# Az elektrosztatikus mező újabb érdekes tulajdonságai

Az elektrosztatikus mező sok fontos és érdekes tulajdonsággal rendelkezik. Ilyen például a ponttöltés terének gömbszimmetriája, vagy az a tétel, amely szerint egy homogénen töltött gömbhéj tere kívül megegyezik egy ugyanakkora töltésű ponttöltés terével, a belsejében pedig a térerősség nulla. Ezeken a közismert dolgokon kívül felmerült bennem egy kérdés, amelynek sem a megoldását, sem magának a problémának a felvetését nem találtam meg egyetlen könyvben sem. Ez a probléma – főleg annak alapos átgondolása után – számomra új oldalról világította meg az elektrosztatikus (és vele együtt a hasonló egyenletekkel leírható magnetosztatikus, illetve gravitációs) erőterek tulajdonságait.

## Egy átlagolási probléma

A következő kérdés foglalkoztatott: vajon mit kapunk akkor, ha egy tetszőleges (nem feltétlenül gömbszimmetrikus) elektrosztatkus mezőben gondolatban felveszünk egy gömbfelületet, s erre átlagoljuk az elektromos térerősséget, illetve az elektromos potenciált?

Úgy sejtettem, hogy a térerősség átlaga meg fog egyezni a gömb középpontjában mérhető térerősséggel, a potenciál átlagértéke pedig a középpontbeli potenciállal. Mint látni fogjuk, ez a sejtés teljes általánosságban ugyan nem helyes, de nem áll messze a valóságtól, s kis módosítással egy igaz állítássá lehet átfogalmazni.

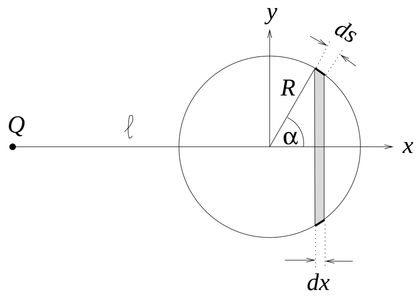
## A „nyers erő” módszere

Végezzük el a potenciál átlagolását először teljesen mechanikusan, vagyis hívjuk segítségül az integrálszámitást! (Ha az Olvasó még járatlan lenne a matematika ezen fejezetében, ne tegye le rögtön a cikket, legfeljebb ugorja át az alábbi részt, mert később elemi megoldást is fog találni a felvetett problémára!)

Tekintsünk először egy olyan erőteret, melyben egyetlen ponttöltés van csak, és $\ell$ távolságban helyezkedik el az $R$ sugarú képzeletbeli gömb középpontjától. Az $U$ potenciál „átlagán” a

$$U_{\text{átlag}} = \frac{\sum_i U_i \cdot df_i}{\sum_i df_i} \tag{1}$$

mennyiséget értjük. Ennek értelmezése: a gömbfelszínt felbontjuk elég kicsi $df_i$ felületelemekre ($i$ a felületdarabkák sorszámozására alkalmasan választott index), majd képezzük a felületen mérhető potenciáloknak a felületdarabkák nagysága szerint súlyozott átlagát. (Hangsúlyoznunk kell, hogy $df_i$ a felületdarabka *nagysága,* tehát skalár mennyiség, ne tévesszük össze a fluxus számításánál használatos „irányított felületelem” vektorral.)




Álljunk neki a számításnak! Vegyük fel a koordináta-rendszerünket az *ábrán* látható módon: a ponttöltés kerüljön az $x$ tengelyre, a gömb középpontja pedig legyen az origóban. Bontsuk fel a gömb felszínét $dx$ széles gömbövekre. Első dolgunk ezek felületének meghatározása:

$$df = 2\pi y \cdot ds = 2\pi R \sin\alpha \cdot \frac{dx}{\sin\alpha} = 2\pi R \cdot dx.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a gömbövek felülete csak $dx$-től függ, s ez nagyon kényelmessé teszi további dolgunkat. A fenti képlet alapján pl. könnyen meg tudjuk mondani a gömb teljes felszínét:

(2) $$F = \sum df = 2\pi R \cdot \sum_{x=-R}^{+R} dx = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2.$$

Következő lépésben kiszámoljuk a potenciált a gömbfelszín $x$ koordinátájú helyein.

$$U = \frac{kQ}{r},$$

ahol

$$r = \sqrt{(\ell+x)^2 + y^2} = \sqrt{(\ell+x)^2 + R^2 - x^2} = \sqrt{\ell^2 + 2\ell x + R^2}.$$

Most rátérhetünk magára az integrálásra. Mivel a ponttöltéstől azonos távolságra levő felületdarabkák egy keskeny gömböv mentén helyezkednek el, érdemes a gömbfelületet ilyen „övekre” darabolni, s ezek szerint végezni az átlagolást:

$$U_{\text{átlag}} = \frac{1}{F}\int U \cdot df = \frac{1}{4\pi R^2}\, 2R\pi \cdot kQ \cdot \int_{-R}^{R} \frac{1}{\sqrt{\ell^2 + 2\ell x + R^2}}\, dx =$$

(3) $$= \frac{kQ}{2\ell R}\big(|\ell+R| - |\ell-R|\big) = \begin{cases} \dfrac{kQ}{\ell}, & \text{ha } \ell \ge R, \\[2mm] \dfrac{kQ}{R}, & \text{ha } \ell \le R. \end{cases}$$

Furcsa képletet kaptunk. Egyrészt érdekes az alakja, hiszen a végső formulában $R$ és $\ell$ közül vagy csak az egyik, vagy csak a másik mennyiség szerepel, méghozzá teljesen szimmetrikus módon. Furcsa a kapott formula fizikai szempontból is, hiszen ugyanezek a képletek írják le, hogy mennyi egy $Q$ töltésű, homogén töltéseloszlású gömbhéj potenciálja a középponttól $\ell$ távolságban. Ez ugyan látszólag egy egész más probléma, mint amit eddig vizsgáltunk, de – mint látni fogjuk – a kettő között szoros (és jól kihasználható) kapcsolat van.

