2. \tag{7}$$

A továbbiakban mindig ezt az alakot fogjuk használni.

1. megoldás: Helyettesítsünk be!

A megoldás indirekt. Feltételezzük, hogy $ab+cd=p$, ahol p egy prímszám. Ezzel már egy egész egyenletrendszerünk van:

$$a^2-ac+c^2=b^2+bd+d^2, \qquad ab+cd=p. \tag{8}$$

Az ismeretlenek és az egyenletek számát úgy csökkenthetjük, hogy az egyik egyenletből kifejezünk egy alkalmas kifejezést, és behelyettesítjük a másik egyenletbe. Hogy mindez még kényelmesebb legyen, először csak modulo p fogunk számolni.

A második egyenlet szerint $ab\equiv -cd \pmod{p}$. Szorozzuk meg a (7) egyenletet b^2-tel, és helyettesítsünk be ab helyére $(-cd)$-t:

$$\begin{aligned}0=b^2(b^2+bd+d^2-a^2+ac-c^2)&=b^4+b^3d+b^2d^2-(ab)^2+ab\cdot bc-b^2c^2\equiv\\ \equiv b^4+b^3d+b^2d^2-(cd)^2-cd\cdot bc-b^2c^2&=(b+c)(b-c)(b^2+bd+d^2) \pmod{p}.\end{aligned}$$

A behelyettesítés nyomán kapott kifejezés három tényező szorzatára bomlik, és ezek egyike éppen a (7) egyenletben szereplő mennyiség.

KöMaL – 2001/9 MAT0109 cianmagentayellowblack2002. június 19. – 8:58 (1. lap)

A kapott kongruencia szerint az utolsó három tényező: $b+c$, $b-c$ és b^2+bd+d^2 valamelyike osztható p-vel, hiszen feltevésünk szerint p prímszám. A $b+c$ és $b-c$ számok pozitívak és kisebbek, mint $ab+cd=p$, ezért nem lehetnek p-vel oszthatók; marad az az eset, hogy b^2+bd+d^2 osztható p-vel. Mivel

$$0 < b^2+bd+d^2 < ab+ab+cd < 2(ab+cd)=2p,$$

a b^2+bd+d^2 szám csak úgy lehet p-vel osztható, ha egyenlő vele. Ezzel a következtetéssel az egyenletrendszer a következőképpen alakul:

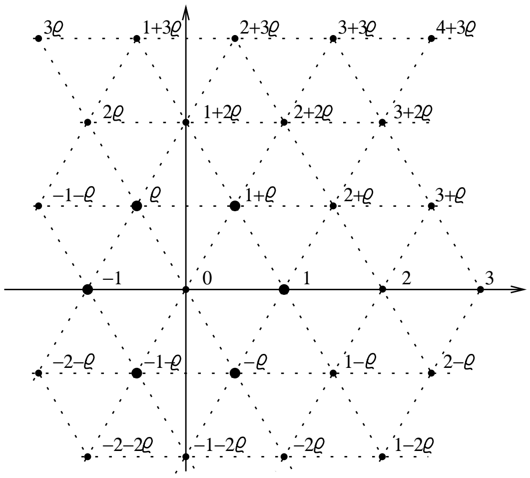
$$a^2-ac+c^2=b^2+bd+d^2=ab+cd=p. \tag{9}$$

Ebből már nem nehéz ellentmondásra jutni. Ha a (9) egyenletet modulo a vizsgáljuk (az ismeretlenek között az a a legnagyobb), láthatjuk, hogy $c(c-d)=ab+ac-a^2$ osztható a-val. Mivel azonban a és c relatív prímek – másképpen $ab+cd$ nem lenne prímszám – és $0<c-d<a$, ez nem lehetséges.

2. megoldás az Euler-egészek felől

Aki olvasott már az Euler-egészekről, az a (7) egyenletre nézve azonnal sejtheti, hogy ez a feladat szorosan kapcsolódik hozzájuk.

Legyen ϱ az egyik komplex harmadik egységgyök. Az $x+y\varrho$ alakú komplex számokat, ahol x és y egész számok, *Euler-egészeknek* nevezzük. Az Euler-egészek a komplex számsíkon szabályos háromszögrácsot alkotnak (*1. ábra*).



1. ábra

Ennek a számhalmaznak nagyon sok érdekes és hasznos számelméleti tulajdonsága van. Ezek segítségével bizonyította be annak idején Leonhard Euler a Fermat-sejtést a 3-as kitevőre. Akit a téma részletesebben érdekel, annak *Turán Pál–Gyarmati Edit:* Bevezetés a számelméletbe című jegyzetét ajánljuk. Most csak röviden foglaljuk össze az Euler-egészekkel kapcsolatos, a megoldáshoz szükséges legfontosabb fogalmakat és tételeket.

Az Euler-egészek körében is értelmezzük az összeadást, a kivonást és a szorzást. Ezeket teljesen természetes módon definiáljuk, a szorzásnál figyelembe véve, hogy $\varrho^2=-\varrho-1$:

$$(x+y\varrho)\pm(u+v\varrho)=(x\pm u)+(y\pm v)\varrho;$$

$$(x+y\varrho)(u+v\varrho)=xu+(xv+yu)\varrho+yv\varrho^2=(xu-yv)+(xv+uy-yv)\varrho.$$

Az összeadásnak és a szorzásnak az egész vagy a valós számok esetében megszokott kommutatív, asszociatív és disztributív tulajdonságai az Euler-egészek körében is igazak. Ugyancsak fennállnak a 0 és az 1 számok alapvető tulajdonságai, például bármelyik Euler-egészhez 0-t adva magát a számot kapjuk eredményül, vagy minden Euler-egész 0-szorosa a 0.

Az $\alpha = x + y\varrho$ Euler-egész *konjugáltja* az $\overline{\alpha} = x + y\varrho^2 = (x - y) - y\varrho$ szám.

Egy nagyon fontos mennyiség az Euler-egészek *normája.* Az $\alpha = x + y\varrho$ Euler-egész normáját $N(\alpha)$-val jelöljük és a következőképpen definiáljuk:

$$N(\alpha) = \alpha \cdot \overline{\alpha} = x^2 - xy + y^2.$$

A norma mindig nemnegatív egész szám, és csak a 0 normája 0.

A norma nem más, mint a komplex értelemben vett abszolút érték négyzete. Ebből is következik, hogy szorzat normája a tényezők normáinak szorzata:

$$N(\alpha \cdot \beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta).$$

Az α Euler-egész *osztója* a β Euler-egésznek, ha létezik olyan γ Euler-egész, amelyre $\alpha\gamma = \beta$. A norma multiplikativitása miatt igaz, hogy ha $\alpha|\beta$, akkor $N(\alpha)|N(\beta)$. (Az utóbbi oszthatóság a racionális egész számok körében értendő.)

Hat olyan Euler-egész van, amelynek a normája 1. Ezeket *egységeknek* nevezzük és az *1. ábrán* kiemeltük. Az egységek minden Euler-egésznek osztói.

Két Euler-egészt *asszociáltnak* nevezünk, ha egymás egységszeresei, vagyis egymásból a 0 körüli, a 60° többszörösével történő forgatással kaphatók.

Egy egységtől különböző π Euler-egészt *felbonthatatlannak,* idegen szóval *irreducibilisnek* nevezünk, ha csak az egységekkel és a saját asszociáltjaival osztható.

Egy egységtől és 0-tól különböző π Euler-egészt *prímnek* nevezünk, ha tetszőleges α, β Euler-egészek esetén, ha $\pi|\alpha\beta$, akkor $\pi|\alpha$ vagy $\pi|\beta$. A továbbiakban, hogy megkülönböztessük az Euler-egészek körében prím számokat a valós prímszámoktól, az előbbieket *Euler-prímeknek* fogjuk hívni.

Az Euler-egészek számelméletének legalapvetőbb tételei a következők:

1. A felbonthatatlan Euler-egészek és az Euler-prímek ugyanazok.
2. Az Euler-egészek körében is igaz a számelmélet alaptétele. Minden 0-tól és egységtől különböző Euler-egész az asszociáltságtól eltekintve egyféleképpen írható fel Euler-prímek és egységek szorzataként, azaz két tetszőleges felírásban a megfelelő prímtényezők egymás asszociáltjai.
3. A $3k + 2$ alakú prímszámok egyben Euler-prímek is. A $3k + 1$ alakú prímszámok felbomlanak két konjugált, egymással nem asszociált Euler-prím szorzatára (pl. $7 = (3 + \varrho)(2 - \varrho)$). A 3 prímtényezős felbontása pedig $3 = -\varrho^2(1 - \varrho)^2$.

A tételekből látható, hogy egy α Euler-egész prímtényezős felbontása és $N(\alpha)$ prímtényezős felbontása között szoros kapcsolat van. Az α minden egyes $3k + 2$ alakú prímtényezőjének négyzete szerepel az $N(\alpha)$ felbontásában, a további prímtényezőknek pedig a normája, ami vagy 3, vagy pedig egy-egy $3k + 1$ alakú prímszám.

Például az $\alpha = 10 + 8\varrho$ Euler-egész prímtényezős felbontása $2 \cdot (2 + \varrho)(3 + \varrho)$, normájáé pedig $N(\alpha) = N(2) \cdot N(2 + \varrho) \cdot N(3 + \varrho) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$.

Megfordítva, $N(\alpha)$ prímtényezős felbontása „majdnem egyértelműen” meghatározza α prímtényezős felbontását. Az $N(\alpha)$ minden $3k+2$ alakú prímosztója α-nak is prímosztója (feleakkora kitevővel), és $N(\alpha)$ felbontásában minden egyes 3-as tényező az $1-\varrho$ Euler-prím normája. Az $N(\alpha)$ $3k+1$ alakú prímosztói is α egy-egy prímosztójának normái, de ez a prímosztó – az asszociáltságtól eltekintve is – kétféle lehet.

Visszatérve a feladathoz, legyen $\alpha=a+c\varrho$ és $\beta=b-d\varrho$. A feltétel szerint $a^2-ac+c^2=b^2+bd+d^2$, azaz $N(\alpha)=N(\beta)$; a bizonyítandó állítás pedig az, hogy $ab+cd$, ami nem más, mint $\alpha\beta=(ab+cd)+(bc+cd-ad)\varrho$ „valós része”, nem lehet prímszám.

Mivel $N(\alpha)=N(\beta)$, a két szám Euler-prímtényezős felbontása „majdnem” ugyanaz. A prímosztók egy része közös, a további prímtényezők pedig egymás konjugáltjai a két felbontásban. Formálisan felírva,

$$\alpha=\varepsilon_1\cdot\pi_1\ldots\pi_k\cdot\mu_1\ldots\mu_l \quad \text{és} \quad \beta=\varepsilon_2\cdot\pi_1\ldots\pi_k\cdot\overline{\mu}_1\ldots\overline{\mu}_l, \tag{10}$$

ahol $\pi_1,\ldots,\pi_k$ és $\mu_1,\ldots,\mu_l$ Euler-prímek, ε_1 és ε_2 pedig egységek.

Legyen $\gamma=\pi_1\cdot\ldots\cdot\pi_k$ és $\delta=\mu_1\cdot\ldots\cdot\mu_l$; a fentiek szerint ekkor

$$\alpha=\varepsilon_1\gamma\delta \quad \text{és} \quad \beta=\varepsilon_2\gamma\overline{\delta}.$$

(Előfordulhat, hogy a két felbontásban csak közös vagy csak konjugált prímtényezők szerepelnek; ezekben az esetekben $\gamma=1$, illetve $\delta=1$.)

Vizsgáljuk most az

$$\alpha\beta=(ab+cd)+(bc+cd-ad)\varrho=\varepsilon_1\varepsilon_2\gamma^2\cdot N(\delta) \tag{11}$$

számot. Ez a szám osztható $N(\delta)$-val; ebből következik, hogy $ab+cd$ és $bc+cd-ad$ is osztható $N(\delta)$-val. Már csak az hiányzik a bizonyítás befejezéséhez, hogy sem $N(\delta)=1$, sem $ab+cd=N(\delta)$ nem lehetséges.

Ha $N(\delta)=1$, azaz $\delta=1$, akkor α és β asszociáltak, vagyis 0 körüli, valahányszor 60°-os elforgatottjai egymásnak. Azt, hogy az elforgatás pontosan hányszor 60°-os, az α és β argumentumának vizsgálatával dönthető el.

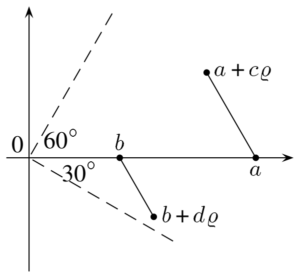
Az $a>b>c>d>0$ feltételből következik, hogy α argumentuma 0° és 60° között, β argumentuma pedig -30° és 0° között van (*2. ábra*). A két szám argumentumának különbsége tehát 0 és 90° közé esik, az elforgatás szöge pontosan 60°, azaz $\alpha=(1+\varrho)\beta$. Ebben az esetben viszont

$$\alpha=a+c\varrho=(1+\varrho)(b-d\varrho)=(b+d)+b\varrho,$$

ami nem lehetséges, mert $b>c$. Az $N(\delta)=1$ feltevés tehát ellentmondásra vezet.

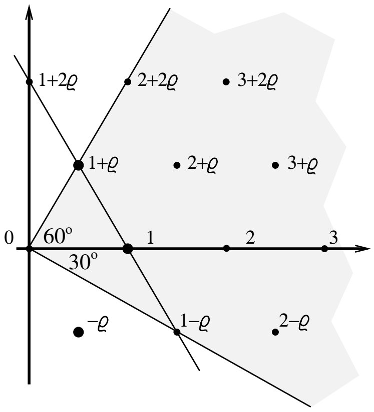
Ha $ab+cd=N(\delta)$, akkor a (11) egyenletet $N(\delta)$-val osztva,

$$\frac{\alpha\beta}{N(\delta)}=\frac{ab+cd}{N(\delta)}+\frac{ad+bc-cd}{N(\delta)}\cdot\varrho=\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\gamma^2.$$



2. ábra

Ez a szám, mint a jobb oldal mutatja, egy Euler-egész. Az argumentuma α és β argumentumának öszege, tehát -30° és 60° közé esik, a „valós része” pedig a feltevés szerint $\dfrac{ab+cd}{N(\delta)}=1$. Az egyetlen ilyen Euler-egész az 1 (*3. ábra*), tehát $\varepsilon_1\varepsilon_2\gamma^2=1$ és $\alpha\beta=N(\delta)$.



3. ábra

Az α és β számok szorzata tehát az $N(\delta)$ valós pozitív szám. Mivel $N(\alpha)=N(\beta)$, ebből következik, hogy a két szám egymás konjugáltja. Ekkor azonban

$$\alpha=a+c\varrho=\overline{\beta}=\overline{b-d\varrho}=b+d(1+\varrho)=(b+d)+d\varrho,$$

ami nem lehetséges, mert $c>d$. Tehát az $ab+cd=$ $=N(\delta)$ feltevés is ellentmondásra vezet. Ezzel az állítást igazoltuk.

A második megoldás nem csupán bebizonyítja a feladat állítását, hanem egy eljárást is ad olyan a,b,c,d számnégyesek keresésére, amelyekre $a>b>$ $>c>d$ és $a^2-ac+c^2=b^2+bd+d^2$. Csupán megfelelő argumentumú γ és δ Euler-egészeket kell választanunk.

Például az

$$\alpha=a+c\varrho=(4+\varrho)(3+\varrho)=11+6\varrho,\quad \beta=b-d\varrho=(4+\varrho)\overline{(3+\varrho)}=9-\varrho$$

választással $a=11$, $b=9$, $c=6$ és $d=1$, továbbá $a^2-ac+c^2=b^2+bd+d^2=91$. (Természetesen $ab+cd=105$ nem prím.)

Kós Géza

Kis megjegyzés a kis Fermat-tételhez

A kis Fermat-tétel ma matematikai közhely. Azt mondja ki, hogy egy p prímszámra és egy a egész számra $a^p\equiv a \pmod p$, vagy – ezzel egyenértékűen – hogy ha a p prímszámra $(a,p)=1$, akkor $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$. Fermat éppen 400 éve, 1601-ben született, a tételt 1640 körül találta. Soha nem közölt bizonyítást, és mivel a kongruencia jelölést több, mint 150 évvel később Gauss vezette be, erős anakronizmus volna, ha a mai alakot, illetve a kérdés ilyen fölvetését Fermat-nak tulajdonítanánk. Milyen formában bukkanhatott a tételre ?

Fermat idején nem voltak hivatásos matematikusok, Toulouse városának ügyészeként ő maga is amatőr volt, kiváló klasszikus műveltséggel és széles nyelvtudással, latinul, görögül, olaszul és spanyolul egyaránt folyékonyan írt. Mai értelemben véve matematikai közleményt Fermat lényegében nem publikált, eredményei elsősorban kiterjedt levelezése nyomán maradtak fenn.

KöMaL – 2001/9 MAT0109 cianmagentayellowblack2002. június 19. – 8:58 (5. lap)

A kor tudományos közéletének fő formája a levelezés volt. Fermat legfontosabb partnerei, ezekben az években Mersenne, Frenicle és Descartes (később Huygens és Pascal) voltak. Az optika, a geometria, a görbék tulajdonságainak vizsgálata mellett az egész számok világa volt Fermat fő érdeklődési területe. Egy több mint 2000 éves kérdés, a *tökéletes számok*[1] vizsgálata vezethette őt a számelmélet egyik legtöbbet idézett eredményére.