### Elemi megoldás az energiaviszonyok tanulmányozásából

Gondoljuk most azt, hogy az eddig képzeletbeli (nevezhetjük „virtuálisnak” is) gömbhéjunk egy valóságos, létező (szigetelő) test, amelyet egyenletesen feltöltöttünk, méghozzá éppen egységnyi, $q=1$ nagyságú töltéssel. Vajon mekkora ennek a homogénen töltött gömbhéjnak és a középpontjától $\ell$ távolságra levő $Q$ nagyságú ponttöltésnek a *kölcsönhatási energiája*?

Ezt az energiát kétféle módon is meghatározhatjuk: egyrészt úgy, hogy a gömbhéj potenciálját kiszámítjuk a ponttöltésünk helyén (ezt könnyen megtehetjük, hiszen a töltéseloszlás gömbszimmetrikus), majd ezt a potenciált megszorozzuk a ponttöltés nagyságával ($Q$-val). Az eredmény közismert, éppen a (3) formula végén megadott kifejezés.

Másképp is eljárhatunk: a pontszerű $Q$ töltés által létrehozott gömbszimmetrikus (Coulomb-féle) erőtérben számoljuk ki a gömbhéjon egyenletesen elosztott töltés potenciális energiáját. Ez utóbbit elvben úgy tehetjük meg, hogy a gömbhéjat gondolatban kicsiny darabkákra bontjuk, az egyes ($df$ nagyságú) felületdarabkákra eső töltés nagyságát, vagyis $df/(4\pi R^2)$-t megszorozzuk a $Q$ töltés által a felületdarabka helyén létrehozott potenciállal, majd ezeket az energiákat összeadogatjuk.

A második számítási módszer technikailag sokkal bonyolultabb, mint az első. Szerencsére nem kell végigszámolnunk a bonyolult összegzést, hiszen az eredménye nyilvánvalóan ugyanannyi, mint az első számolásé.

Vegyük észre, hogy a második számolási módszerrel adódó mennyiség nem más, mint a $Q$ töltés által létrehozott potenciál átlaga az $R$ sugarú gömb felületén. A két számítás eredményének egyenlőségét kihasználva tehát meg tudtuk határozni– méghozzá elemi úton, integrálszámítás alkalmazása nélkül – a kérdéses átlagértéket:

$$U_{\text{átlag}} = \begin{cases} \dfrac{kQ}{\ell}, & \text{ha } \ell \geq R, \\ \dfrac{kQ}{R}, & \text{ha } \ell \leq R. \end{cases} \tag{4}$$

### Az elektromos térerősség átlaga

Következő feladatunk a *térerősség* átlagolása lesz. Ezt az eddigi eredményeink alapján kétféleképpen is megtehetjük. Az első módszer azon az észrevételen alapul, hogy a térerősség szoros kapcsolatban van a potenciállal, pontosabban annak térbeli változási ütemével. Ezt a kapcsolatot úgy fogalmazhatjuk meg matematikai alakban, hogy ha egy $\overrightarrow{E}$ elektromos térerősségű helyről egy kicsiny $\Delta\overrightarrow{x}$ elmozdulásvektornyival odébbmegyünk, akkor az elektromos potenciál megváltozása:

$$\Delta U = -\overrightarrow{E} \cdot \Delta\overrightarrow{x}. \tag{5}$$

(A fenti képletben a két vektor közötti pont a skalárszorzat műveletét jelenti, a negatív előjel pedig azt veszi figyelembe, hogy $\overrightarrow{E}$ irányába haladva a potenciális energia csökken.)

Ezek szerint ha egy elektrosztatikus erőtérben helyről helyre ismerjük a potenciált, abból már a (5) alapján a térerősséget is kiszámíthatjuk. Egy adott helyen a térerősség komponenseit úgy határozhatjuk meg, hogy a kérdéses helyről indulva a koordinátatengelyek mentén sorra elmozdulunk egy kicsiny $\Delta s$ távolságnyit, majd a potenciálváltozásokat elosztjuk $\Delta s$-sel. Az így kapott három mennyiség (az előjeltől eltekintve) éppen a térerősség három komponense lesz.

Mi most nem egy adott pontbeli a térerősséget, hanem a térerősség *átlagát* szeretnénk meghatározni. Mivel azonban a térerősség átlagának komponensei nyilván a komponensek átlagaival egyeznek meg, ezek pedig az egész gömbfelület elmozdításakor bekövetkező energiaváltozással fejezhetők ki, a (4) és (5) képletek segítségével célhoz érhetünk. Az $x$ irányú térerősség-komponens átlagát például úgy számíthatjuk ki, hogy az egész gömbfelszínünket elmozdítjuk $x$ irányba $\Delta s$-sel, meghatározzuk a potenciál átlagának a megváltozását, s ezt elosztjuk $\Delta s$-sel. (Kihasználtuk, hogy a potenciálváltozások átlaga megegyezik az átlag változásával.)

Nézzük meg konkrétan, mit mond a (4)-es képlet és a fenti eljárás a térerősség átlagáról. Ha a ponttöltés a gömbfelületen belül van, akkor hiába mozgatjuk a gömbfelszínt, a potenciál átlaga nem fog változni, hiszen az csak $R$-től függ, $\ell$-tól nem! Emiatt a térerősségnek a gömb felületére vett átlaga *nulla*. Ha a $Q$ töltés a gömbön kívül van, akkor a helyzet egy kicsit bonyolultabb. Ilyenkor viszont azt a tényt használhatjuk ki, hogy a potenciál átlaga nem függ $R$-től, vagyis a gömbünk lehetne akár „pontszerű” is. No de ha ez lenne a helyzet, akkor a potenciális energia két ponttöltés ismert kölcsönhatási energiájával egyezne meg, a potenciális megváltozásából számolt térerősség pedig éppen a $Q$ töltés által a gömb középpontjában létrehozott Coulomb-mező térerősségével lenne egyenlő. Összefoglalva: egy pontszerű töltés elektromos térerősségének gömbfelületi átlagát a következő képlet adja meg:

$$\overrightarrow{E}_{\text{átlag}} = \begin{cases} \dfrac{kQ}{\ell^2} \cdot \dfrac{\overrightarrow{\ell}}{\ell}, & \text{ha } \ell \geq R, \\ 0, & \text{ha } \ell \leq R. \end{cases} \tag{6}$$

## Szuperpozíció

Mindeddig egyetlen pontszerű töltéssel, annak elektrosztatikus terének valamilyen képzeletbeli gömbfelületre vett átlagával foglalkoztunk. Mi a helyzet akkor, ha nem egy, hanem sok ponttöltés együttese (vagy akár töltések folytonos eloszlása) hozza létre az elektrosztatikus mezőt. Az eredő elektromos térerősség az egyes pontszerű töltésdarabkák terének vektori összege (szuperpozíciója), az összeg átlaga pedig az egyes térerősség-összetevők átlagának összege.