Már Euklidesz is tudta és az Elemek IX. könyvében lényegében bebizonyította, hogy ha 2^n-1 prímszám, akkor $2^{n-1}\left(2^n-1\right)$ tökéletes szám. A jól ismert tökéletes számokra $6=1+2+3=2^1\left(2^2-1\right)$, $28=1+2+4+7+14=2^2\left(2^3-1\right)$. Azt, hogy a páros tökéletes számok valamennyien ilyen alakúak, Euler igazolta 150 évvel később. Azt pedig mind a mai napig nem tudjuk, hogy van-e egyáltalán páratlan tökéletes szám.

Egy másik népszerű görög örökség a *barátságos*[2] számok fogalma volt. Mersenne 1638-ban tudatta Descartes-tal, hogy

$$2^{n+1}\cdot\left(18\cdot 2^{2n}-1\right)\qquad \text{és}\qquad 2^{n+1}\cdot\left(3\cdot 2^{2n}-1\right)\cdot\left(6\cdot 2^{2n}-1\right)$$

biztosan barátságosak, ha előbbi második, utóbbi második és harmadik tényezője prímszám. Ha $n=1$, akkor a $4\cdot 71=284$, $4\cdot 5\cdot 11=220$ számokat kapjuk; ez a legkisebb barátságos számpár.

Fermat és kortársai között egyfajta vetélkedés folyt az ilyesfajta számok felkutatásáért, egymással általában az eredményeket közölték, ritkábban a módszert, bizonyítást pedig szinte soha. A lehetséges megoldásban alapvető szerepet játszott annak eldöntése, hogy nagy, rendszerint 2^n-1 vagy $3\cdot 2^n-1$ alakú számok prímek-e vagy sem; ha pedig összetettek, akkor milyen prímosztóik vannak. Mersenne például 1640-ben azzal a kérdéssel fordult Fermat-hoz, hogy ismer-e tökéletes számot 10^{20} és 10^{22} között. Az euklideszi feltétel:

$$10^{20}<2^{n-1}\left(2^n-1\right)<10^{22}$$

azt jelenti, hogy $34\le n\le 37$. Mivel pedig 2^n-1 nem lehet prím, ha n összetett, Mersenne kérdése lényegében arra vonatkozott, prím-e a $2^{37}-1$. Ez a 12 jegyű szám, 137 438 953 471 semmilyen gondot nem okoz a mai matematikai szoftvereknek, egy átlagos kalkulátor lehetőségeit azonban meghaladja, a XVII. században pedig alaposan próbára tehette a számolók türelmét. Fermat még abban az évben rátalált a $2^{37}-1$ törzstényezős felbontására. 1640 őszén írt levelében az alábbi eredményről számol be:

Ha n prím és p a 2^n-1 egy prímosztója, akkor $p-1$ az n-nek többszöröse.

Nem sokkal később ő maga így kommentálta a fenti állítást:

„Tetszőleges p prímszámra és 1, a, a^2, $\dots$ mértani sorozatra p-nek osztania kell az a^n-1 különbséget a $p-1$ valamilyen n osztójára; ha pedig N tetszőleges többszöröse a legkisebb ilyen n-nek, akkor a p osztója (a^N-1)-nek is."

Így talán jobban ráismerünk a tétel mai alakjára: N értéke ott $p-1$, a legkisebb olyan szám, amelyik már minden esetben biztosítja az oszthatóságot.

[1] Egy pozitív egészt tökéletes számnak nevezünk, ha egyenlő a nála kisebb pozitív osztói összegével.

[2] Két pozitív egészt barátságos számoknak nevezünk, ha bármelyikük egyenlő a másiknak a nála kisebb pozitív osztói összegével.

Fermat tehát eredetileg a $2^{37}-1$ prímosztóit kereste. Megközelítésének lényege jól mutatja gondolkodásának mélységét: megváltoztatva a kérdés tárgyát, az adott szám, $2^{37}-1$ helyett a p prímszámot rögzítve kérdezte, hogy milyen kitevőkre lesznek a p-nek 2^n-1 alakú többszörösei. Az ilyen típusú átfogalmazás gyakran döntő egy probléma megoldása során.

Általában vizsgálta tehát a 2 hatványainak a maradékát tetszőleges páratlan p prímszámmal osztva. Azt könnyű látni, hogy létezik olyan kitevő, amelyre ez a maradék éppen 1. A 2 hatványai ugyanis véges sok – legfeljebb $(p-1)$ – maradékot adhatnak a p-vel osztva, így lesznek közöttük azonosak. Mai jelöléssel $2^k \equiv 2^m \pmod{p}$, és innen következik, hogy $2^{|k-m|} \equiv 1 \pmod{p}$.

A továbbiakban hívjuk az ilyen kitevőket *jó kitevőknek*. Az általa olyan sikeresen alkalmazott *descent* módszere szerint Fermat természetes módon fordulhatott ezután a pozitív jó kitevők legkisebbikéhez, amit egyébként ma a p prímszám *rendjének* nevezünk moduló 2. (Az általános tétel a 2 helyett tetszőleges $a>1$ egészre vonatkozik, ahol $(a,p)=1$.) Ha ez k_0, akkor nyomban látszik, hogy értéke legfeljebb $(p-1)$, és a Fermat kommentárjában említett tulajdonság egy változata is többé kevésbé nyilvánvaló: az N pontosan akkor jó kitevő, azaz 2^N-1 pontosan akkor osztható a p-vel, ha N osztható k_0-lal.

Ehhez osszuk el az N-et maradékosan k_0-lal. Ha $N=k_0\cdot q+r$, akkor

$$2^N=\left(2^{k_0}\right)^q\cdot 2^r \equiv 1^q\cdot 2^r \pmod{p},$$

az N-nel együtt tehát r is jó kitevő. Mivel pedig $0\le r<k_0$, csak $r=0$ lehetséges.

Látható, hogy Fermat tételének mai alakja ebből a sokszálú összefüggésrendszerből emel ki egy lényeges elemet: azt állítja, hogy $(p-1)$ mindenképpen jó kitevő[3]. A fentiekből pedig kiderül, hogy ha nem a legkisebb, akkor annak többszöröse. Nem tudjuk, hogyan okoskodhatott Fermat, amikor világossá váltak számára ezek a kapcsolatok, de bizonyosra vehető, hogy teljes mélységében átlátta ezt a kérdéskört.

A $2^{37}-1$ lehetséges prímosztóit keresve ezután világos, hogy az ilyen prímekre a 37 szükségképpen a *legkisebb* jó kitevő, hiszen a 37 maga prímszám. Mivel pedig Fermat tudta, hogy $(p-1)$ biztosan jó kitevő, a fentiek szerint többszöröse kell legyen a 37-nek: $p-1=37m$. Az m értéke nyilván páros – ez már csak ráadás – így a $2^{37}-1$ prímosztói $74k+1$ alakúak. A k legkisebb szóbajövő értéke 3, amire $3\cdot 74+1=223$, és valóban,

$$\frac{2^{37}-1}{223}=616\,318\,177.$$

A jó matematikusnak még szerencséje is van, a 223 váratlanul kis prímtényezőnek bizonyult. A másik tényező, $616\,318\,177=74\cdot 8\,328\,624+1$, ez pedig valószínűsíti, hogy az is prím – ami egyébként igaz is.

Felhasznált irodalom:

Robert M. Young: Excursions in Calculus, The Dolciani Mathematical Expositions, 13

Pataki János

[3] A kis Fermat-tétel ‚hivatalos' bizonyítása lényegében valamennyi bevezető jellegű számelmélet tankönyvben megtalálható, így azt most nem közöljük.

MATEMATIKA és FIZIKA TOTÓ

a 2001. évi KöMaL Ankéton*

1. Egy ellipszis fókuszai $F_1(9;20)$ és $F_2(49;55)$. Az ellipszis érinti az x tengelyt. Milyen hosszú az ellipszis nagytengelye? 53 (1); 72 (2); 85 (X).

2. Hány adattal jelemezhető egy „egykristály" rugalmas viselkedése? Kettővel (pl. a Young-modulussal és a torziómodulussal) (1); hattal (kristálytengelyenként kettővel) (2); húsznál is több adattal (X).

3. Tekintsük az 1001, 1004, 1009, ... sorozatot, ahol $a_n=1000+n^2$. Jelölje d_n a fenti sorozat szomszédos elemeinek legnagyobb közös osztóját, tehát $d_n=(a_n,a_{n+1})$. Mennyi a d_n számok maximuma? 2001 (1); 4001 (2); a d_n sorozat nem korlátos (X).

4. Egy 4,5 cm hosszú folyadékszál átmérője 0,2 mm. Legfeljebb hány egyforma gömb alakú cseppé szakadhat szét a szál „magától"? 100-ra (1); 200-ra (2); 300-ra (X).

5. Hány szorzással lehet kiszámítani 2001^{2001}-t? 1000 (1); legalább 17 (2); 16 elegendő (X).

6. Egy gömb alakú esőcsepp 2 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel esik. Mekkora sebességgel fog esni két ilyen egyforma esőcseppből formálódott, szintén gömb alakú csepp? $2^{\frac{7}{6}}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (1); $2^{\frac{5}{6}}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (2); $4^{\frac{1}{3}}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (X).

7. Ha $f(n)$ jelöli egy szám tízes számrendszerbeli alakjában a nullák számát, akkor az

$$S=2^{f(1)}+2^{f(2)}+\ldots+2^{f(999\,999)}$$

értéke 1 594 404 (1); 1 495 404 (2); 1 595 440 (X).

8. Egy elhanyagolható tömegű merev rúd egyik végéhez egy nagyobb, a másik végéhez pedig egy kisebb tömegű testet rögzítettünk. (Mindkét test pontszerűnek tekinthető.) A rudat függőleges helyzetben súrlódásmentes asztalra helyezzük, és hagyjuk, hogy eldőljön. Melyik esetben csapódik nagyobb sebességgel a rúd „felső" vége az asztalhoz, ha a nagyobb tömegű test volt felül (1); ha a kisebb tömegű test volt felül (2); mindkét esetben ugyanakkora a sebesség (X).

9. Ha A a 27 legkisebb olyan pozitív többszöröse, amelyiknek a tízes számrendszerbeli alakjában csak a 0 és az 1 jegyek fordulnak elő, akkor A jegyeinek a száma 27 (1); 9 (2); 10 (X).

10. Egy homogén tömegeloszlású tetraédert vízszintes asztallapra állítunk. Hány olyan oldala lehet, amelyről felborul? Legfeljebb egy (1); legfeljebb kettő (2); legfeljebb három (X).

11. Hány olyan pozitív páros szám van, amelyet nem lehet felírni két pozitív páratlan összetett szám összegeként? 13 (1); 14 (2); 43 (X).

12. Egy tornatermi mászórúd és egy mászókötél egyforma hosszúságú és egyforma tömegű. Mindkét test a mennyezetről lóg, és a rögzítő csukló körül szabadon elfordulhat. Mindkét testet ugyanakkora nagyságú, vízszintes irányú erővel húzzuk az alsó végpontjánál. Melyikük alsó vége kerül magasabbra az egyensúlyi helyzetben? A rúd (1); a kötél (2); pontosan egyforma magasan lesz az alsó végük (X).

13. Az első 2001 pozitív egész közül hány darab áll elő $[x]+[2x]+[4x]+[8x]$ alakban? 1001 (1); 1067 (2); 1113 (X).

13 + 1. Három egyforma iránytűt egy szabályos háromszög csúcsaiba helyezünk el úgy, hogy a háromszög síkjában tudnak forogni. Külső mágneses tér nincs. Hogyan állnak az iránytűk stabil egyensúlyi helyzetükben? Mindhárom iránytűnek az északi (vagy a déli) pólusa a háromszög súlypontja felé mutat (1). Mindegyik iránytű párhuzamos a háromszög szemközti oldalával (2). Valahogy másképp (a felsorolt helyzetektől eltérő módon) (X).

---

* A megoldást jövő havi számunkban közöljük. A feladatokat Varga István és Pataki János javaslataiból állítottuk össze.

Felvételi előkészítő feladatsor

Dux Erik matematikus, egyetemi docens emlékére

1. Egy konvex négyszög oldalfelező pontjai egy rombusz csúcspontjai. A rombusz oldala 6 egység, a rombusz egyik szöge 30°. Számítsa ki a négyszög területét! (Hány ilyen négyszög létezik?)

2. Oldja meg az

$$\log_x(-2x^2-2x+4) \ge \log_x(4-3x)$$

egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

3. Egy háromszög a, b, c_1 oldalai között az

$$\frac{(a+b)^2-c_1^2}{ab}=2-\sqrt{2},$$

egy másik háromszög a, b, c_2 oldala között a

$$\frac{c_2^2-(a-b)^2}{ab}=2+\sqrt{2}$$

összefüggés áll fenn. Igaz-e, hogy a két háromszög területe egyenlő?

4. Oldja meg a

$$\sqrt{x+4+2\sqrt{x+3}}-\sqrt{2x+3-4\sqrt{2x-1}}=3$$

egyenletet a valós számok halmazán.

5. Tekintsük az

$$x \mapsto f(x)=3\sqrt{3}\sin^2 x+6\sin x\cos x-3\sqrt{3}\cos^2 x, \qquad x\in \mathbf{R}$$

függvényt! Határozza meg a függvény legnagyobb és legkisebb értékét, valamint azokat az x helyeket, ahol ezeket a szélsőértékeket felveszi.

6. Négy szám egy számtani sorozat négy egymást követő tagja. Ha az első számhoz 1-et, a negyedikhez 4-et hozzáadunk, a másodikból 6-ot, a harmadikból 4-et kivonunk, akkor az így kapott négy szám egy mértani sorozat négy egymást követő tagja. Melyik ez a négy szám?

7. A k kör érinti az x tengelyt és a $3x-4y+45=0$ egyenletű e egyenest az $y_0=9$ ordinátájú pontjában. Írja fel a k kör egyenletét.

8. Az $x^2-2x+(a-1)^2=0$ egyenlet valós gyökeinek négyzetösszege az a valós paraméter mely értéke esetén a legkisebb, illetve a legnagyobb? Mennyi ez a legkisebb, illetve legnagyobb érték?

Rábai Imre

Megoldásvázlatok, eredmények a 2001/8. sz. feladataihoz

1. Az egyenletek nem értelmesek, ha $x=2$ vagy $x=-2$. Szorozzuk meg az egyenletek mindkét oldalát (x^2-4)-gyel, majd rendezzük az egyenleteket!

a) $x^2+9x+18=0$, a megoldások: $x_1=-6$, $x_2=-3$;

b) $x^2-x-2=0$, a megoldás: $x=-1$ ($x=2$ nem megoldás);

c) $x^2+8x+16=0$, a megoldás $x=-4$ ($x_1=x_2=-4$);

d) $x^2+4x+8=0$, az egyenletnek nincs megoldása.

2. A szögfelezők négyzetet határolnak. Ha a téglalap oldalai a és $4a$ egység, akkor a négyzet oldala $b=\frac{4a}{\sqrt{2}}-\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{3a}{\sqrt{2}}$ egység, a téglalap átlója $a\sqrt{17}$ egység. A területek aránya $\frac{4a^2}{\frac{9a^2}{2}}=\frac{8}{9}$, az átló és a négyzetoldal aránya $\frac{\sqrt{17}}{\frac{3}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{34}}{3}$.

3. Azonos átalakításokkal

$$f(x)=\frac{(3x^2+12x-36)+(-x+2)}{x^2+4x-12}=3-\frac{x-2}{(x-2)(x+6)}=3-\frac{1}{x+6},$$

ha $-4\le x\le -1$. Ekkor

$$2\le x+6\le 5,\qquad \frac{1}{5}\le\frac{1}{x+6}\le\frac{1}{2},\qquad -\frac{1}{2}\le-\frac{1}{x+6}\le-\frac{1}{5},$$

s végül $f(-4)=\frac{5}{2}\le 3-\frac{1}{x+6}\le\frac{14}{5}=f(-1)$.

Az $f(x)$ legkisebb értéke $5/2$, legnagyobb értéke $\frac{14}{5}$ az adott intervallumban. ($f(x)$ minden $\frac{5}{2}$ és $\frac{14}{5}$ közé eső valós számot felvesz a megadott intervallumon.)

4. A $\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}$ azonosságok alkalmazhatjuk vizsgálattal. Ugyanis ha $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$ akkor $\operatorname{tg}2x$ értelmezett, míg $\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}$ nem, ezzel szűkült az értelmezési tartomány. $x_{1,n}=$ $=\frac{\pi}{2}+n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$ kielégíti az adott egyenletet, ezért $x_{1,n}$ megoldás. Legyen $x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$.

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg}x=-\frac{1}{\operatorname{tg}x},$$

$x = k\pi$ helyen tg $\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$ nem értelmezett, így írhatunk helyette $-\frac{1}{\operatorname{tg} x}$-et.

$$-\frac{3}{\operatorname{tg} x} = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},$$

ahonnan $\operatorname{tg}^2 x = 3$, $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ vagy $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$. Az $x_{1,n}$-en kívül az egyenlet megoldásai: $x_{2,k} = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ és $x_{3,m} = -\frac{\pi}{3} + m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$.