Az előző pontban beláttuk, hogy – pontszerű forrás esetén – az átlagos térerősség megegyezik a gömb középpontjában mérhető térerősséggel. A szuperpozíció elvének alkalmazásával ebből rögtön következik, hogy az eredő térerősség átlaga egy tetszőlegesen bonyolult elektrosztatikus mező esetében is éppen a gömbön *kívül* található töltések által a gömb középpontjában létrehozott elektromos térerősséggel egyezik meg. A gömbön belül található töltések terét nem szabad figyelembe vennünk, azok nem adnak járulékot az átlagos térerősséghez! Ez a kis „apróság” az, amit a tételünk első, sejtésen alapuló megfogalmazása még nem tartalmazott. Érdekes, hogy az irányított (vektornak tekintett) felületdarabkák szerinti összegzésnél (átlagolásnál) éppen fordított a helyzet: a gömbön kívül levő töltések járuléka nulla, csak a belül elhelyezkedő töltések kapnak szerepet, ezek határozzák meg a felületen áthaladó elektromos fluxust.

## Hatás–ellenhatás

Befejezésként megmutatjuk, hogy az elektromos térerősség gömbfelületi átlagára vonatkozó eredményt egyszerűbb módon, a potenciálra való hivatkozás nélkül is megkaphatjuk, méghozzá rögtön a legáltalánosabb, mindenféle szimmetriát nélkülöző mezőkre.

Gondoljuk ismét azt, hogy van egy ténylegesen létező, egyenletesen feltöltött gömbfelületünk egységnyi össztöltéssel. Ilyenkor a térerősség átlaga éppen azzal az erővel egyenlő, amelyet a teljes töltésrendszer a gömbfelületre kifejt. Ez az erő azonban – a hatás–ellenhatás törvénye szerint – a gömbfelület elektrosztatikus terének a többi töltésre kifejtett erőhatásával, pontosabban annak ellentettjével egyezik meg. Mivel a gömbfelület egyenletesen töltött, az erőtere megegyezik egy ponttöltés terével (legalábbis a gömbön kívül), az általa kifejtett erő tehát egy egységnyi nagyságú pontszerű töltés által a gömbön kívüli töltésekre kifejtett erővel egyenlő.

Alkalmazzuk most ismét a hatás-ellenhatás elvét: a gömbön kívüli töltésekre ható eredő erő (egy előjeltől eltekintve) a gömb középpontjába helyezett egységnyi töltésre ható erővel egyenlő, ez pedig nem más, mint a külső töltések elektromos térerőssége a gömb középpontjában. Mi a helyzet a gömbön belül található töltésekkel? Ennek végiggondolását az Olvasóra bízzuk.

Megfontolásaink során az elektrosztatikus mezőnek csupán azt a tulajdonságát használtuk ki, hogy pontszerű forrás terének nagysága a távolság négyzetével fordítottan arányos, továbbá azt, hogy érvényes a szuperpocíció elve. Ezekkel a tulajdonságokkal a Newton-féle gravitációs mező is rendelkezik, és némi megfontolás után a magnetosztatikus mezőre is átvihető. (Mágneses töltés ugyan nem található a Természetben, de a magnetosztatikus mező úgy írható le, *mintha léteznének* különálló mágneses pólusok, s rájuk az elektrosztatikához hasonló törvények teljesülnének.) Emiatt a cikkünkben tárgyalt valamennyi állítás változatlan formában érvényes a gravitációs, illetve a magnetosztatikus mezőkre is, sőt, a majdan felfedezendő egyéb „Coulomb-szerű” vektorterekre is alkalmazható.

**Pozsgay Balázs**
ELTE, I. éves fizikus hallgató

## Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye

Finnország adott otthont 2001. május 22. és 29. között az *Ifjú Fizikusok 14. Nemzetközi Versenyének (14$^{\text{th}}$ International Young Physicists' Tournament, IYPT).* A Helsinki melletti Espooban 16 országból szerveződött *18 csapat* versenyzett, ezúttal Lengyelország és Oroszország indult 2 csapattal. A résztvevő országok a következők voltak: *Ausztrália, Ausztria, Belorusszia, Bulgária, Csehország, Finnország, Grúzia, Németország, Magyarország, Hollandia, Lengyelország, Oroszország, Szlovákia, Svédország, Ukrajna.* Idén megfigyelőként vett részt, jövőre várhatóan csapatot is indít *India, Dél-Korea és Horvátország.*

Munkában a magyar csapat. Balról jobbra: Ballók István, Zsarnóczay Ádám (takarva), Drozdy Árpád, Szűcs Emese és Soós Péter. Háttérben a cseh versenyzők.

A döntő a táblázatban látható első 3 csapat között zajlott, amelyen az első helyet végül *Szlovákia* csapata szerezte meg. A magyar csapat, amely az 5. helyen végzett, így **III. díjat** kapott, a következő diákokból állt:

**Drozdy Árpád** (csapatkapitány), Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyakorlóiskola,

**Ballók István**, Gödöllő, Premontrei Szent Norbert Gimnázium,

**Soós Péter**, Kiskunhalas, Bibó István Gimnázium,

**Szűcs Emese**, Békéscsaba, Tevan Andor Gimnázium,

**Zsarnóczay Ádám**, Dunaújváros, Széchenyi István Gimnázium.

E szép teljesítmény mögött kemény munka állt. A mintegy 15 órán át tartó, 5 forduló-ban zajló versenyben a magyar diákok 4 fordulón keresztül az első három csapat között szerepeltek. A verseny játékszabályairól, a feladatokról, a résztvevő országokról, az eredmények részleteiről az Interneten lehet tájékozódni (angol nyelven).