5. Ismeretes, hogy

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{és} \qquad 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Mivel $(k+3)(7k-1) = 7k^2 + 20k - 3$, azért

$$S_n = (7 \cdot 1^2 + 20 \cdot 1 - 3) + (7 \cdot 2^2 + 20 \cdot 2 - 3) + \ldots + (7n^2 + 20n - 3),$$
$$S_n = 7 \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + 20 \cdot (1 + 2 + \ldots + n) - 3n,$$
$$S_n = \frac{7}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{20}{2}n(n+1) - 3n,$$
$$S_n = \frac{n}{6}(14n^2 + 81n + 49).$$

(Az állítást teljes indukcióval is igazolhatjuk.)

6. *a)* Mivel $D = p^2 - 4q \geq 0$, $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$, ezért valóban $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = p^2 - 4q = D$.

b) $D = 4a^2 - 4(2a^2 - 3a) = -4 \cdot a(a-3)$. $D \geq 0$, ha $0 \leq a \leq 3$.

$$(x_1 - x_1)^2 = D = -4a^2 + 12a = 9 - 4\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 \leq 9.$$

$(x_1 - x_2)^2$ legnagyobb értéke 9, amelyet $a = \frac{3}{2}$ esetén vesz fel.

7. A keresett P_0 ponton áthaladó egyenesnek van meredeksége, hiszen nem lehet párhuzamos az y tengellyel. Válasszuk paraméternek az egyenes m meredekségét, azaz az egyenes egyenletét $y = m(x+6)$ alakban keressük. Ez az egyenes az y tengelyt a $D(0; 6m)$ pontban metszi, az AC egyenest az $E(x_0, y_0)$ pontban. Az ABC háromszög területe 24 területegység, az ADE háromszög területe 12 területegyeség, tehát $AD \cdot x_0 = 24$. $AD = 16 - 6m$. Az AC egyenes egyenlete $16x + 3y = 48$. Az $y = mx + 6m$ egyenletű egyenes az AC egyenest olyan x_0 abszcisszájú pontban metszi, amelyre

$$16x_0 + 3(mx_0 + 6m) = 48, \qquad x_0 = 6 \cdot \frac{8 - 3m}{16 + 3m},$$

így

$$2 \cdot (8 - 3m) \cdot 6 \cdot \frac{8 - 3m}{16 + 3m} = 24, \qquad \text{ahonnan} \qquad 9m^2 - 54m + 32 = 0,$$

$m_1 = \frac{2}{3}$, $m_2 = \frac{16}{3}$. A keresett egyenes egyenlete: $y = \frac{2}{3}x + 4$. ($m = \frac{16}{3}$ esetén az egyenes nem metszi az AC szakaszt. Ennek a „megoldásnak” előjeles területtel geometriai jelentést tulajdoníthatunk. Hogyan?)

8. *a)* Mivel

$$x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)=\frac{1}{2}\Big((x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)\Big)=$$
$$=\frac{1}{2}\Big((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\Big)\geq 0,$$

azért $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx=1$. Egyenlőség $x=y=z$ esetén áll fenn. (Az igazolás során alkalmazhatjuk az $a^2+b^2\geq 2ab$ azonos egyenlőtlenséget.)

b) Ha a téglatest éleinek hossza x, y, z egység, akkor $x^2+y^2+z^2=4$.

A téglatest felszíne $A(x,y,z)=2(xy+yz+zx)$ területegység.

$$A(x,y,z)=2(xy+yz+zx)\leq 2(x^2+y^2+z^2)=8.$$

A legnagyobb felszínérték $A_{\max}=8$ területegység, amit akkor kapunk, ha $x=y=z$, tehát ha a téglatest kocka. (A kocka x élére $3x^2=4$, $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ egység.)

Rábai Imre

Az ELTE Tanárképző Főiskolai Kar Matematika Tanszékének felhívása végzősöknek

A matematika egyszerre művészet és tudomány. A matematikai felfedezés szép, feledhetetlen élményt nyújt a gyermekeknek, a pedagógus számára pedig sikerélmény, ha már kora gyermekkorukban megéreztetheti az alkotás örömét a kicsikkel.

Az **ELTE Tanárképző Főiskolai Karán a Matematika Tanszék** oktatói fontosnak érzik, hogy hallgatóikat felkészítsék erre a feladatra.

Az általános iskola felső tagozatos matematikatanár-képzés keretein belül lehetőséget nyújtunk a hallgatók számára, hogy kellemes légkörben és környezetben ismerkedjenek meg a szaktárgyakkal, a matematika módszertanával, amely fontos eszköze a kiváló matematikatanításnak, továbbá hogy részt vegyenek iskolai tanítási gyakorlatokon is.

Célunk, hogy a hallgatók átérezzék feladatuk fontosságát, szépségét, a matematikatanítás lényegét: a művészetet és a tudományt.

A magyar matematikaoktatás nemzetközi hírű. Ehhez méltó színvonalon kívánjuk oktatni a jövő tanárait is, akiknek többek között lehetőségük van rá, hogy a tanszék külföldi oktatási intézményekkel fennálló kapcsolatai révén megismerkedjenek más országok iskolai modelljeivel, oktatási rendszereivel.

A karon a matematikával társítható szakok nappali tagozaton: *fizika, kémia, földrajz, angol, számítástechnika.* Egyéni kívánságokat is figyelembe tudunk venni. Indítunk esti (önköltséges) egyszakos képzést is.

Várjuk az érdeklődő diákok jelentkezését. További információt a felvételi tájékoztatóban olvashatnak.

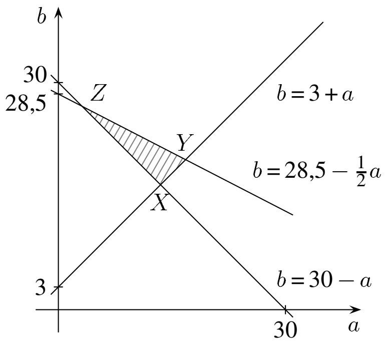
Könyvajánló

Dénes Tamás: *Titok Tan, avagy Kódtörő ABC.* A lapunk szeptemberi és novemberi számában megjelent cikkek szerzőjének könyve a kriptográfia alapjaiba kínál bevezetést a szélesebb olvasóközönség számára. A szerző december 15-én 10 és 13 óra között a Kálvin téri Városkapu Üzletházban ismertetőt tart a könyvéről, ami a helyszínen kedvezményesen meg is vásárolható.

Matematika gyakorlatok megoldása

C. 615. *Egy háromtételes zenemű lejátszása* 60 *percig tart. Egyik tétel sem hosszabb, mint a másik két tétel együttvéve. Bármelyik két tétel hossza között legalább* 3 *perc különbség van. Milyen határok között változhat a legrövidebb tétel időtartama?*

I. megoldás. A zenemű 3 tételének hosszát jelölje a, b, c úgy, hogy $a<b<c$ legyen; $a+b+c=60$ szerint $c=60-a-b$. Egyik tétel sem hosszabb, mint a másik kettő együttvéve; esetünkben ez azt jelenti, hogy $60-a-b=c\le a+b$, azaz $a+b\ge 30$. A különbségek mindegyike legalább 3, vagyis $b\ge a+3$ és $60-a-b=c\ge b+3$. Így a feladat feltételei a következő egyenlőtlenségekkel írhatók le:



(1) $\qquad b\ge 30-a$

(2) $\qquad b\ge 3+a$

(3) $\qquad b\le 28{,}5-\dfrac{1}{2}a$

Ábrázoljuk ezeket az összefüggéseket az a; b koordináta-rendszerben (*ábra*). A lehetséges a, b értékpárok a megfelelő tartományok közös részébe (a jelölt háromszögbe) eső pontok koordinátái, ezért az X, Y, Z pontok koordinátáinak kiszámításával megkaphatjuk a legrövidebb tétel hosszának korlátait. Látható, hogy a Z pont első koordinátája szolgáltatja a lehető legkisebb, az Y ponté pedig a lehető legnagyobb a értéket.

Az Y pont koordinátái a

$$b=3+a,\qquad b=28{,}5-0{,}5a$$

egyenletrendszer megoldása: $Y(17;20)$.

A Z pont koordinátái pedig a

$$b=30-a\qquad 2b=57-a$$

egyenletrendszer megoldásából adódnak: $Z(3;27)$.

Ezek alapján a legrövidebb tétel hossza legalább 3, legfeljebb 17 perc lehet, azaz $3 \le a \le 17$.

II. megoldás. Ha a három tétel hossza $a < b < c$, és ezek között a különbség páronként legalább 3, akkor $a+3 \le b \le c-3$ és $a+3+b+c-3=60$ miatt $a+3$ legfeljebb 20, így $a \le 17$.

Tudjuk, hogy $b \le c-3$, azaz $3 \le c-b$. A $c \le a+b$ feltételből (egyik tétel sem hosszabb, mint a másik kettő együtt) viszont $c-b \le a$ következik, így $3 \le c-b \le a$, tehát $3 \le a$, az előző eredménnyel együtt eszerint $3 \le a \le 17$.

Be kell még látni, hogy ezek a szélsőértékek valóban határok, nemcsak korlátok, keresünk egy-egy példát mindkettőre: $a=17$, $b=20$, $c=23$, illetve $a=3$, $b=27$, $c=30$. (A példák egyébként a konstrukcióból azonnal adódnak.)

Megjegyzés. Nem használtuk a $(0<)a<b<c$-ből triviálisan adódó $a \le b+c$ és $b \le c+a$ feltételeket. Tetszőleges $3 \le a \le 17$ esetén b és c egy lehetséges értéke: $b=\frac{57-a}{2}$, $c=\frac{63-a}{2}$.

358 dolgozat érkezett. 5 pontos 76, 4 pontos 51, 3 pontos 72, 2 pontos 40, 1 pontos 66, 0 pontos 53 dolgozat.

C. 625. *A McDonald's éttermekben* 6*-os,* 9*-es vagy* 20*-as csomagolásban rendelhetünk Chicken McNuggets-et. (Így például kérhetünk* 21 *darabot, mert* $21=6+6+9$*, de semmilyen módon nem kaphatunk* 19 *darabot.) Melyik az a legnagyobb darabszám, amit nem tudunk rendelni?*

Megoldás. A megrendelt csirkék darabszáma helyett ezentúl csak olyan egész számokról beszélünk, amelyek előállíthatók 6, 9 és 20 többszöröseinek összegeként.

A 6 és 9 többszöröseinek összegei a $6a+9b=3(2a+3b)$ alakú számok, ezek között minden $3k$ $(k \ge 2)$ alakú szám előfordul, hiszen $2a+3b$ alakban az 1-nél nagyobb $3r$, $3r+1$, $3r+2$ alakú számok egyaránt felírhatók.

Ezért a $20+3k$ alakú számok $k \ge 2$ esetén előállíthatók a kívánt módon, és ugyanez a $40+3k$ alakú számokra is igaz. A 46-tól kezdve így minden szám előfordul, mert vagy többszöröse 3-nak, vagy ha $20+3k$ alakú, akkor 3-mal osztva 2-t, míg ha $40+3k$ alakú, akkor 3-mal osztva 1-et ad maradékul.

Kérdés, hogy 26 és 46 között sikerül-e minden számot előállítani? Azt állítjuk, hogy nem, a 43 kimarad, s ez egyben a legnagyobb olyan szám, amelyiket nem írhatunk fel 6, 9 és 20 többszöröseinek összegeként. A 45 a 9 többszöröse, a $20+3k$ alakú számok $(k \ge 2)$:

$$26, \quad 29, \quad 32, \quad 35, \quad 38, \quad 41, \quad 44, \quad 47, \quad \ldots,$$

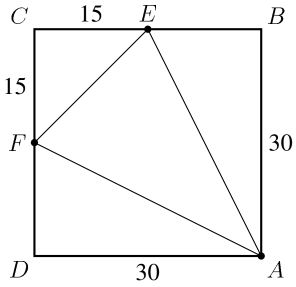
míg a $40+3k$ alakúak $(k \ge 2)$ 46-tal kezdődnek. A többi (hiányzó) szám vagy többszöröse 3-nak, vagy kisebb 43-nál.

A 43 valóban nem bontható fel a kívánt módon, mert ha 1 db 20-as szerepel benne, akkor $43=20+23$, de 23 nem szerepel a $20+3k$ alakúak között $k \ge 2$ miatt. Ha viszont 43-ban 2 db 20-as szerepel, akkor $43=20+20+3$, de 3 darabos csomag nincs.

Tehát a legnagyobb olyan darabszám, amit nem tudunk megrendelni, a 43.

193 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 112, 4 pontot 50, 3 pontot 19, 2 pontot 9, 1 pontot 3 versenyző.

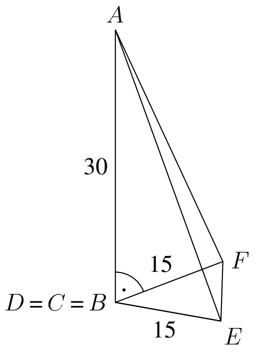
C. 628. *Egy tetraéder alakú kartondobozt felvágunk az egyik csúcsából induló három éle mentén, majd az „elváló” lapokat leterítjük a fenti csúccsal szemközti lap síkjába. Így egy* 30 cm *oldalú négyzetet kapunk. Mekkora a tetraéder térfogata?*



1. ábra

Megoldás. Induljunk ki a tetraéder síkba kiterített hálózatából, a 30 cm oldalú $ABCD$ négyzetből. Ezt a négyzetet kell 4 darab háromszögre bontani, ezek alkotják a tetraédert (*1. ábra*).

A tetraéder egyik csúcsa egybe kell essen a négyzet egyik csúcsával (mert másképp nem tudnánk a négyzetet 4 háromszögre bontani); legyen ez a csúcs az A. A háromszög másik két csúcsa a négyzet BC, illetve CD oldalára esik. Ha felhajtjuk a háromszögeket, akkor ahhoz, hogy tetraéder jöjjön létre, kell, hogy az egymásra hajtott élek hossza egyenlő legyen, azaz $BE=EC$, $CF=FD$, vagyis E a B csúcstól (és persze C-től is) 15 cm-re van. Hasonlóképpen, $CF=FD=15$ cm. A tetraédert tehát egy 15 cm-es befogójú egyenlő szárú és két 15 cm, illetve 30 cm-es befogójú derékszögű háromszög, valamint az AEF egyenlő szárú háromszög határolja.



2. ábra

A tetraéder térfogatát az alapterület és az alaphoz tartozó magasság szorzatának $\frac{1}{3}$-a adja.

Tekintsük most alapnak az ECF egyenlő szárú derékszögű háromszöget.

Mivel az ABE háromszögben $ABE\sphericalangle=90^\circ$ és az AFD háromszögben $ADF\sphericalangle=90^\circ$, az AB egyenes merőleges az EBF alapsíkra, így $AB=30$ cm a tetraéder magassága.

$$V_{\text{tetraéder}}=\frac{\frac{15\cdot 15}{2}\cdot 30}{3}=1125\ \text{cm}^3.$$

Rábai Orsolya (Eger, Gárdonyi G. Gimn., 9. o.t.)

183 dolgozat érkezett. 5 pontos 72, 4 pontos 45, 3 pontos 16, 2 pontos 22, 1 pontos 10, 0 pontos 14. Nem versenyszerű 4.

C. 629. *Igazoljuk, hogy ha tizenhárom egész szám összege osztható* 6*-tal, akkor a tizenhárom szám tizenharmadik hatványának összege is osztható* 6*-tal.*

Javasolta: *Székelyhidi Tamás,* Ercsi

Megoldás. Legyenek a számok $a_1, a_2, \dots, a_{13}$. Feltétel szerint $a_1+a_2+\ldots+a_{13}=$ $=6N$. Vonjuk ki a számok 13. hatványának összegéből a számok összegét:

$$a_1^{13}-a_1+a_2^{13}-a_2+\ldots+a_{13}^{13}-a_{13}+a_1+a_2+\ldots+a_{13}=$$
$$=a_1(a_1^{12}-1)+a_2(a_2^{12}-1+\ldots+a_{13}(a_{13}^{12}-1)+6N.$$

Általában igaz, hogy

$$a(a^{12}-1)=a(a^6-1)(a^6+1)=a(a^2-1)(a^4+a^2+1)(a^6+1)=$$
$$=a(a+1)(a-1)\left[(a^4+a^2+1)(a^6+1)\right].$$

Láthatjuk, hogy minden egyes tagban kiemelhető egy $a_i(a_i+1)(a_i-1)$ alakú szorzat. Ez pedig nem más, mint 3 egymás után következő szám szorzata, ami mindig osztható 6-tal.

Mivel a tagok mindegyike osztható 6-tal, így az egész összeg is.

Blaskó Ján (Budapest, Szlovák Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzés. A megoldás lényege az, hogy egy szám 13-dik hatványa ugyanazt a maradékot adja 6-tal osztva, mint maga a szám. Ez az állítás a megoldásban felírt algebrai azonosság mellett esetszétválasztással vagy az Euler–Fermat-tétel segítségével is bizonyítható. Ennek a 6-ra vonatkozó esete azt jelenti, hogy tetszőleges n számra n^3 és n ugyanazt a maradékot adják 6-tal osztva. Ebből az $a^{13}=a\cdot a^3\cdot(a^3)^3$ és $a\cdot a\cdot a^3$, továbbá $a\cdot a\cdot a=a^3$, illetve a ugyanazt a maradékot adják 6-tal osztva.