A 14. IYPT honlapja: `http://www.tapiolanlukio.fi/iypt2001/`

A jövő évi, 15. IYPT honlapja: `http://iypt.org.ua/`

A csapatok döntő előtti eredményei a *táblázatban* láthatók.

| | Csapat | Pontszám |
|---|---|---|
| 1. | Németország | 242,4 |
| 2. | Szlovákia | 235,0 |
| 3. | Ausztrália | 233,8 |
| 4. | Ausztria | 233,2 |
| 5. | Magyarország | 231,6 |
| 6. | Belorusszia | 228,4 |
| 7–8. | Grúzia | 227,4 |
| 7–8. | Lengyelország (nemzeti csapat) | 227,4 |
| 9. | Oroszország I. (Jekatyerinburg csapata) | 225,6 |
| 10. | Ukrajna | 224,2 |
| 11. | Lengyelország (Felső-Szilézia csapata) | 223,0 |
| 12. | Csehország | 216,8 |
| 13. | Finnország | 210,4 |
| 14. | Oroszország II. (Szentpétervár csapata) | 204,0 |
| 15. | Hollandia | 202,4 |
| 16. | Svédország | 200,8 |
| 17. | Bulgária | 190,0 |
| 18. | USA | 162,2 |

Az együttes munka érdekes, vonzó, ezért nem véletlen, hogy Drozdy Árpád és Ballók István már második évben nevezett a versenyre. A csapattagokat válogatóversenyen választottuk ki, amelyen a jelöltek angolul ismertették egy-egy probléma megoldását. A versenyző diákokat tanáraik (Gulyás János, Hilbert Margit, Kispál István és Varga István) ösztönözték a részvételre.

A versenyen való részvételt az idén is az *Oktatási Minisztérium* támogatta. A felkészítő munka az *Eötvös Loránd Tudományegyetem Általános Fizika Tanszékén* történt, amelyhez nagy segítséget nyújtott a PC Plusz Bt. rendelkezésünkre bocsátott demonstrációs szoftvere. Támogatóinknak ezúton is köszönetet mondunk.

## Pályázati felhívás az Ifjú Fizikusok 15. Nemzetközi Versenyére

A *15. IYPT Ukrajnában,* a Fekete-tenger partján fekvő *Odesszában,* várhatóan 2002. május végén kerül megrendezésre. Az alább kitűzött feladatok közül legalább 4 probléma kidolgozásával (mérési jegyzőkönyv a kísérleti körülmények és a mérési adatok feltüntetésével, a jelenség értelmezése, fizikai leírása) lehet pályázni. A pályamunkák alapján az öt legjobb pályázó – további felkészítés után – képviseli hazánkat a nemzetközi versenyen. A verseny hivatalos nyelve az angol, a pályamunkákat azonban elegendő magyarul benyújtani. Pályázatok beküldési határideje: **2002. március 4.** Beküldési cím:

„Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye – Pályázat”

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Általános Fizika Tanszék

1518 Budapest, Pf. 32.

A pályázatban szerepeljen: a pályázó neve, osztálya, értesítési címe, telefonszáma, e-mail címe, az iskolájának neve és címe, felkészítő tanárának neve, továbbá esetleges angol nyelvvizsga-oklevelének fénymásolata. (A 12. évfolyamos tanulók csak akkor pályázzanak, ha az érettségire és a versenyre való készülést össze tudják egyeztetni.)

❄

1. „HŐERŐGÉP”. Magas függőleges üveghenger alsó felét töltsd meg forró vízzel, felső felét pedig hideg vízzel! Ezután helyezz a hengerbe néhány csepp étert vagy alkoholt tartalmazó, szemcseppentő-gumisapkával lezárt ampullát! Írd le a tapasztalt jelenségeket! Hogyan függ az ampulla mozgása az időtől?

2. PÓKHÁLÓ. Egyes pókhálók körkörös fogófonalain cseppsorok figyelhetők meg. Mi az oka kialakulásuknak? Végezz kísérleteket a lényeges paraméterek meghatározásához!

3. „REPDESŐ SZÍNEK”. Miért lobog a zászló a szélben? Vizsgáld kísérletileg a zászló körül kialakuló áramlási teret! Írd le a jelenséget!

4. KÖDBEVESZŐ ERDŐ. Egy távoli erdő színét nem zöldnek, hanem kékes színűnek látjuk. Mekkora az a legkisebb távolság, ahonnan ez a jelenség megfigyelhető? Milyen hatással vannak az időjárási körülmények a jelenségre? Lehetséges-e, hogy az erdő szürkének látszik?

5. „MOLNÁRKA”. Ismeretes, hogy kis méretű, nem nedvesedő testek a felületi feszültség miatt a víz felszínén úszhatnak. Készíts ezen az elven működő tutajt! Határozd meg a statikai és dinamikai paramétereit!

6. FORGALMI DUGÓ. Időnként a közúti forgalomban az autók – minden látható ok nélkül – hol megtorpannak, hol elindulnak. Modellezd a jelenséget!

7. OHM TÖRVÉNYE FOLYADÉKOKBAN. Gyakran mondjuk, az elektromos áram „folyik”. Csak ez az egy hasonlóság lenne az elektromos áram és a folyadékáram között? Keress egyéb analógiákat a két jelenség között, s vizsgáld meg mind elméleti, mind kísérleti úton!

8. TÖLTÖTT HOMOKSZEMEK. Önts rövid, vékony csövön keresztül finom, jól kiszárított kvarc-homokot kúp alakú, elektrométerhez kapcsolt fémedénybe! Vizsgáld a homokfolyam viselkedését az edény töltése közben! Mi történik a homokkal, ha a folyamot ultraibolya (UV) lámpával megvilágítjuk? *(Ne nézz az UV-lámpába!)*

9. KROMATOGRÁFIA. Helyezz egy csepp színes folyadékot itatóspapírra! Írd le mennyiségileg a megfigyelt jelenségeket!

10. HANGKOCSI. Készíts és mutass be olyan eszközt, amelyet kizárólag hanggal hajtunk meg! Vizsgáld meg a tulajdonságait!

11. EGYENSÚLY. Tölts tele vízzel úgy egy poharat, hogy a domború meniszkusz kialakuljon! Helyezz pingponglabdát a víz felszínére! Vizsgáld meg és magyarázd meg az egyensúly stabilitását! Ismételd meg a kísérletet más folyadékokkal is!

12. ELEKTROMOS VEZETÉS. Hogyan mérnéd meg egy sóoldat elektromos vezetőképességét közvetlen elektródkapcsolat nélkül? Elemezd a problémát, és mutasd be az eszközt is!

13. PÖRGŐ GOLYÓ. Helyezz vízszintes lemezre egy 2–3 cm átmérőjű acélgolyót! Tervezz és építs olyan berendezést, amellyel a golyó függőleges tengely körül nagy szögsebességgel megpörgethető! Az eszköz nem lehet mechanikai kapcsolatban a golyóval!

14. „RONGYOS VITORLA”. Határozd meg egy vitorla hatásfokának a perforációfoktól (átlyuggatottságtól) való függését! Mi lenne a hatása annak, ha halászhálót használnánk vitorlaként?

15. LÜKTETŐ LÉGBUBORÉK. Hozz létre 1–2 cm sugarú légbuborékot vízfelszín alá helyezett, lefelé fordított óraüveggel! Vezess egy vékony csövön keresztül alkoholt a buborékba! Szabályozd és állítsd be az alkohol beáramlási sebességét úgy, hogy a buborék ritmikusan pulzáljon! Tanulmányozd a jelenséget, és magyarázd meg megfigyeléseidet!

16. RUGALMAS INGA. Tanulmányozd és írd le olyan inga viselkedését, ahol az ingatest rugóra vagy rugalmas szálra van felfüggesztve!

17. „PALACKCSATA”. Végy két nyitott kólás üvegpalackot, majd koccantsd egyiket a másikhoz! Röviddel ezután az egyik palackból a kóla kilövell. Vizsgáld és magyarázd meg a jelenséget! *(Vigyázz! Az üveg törékeny, könnyen megvághatod magad!)*

**Rajkovits Zsuzsa** és **Kenesei Péter**
ELTE TTK Általános Fizika Tanszék

# Fizika az Eötvös Loránd Tudományegyetemen
## Információ pályaválasztóknak

Az ELTE Természettudományi Karán sok más szak mellett fizikusok és fizika szakos tanárok képzése is folyik az új, korszerű lágymányosi épületben (lásd a hátsó, belső borító 1. fényképét). A fizikus szakról a természet alapvető jelenségeiben megnyilvánuló törvényszerűségek kísérleti tanulmányozására, azok elméleti értelmezésére alkalmas szakemberek kerülnek ki. A hallgatók ismereteket szereznek a fizikai elveket hasznosító technikai alkalmazásokról, műszerek tervezéséről és működtetéséről, az elektronikus adatgyűjtés és adatfeldolgozás eszközeiről is. Az elméleti értelmezéshez elengedhetetlen magas színvonalú matematikai képzésben is részesülnek.

Az első három év intenzív alapozó képzését két év speciális irányú szakképzés követi. Ennek befejező szakaszában a hallgatók diplomamunkát készítenek, amelyet államvizsga keretében védenek meg. Az alapképzés nem ad önálló végzettséget, a gyakorlati foglalkozások, a kollokviumok és a szigorlatok sikeres teljesítésével a hallgatók a szakirányú képzésben való részvételre nyernek jogot, és más vezető külföldi, illetve hazai egyetemeken is folytathatnak résztanulmányokat. Az elmúlt években több mint 50 hallgatónk volt külföldön, az EU minden országában megfordultak. Különösen szoros a bécsi, a berlini, a bielefeldi és a koppenhágai egyetemekkel kiépített kapcsolatunk.

A diploma megszerzése után a legjobbak felvételt nyerhetnek az ELTE Doktori Iskolájára, ahol tanulmányaikat speciális irányokban folytathatják, és témavezetőjük irányításával kutatómunkát végeznek. A hároméves doktori képzés után megszerezhetik a doktori (Ph.D.) fokozatot.

Az alábbiakban – a teljesség igénye nélkül – bemutatunk néhány olyan korszerű kutatási témát, amelyek a ELTE Fizika Tanszékcsoportján, vagy az itt dolgozó kutatók közreműködésével külföldön folynak.

❄

Az asztrofizika a fizika ágai közül az egyik leggyorsabban fejlődő tudományterület, mert a technológiája az elmúlt évtizedben tette lehetővé a 10 méter átmérőjű tükrös távcsövek, az űrteleszkópok, a számítógéppel vezérelt észlelőberendezések létrehozását. Ezekkel a korábbiaknál sokkal távolabbi objektumok is megfigyelhetők; ma már 12 milliárd éves galaxisokról is tudunk képet készíteni. A Tanszékcsoport kutatóinak részvételével valósul meg többek között a Sloan Digital Sky Survey, amelynek a *2. képen* látható automata, New-Mexico-ban levő távcsöve 5 év alatt fog az északi égboltról jó felbontású digitális térképet készíteni. A hazánkban egyedül nálunk folyó modern asztrofizikai képzés, a nemzetközi kutatócsoportokkal fenntartott aktív kapcsolat eredményeképp világszínvonalon is versenyképes asztrofizikusokat nevel. Tíz éve nálunk végzett kollégánk baltimore-i, chicagói és durhami posztdoktori ösztöndíjak után éppen ebben az évben kapott professzori állást a legnagyobb távcsöveket üzemeltető Hawaii Egyetemen.

A Tanszékcsoport új szuperszámítógépe 128 darab 1,7 GHz sebességű P4-es processzorból állt össze (lásd a *3. képet*). A másodpercenként 870 milliárd művelet elvégzésére alkalmas gép a közép-európai régió leggyorsabb számítógépe. Elméleti fizikusaink a gép teljesítményének kihasználásával választ keresnek arra az alapvető kérdésre, amely ősidőktől fogva témája a mitológiának, a filozófiának és a fizikának: miért van a világegyetem, miért van benne anyag, és az miért éppen olyan, amilyennek mutatja magát. Egy ilyen szuperszámítógépes kutatáson „nevelkedett” hallgató nemcsak kozmológusként, de jól képzett informatikusként is elhelyezkedhet. Nem véletlen, hogy jelentős magyar informatikai cégek (mint amilyen a legsikeresebb hazai szoftvergyártó, a Graphisoft, a 2001-ben innovációs díjat nyert Elektronika, vagy a piacvezető megoldásszállító, a Synergon) tulajdonosai és vezetői mind fizikusként végeztek az ELTE-n.