175 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 119, 4 pontot 34, 3 pontot 14, 2 pontot 2 beküldő. Nem versenyszerű 6 dolgozat.

C. 630. *Egy négyjegyű szám első két számjegyének összege egyenlő az utolsó két számjegy összegével. Az első és az utolsó számjegy összege a harmadik számjegyet adja. A második és negyedik számjegy összege az első és a harmadik összegének kétszerese. Melyik ez a négyjegyű szám?*

Megoldás. A négyjegyű szám a tízes számrendszerben a szokásos jelölés szerint:

$$10^3a+10^2b+10c+d,$$

ahol a 1 és 9 közé, b, c és d pedig 0 és 9 közé eső egész szám.

A feladat feltétele szerint:

$$a+b=c+d, \tag{1}$$
$$a+d=c, \tag{2}$$
$$b+d=2(a+c). \tag{3}$$

Ezt az egyenletrendszert kell megoldani. (1) és (2)-ből $b=2d$, vagyis $d<5$. A c-t (2)-ből (3)-ba helyettesítjük: $b+d=4a+2d$. Írjuk be b-re az előbb kapott összefüggést; azt kapjuk, hogy $d=4a$. Az a értéke így 1 vagy 2 lehet.

Ha $a=2$, $d=8$, akkor $b=2d=16$, ami nem lehetséges.

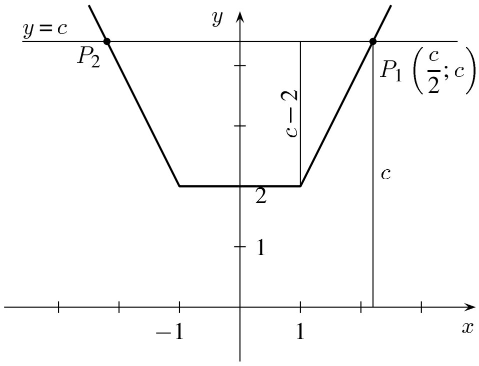
Ha $a=1$, $d=4$, akkor $b=8$, és (2)-ből $c=5$.

A talált négyjegyű szám: 1854.

Látható, hogy ez valóban eleget tesz a feltételnek.

221 dolgozat érkezett. 5 pontos 211, 4 pontos 5, 3 pontos 3, 2 pontos 2.

C. 631. *Az* $y=|x-1|+|x+1|$ *függvény grafikonja és az* $y=c$ *egyenletű egyenes által közrezárt síkidom területe* 30. *Mekkora a* c *állandó értéke?*



Megoldás. A függvény grafikonja három részből áll. -1 és 1 között $y=2$, x tengellyel párhuzamos szakasz, -1-től balra és $+1$-től jobbra pedig egy-egy félegyenes. Az $y=c$ egyenes párhuzamos az x tengellyel, és mivel $c>2$, a két vonal egy szimmetrikus trapézt határol. A függvény grafikonja szimmetrikus az y tengelyre, így elegendő az első negyedben, $x\geq 1$-re vizsgálni az ábrát.

Számítsuk ki az $y=c$ egyenes és a függvénygörbe P_1 metszéspontjának koordinátáit. Mivel $x\geq 1$, $y=2x$, azaz $c=2x$-ből $x=\dfrac{c}{2}$ és $y=c$. A P_2 koordinátái $-\dfrac{c}{2}$ és c. A trapéz rövidebbik alapja 2 egység, a hosszabbik alapja $P_1P_2=c$, a magassága pedig $c-2$. Így $30=\dfrac{c+2}{2}(c-2)$, ahonnan $c^2-4=60$ és $c>0$ miatt $c=8$.

198 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 158, 4 pontot 30, 3 pontot 6, 2 pontot 2, 1 pontot 1, 0 pontot 1 beküldő.

C. 632. *A* 3, 15, 24, 48, ... *sorozat a* 3 *azon többszöröseiből áll, amelyek* 1*-gyel kisebbek egy négyzetszámnál. Mennyi a maradék, ha a sorozat* 2001*-edik tagját elosztjuk* 1000*-rel?*

Javasolta: *Magyar Zsolt,* Budapest

Megoldás. Jelölje a_n a sorozat n-edik tagját. Erre teljesül, hogy $a_n=x^2-1$.

Legyen x többszöröse 3-nak, azaz $x=3k$, ekkor $a_n=x^2-1=9k^2-1$, ez 3-nak nem többszöröse, ilyen alakú számok tehát nem lesznek a sorozatban.

Ha $x=3k+1$ alakú, akkor

$$a_n=(3k+1)^2-1=9k^2+6k,$$

ez többszöröse 3-nak. Ilyen alakú számok szerepelni fognak a sorozatban.

Végül, ha $x=3k+2$, akkor

$$a_n=(3k+2)^2-1=9k^2+12k+3,$$

ezek is tagjai a sorozatnak. Így minden egész számot megvizsgáltunk (hiszen egy egész szám vagy többszöröse 3-nak, vagy 3-mal osztva 1-et vagy 2-t ad maradékul).

A sorozat tagjai tehát 3, 15, 24, 48, 63, 99, ... Könnyen belátható, hogy ha n páratlan, akkor $k=\dfrac{n-1}{2}$ és $a_n=9k^2+12k+3$; például $n=1$-re $k=0$ és $a_1=3$.

A 2001 páratlan, így $k=\dfrac{n-1}{2}=\dfrac{2001-1}{2}=1000$, és $a_n=9k^2+12k+3$ miatt $a_{2001}=9\cdot 10^6+12\cdot 10^3+3$, ami 1000-rel osztva 3-at ad maradékul.

Megjegyzés. A sorozat tagjait 1-gyel növelve a 4, 16, 25, 49, ... négyzetszámokból álló sorozatot, ezek négyzetgyökét véve a 3-mal nem osztható számok 2, 4, 5, 7, ... sorozatát kapjuk. Ennek a k-adik eleme minden páratlan k-ra $(k-1)\cdot\frac{3}{2}+2$, minden páros k-ra $k\cdot\frac{3}{2}+1$. A sorozat 2001-edik eleme eszerint $2000\cdot\frac{3}{2}+2$ négyzeténél 1-gyel kevesebb, ez pedig 3002^2-1, ami láthatóan $2^2-1=3$ maradékot ad 1000-rel osztva.

A transzformált sorozat „rövidebben” $b_k=1+\left[\frac{3k}{2}\right]$ alakban is írható, ahol $k\ge 1$. $k=2001$-re ismét $b_k=1+3001=3002$ adódik.

171 dolgozat érkezett. 5 pontos 117, 4 pontos 41, 3 pontos 4, 2 pontos 3, 1 pontos 4, 0 pontos 2 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása

B. 3417. *Tekintsük a síkon az összes olyan kört, amelynek egyenlete felírható*

$$\alpha\left((x-2)^2+y^2-1\right)+\beta\left((x+2)^2+y^2-1\right)=0 \tag{1}$$

alakban, ahol α és β valós számok. Hol vannak azok a pontok, amelyek egyik ilyen körön sincsenek rajta?

(*4 pont*)

Megoldás. Az $(x\pm 2)^2+y^2-1=0$ egyenletek két, egymást nem metsző és nem is érintő kör egyenletei. Ezért a sík bármely $P(x_0,y_0)$ pontjának koordinátái legfeljebb az egyiket elégítik ki. Legyen

$$\alpha_0=(x_0+2)^2+y_0^2-1 \qquad \text{és} \qquad \beta_0=-((x_0-2)^2+y_0^2-1). \tag{2}$$

Ekkor α és β egyszerre nem 0, és könnyű meggondolni, hogy a P pont akkor és csak akkor van rajta az (1) egyenlettel adott alakzaton, ha az (α,β) pár a (2) összefüggésekkel definiált (α_0,β_0) párból valamely számmal való szorzással keletkezik.

Azt is meg kell néznünk, hogy az így kapott egyenlet milyen α, β értékekre lesz kör egyenlete. Mivel x^2 és y^2 együtthatója megegyezik – mindkettőé $\alpha+\beta$ – azért ha ez nem 0, akkor az egyenlet vagy kör egyenlete, vagy egy ponté (a harmadik lehetőség az üres halmaz lenne – pl. $x^2+y^2+1=0$ –, de most tudjuk, hogy alakzatunk tartalmazza P-t).

Ha $\alpha+\beta=0$, akkor az (1) egyenletet rendezve kapjuk, hogy $x=0$. Vagyis az y tengely pontjai nincsenek rajta olyan körön, amelynek egyenlete (2) alakú.

Ha $\alpha+\beta\neq 0$, akkor az (1) által meghatározott alakzat (kör vagy pont) szimmetrikus az x tengelyre, mert ha a $Q(x_1,y_1)$ pont koordinátái kielégítik (1)-et, akkor a $Q'(x_1,-y_1)$ pont koordinátái is. Ezért ha alakzatunk egyetlen pontból áll, akkor az a pont rajta van az x tengelyen. Ha $\alpha=0$ – és így $\beta\neq 0$ –, akkor (1) kör egyenlete. Ha a pontokat keressük, akkor tehát feltehetjük, hogy $\alpha \neq 0$, s így azt is, hogy $\alpha = 1$ (egyenletünket beszorozhatjuk $\frac{1}{\alpha}$-val). Rendezve az egyenletet:

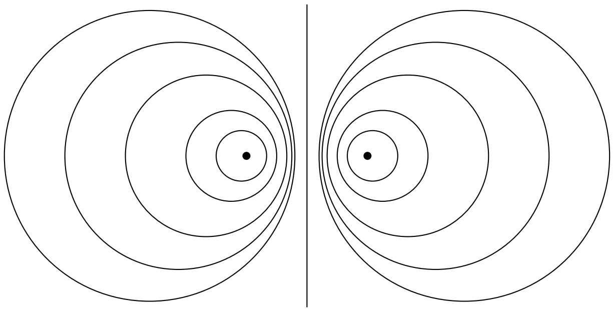
$$(1+\beta)x^2 + (1+\beta)y^2 + (4\beta - 4)x + 3\beta + 3 = 0. \tag{3}$$

Ez pontosan akkor lesz egy, az x tengelyen lévő pont egyenlete, ha $y = 0$ helyettesítés után az x-re kapott másodfokú egyenletnek kétszeres gyöke van, azaz ha diszkriminánsa 0. Ebből kapjuk, hogy

$$(4\beta - 4)^2 - 4(1+\beta)(3\beta + 3) = 0,$$

azaz $\beta = 7 \pm 4\sqrt{3}$. Ezt visszaírva (3)-ba $x = \pm\sqrt{3}$ adódik. Tehát a $(\pm\sqrt{3}, 0)$ koordinátájú pontok sincsenek rajta olyan körön, amelynek egyenlete (1) alakú.

Összefoglalva tehát az $x = 0$ egyenes pontjai, valamint a $(\pm\sqrt{3}, 0)$ pontok felelnek meg a feladat feltételeinek.



Megjegyzés. A feladatban egy *körsorhoz* tartozó alakzatok egyenlete szerepel (a körsorokról lásd pl. *Hajós György:* Bevezetés a geometriába, 40.8). Mivel az $\alpha = 1$, $\beta = 0$ és az $\alpha = 0$, $\beta = 1$ párokhoz tartozó körök diszjunktak, azért a körsor *elliptikus*, annak semelyik két különböző eleme nem metszi egymást, a körsor elemei közt a körök mellett egy egyenes és két pont van. Az egyenes a körsor szimmetriatengelye (*ábra*).

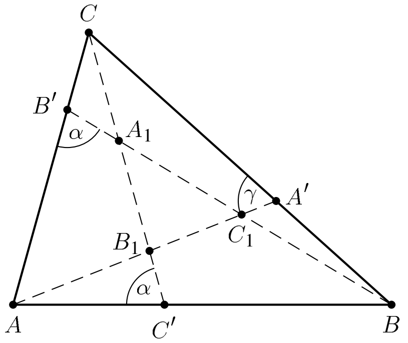
Béky Bence (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

67 dolgozat érkezett. 4 pontos 35, 3 pontos 3, 2 pontos 12, 1 pontos 8, 0 pontos 9.

B. 3427. *Tükrözzük a hegyesszögű ABC háromszög oldalegyeneseit a rájuk nem merőleges magasságvonalakra. Az így kapott hat tükörkép közül három az ABC háromszög belsejében fekvő $A_1B_1C_1$ háromszöget, míg a másik három az $A_2B_2C_2$ háromszöget határolja. Ez utóbbi háromszögnek van egy 20°-os és egy 70°-os szöge. Számítsuk ki az $A_1B_1C_1$ háromszögek szögeit.*

(*4 pont*) *Bakonyi Gábor,* Budapest

Megoldás. Feladatunk megfogalmazásából következik, hogy az ABC háromszög semelyik két oldala nem egyenlő. Ha ugyanis lenne két egyenlő oldala, akkor azok egymás tükörképei volnának a harmadik oldalhoz tartozó magasságvonalra nézve. Ekkor pedig az $A_1B_1C_1$ háromszög nem lehetne teljes egészében az ABC háromszög belsejében.



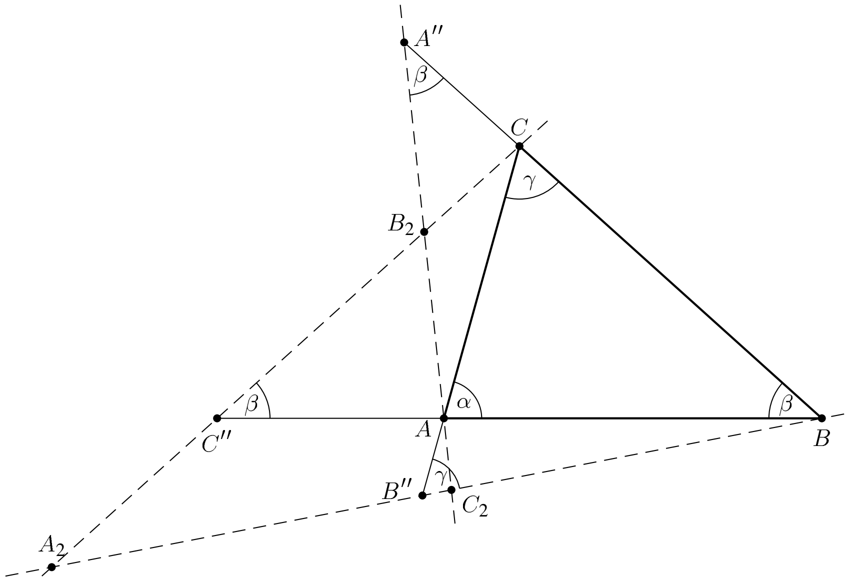
1. ábra

Jelöljük az ABC háromszög szögeit a szokásos módon α, β, γ-val. Feltehetjük, hogy $\alpha > \gamma > \beta$ teljesül. Jelöljük rendre A', B', C'-vel a $BC \cap B_1C_1$, $CA \cap C_1A_1$ és $AB \cap A_1B_1$ pontokat (*1. ábra*). Mivel az AA', BB' és CC' egyenesek az ABC háromszög egy-egy oldalának a háromszög valamelyik magasságára vonatkozó tükörképei, azért – figyelembe véve a szögek nagyságrendjét – kapjuk, hogy $AB'B\sphericalangle = B'AB\sphericalangle = \alpha$, $AC'C\sphericalangle = C'AC\sphericalangle = \alpha$ és $A'AC\sphericalangle = A'CA\sphericalangle = \gamma$. A $B'AC'A_1$ négyszögben három szög α, ezért az A_1-nél lévő szöge $360^\circ - 3\alpha$.

Tehát $B_1A_1C_1\sphericalangle = 180^\circ - (360^\circ - 3\alpha) = 3\alpha - 180^\circ$. Az $A'AB$ háromszög A'-nél lévő külső szöge γ, B-nél lévő szöge pedig β, ezért az A-nál lévő belső szöge $A'AB\sphericalangle = \gamma - \beta$. Így

$$A_1B_1C_1\sphericalangle = AB_1C'\sphericalangle = 180^\circ - (B_1AC'\sphericalangle + AC'B_1\sphericalangle) = (\alpha+\beta+\gamma) - ((\gamma-\beta)+\alpha) = 2\beta.$$

Az $A_1C_1B_1$ szög pedig $180^\circ - ((3\alpha - 180^\circ) + 2\beta) = 2\gamma - \alpha$.