A Tanszékcsoporton belül működő Környezeti Áramlások Laboratórium célja, hogy viszonylag olcsó, egyszerű, de ugyanakkor látványos, a jelenségek fizikai alapjaira rávilágító kísérletekkel segítsen képet alkotni a környezetünkben lezajló hidrodinamikai folyamatokról. Ezek kapcsán a hallgatók olyan jelenségek laboratóriumi változatával ismerkedhetnek meg, mint a hullámtörés, a szökőár, a ciklonok és a tengeráramlatok kialakulása, frontok képződése, füst terjedése, homokdűnék kialakulása, valamint a légköri és az óceáni turbulencia. A környezeti áramlások dinamikájában különleges hangsúlyt kap a közeg folyamatosan változó sűrűségéből adódó rétegzettsége és a Föld forgása. Az áramlások hasonlósági törvényén alapuló részletes elemzés azt mutatja, hogy a természetben lezajló folyamatok forgókádak és függőleges sűrűség-gradiensű sós víz segítségével laboratóriumban is hűen modellezhetők. A *4. képünkön* a hallgatók a hordalék folyókanyarulatokban történő lerakódását vizsgálják.

Chip-kártya, repülőgép, számítógép, digitális kamera, tengeri olajfúró torony, tomográf, űrhajó, mobiltelefon: a modern életet megtestesítő, ma már mindenki által ismert tárgyak; megalkotásuk a szilárdtestfizika és az anyagtudomány eredményei nélkül elképzelhetetlen lett volna. Az ELTE-n az anyag szerkezetéről atomi mélységekig információt adó kísérleti módszerekkel, az alapvető anyagi tulajdonságokat leíró és megmagyarázó elméletekkel és az ezekhez nélkülözhetetlen számítógépes modellezéssel ismerkednek meg az ilyen irányban szakosodó hallgatók. Az *5. képen* szerkezeti anyagok magashőmérsékleti mechanikai tulajdonságait vizsgáló korszerű mérőberendezés látható. Végzett diákjaink sikerrel dolgoznak egyebek között a „csúcstechnológiai” vállalatok kutató-fejlesztő laboratóriumaiban (pl. Semilab, GE Hungary, Furukawa Electric) éppúgy, mint a világ vezető kutatóhelyein: a franciaországi Grenoble szinkrotronja mellett, vagy a japánbeli Tsukuba Science City anyagkutató intézetében.

Az országban egyedül az ELTE-n van Biológiai Fizika Tanszék, ahol a baktériumtelepek vizsgálatától kezdve az állatok látásának tanulmányozásán keresztül az emberek kollektív viselkedésének modellezéséig (mint amilyen a pánikhelyzetben történő menekülés fizikai modellekkel való – a híres Nature Magazin címlapján is megjelent – leírása) sokszínű kutatómunka folyik. Az *6.* (hamis színezésű) *képen* látható vörösvértesteket a tanszéken működő atomi erő mikroszkóp (Atomic Force Microscope, AFM) „tapogatta le”, és a hozzá tartozó számítógép jelenítette meg. Az AFM esetében a pásztázást egy rugólapkán elhelyezkedő, rendkívül hegyes tű végzi. A tű mozgatása ún. piezoelektromos kristályok segítségével történik, a rugó elhajlását lézersugárral és egy összetett fotódiódával mérik. Jó beállítással akár atomi felbontású (az egyes atomokat külön-külön mutató!) képeket is lehet készíteni a berendezéssel. Mivel a minta nem igényel különleges előkészítést, ezért az AFM élő sejteket is kényelmesen, fiziológiás körülmények között tud vizsgálni.

A komplex rendszerek elmélete sok részből álló, összetett rendszerekkel foglalkozik. Ilyenre példa az időjárás, az internet, vagy a tőzsde. Ez utóbbi kettőről nemrég derült ki, hogy a fizikusok által már régóta tanulmányozott jelenségekkel mutatnak rokonságot, emiatt megértésükben a fizikusok is szerepet kapnak. Komplex rendszerek az atomi skálán létrehozott ”nanostruktúrák” és mágneses csapdába zárt atomok is, melyekből a jövő kvantumszámítógépeit építik. A komplex rendszereket a rendezettség és a káosz állandó váltakozása jellemzi, ennek megértése és befolyásolása a 21. század egyik legfontosabb kihívása. A számítógéppel készített *7. képen* egy nanogyűrűben mozgó elektron kaotikus hullámzását élvezhetjük.

❄

A fizika tanár szakos hallgatók alapképzése hasonló a fizikusokéhoz, az ő tanulmányaikat pedagógiai és szakmódszertani tárgyak egészítik ki. A *8. fényképen* az ún. „demonstrációs laboratóriumot” láthatjuk, amelyben a kísérletek bemutatásának fortélyait tanulják a leendő tanárok. Az ötödik évben a szakdolgozat készítése mellett tanítási gyakorlaton vesznek részt az ELTE gyakorló gimnáziumaiban. A fizikus szakot végző hallgató is kaphat tanári diplomát, ha az előírt szakmódszertani és pedagógiai tárgyakat elvégzi.

A fizika iránt érdeklődő diákok számára a legsokoldalúbb képzést biztosítjuk hazánkban. Az országban több szakterületet csak mi művelünk, így egyedül az ELTE fizikusképzésének kínálatában van biológiai fizika, asztrofizika, vagy komplex rendszerek fizikája. Az elsősorban alapkutatással foglalkozó tudóscsapat széleskörű nemzetközi kapcsolatokkal rendelkezik, és nagy kutatási együttműködésekben vesz részt. Ezek természetesen nyitva állnak hallgatóink előtt is, sőt, elképzelhetetlenek lennének, ha egyetemünk nem tudhatná a legfelkészültebb diákokat hallgatói sorában.

Rád is szükségünk van ahhoz, hogy ez továbbra is így legyen. Bármely kérdéseddel fordulj a tanszékcsoport vezetőjéhez, *Lendvai Jánoshoz* a 372-2845-ös telefonon, vagy a `lend@ludens.elte.hu` e-mail címen. Tanulmányi és felvételi ügyekben *Sasvári László* ad felvilágosítást a 209-0555/6572-es telefonon, vagy a `sasvari@galahad.elte.hu` e-mail címen.