2. ábra

Hasonlóan számolhatjuk ki az $A_2B_2C_2$ háromszög szögeit is (*2. ábra*). $AA''B\sphericalangle = \beta$, $CC''B\sphericalangle=\beta$ és $BB''C\sphericalangle=\gamma$ (A'', B'' és C'' a tükörképek és az eredeti háromszög oldalegyeneseinek metszéspontjai), tehát

$$A_2B_2C_2\sphericalangle = B_2AC\sphericalangle + B_2CA\sphericalangle = (\gamma-\beta)+(\alpha-\beta) = 180^\circ - 3\beta;$$
$$B_2C_2A_2\sphericalangle = 180^\circ - A''C_2B\sphericalangle = 180^\circ + \beta - 2\gamma;$$
$$C_2A_2B_2\sphericalangle = \beta+\gamma-\alpha.$$

Mivel $\alpha>\gamma>\beta$, azért e három szög közül a legkisebb, $\beta+\gamma-\alpha$ nem lehet 60°-nál nagyobb, ennek kell a háromszög 20°-os szögének lennie. A másik két szögről nem lehet eldönteni, hogy melyikük a 70°, ezért két esetet kell megkülönböztetnünk.

i)

$$A_2B_2C_2\sphericalangle = 180^\circ - 3\beta = 90^\circ,$$
$$B_2C_2A_2\sphericalangle = 180^\circ + \beta - 2\gamma = 70^\circ,$$
$$C_2A_2B_2\sphericalangle = \beta+\gamma-\alpha = 20^\circ.$$

Az egyenletrendszert megoldva $\alpha=80^\circ$, $\beta=30^\circ$ és $\gamma=70^\circ$ adódik. Ezekből kapjuk, hogy

$$A_1B_1C_1\sphericalangle = 2\beta = 60^\circ, \quad B_1A_1C_1\sphericalangle = 3\alpha - 180^\circ = 60^\circ \quad \text{és} \quad A_1C_1B_1\sphericalangle = 2\gamma-\alpha = 60^\circ.$$

ii)

$$A_2B_2C_2\sphericalangle = 180^\circ - 3\beta = 70^\circ,$$
$$B_2C_2A_2\sphericalangle = 180^\circ + \beta - 2\gamma = 90^\circ,$$
$$C_2A_2B_2\sphericalangle = \beta+\gamma-\alpha = 20^\circ.$$

Ebből az egyenletrendszerből pedig $\alpha=80^\circ$, $\beta=\left(\frac{110}{3}\right)^\circ$ és $\gamma=\left(\frac{190}{3}\right)^\circ$, tehát

$$A_1B_1C_1\sphericalangle = \left(\frac{220}{3}\right)^\circ, \quad B_1A_1C_1\sphericalangle = 60^\circ \quad \text{és} \quad A_1C_1B_1\sphericalangle = \left(\frac{140}{3}\right)^\circ.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy mindkét eset létre is jön, ha megfelelő ABC háromszögből indulunk ki. Tehát az $A_1B_1C_1$ háromszögnek vagy minden szöge 60°, vagy pedig szögei $\left(\frac{140}{3}\right)^\circ$, 60° és $\left(\frac{220}{3}\right)^\circ$.

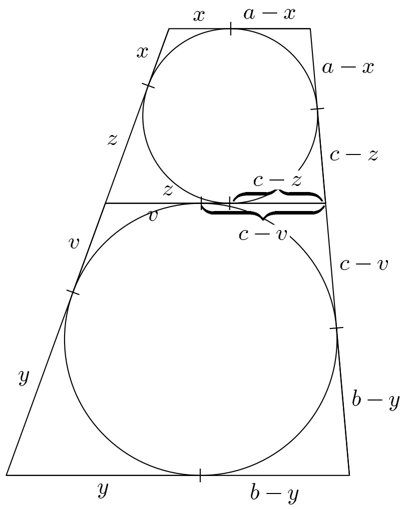
Rácz Béla András (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.) dolgozata alapján

45 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott Ambrus Gergely, Babos Attila, Balka Richárd, Balogh 541 János, Blastik Márta, Fehér Gergely, Horváth 424 Márton, Kiss-Tóth Christian, Kocsis Albert Tihamér, Koltai Péter, Nagy Tamás, Pacz Bence Tamás, Pallos Péter, Pongrácz András, Puskás Anna, Rácz Béla András, Rakyta Péter, Reiss Attila, Sándor Ágnes, Simon Balázs, Somogyi Dávid, Tóth 370 Ágnes, Vonnák Dzsamila és Zalán Péter megoldása. 3 pontos 8, 2 pontos 8, 1 pontos 2, 0 pontos 3 dolgozat.

B. 3434. *Egy trapéz alapjai a és b. A trapéz elmetszhető az alapokkal párhuzamos egyenessel úgy, hogy a két rész-trapézba kör írható. Mekkora az eredeti trapéz kerülete?*

(*3 pont*) Javasolta: *Reményi Gusztáv,* Budapest

Megoldás. Legyen az alapokkal párhuzamos, az eredeti trapézt két érintőtrapézra osztó szakasz hossza c. A két rész-trapéz hasonló egymáshoz, mert megfelelő szögeik páronként megegyeznek, és mindkét trapézba kör írható. Ezért megfelelő oldalaik aránya is megegyezik, vagyis $\frac{a}{c}=\frac{c}{b}$, ahonnan $c=\sqrt{ab}$ adódik.



Mivel egy körhöz bármely külső pontból húzott két érintőszakasz egyenlő hosszú, a trapézok csúcsai és a beírt körök érintési pontjai közti, az *ábrán* azonosan jelölt szakaszok hossza megegyezik. Az ábra jelöléseit használva a trapéz kerülete:

$$K=a+(x+z+v+y)+b+\big((b-y)+(c-v)+(c-z)+(a-x)\big)=2(a+b+c).$$

A c-re kapott értéket behelyettesítve kapjuk, hogy az eredeti trapéz kerülete $2(a+b+\sqrt{ab})$.

Reiczigel Zsófia (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

209 dolgozat érkezett. 3 pontos 143, 2 pontos 48, 1 pontos 5, 0 pontos 13.

B. 3437. *Egy egyenesen ebben a sorrendben adottak az A, B, C, D pontok úgy, hogy $BC=2AB$, $CD=AC$. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is rajzolunk egy-egy kört az A és C, illetve a B és D pontokon keresztül, akkor ezek közös húrja felezi az AC szakaszt.*

(*4 pont*)

Megoldás. A körök metszik egymást, mivel mindegyik belső pontként tartalmazza a másik egy húrjának végpontját. Ismeretes, hogy egy P pontból egy körhöz húzott bármely szelőn állandó a szelő szakaszok szorzata. Ez a mennyiség a P pont adott körre vonatkozó hatványa. Két nem koncentrikus kör esetén azon pontok halmaza, amelyeknek a két körre vonatkozó hatványa egyenlő, egy egyenes, a két kör hatványvonala. Ha a körök metszik egymást, akkor a hatványvonal a közös húr egyenese.

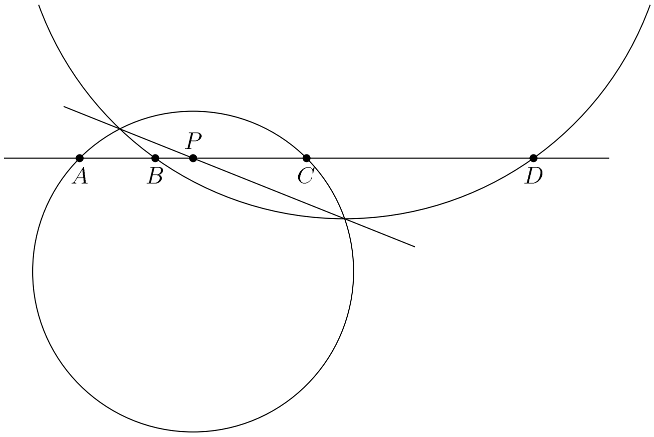
Jelöljük az AC szakasz felezőpontját P-vel.

Ekkor a P pontnak az AC húrral rendelkező körre vonatkozó hatványa:

$$AP\cdot PC=\frac{3}{2}AB\cdot\frac{3}{2}AB=\frac{9}{4}AB^2,$$

míg a P pontnak a BD húrral rendelkező körre vonatkozó hatványa:

$$BP\cdot PD=\frac{1}{2}AB\cdot\frac{9}{2}AB=\frac{9}{4}AB^2.$$



A P pontnak tehát egyenlő a két körre vonatkozó hatványa. Ezért P rajta van a hatványvonalon, tehát a közös húron is, hiszen P mindkét körnek belső pontja.

Tran Thanh Long (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.)

117 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 103, 3 pontot 7, 2 pontot 1, 1 pontot 4, 0 pontot 2 versenyző.

B. 3439. *Jelöljön p egy pozitív számot, és tekintsük az* $1,\ p,\ \frac{1}{p},\ p^2,\ \frac{1}{p^2},\ \ldots,\ p^n,\ \frac{1}{p^n}\ \ldots$ *végtelen sorozatot. Mely p számokra igaz, hogy minden pozitív szám tetszőleges pontossággal megközelíthető a fenti sorozat véges sok alkalmas elemének összegével?* (*5 pont*)

I. megoldás. Ha $p=1$, akkor a sorozat minden tagja 1, a sorozat elemeiből készíthető összegek egész számok, amiből következik, hogy a nem egész számok nem közelíthetők meg tetszőleges pontossággal.

Mivel egy pozitív p szám helyett a reciprokából, $\frac{1}{p}$-ből kiindulva ugyanazt a sorozatot kapjuk, így elegendő az olyan sorozatokat vizsgálni, amelyekre $p>1$. Ekkor az

$$1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots+\frac{1}{p^n}+\ldots$$

végtelen mértani sor konvergens, összege $S=\dfrac{1}{1-\frac{1}{p}}=\dfrac{p}{p-1}$, ami azt jelenti, hogy a p nempozitív kitevőjű hatványaiból készített minden véges összeg kisebb, mint S.

Ha tehát $S<p$ (ez $p>1$ miatt pontosan akkor teljesül, ha $p>2$), akkor a sorozat elemeiből készített minden véges összeg vagy S-nél kisebb – ha nem tartalmaz pozitív kitevőjű p-hatványt –, vagy legalább p.

Ebben az esetben pedig az S-nél nagyobb és p-nél kisebb számok nem közelíthetők meg tetszőleges pontossággal.

Megmutatjuk, hogy ha $1<p\le 2$ – és így a szimmetrikus $\frac{1}{2}\le p<1$ esetben is – már bármely pozitív valós szám tetszőleges pontossággal megközelíthető. Ha $u>0$, akkor járjunk el úgy, ahogyan egy pozitív egész kettes számrendszerbeli alakját szoktuk fölírni: lépésenként a nála nem nagyobb p-hatványok közül a legnagyobbikkal csökkentsük a számot.

Könnyen meggondolható, hogy mivel a p^n, $n\in\mathbf{Z}$ sorozat szigorúan monoton növő, nem korlátos és $\lim\limits_{n\to-\infty} p^n=0$, azért létezik – pontosan egy – olyan n_1 kitevő, hogy

$$p^{n_1}\le u<p^{1+n_1}. \tag{1}$$

Mivel most $p\le 2$, azért (1)-ből $u<2p^{n_1}$, és így

$$0\le u-p^{n_1}<p^{n_1}$$

következik. Ha tehát az $u-p^{n_1}$ különbség nem nulla – ami nyilván föltehető, egyébként ugyanis az u-t *pontosan* is elő tudjuk állítani –, akkor kisebb, mint p^{n_1}, a közelítés első tagja.

Az eljárás most már folytatható az $u_1=u-p^{n_1}$ különbségre. A fentiekből következik, hogy az ehhez kiválasztott legnagyobb p-hatvány kitevője határozottan kisebb, mint n_1. Ha az eljárás véges sok lépésben leáll, akkor egyenlőséget kapunk, és így az u véges sok p-hatvány összege. Ha nem ez a helyzet, akkor a $p^{n_1}>p^{n_2}>\ldots>p^{n_k}>\ldots$ egész kitevőjű p-hatványok végtelen csökkenő sorozatát kapjuk, amelyekre

$$p^{n_1}+p^{n_2}+\ldots+p^{n_k}<u<p^{n_1}+p^{n_2}+\ldots+p^{1+n_k}$$

minden k-ra.

A két korlát eltérése $p^{n_k}(p-1)$. Mivel $n_k\le n_1-(k-1)$, azért az alsó korlát hibája legfeljebb $\dfrac{(p-1)\cdot p^{n_1}}{p^{k-1}}$. Itt a p és n_1 rögzített számok, a számláló konstans, a nevező pedig $p>1$ miatt tetszőlegesen nagy lehet, így a $p^{n_1}+p^{n_2}+\ldots+p^{n_k}+\ldots$ közelítés hibája tetszőlegesen kicsivé válik, ha k elég nagy.

Tehát az $\frac{1}{2}\le p<1$ és az $1<p\le 2$ számokra teljesül, hogy minden pozitív szám tetszőleges pontossággal megközelíthető p egész kitevőjű hatványaiból készített véges összegekkel.

Zalán Péter (Budapest, Fasori Evang. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

II. megoldás. Most is csak a $p>1$ esetben vizsgáljuk a feladat kérdését. Pozitív számok egy H halmazát hívjuk „egyenletesnek”, ha van olyan $d>0$, hogy minden pozitív számtól legfeljebb 1 távolságra található H-beli elem. Megmutatjuk, hogy ha $1<p\le 2$, akkor az 1, p, p^2, $\ldots$, p^n, $\ldots$ számokból készített véges összegek halmaza egyenletes, mégpedig $d=1$ választással. Ezt az alábbi formában igazoljuk az n-re vonatkozó teljes indukcióval:

Ha $0<T<p^n$, akkor van olyan részhalmaza az $\{1,\ p,\ \ldots,\ p^{n-1}\}$ halmaznak, amelyben az elemek összege 1-nél kevesebbel tér el T-től.

Ha $n=0$, akkor $0<T<1$, így az üres halmaz – amelyben az elemek összege 0 – megfelelő. Legyen most $n>0$, tegyük fel, hogy az állítás igaz minden n-nél kisebb pozitív egészre, és tekintsük a $0<T<p^n$ számot. Ha $T<p^{n-1}$ is igaz, akkor az indukciós feltevésből következik az állítás. Ha $T=p^{n-1}$, akkor az egyelemű $\{p^{n-1}\}$ halmaz megfelelő (Az eltérés 0.)

Ha $p^{n-1}<T<p^n$, akkor $0<T-p^{n-1}<p^n-p^{n-1}=(p-1)\cdot p^{n-1}$, és mivel $0<p-1\le 1$, azért $(p-1)\cdot p^{n-1}\le p^{n-1}$.

Így $0<T-p^{n-1}<p^{n-1}$, ezért az indukciós feltevés szerint a $T-p^{n-1}$ különbséget 1-nél jobban közelítő összeghez p^{n-1}-et hozzávéve, a T-t közelítő összeget kapunk.

Legyen most $u>0$ tetszőleges, és tekintsük a $T=p^N\cdot u$ számot, ahol N egész. A fentiek szerint a T-hez létezik a p nemnegatív hatványainak egy véges halmaza úgy, hogy az elemek S összegére

$$|T-S|<1.$$

Ezt az egyenlőtlenséget p^N-nel osztva kapjuk, hogy

$$\left|u-\frac{S}{p^N}\right|<\frac{1}{p^N}.$$

Mivel $p>1$ esetén $\frac{1}{p^N}$ tetszőlegesen kicsi lehet, továbbá $\frac{S}{p^N}$ a kívánt alakú összeg, ezért $1<p\le 2$ esetén bármely pozitív u szám tetszőlegesen megközelíthető a p hatványaiból készített összegekkel. Megmutatjuk, hogy ha $p>2$, akkor ez nem lehetséges. A p^0, p^1, $\dots$, p^{n-1} számokból 2^n összeg készíthető, ezek mindannyian 0 és $1+p+\dots$ $\dots+p^{n-1}=\frac{p^n-1}{p-1}$ között vannak. A szomszédos összegek közti átlagos eltérés tehát $\frac{p^n-1}{p-1}:2^n$, ami $p>2$ miatt tetszőlegesen nagy lehet. Mivel a p negatív kitevőjű hatványainak összege korlátos, előbb-utóbb biztosan nem hidalhatók majd át a nemnegatív kitevőjű hatványok felhasználásával készített összegek közti eltérések.

Így $\frac{1}{2}\le p<1$ vagy $1<p\le 2$.

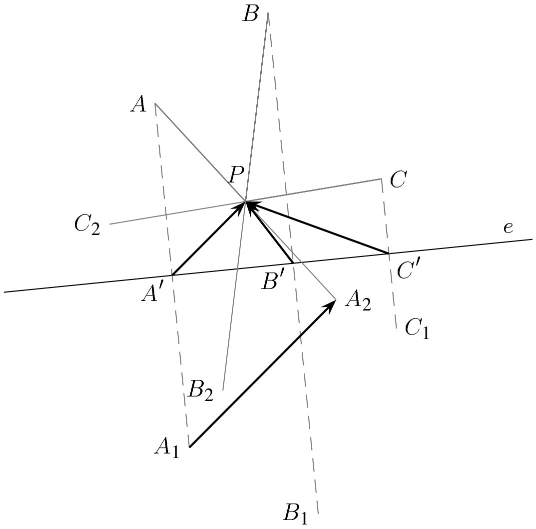
58 dolgozat érkezett. 5 pontos 41, 4 pontos 5, 3 pontos 4, 2 pontos 1, 1 pontos 7.

B. 3440. *Az A, B, C pontok tükörképe egy e egyenesre A_1, B_1, C_1, egy P pontra pedig A_2, B_2, C_2. Mi a P tükörképe az e egyenesre, ha $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{0}$?*
(*3 pont*)

Megoldás. Az AA_1A_2 háromszögben a P pont felezi az AA_2 oldalt, AA_1 felezőpontja pedig (a tengelyes tükrözés miatt) az e egyenesen van, jelölje ezt A'. Így $A'P$ az AA_1A_2 háromszögnek középvonala, amely párhuzamos A_1A_2-vel, a hosszúsága pedig annak fele. Hasonlóan, a BB_1B_2 háromszögben a B_1B_2-vel párhuzamos középvonal $B'P$, illetve a CC_1C_2 háromszögben a C_1C_2-vel párhuzamos középvonal $C'P$.

Tudjuk, hogy

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=\mathbf{0},$$



emiatt a feleakkora, de ezekkel párhuzamos középvonalakból alkotott $\overrightarrow{A'P}+\overrightarrow{B'P}+\overrightarrow{C'P}$ összeg is **0**. Eszerint P az A', B', C' pontok súlypontja. A', B', C' viszont az e egyenesen vannak, tehát P is. Így a P pontnak e-re vonatkozó tükörképe önmaga.

Rácz Éva (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t.)

99 dolgozat érkezett. 3 pontos 71, 2 pontos 9, 1 pontos 7, 0 pontos 12.

B. 3442. *Van-e olyan* 2001 *jegyű természetes szám, amely megegyezik a* 2001*-edik hatványának utolsó* 2001 *számjegyével?*

(*4 pont*) Javasolta: *Kiss Tamás,* Budapest

I. megoldás. Megmutatjuk, hogy pl. $N=5\cdot 10^{2000}+1$ megfelelő. Mivel

$$N^2=(5\cdot 10^{2000}+1)^2=25\cdot 10^{4000}+10^{2001}+1$$

utolsó 2001 jegye: $000\ldots001$, az $N^{2000}=(N^2)^{500}$ is 2000 nullára és egy egyesre végződik. Ezért $N^{2001}=N\cdot N^{2000}$ utolsó 2001 jegye megegyezik N utolsó 2001 jegyével.

Németh Adrián (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn. 9. o.t.)

Megjegyzés. A binomiális tétellel megmutatható, hogy $10^{2000}+1$ is kielégíti a feladat követelményét.

Paulin Roland (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 7. o.t.)

II. megoldás. Ha egy a szám négyzete „a-ra végződik”, akkor minden további hatványa is; elegendő tehát olyan 2001 jegyű a számot találni, amelyre $10^{2001}\mid a^2-a=a(a-1)$. Utóbbi biztosan teljesül, ha $2^{2001}\mid a$ és $5^{2001}\mid a-1$, és akkor is, ha $5^{2001}\mid a$

és $2^{2001} \mid a-1$. Az első két oszthatósági feltételt kielégítő számot keressük $a=2^{2001}x$ alakban (ekkor az első oszthatóság már biztosított), erre még $2^{2001}x-1=5^{2001}y$-nak, azaz $2^{2001}x-5^{2001}y=1$-nek kell teljesülnie. Mivel 2^{2001} relatív prím 5^{2001}-hez, ilyen x (és y) egész biztosan létezik, és az ezzel képezett $2^{2001}x$ szám 10^{2001}-nel való a_1 osztási maradéka egy, a feladat feltételét kielégítő *legfeljebb* 2001 jegyű szám. Hasonlóan kaphatunk olyan, ugyancsak legfeljebb 2001 jegyű a_2 számot, amelyre $5^{2001} \mid a_2$ és $2^{2001} \mid a_2-1$. Mivel $2^{2001} \mid a_1$, $5^{2001} \mid a_2$, $5^{2001} \mid a_1-1$, $2^{2001} \mid a_2-1$, azért $a_1a_2=10^{2001}c$ és $(a_1-1)(a_2-1)=10^{2001}d$, alkalmas $c>d$ pozitív egészekkel. Így

$$a_1+a_2-1=a_1a_2-(a_1-1)(a_2-1)=10^{2001}(c-d)$$

is osztható 10^{2001}-nel, ezért legalább 10^{2001}. Tehát az a_1 és a_2 közül legalább az egyik pontosan 2001 jegyű, ellenkező esetben ugyanis $10^{2001} \le a_1+a_2-1<a_1+a_2< <2\cdot 10^{2000}$, ami ellentmondás.

113 dolgozat érkezett. 4 pontos 80, 3 pontos 14, 2 pontos 13, 1 pontos 3, 0 pontos 2. Nem versenyszerű 1.

B. 3444. *A pozitív egész számokból álló végtelen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sorozatban jelölje f_n az n természetes szám előfordulásainak a számát, ha ez az érték véges.*

Az $a_1, a_2, \ldots$ sorozat „gyakoriságsorozata" ezután az $f_1, f_2, \ldots$ sorozat, ha minden f_i véges. Hasonlóan értelmezzük a fenti $f_1, f_2, \ldots$ sorozat gyakoriságsorozataként az $a_1, a_2, \ldots$ sorozat másodrendű gyakoriságsorozatát, ha minden gyakoriság véges, és ennek gyakoriságsorozataként a harmadrendű gyakoriságsorozatot és így tovább.

Van-e olyan $a_1, a_2, \ldots$ sorozat, amelynek minden k-ra létezik a k-adrendű gyakoriságsorozata?

(*4 pont*)

Megoldás. A feladat kérdésére igenlő a válasz: ilyen sorozat létezik. Az alábbi „öndokumentáló" sorozat: 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, $\ldots$ önmaga gyakoriságsorozata is, és így persze minden k-ra létezik k-adrendű gyakoriságsorozata: a sorozat maga.

Az a_k sorozatot teljes indukcióval adjuk meg úgy, hogy értékei 1-gyel kezdve a pozitív egész számok, a sorozat pedig monoton növő. Az a_k sorozattal együtt egy m_k sorozatot is építünk, ezek azok a helyek, ahol az a_k sorozat „ugrik", először veszi fel a k értéket: $m_1=1$, $m_2=2$, $m_3=4$, $m_4=6$, $m_5=9$, $\ldots$

Legyen $m_1=1=a_1$. Legyen most $n>1$, és tegyük föl, hogy az m_k sorozat értékeit már megadtuk, ha $1\le k<n$, mégpedig úgy, hogy $k\le m_k$. (Ez $n=1$-re teljesül.) Ez persze azt jelenti, hogy az a_i sorozat elemeit is megadtuk, ha $i\le m_{n-1}$. Az indukciós feltevés szerint tehát $n-1\le m_{n-1}$, és így a_{n-1} értéke is definiált. Legyen most $m_n=m_{n-1}+a_{n-1}$, legyen $a_i=n-1$, ha $m_{n-1}<i<m_n$ és legyen $a_{m_n}=n$. Mivel az indukciós feltevés szerint $n-1=m_{n-1}$ és $a_{n-1}\ge 1$, azért továbbra is fennáll, hogy $n\le m_n$.

Végül a sorozat készítése alapján világos, hogy $a_k=n-1$ pontosan akkor teljesül, ha $m_{n-1}\le k<m_n=m_{n-1}+a_{n-1}$, tehát éppen a_{n-1}-szer, ezért $f_k=a_k$ valóban minden k-ra fennáll.

46 dolgozat érkezett. 4 pontos 32, 3 pontos 5, 2 pontos 2, 1 pontos 3, 0 pontos 4.

B. 3446. *Határozzuk meg a $q(x)$ polinomot úgy, hogy a $p(x)=x^2+x+1$ polinommal $p^2(x)-2p(x)q(x)+q^2(x)-4p(x)+3q(x)+3\equiv 0$ azonosság teljesüljön.*
(*4 pont*)

Megoldás. A feladat feltételét a q-ban másodfokú $q^2-(2p-3)q+(p^2-4p+3)\equiv 0$ egyenletté rendezhetjük. A $p(x)=x^2+x+1$ helyettesítés után két megoldást kapunk: a $q_1=x^2+2x$ és a $q_2=x^2-1$ polinomokat. Ezek segítségével a feladat megkövetelte azonosság bal oldala szorzattá alakítható:

$$\begin{aligned} p^2(x)-2p(x)q(x)+q^2(x)-4p(x)+3q(x)+3&\equiv\\ \equiv q^2(x)-(2x^2+2x-1)q(x)+(x^4+2x^3-x^2-2x)&\equiv\\ \equiv [q(x)-(x^2+2x)][q(x)-(x^2-1)].& \end{aligned}$$

Nemnulla polinomok szorzata nem lehet a nullapolinom, ezért a két tényező valamelyike csak az azonosan nulla polinom lehet. Tehát q_1 és q_2 megoldások, rajtuk kívül pedig nincs a feladatnak több megoldása.

173 dolgozat érkezett. 4 pontos 61, 3 pontos 95, 2 pontos 8, 1 pontos 5, 0 pontos 4.

B. 3449. *Legyen $a>1$ adott egész szám. Bizonyítsuk be, hogy ha az $x^2-ay^2=-1$ egyenletnek van egész megoldása, akkor végtelen sok egész megoldása van.*
(*5 pont*) Javasolta: *Fried Ervin,* Budapest

Megoldás. Legyen u,v az egyenlet egy megoldása, azaz $u^2-av^2=-1$. Mivel u és v egyike sem nulla feltehető, hogy mindketten pozitívak. Legyen $n=u^2+av^2$ és $k=2uv$; ekkor

$$n^2-ak^2=(u^4+a^2v^4+2au^2v^2)-4au^2v^2=(u^2-av^2)^2=1.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} -1=(n^2-ak^2)(u^2-av^2)&=n^2u^2-an^2v^2-ak^2u^2+a^2k^2v^2=\\ &=(nu+akv)^2-a(nv+ku)^2. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy az u, v párhoz hasonlóan az $u_1=nu+akv$, $v_1=nv+ku$ pár is megoldása az $x^2-ay^2=-1$ egyenletnek. Mivel az u, v, n, k számok mindegyike pozitív, $u<u_1$ és $v<v_1$. Ezt folytatva, az u_1, v_1 párból olyan u_2, v_2 megoldást nyerhetünk, amelyre $u_1<u_2$, $v_1<v_2$ és így tovább; a fennálló egyenlőtlenségek biztosítják, hogy a kapott megoldások mind különbözőek.

Hablicsek Márton (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.)
Rácz Éva (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzés. Tekintsük az $r+s\sqrt{a}$ alakú számokat, ahol r,s tetszőleges egészek. Mivel a feladat feltételei miatt $\sqrt{a}$ irracionális, ez a felírás egyértelmű, és ilyen alakú számok szorzata is ilyen. A feladat állítása (és a fenti bizonyítás is) lényegében azon múlik, hogy az ilyen alakú számok *normáját* $N(r+s\sqrt{a}) := (r+s\sqrt{a})(r-s\sqrt{a}) = r^2 - as^2$-nek definiálva

$$N((r_1+s_1\sqrt{a})\cdot(r_2+s_2\sqrt{a})) = N(r_1+s_1\sqrt{a})\cdot N(r_2+s_2\sqrt{a})$$

teljesül.

57 dolgozat érkezett. 5 pontos 21, 4 pontos 6, 3 pontos 10, 2 pontos 6, 1 pontos 1, 0 pontos 11. Nem versenyszerű 2.

B. 3452. *Két játékos egy* 5×5*-ös táblázat mezőibe felváltva jeleket ír; a kezdő játékos mindig egy* X *jelet, a második pedig mindig két* O *jelet. Az nyer, akinek először van öt jele egy sorban vagy egy oszlopban. Milyen stratégiát kövessen a második játékos, ha nyerni akar?*

(*4 pont*) Javasolta: *Gyanta Nándor,* Budapest

Megoldás. Legyen az első játékos neve A, a másodiké B. Játsszuk végig a játékot, amíg B-nek össze nem jön öt O egy vonalban.

A első X jele lefoglal egy sort és egy oszlopot. B le tud tenni két O-t úgy, hogy azok *egy* szabad oszlopban és két szabad sorban legyenek.

Bármi legyen is A második lépése, marad még szabad oszlop. (Lehet, hogy három is!) B letesz két O-t egy szabad oszlopban ugyanazokra a sorokra, ahol eddig is szerepeltek körök. A körökkel egy vonalban legfeljebb a második X szerepelhet.

Bárhová tegye is A a harmadik X-et, a körök által lefoglalt két sor és két oszlop (négy „vonal") közül kettő még mindig szabad lesz, e kettő mindegyikébe tegyen B egy-egy O-t; ennek következtében három O szerepel bennük.

A negyedik lépésére B-nek még mindig marad egy olyan „vonal", amelybe két O-t téve nyer.

Ez tehát a játék negyedik lépése, emiatt kizárt, hogy közben az első játékos „nyert" volna.

Fehér Gergely (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 12. o.t.),
Rácz Judit (Szekszárd, Garay J. Gimn., 10. o.t.) és
Salát Máté (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Ez a stratégia azon alapul, hogy B egy lépésben három szabad vonalat foglalt le a kezdeti $4+4$ közül, míg A ezekből legfeljebb egyet tud elzárni. Így az első lépésben B $3-1=2$ vonalat foglal le, a második lépésben „$1-1=0$" újabb vonalat, a harmadikban elveszít 1-et, de így is marad 1, ez pedig éppen elég ahhoz, hogy nyerjen.

Hasonló stratégia alakítható ki azzal az ötlettel is, amikor A tetszőleges első lépése után B úgy helyezi el az első két O-t, hogy azok különböző szabad oszlopokba és sorokba essenek: lényegében egy téglalap két átlós csúcsába. Ha A nem a másik két csúcs valamelyikében zárja le B útját, akkor B ezekbe O-t rakva az előző stratégia szerint nyerhet. (Hiszen két oszlopa és két sora közül legfeljebb 1-et zárt le A.)

Ha viszont A egy téglalapcsúcsba rak X-et, akkor B a másik átlós csúcsba teszi az egyik O-t, a másikat pedig egy még szabad sor és szabad oszlop kereszteződésébe. Ennek tehát sem a sorában, sem az oszlopában nincs más jel, így pl. a harmadikként lerakott O-val alkotott téglalap csúcsai az előző lépés szerint vizsgálhatók. Eszerint az ötödik O helye a téglalap harmadik csúcsa, a hatodik O-t pedig úgy teszi le B, hogy legyen két olyan vonal, amelybe három-három jele esik, így a negyedik lépésben ismét csak nyer.

166 dolgozat érkezett. 4 pontos 103, 3 pontos 43, 2 pontos 9, 1 pontos 8, 0 pontos 2. Nem versenyszerű 1.

B. 3457. *Határozzuk meg azon p, q pozitív prímeket, amelyekre az $x^4+p^2x+q=0$ egyenletnek van többszörös gyöke.*

(*4 pont*) Javasolta: *Besenyei Ádám,* Budapest

Megoldás. Jelölje az egyenlet többszörös (legalább kétszeres) gyökét $-a$ (ami szükségképpen nempozitív). Ekkor

$$x^4+p^2x+q=(x+a)^2(x^2+bx+c)=(x^2+2ax+a^2)(x^2+bx+c)=$$
$$=x^4+(2a+b)x^3+(2ab+a^2+c)x^2+a(ab+2c)x+a^2c.$$

A megfelelő együtthatók összehasonlításából így

(1) $2a+b=0$, azaz $b=-2a$,

(2) $2ab+a^2+c=0$, így $c=3a^2$,

(3) $a(ab+2c)=p^2$, ezért $4a^3=p^2$,

(4) $a^2c=q$, ebből pedig $3a^4=q$.

(3)-ból és (4)-ből

$$3^3p^8=3^3(p^2)^4=3^3\cdot4^4\cdot a^{12}=2^8(3a^4)^3=2^8q^3.$$

Ez csak úgy lehet, ha $p=2$ és $q=3$. Ekkor $a=1$, $b=-2$, $c=3$, és valóban $x^4+4x+3=$ $=(x+1)^2(x^2-2x+3)$.

Ambrus Gergely (Szeged, Radnóti M. Gimn., 12. o.t.)

113 dolgozat érkezett. 4 pontos 74, 3 pontos 13, 2 pontos 18, 1 pontos 6, 0 pontos 2.

B. 3461. *Legyenek $a>0$ és $c\neq0$ adott egész számok. Bizonyítsuk be, hogy ha az $x^2-ay^2=c$ egyenletnek van legalább $4c^2+1$ különböző egész megoldása, akkor végtelen sok egész megoldása van.*

(*5 pont*) Javasolta: *Fried Ervin,* Budapest

Megoldás. A skatulyaelv szerint létezik két olyan megoldás, (x,y) és (u,v), amelyre c osztója a 0-tól különböző $x-u$ és $y-v$ számoknak, azaz $x-u=tc$, $y-v=sc$. Az a nem lehet négyzetszám, hiszen a c legfeljebb $|c|$-féleképpen írható fel két négyzetszám $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ különbségeként. A **B. 3449.** feladat megoldásához fűzött megjegyzés szellemében tekintsük ismét a $\gamma=n+k\sqrt{a}$ alakú számokat, ahol n és k tetszőleges egészek, és vezessük be a

$$\gamma^*=n-k\sqrt{a},\qquad N(\gamma)=\gamma\gamma^*=n^2-ak^2$$

jelöléseket; könnyen belátható, hogy ekkor, $\sqrt{a}$ irracionális lévén, ezeknek a számoknak egyértelmű a felírása, és $N(\gamma\delta)=N(\gamma)N(\delta)$ teljesül. Esetünkben a $\gamma:=x+y\sqrt{a}$, $\delta:=u+$ $+v\sqrt{a}$ számokra

$$c^2=N(\gamma)N(\delta^*)=N(\gamma\delta^*).$$

Itt

$$\begin{aligned}\gamma\delta^*&=(x+y\sqrt{a})(u-v\sqrt{a})=(xu-ayv)+(yu-xv)\sqrt{a}=\\&=(u(u+tc)-av(v+sc))+(u(v+sc)-v(u+tc))\sqrt{a}=\\&=(u^2-av^2+c(ut-avs))+c(us-vt)\sqrt{a}=c((1+ut-avs)+(us-vt)\sqrt{a}).\end{aligned}$$

A $\beta:=(1+ut-avs)+(us-vt)\sqrt{a}$ jelöléssel élve így

$$c^2=N(c\beta)=N(c)N(\beta)=c^2N(\beta),$$

tehát $N(\beta)=1$. Tételezzük fel, hogy $\beta=1$; az egyértelmű felírhatóság miatt ekkor $ut-avs=0$ és $us-vt=0$. A két egyenlőség alapján: $ut\cdot us=avs\cdot vt$, ahonnan $st\neq 0$ miatt $u^2=av^2$, ellentmondás, mivel a nem négyzetszám. Mivel $\beta\neq 1$, az $(x+y\sqrt{a})\beta^m$ számok ($m=1, 2, 3, \ldots$) mind különbözők, és

$$(x+y\sqrt{a})\beta^m=x_m+y_m\sqrt{a}$$

alakba írhatók, alkalmas x_m és y_m egészekkel. Ezekre pedig

$$N(x_m+y_m\sqrt{a})=N(x+y\sqrt{a})N(\beta)^m=c\cdot 1^m=c$$

miatt $x_m^2-ay_m^2=c$ teljesül.