Budapest, 2001. november

## Fizika gyakorlatok és feladatok megoldása

**P. 3373.** *A Naprendszer adatait felhasználva mutassuk meg, hogy az* 1999. *augusztus* 11*-i teljes napfogyatkozáskor a Hold árnyéka kb. kétszeres hangsebességgel futott át Magyarországon.*

(*4 pont*) Közli: *Korpássy Péter,* Budapest

**Megoldás.** Napfogyatkozáskor a Hold árnyékának mozgását a Föld tengely körüli forgása és a Holdnak a Föld körüli keringése határozza meg. Mivel a Hold keringése és a Föld tengelyforgása közel azonos irányú, ezért kérdéses sebességet úgy kapjuk meg, hogy a Hold árnyékának a forgásmentesnek képzelt Föld felszínéhez viszonyított sebességéből kivonjuk a forgó Föld felszínének (magyarországi) kerületi sebességét.

Magyarország a 47. szélességi körön fekszik, ennek kerülete

$$6380\ \mathrm{km}\cdot\cos 47^\circ\cdot 2\pi = 27\,340\ \mathrm{km}.$$

Ezt a távolságot a nap hosszával (86 400 s) osztva megkapjuk a Föld forgásából adódó kerületi sebességet hazánkban: $v_1 = 317\ \mathrm{m/s}$.

A Hold 29,5 nap $\approx 2{,}55\cdot 10^6$ s alatt kerüli meg a Földet. Ez az idő (az ún. *szinodikus hónap*) a Hold két azonos fázisa, pl. két egymást követő újhold között telik el, tehát ekkora időközönként kerül a Hold a Naphoz viszonyítva ugyanabba a helyzetbe. A Hold–Föld távolság $3{,}84\cdot 10^8$ m, a közelítőleg kör alakúnak tekintett holdpálya kerülete tehát

$$3{,}84\cdot 10^8\ \mathrm{m}\cdot 2\pi = 2{,}46\cdot 10^9\ \mathrm{m}.$$

A Hold keringési sebessége (a Földhöz és a Naphoz rögzített koordináta-rendszerben)

$$v_2 = \frac{2{,}41 \cdot 10^9\ \mathrm{m}}{2{,}55 \cdot 10^6\ \mathrm{s}} = 946\ \mathrm{m/s}.$$

Mivel a Föld–Hold távolság sokkal kisebb, mint a Föld–Nap távolság, a Hold árnyéka a Föld felszínén gyakorlatilag ugyanakkora sebességgel mozogna, mint maga a Hold, de csak akkor, ha a Föld nem forogna. Ténylegesen a Föld forog, így az árnyék sebessége

$$v = v_2 - v_1 \approx 630\ \mathrm{m/s},$$

ami valóban kb. a hangsebesség kétszerese.

*Hablicsek Márton* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.) dolgozata alapján

*Megjegyzések.* 1. A Hold pályasíkja egy kicsit (mintegy 5°-nyit) eltér a Föld pályasíkjától, és az Egyenlítő síkjával pedig még nagyobb szöget zár be. Emiatt a Hold keringéséből származó árnyék-sebesség és a Föld forgásából adódó sebesség nem pontosan ellentétes irányúak. Ennek a ténynek a figyelembe vétele az árnyékának mozgási sebességének nagyságát alig, irányát viszont észrevehetően módosítja. Akik átélték az 1999. augusztusi napfogyatkozást, bizonyára emlékeznek rá, hogy az árnyék nem pontosan nyugatról keletre mozgott, hanem (Szombathelyen, Tihanyon és Szegeden áthaladva) „eltérült” délkelet felé.

2. A Hold kb. 100 km-es árnyékának tényleges, megfigyelt sebessége a németországi Stuttgartban 740 m/s, a romániai Rimicu Vilcea városban 680 m/s volt, Magyarországon pedig ezen két érték átlaga környékén változott. A számított és a megfigyelt sebesség különbsége az elmélet figyelmen kívül hagyott finomabb részleteivel magyarázható.

3. Magyarországon utoljára 1842-ben volt teljes napfogyatkozás, a Bakony → Börzsöny irányban. Petőfi látta, verset is írt róla. Annyira belenézett a Napba, hogy a szeme károsodott!

4. Az árnyékfolt sebessége több, mint kétszerese a hangsebességnek. Ilyen gyorsan (a vadászrepülőket leszámítva) csak a CONCORDE repül. Ezt a lehetőséget ki is használták: 1999 augusztusában amatőr csillagászok egy csoportja a szuperszonikus utasszállítóról kb. 1 óran keresztül fényképezhette az ilymódon „meghosszabbított” napfogyatkozást.

*(K. P.)*

48 dolgozat érkezett. Helyes 26 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 12, hiányos (1–2 pont) 8, hibás 2 dolgozat

**P. 3425.** *Milyen egy kerékpár küllős kerekének képe a célfotón? (A célfotó úgy készül, hogy a célvonal nagyon keskeny sávjáról nagyon sűrűn egymás után elektronikus kamerával felvételeket készítenek, majd ezeket egymás mellett, a kerékpár várható haladási sebességének megfelelő távolságban helyezik el.)*

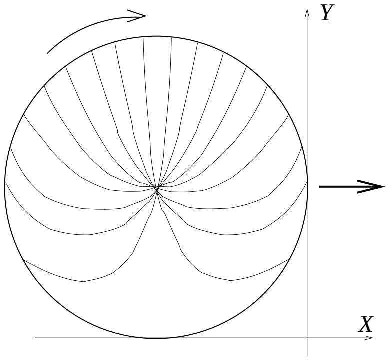
(*6 pont*) Közli: *Bodor András,* Budapest

**Megoldás.** Az egyszerűség kedvéért válasszuk a kerék sugarát és a sebességét egységnyinek (ekkor a szögsebessége is egységnyi lesz). Válasszunk egy olyan koordináta-rendszert, melynek $x$ tengelye a vízszintes pályán jobbra haladó kerékpár sebességének irányába mutat, az $y$ tengelyt pedig függőlegesen felfelé irányítjuk.