11 dolgozat érkezett. 5 pontos Ambrus Gergely, Balka Richárd, Hablicsek Márton, Hargitai Gábor, Herczegh Attila, Kármán Péter, Nagy 444 Zoltán, Pallos Péter, Somogyi Dávid, Ta Vinh Thong és Tóth János megoldása.

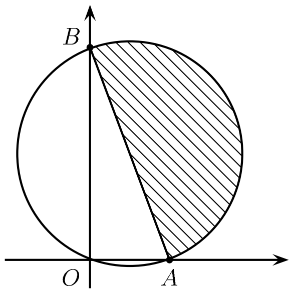
B. 3463. *Egy félkör alakú szivaccsal, amelynek átmérője* 20 cm, *végigtöröljük egy szoba padlójának egy sarkát úgy, hogy az átmérő két végpontja folyamatosan érinti a szoba derékszöget bezáró két falát. Mekkora területet töröl fel eközben a szivacs?*

(*3 pont*)

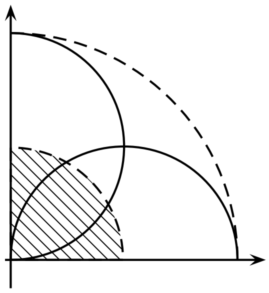
Megoldás. Az AB átmérőjű félkörívlemez a szivacs. Ha A az x tengelyen, B az y tengelyen mozog, akkor az AB átmérőjű kör átmegy O-n. Ezért a letörölt tartomány egyetlen pontja sem lehet 20 cm-nél távolabb az O ponttól, az O középpontú, 20 cm sugarú negyedkörön kívüli pontok nem érhetők el a szivaccsal.

Az O középpontú 10 cm sugarú negyedkör belső pontjai lefedhetők az x, illetve y tengelyen nyugvó félkörökkel (*2. ábra*).

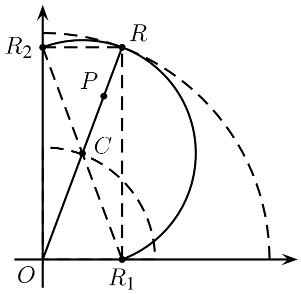
Ha P a két negyedkör által határolt gyűrűszerű tartomány pontja és OP a külső negyedkört az R pontban metszi, akkor jelölje az R pont vetületét a tengelyeken R_1 és R_2. Ekkor OR_1RR_2 téglalap, átlói $RO=R_1R_2=20$ cm, és így a téglalap C középpontjára $OC=10$ cm, C rajta van az O középpontú negyedkörön, a P pont pedig a CR szakaszon. A P pontot tehát tartalmazza az R_1RR_2 derékszögű háromszög, ami Thalesz tétele szerint teljes egészében benne van az R_1R_2 átmérőjű R-en átmenő félkörben. Ebben a helyzetében tehát a szivacs „letörli” a P pontot.



1. ábra



2. ábra



3. ábra

Útja során tehát a szivacs pontosan az O középpontú, 20 cm sugarú zárt negyedkörlemez pontjait törli végig, így a letörölt terület $\frac{1}{2}\cdot 20^2\pi = 100\pi$ cm^2.

136 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 75, 2 pontot 22, 1 pontot 11, 0 pontot 28 versenyző.

B. 3464. *Hány olyan n-jegyű szám van, amelyben a számjegyek összege $9n-8$?* (*4 pont*)

Megoldás. A keresett szám minden jegye legalább 1, ezeket a számokat tehát úgy kaphatjuk meg, ha az n-jegyű, csupa 9-esből álló szám jegyei közül néhányat csökkentünk úgy, hogy a csökkentések összege éppen 8. Így minden szóban forgó számhoz egyértelműen hozzárendelhető egy természetes számokból álló n hosszúságú sorozat, amelyben az elemek összege 8.

Azt kell tehát meghatároznunk, hogy hányféleképpen lehet a 8-at n darab nemnegatív egész szám összegére felbontani úgy, hogy különbözőnek tekintjük azokat a felbontásokat is, amelyek csupán a tagok sorrendjében térnek el.

Próbáljunk ténylegesen elkészíteni egy ilyen felbontást: ha egy nyolc egységnyi rudat az egész osztópontokon áthaladó $n-1$ darab vágással n részre osztunk, akkor a sorozat elemeit az egymás után adódó részek hosszaként kapjuk. Az egyes osztópontokon több vágás is áthaladhat, ezek a sorozatban 0 értékű elemeket jelentenek az adott helyen.

Mivel a sorozat elején és végén is állhat 0, azért a 0, illetve a 8 egységnyi beosztáson áthaladó vágások is megengedettek. A feladat tehát az, hogy hányféleképpen lehet a 9 osztópont közül $(n-1)$-et kiválasztani, ha egy-egy osztópontot többször is kiválaszthatunk.

Mint ismeretes, ezek a kiválasztások éppen 9 elem $(n-1)$-osztályú ismétléses kombinációi, a számuk pedig $\binom{9+n-2}{n-1}=\binom{n+7}{n-1}$. Ez azt jelenti, hogy $\binom{n+7}{n-1}$ darab olyan n-jegyű szám van, amelyben a számjegyek összege $9n-8$.

Tóth 370 Ágnes (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., 11. o.t.)

Megjegyzések. 1. Az n hosszúságú 8 összegű „kiegészítő sorozatok száma más okoskodással is meghatározható. *Paulin Dániel* (Fazekas M. Gyak. Gimn., 9. o.t.) az összesen 8 egységnyi csökkentést egyesével hajtotta végre, mégpedig helyiértékenként. Okoskodása szerint az n helyiérték közül kell összesen 8 alkalommal választanunk egyet-egyet, miközben ugyanazt a helyiértéket természetesen többször is kiválaszthatjuk. A lehetőségek most n elem 8-osztályú ismétléses kombinációi, számuk $\binom{n+8-1}{8}=\binom{n+7}{8}$, természetesen ugyanannyi, mint az előbb.

2. *Deák Péter* (Fazekas M. Gyak. Gimn., 9. o.t.) közvetlenül meg is számlálta ezeket a kiválasztásokat, és ezzel lényegében igazolta az ismétléses kombinációk számát megadó összefüggést. A következő gondolatkísérlettel okoskodott: az utolsó kivételével minden egyes helyiértékhez érve kétféleképpen cselekedhetünk: csökkentjük az ott álló számot 1-gyel, vagy pedig továbblépünk a következő helyiértékhez. (Az utolsó helyiértékhez érve már nincs választásunk.) Összesen tehát $(n-1)+8=n+7$ döntési helyzetünk van, és ezek közül kell azt a 8-at kiválasztanunk, amikor csökkentünk. Ezt nyilván $\binom{n+7}{8}$-féleképpen tehetjük meg. (Vagy, ami ugyanennyi, $\binom{n+7}{n-1}$-féleképpen választhatjuk ki az $(n-1)$ darab továbblépést.)

118 dolgozat érkezett. 4 pontos 65, 3 pontos 23, 2 pontos 6, 1 pontos 11, 0 pontos 13.

B. 3469. *Határozzuk meg mindazokat a folytonos f függvényeket, amelyekre $f\big(f(x)\big)=x+f(x)$ minden x valós számra.*

(*5 pont*) *Gillis–Turán matematikaverseny,* 2001

Megoldás. Először az f függvény néhány olyan tulajdonságát igazoljuk, amelyek a függvényegyenletből és az f folytonosságából következnek.

i) f kölcsönösen egyértelmű. Ha $f(x_1)=f(x_2)$, akkor persze $f\big(f(x_1)\big)=f\big(f(x_2)\big)$ is teljesül, így a függvényegyenlet szerint $x_1=f\big(f(x_1)\big)-f(x_1)=f\big(f(x_2)\big)-f(x_2)=x_2$, az f tehát valóban kölcsönösen egyértelmű.

ii) Az f vagy szigorúan monoton növő, vagy szigorúan monoton fogyó, hiszen ha egy folytonos függvény kölcsönösen egyértelmű, akkor szigorúan monoton növő vagy fogyó.

iii) $f(0)=0$, ugyanis ha $x=0$, akkor a függvényegyenlet szerint $f\big(f(0)\big)=0+f(0)$, a kölcsönösen egyértelmű függvény egyenlő értékeket vesz föl a 0 és az $f(0)$ helyeken. Ez csak úgy lehetséges, ha $f(0)=0$.

iv) Ha f szigorúan monoton növő, akkor az értékkészlete a valós számok halmaza. Valóban, ha $x>0$, akkor $f(x)>f(0)=0$, így $f\big(f(x)\big)=x+f(x)>x$, az f függvény tehát tetszőleges pozitív számnál nagyobb – és hasonlóan kapjuk, hogy tetszőleges negatív számnál kisebb – értékeket is fölvesz. Így, mivel folytonos, értékkészlete a valós számok halmaza. Inverze, f^{-1} tehát mindenütt értelmes és szintén monoton növő.

Térjünk most rá a megoldásra.

Vizsgáljuk először azt a lehetőséget, amikor az f függvény szigorúan monoton fogyó. Legyen $x\neq 0$ tetszőleges, és tekintsük az $x_1=f(x)$, $x_2=f\big(f(x)\big)=f(x_1)$, $\dots$, $x_n=f(x_{n-1})$, $\dots$ sorozatot. Ha $x=x_0$, akkor a függvényegyenlet szerint $x_k+f(x_k)=$ $=f\big(f(x_k)\big)$, azaz $x_k+x_{k+1}=x_{k+2}$, ha $k\geq 0$. Az x_k sorozat tehát ún. Fibonacci-típusú sorozat. Ismeretes – lásd például *Kós Géza* és *Énekes Béla* cikkét a KöMaL 2000. évi 9. számában –, hogy a Fibonacci-típusú sorozatok felírhatók két speciális ilyen sorozat segítségével: léteznek olyan c_1, c_2 számok, hogy

$$x_n = c_1 \cdot \tau^n + x_2(-\tau)^{-n}, \qquad \text{ahol } \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{1}$$

Mivel az f szigorúan monoton fogyó és $f(0)=0$, azért x és $f(x)$ ellenkező előjelű-ek, a fenti x_n sorozat szomszédos tagjai is ilyenek, a sorozat váltakozó előjelű. A fenti (1) előállításban az első tag, $c_1\tau^n$ állandó előjelű, és abszolút értéke n növekedtével tetszőlegesen nagy lehet. A második tag, $c_2(-\tau)^{-n}$ előjele váltakozik, azonban ez a sorozat a 0-hoz tart, ha n tart a végtelenhez. Az x_n sorozat tehát csak akkor lehet a második taghoz hasonlóan váltakozó előjelű, ha az állandó előjelű „domináns tag", $c_1 \cdot \tau^n = 0$, azaz $c_1 = 0$.

Ekkor $x_n = c_2 \cdot (-\tau)^{-n}$; $x_0 = c_2(-\tau)^0 = c_2 = x$ miatt pedig $f(x) = x_1 = x \cdot (-\tau)^{-1}$, azaz ha f monoton fogyó, akkor csak

$$f(x) = -\frac{x}{\tau}$$

lehetséges, ahol $\tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Az pedig könnyen ellenőrizhető – felhasználva például a $\tau^2 = \tau + 1$ összefüggést –, hogy erre a folytonos függvényre teljesül az adott függvényegyenlet.

Legyen most az f szigorúan monoton növő. *iv)* szerint f^{-1} mindenütt értelmes, így az $x \neq 0$ számból kiindulva elkészíthető az $x_{-1} = f^{-1}(x)$, $x_{-2} = f^{-1}(x_1)$, $\ldots$, $x_{-n} = f^{-1}(x_{-n+1})$, $\ldots$ sorozat; itt most az f értékein visszafelé lépegetve építjük föl a sorozatot.

$$\ldots x_{-3} \xrightarrow{f} x_{-2} \xrightarrow{f} x_{-1} \xrightarrow{f} x_0 \xrightarrow{f} x_1 \xrightarrow{f} x_2 \xrightarrow{f} \ldots$$

Az előbbi x_n sorozat „elé" illesztve a negatív indexű tagokat, továbbra is Fibonacci-típusú sorozatot kapunk, az (1) összefüggés a sorozat n-edik tagjára is érvényes marad a kiterjesztett sorozatra is.

Ha most $n \to -\infty$, akkor persze a váltakozó előjelű $c_2(-\tau)^{-n}$ lesz a „domináns", $c_1 \cdot \tau^n$ a 0-hoz tart. Az x_n sorozat ($n \in \mathbf{Z}$) viszont most *állandó előjelű*, hiszen $x > 0$ esetén $f(x) > 0$, $x < 0$ esetén pedig $f(x) < 0$. Ez pedig csak úgy lehetséges, ha a nem korlátos, váltakozó előjelű $c_2(-\tau)^{-n}$ rész 0, $x_n = c_1\tau^n$; ahonnan az előző esethez hasonlóan az $f(x) = x_1 = x \cdot \tau^1$, azaz

$$f(x) = \tau x$$

adódik. A $\tau^2 = \tau + 1$ összefüggésből azonnal adódik, hogy ez a függvény is megoldás.

A függvényegyenletnek tehát két folytonos megoldása van; mindkettő elsőfokú függvény,

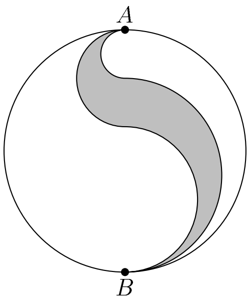
$$f_1(x) = -\frac{x}{\tau} \qquad \text{és} \qquad f_2(x) = \tau x,$$

ahol $\tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

26 dolgozat érkezett. 5 pontos Babos Attila, Boros Vazul, Horváth Illés, Pallos Péter és Tóth János megoldása. 4 pontot kapott 3, 3 pontot 1, 2 pontot 3, 1 pontot 3, 0 pontot 11 beküldő.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (650–654.)

C. 650. Egy képkereskedésben a képek keretének ára egyenesen arányos a bennük lévő festmények értékével. A kereskedő annak érdekében, hogy bizonyos képek ára közötti különbséget csökkentse, felcserél egymással két-két keretet. Az egyik esetben az a kép, amely ötször annyiba került, mint a másik, kereteik felcserélése után már csak háromszor annyiba kerül. Hogyan módosul a „Téli táj” és a „Falu rossza” c. képek árainak aránya, ha kereteik felcserélése előtt a „Téli táj” kilencszer annyiba került, mint a „Falu rossza”?



C. 651. Az ábrán látható egységnyi területű körben a szürke tartományt félkörívek határolják. Az AB átmérőnek $1/5$ egységnyi része esik a satírozott tartomány belsejébe. Mekkora a satírozott tartomány kerülete és a területe?

C. 652. Legyen s páratlan sok jegyű pozitív egész szám. Jelölje f azt a számot, amely s számjegyeiből áll, csak fordított sorrendben. Bizonyítsuk be, hogy $s+f$ pontosan akkor osztható 11-gyel, ha s is osztható 11-gyel.

C. 653. A p paraméter hány különböző értékére van az

$$x^2-y^2=0$$

$$xy+px-py=p^2$$

egyenletrendszernek pontosan egy megoldása?

C. 654. f_a, f_b és f_c jelölik egy a, b, c oldalú, T területű háromszög belső szögfelezőinek a hosszát. Igazoljuk, hogy

$$\frac{f_a\cdot f_b\cdot f_c}{abc}=4T\cdot\frac{a+b+c}{(a+b)(b+c)(a+c)}.$$

Javasolta: *Kovács Gabriella,* Budapest

❄

Beküldési határidő: 2002. január 15.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (3502–3511.)

B. 3502. Az ABC hegyesszögű háromszögben az AB átmérőjű félkör a C-ből induló magasságot C_1-ben, a BC átmérőjű félkör az A-ból induló magasságot A_1-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy $BC_1 = BA_1$.
(*3 pont*)

B. 3503. Adottak az a, b, c, d és f szakaszok. Tegyük fel, hogy létezik olyan négyszög, melynek egymást követő oldalai a, b, c, d, az a és c oldalak felezőpontját összekötő szakasz hossza pedig f. Szerkesszünk ilyen négyszöget.
(*4 pont*)

B. 3504. Jelölje $S(n)$ a tízes számrendszerben felírt n szám jegyeinek az összegét, $U_k = 11\ldots1$ pedig a k darab egyessel felírt számot. Keressük meg azokat a k értékeket, amelyekre $S(U_k^2) = (S(U_k))^2$.
(*4 pont*)

B. 3505. Egy szabályos nyolcszöget paralelogrammákra osztunk fel. Bizonyítsuk be, hogy a paralelogrammák között van téglalap.
(*5 pont*)

B. 3506. Az f polinomra teljesül, hogy $f(x^2+1) - f(x^2-1) = 4x^2+6$. Határozzuk meg az $f(x^2+1) - f(x^2)$ polinomot.
(*4 pont*)

B. 3507. Legyen $f(x)$ egész együtthatós polinom, p és q pedig relatív prímek, $q \neq 0$. Bizonyítsuk be, hogy ha p/q gyöke az f-nek, akkor $f(k)$ minden k egészre osztható $p-kq$-val. Igaz-e az állítás megfordítása?
(*4 pont*)

B. 3508. Az ABC és az $A_1B_1C_1$ háromszögek tengelyesen tükrös helyzetűek. Húzzunk párhuzamost A_1-en keresztül BC-vel, B_1-en keresztül AC-vel, végül C_1-en keresztül AB-vel. Bizonyítsuk be, hogy ez a három egyenes egy ponton halad át.
(*4 pont*)

B. 3509. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < x < \dfrac{\pi}{2^{k+1}}$, akkor

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^k x} < \operatorname{ctg} x.$$

(*3 pont*) Javasolta: *Balogh János,* Kaposvár

B. 3510. Az $ABCD$ tetraéder csúcsain keresztül fektessünk a szemközti lapokkal párhuzamos síkokat. Ez a négy sík egy újabb tetraédert határoz meg. Bizonyítsuk be, hogy A, B, C és D az így kapott tetraéder lapjainak a súlypontjai.

(*3 pont*)

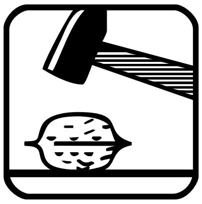
B. 3511. Az a, b, c, d nemnegatív számokra $a \le 1$, $a+b \le 5$, $a+b+c \le 14$ és $a+b+c+d \le 30$. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d} \le 10$.

(*5 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2002. január 15.
Cím: KöMaL szerkesztőség (KöMaL feladatok)
Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (278–280.)

A. 278. A P pont az $ABCD$ téglalap AC átlójának C-n túli meghosszabbításán helyezkedik el úgy, hogy $BPD\sphericalangle = CBP\sphericalangle$. Határozzuk meg a $PB:PC$ arányt.

A. 279. Léteznek-e olyan f és g racionális tört függvények, amelyekre

$$(f(x))^3+(g(x))^3=x?$$

A. 280. Tetszőleges n pozitív egész számra legyen

$$f_n(\vartheta)=\sin\vartheta\cdot\sin(2\vartheta)\cdot\sin(4\vartheta)\cdot\ldots\cdot\sin(2^n\vartheta).$$

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges ϑ valós szám és n pozitív egész esetén

$$|f_n(\vartheta)| < \frac{2}{\sqrt{3}}\left|f_n\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|.$$

IMC 8, Prága, 2001

❄

Beküldési határidő: 2002. január 15.
Cím: KöMaL szerkesztőség (KöMaL feladatok)
Budapest 112, Pf. 32. 1518

KöMaL – 2001/9 MAT0109 cianmagentayellowblack2002. június 19. – 8:58 (37. lap)

Szoftver-kalauz

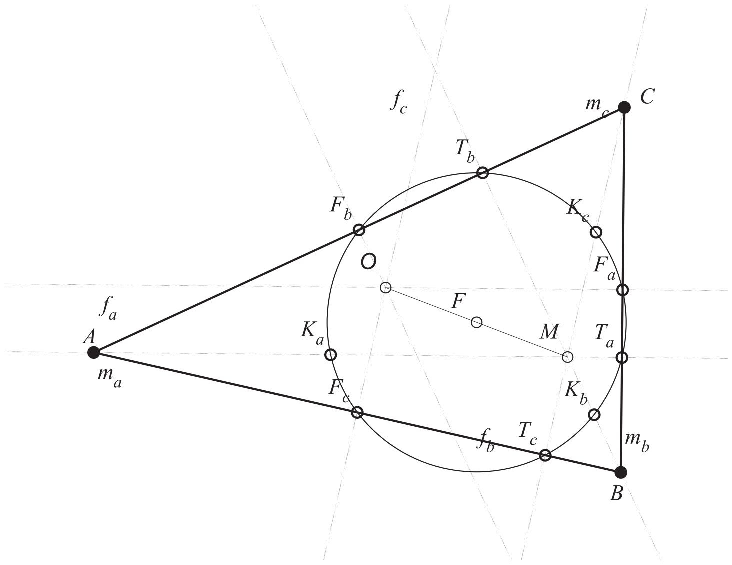
Az Euklides geometriai szerkesztőprogram ismertetése

Az Euklides geometriai szerkesztőprogram első közelítésben a jól ismert körzős-vonalzós geometriai szerkesztések gépesítésére készült. A számítógép lehetőségei által azonban ennél azóta lényegesen többre alkalmas; igazából külön műfajt képvisel: az ún. *dinamikus geometriát.*

A számítógépesítésből fakadó egyik előny a nagy pontosság. Papíron szerkesztve már ember legyen a talpán az is, akinek a háromszög nevezetes vonalai egy pontban metszik egymást. A számítógépen készített szerkesztések akár több száz vagy ezer objektum esetén is olyan pontosak, hogy nem lehet bennük hibát találni, akár a program által biztosított mintegy tízszeres nagyítási lehetőséggel, akár a lézernyomtatóval készült nyomtatáson keressük – ne is tegyük.

De az igazi újdonság mégiscsak az, hogy a szerkesztések objektumai a struktúra megőrzése mellett szabadon mozgathatók. Míg papíron – legyen bármilyen pontos – csak egy statikus ábra vizsgálatára van mód, addig az Euklides-szel magát a struktúrát tanulmányozhatjuk. Mozgatással megfigyelhetjük az objektumok egymásra épülését, változását.

A program a geometriában kezdő általános iskolástól az egyetemi professzorig mindenkinek tud nyújtani valamit. Az alapszerkesztésekkel ismerkedő diákok láthatják vele a fától az erdőt, még ha a kézi szerkesztés megtanulása alól természetesen nem is mentesül ezzel senki. A középiskolai szerkesztések, összefüggések, tételek tanulmányozásához, feladatok megoldásának megsejtéséhez, diszkutálásához kimondottan ajánlott. A projektív geometriában való alkalmazhatósága és a másodrendű görbék kezelése révén pedig egyetemi előadások nélkülözhetetlen kelléke, egyetemisták és tanárok hasznos segítőtársa lehet.



A Feuerbach-kör és a háromszög nevezetes pontjai

Első példának álljon itt egy klasszikus geometria szerkesztés: a háromszög Feuerbach-köre. Ezen a körön a háromszög kilenc jól meghatározott, nevezetes pontja helyezkedik el. E kör nevezetes tulajdonsága, hogy érinti a háromszög beírt és hozzáírt köreit. E szerkesztés pontos elkészítése papíron már igencsak feszegeti egy tapasztalt geométer képességeit és türelmét is. Nem beszélve arról, hogy nem kevés tapasztalat kell ahhoz, és előre nem is mindig látható, hogy a fáradságosan elkészített szerkesztés milyen kiindulási elrendezés mellett mutatja majd legjobban, amit látni–láttatni szeretnénk. A programmal a szerkesztés mozgatható, így egyetlen konstrukciónak több és minél jobb változata pillanatok alatt előállítható.

Az Euklides program logikusan és didaktikusan építi fel a szerkesztéseket az euklideszi elvek alapján, de az alapvető objektumokon kívül több tucat komplex beépített objektumot is tartalmaz: pl. egyetlen kattintással behúzható egy szakasz felező merőlegese vagy a három csúcs megjelölésével a háromszög nevezetes pontjai. Akinek ez nem elég, speciális feladatokra ún. makrókat készíthet. Ez azt jelenti, hogy elvileg tetszőleges bonyolultságú szerkesztéssel definiálhat egy új saját objektumot, amit aztán a „gyárilag” beépítettekkel azonos módon használhat.

Különösen a felsőfokú geometriához hasznosak a többféle módon (pl. az általánosan 5 ponttal) felvehető kúpszeletek, valamint a gyárilag beépített pólus–poláris szerkesztési lehetőségek. Közvetlenül lehet poláris egyenest és így érintőket is szerkeszteni kúpszelethez is!

Az Euklides képes az alapvető ponttranszformációk mellett (eltolás, elforgatás, tükrözések) a körre vonatkozó inverzió és a merőleges vetítések elvégzésére is.

Nyilván nem meglepő, hogy a jobb láthatóság érdekében különböző színekkel és vonalstílusokkal készülhet az ábra. Az adott szempontból lényegtelen objektumokat el is rejthetjük. A szerkesztésben alkalmazhatjuk a grafikus programokból ismert ún. fóliatechnikát; az objektumokat képzeletbeli átlátszó fóliákra csoportosíthatjuk, aztán ezeket együtt kezelhetjük, például teljes fóliatartalmak egy mozdulattal elrejthetők és megjeleníthetők, átszínezhetők stb. Profi felhasználók a szerkesztéseket mindig több fóliára építik fel.

Az objektumokhoz (pontok, egyenesek stb.) címkéket helyezhetünk el a képernyőn, ezen túl pedig megjegyzést fűzhetünk hozzájuk, mely kívánságra megjelenik. A címkékben az objektumparaméterek (pl. pont koordinátái, szakasz hossza) dinamikusan is megjeleníthetők. Emellett a származásvizsgálati lehetőség segít megérteni bonyolultabb, esetleg másoktól kapott szerkesztéseket is; egy-egy objektum közvetlen és közvetett őseit, illetve leszármazottait a program meg tudja mutatni. Akár vissza is játszhatjuk lépésről lépésre a szerkesztés felépülését.

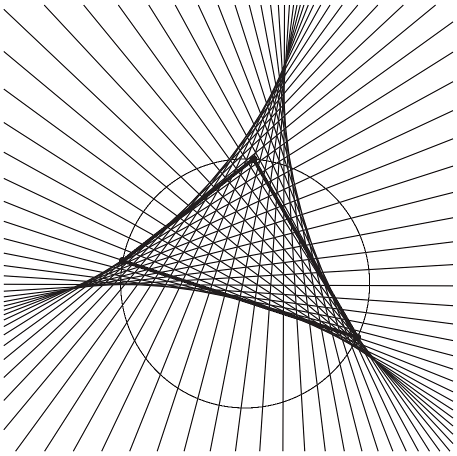
Egyik különleges lehetőség a nyomvonal-képzés. Ez azt jelenti, hogy egy elkészített szerkesztés egy kiindulási pontját gondolatban végigfuttatva egy adott görbén megjeleníthető egy belőle származó pont pályája.

A legújabb változat arra is képes, hogy a pont futását és a szerkesztés egészének változását mozgó animációként mutassa. Sőt még tovább megy azzal, hogy a fázisok egyidejűleg is megjeleníthetők. Nem jelent gondot pl. egy kúpszelet burkoló-seregének megrajzolása.

A programmal készített szerkesztés tetszőleges része kiválasztható egy mozgatható papírral és egy aktív mezővel nyomtatáshoz vagy szabványos Windows vektoros WMF fájlba exportáláshoz. Ez utóbbi lehetőséggel feladatmegoldásokhoz, publikációkba készíthetünk geometriai illusztrációkat. Jelen cikk ábrái is így készültek.

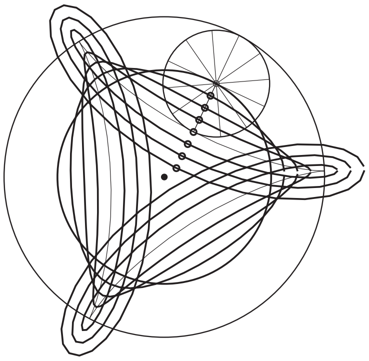
Lássunk egy nemtriviális példát!

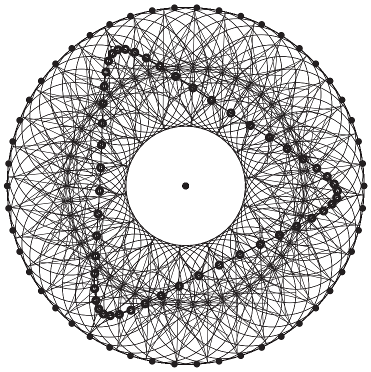
Egy háromszög köré írt kör valamely pontjának az oldalakra eső merőleges vetületei egy egyenesen vannak (Simson-egyenes). Ez az egyenes mozog, miközben a kiválasztott pont körbefut a köréírt körön. Mit mondhatunk az így generálódó egyenesseregről? Ugye nem könnyű elképzelni már a feladatot sem? Az ehhez hasonló esetekben sokat segíthet az Euklides – KöMaL-feladatmegoldóknak és versenyzőknek is. A probléma kifejtése a KöMaL 1906. decemberi számában, Bartók Imre cikkében megjelent.



Egy háromszög Simson-egyenesi

Az Euklides jelenlegi állapota a szerzők és más aktív felhasználók szerint (finoman szólva) felveszi a versenyt a műfaj nemzetközileg elterjedt egyéb képviselőivel, ezért angol nyelvű változata is van. Nem elhanyagolható szempont azonban, hogy eredendően magyar fejlesztés, így nemhogy a program és a hozzá tartozó részletes Súgó beszél magyarul, de egy százoldalas, részletes felhasználói kézikönyv is szabadon hozzáférhető.





Cikloisok

Az Euklides e cikk megjelenésekor remélhetőleg már a 2.4 publikált verziónál tart. A program elérhető az Interneten a `www.moti.hu/euklides` címen. Egy régebbi, kisebb tudású változata (1.1) ingyenes, a friss változat shareware kereskedelmi termék. Ez azt jelenti, hogy a fenti címről letölthető változat (melyhez részletes magyar nyelvű Súgó, sok-sok példaszerkesztés és külön letölthető kézikönyv is tartozik) bizonyos korlátozásokkal működik, amelyek feloldódnak, ha a felhasználó regisztrációs díj befizetésével megvásárolja a programot. A részletekkel kapcsolatban lásd a Súgót és a fenti honlapot. A programmal kapcsolatos kérdéseket a szerzők az `euk@freemail.hu` címen várják.

László István

Számítástechnikából kitűzött feladatok (10–12.)

I. 10. Egy mezőn N darab karót tűztünk ki, ismerjük mindegyik helyét. Szeretnénk bekeríteni azt a területet, amin a karók elhelyezkednek úgy, hogy az N darab karót egy kötéllel kerítjük körbe kívülről (így persze nem mindegyik fog érintkezni a bekerítő kötéllel).

Készíts programot, amely beolvassa N értékét, majd az N karó x- és y-koordinátáját, majd megadja, hogy a területet milyen hosszú kötéllel lehet bekeríteni!

(*10 pont*)

I. 11. Készíts programot Nap körüli bolygópályák szimulálására! A Nap a képernyő közepén helyezkedjen el, innen nem mozdul, és ismerjük a tömegét (N). A bolygónak ismerjük pillanatnyi helyzetét (X, Y), tömegét (B), valamint sebességét (V), ami a bolygót a Nappal összekötő egyenesre merőleges irányú sebességvektort jelent. Be kell olvasni egy T időközt, amelyben lépésenként számoljuk a bolygó pályáját az eredeti helye, a sebességvektora és a rá ható erők alapján.

Készíts programot, amely beolvassa N, X, Y, B és V értékét, majd rajzolja a bolygópályát!

(*10 pont*)

I. 12. Nagyon sokjegyű (pl. 100) számokat már az Excel sem tud összeadni, illetve szorozni, így más utat kell találni a megvalósításukra. Ha a táblázat egyes celláiba csak egyetlen számjegyet írunk, akkor sokjegyű számok is felírhatók, ezekre azonban el kell készíteni az összeadás és a szorzás műveleteket.

Készíts táblázatot, amely az első két sorba beírt, legfeljebb 100 jegyű számokat (cellánként 1 számjegy) összeadja, illetve szorozza. A szorzat is csak legfeljebb 100 jegyű lehet. A feladat megoldásában a táblázat első 7 sora, illetve 201 oszlopa használható.

Az alábbi példa a megoldás képe legfeljebb 10 jegyű számokra:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	1. szám:								1	5	3
2	2. szám:								4	5	6
3											
4											
5	Összeg:										
6									0	9	6
7	Szorzat:						6	9	7	6	8

(*10 pont*)

A feladatok megoldásai a következő címre küldendők:

Cím: szamtech@komal.elte.hu

A beküldési határidő: **2002. január 13.**

KöMaL – 2001/9 MAT0109 cianmagentayellowblack2002. június 19. – 8:58 (41. lap)