Amikor a kerék tengelye a $(-1, 1)$ pontban van (tehát amikor a kerék legeleje éppen eléri az $x = 0$ helyen levő célvonalat), ax $x$ tengellyel $\alpha$ szöget bezáró küllő egyenlete:

$$y - 1 = \mathrm{tg}\ \alpha \cdot (x + 1).$$

(Nem vettük figyelembe a kerékagy méretét, vagyis úgy tekintettük, mintha valamennyi küllő meghosszabbítása a kerék tengelyén haladna át.) Bizonyos $t$ idő elteltével a küllő $-t$ szöggel elfordul, a kerék pedig a pozitív $x$ tengely irányában $t$ szakasznyit elmozdul, a küllő egyenlete tehát ekkor




$$y-1=\mathrm{tg}\,(\alpha-t)\cdot(x-t+1)$$

lesz. A célfotón az $y$ tengelyen fekvő, vagyis az $x=0$-nak megfelelő pontok láthatók, méghozzá

$$Y=y(t)_{x=0}=1+\mathrm{tg}\,(\alpha-t)\cdot(1-t)$$

magasságban, vízszintesen pedig (az egységnyi haladási sebességnek megfelelően) az $X=-t$ pontba helyezve. (A célfotón leolvasható „virtuális valóságot” megadó koordinátákat nagybetűkkel jelöltük, ezek nem tévesztendők össze a kerék és a küllők valódi, kisbetűs koordinátáival!)

Ábrázoljuk a

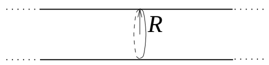
$$Y(X)=1+\mathrm{tg}\,(\alpha+X)\cdot(X+1)$$

függvényt különböző (mondjuk 20°-onként növekvő) $\alpha$ értékek mellett! A kerék abroncsa a célfotón is körnek látszik, hiszen egy tiszta elforgatás a kört körbe viszi át, a kerék egészének transzlációs mozgását pedig a képpontok megfelelő nagyságú „elektronikus eltolása” éppen aránytartó módon veszi figyelembe.

Nem ilyen egyszerű a helyzet a küllőkkel. Azok az *ábrán* látható módon erősen eltorzítva jelennek meg a képen, alakjuk jól egyezik az elektronikus célfotókon ténylegesen megfigyelhető (a nagyobb kerékpáros versenyek után az Interneten is megjelenő és tanulmányozható küllő-alakokkal. (Egy ilyen célfotó a KöMaL honlapján a jelen feladat előzetes rövid megoldásánál is megtalálható. A Szerk.)

*Dőry Magdolna* (Szentendre, Ferences Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján

22 dolgozat érkezett. Helyes Börzsönyi Ádám, Dőry Magdolna, Geresdi Attila, Horváth Szabolcs, Raffai Péter és Siroki László megoldása. Hiányos (1–3 pont) 9, hibás 7.




**P. 3436.** *Nevenincs csillag egyik bolygója hosszú, henger alakú. A bolygó átlagsűrűsége ugyanakkora, mint a Földé, sugara is megegyezik a Föld sugarával, tengelyforgási ideje pedig éppen 1 nap.*

$a$) *Mekkora az első kozmikus sebesség ennél a bolygónál?*

$b$) *A bolygó felszíne felett milyen magasan keringenek az ottani távközlési szinkronműholdak?*

$c$) *Mekkora a második kozmikus sebesség ennél a bolygónál?*

(*5 pont*) Közli: *Horányi Gábor,* Budapest

**Megoldás.** Egy nagyon hosszú henger körül a gravitációs erőtér hengerszimmetrikus, a térerősség iránya (a henger végtől elegendően távol) radiális, azaz a henger tengelyére merőleges irányú, nagysága pedig csak a tengelytől mért távolságtól függ.



KöMaL – 2001/9 FIZ0109 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 20:50 (14. lap)

A gravitációs erőtörvény és a Coulomb-törvény analógiáját felhasználva megállapíthatjuk, hogy egy $m$ tömegű testből „kilépő” gravitációs erővonalak száma (azaz a **g** gravitációs gyorsulás és a rá merőleges felület szorzata) $4\pi f \cdot m$, ahol $f$ a Newton-féle gravitációs állandó. Eszerint egy $L$ hosszúságú, $r$ sugarú henger palástján kilépő $g$-vonalak száma és a hengerben található tömeg kapcsolata:

$$g \cdot 2r\pi L = 4\pi f R^2 \pi L \varrho, \quad \text{azaz} \quad g(r) = \frac{2\pi f R^2 \varrho}{r}.$$

*a*) A fenti erőtörvény egy körpályán keringő test sebessége (az $mg = mv^2/r$ mozgásegyenlet) szerint egy körpályán keringő test sebessége a pálya sugarától függetlenül (így a bolygó felszínén is)

$$v = \sqrt{2fR^2\pi\varrho},$$

ekkora tehát a bolygón az első kozmikus sebesség. Ez a Földre érvényes

$$v_F = \sqrt{\frac{fM_{\text{Föld}}}{R}} = \sqrt{\frac{4}{3}R^2\pi f\varrho} = 7{,}9\ \text{km/s}$$

értéknél $\sqrt{3/2}$-szer nagyobb, mintegy 9,7 km/s.

*b*) Egy $r$ sugarú pályán keringő műhold keringési ideje $T_r = 2\pi r/v$, ha tehát ezen a bolygón egy „nap” $T_0$ hosszú, a szinkronműhold pályasugara

$$r_0 = \frac{T_0 v}{2\pi} = R\sqrt{\frac{T_0^2 f\varrho}{2\pi}}.$$

A Föld esetében ez a távolság $r^* = R\sqrt[3]{T_0^2 f\varrho/3\pi}$, azaz

$$r_0 = \sqrt{\frac{2r^{*3}}{3R}} \approx 1{,}33 \cdot 10^8\ \text{m}.$$

A távközlési szinkronműholdak tehát $r_0 - R = 1{,}27 \cdot 10^8$ m magasan keringenek a hosszú, henger alakú bolygó felszíne felett.

*c*) A második kozmikus sebesség, azaz a bolygóról való szökési sebesség nagyon nagy, hogy pontosan mekkora, az a bolygó hosszától függ. Végtelen hossz esetén a szökési sebesség is végtelen nagy, mert az $1/r$-es törvény szerint változó erőtérből véges energia-befektetéssel *nem lehet* megszökni. Ennek belátására tekintsük a távolságoknak egy mértani haladvány szerint növekvő sorozatát: $r_n = \alpha^n r_0$ ($\alpha > 1$ és mondjuk $r_0 = R$). Az $r_{n-1}$ magasságból az $r_n$ magasságba való feljutáshoz szükséges $E(r_{n-1} \to r_n)$ energia független az $n$-től: ahogy $n$ nő, amennyire csökken az erő, annyira nő az út. Végül is az $r_0$ magasságból az $r_N$ magasságba való feljutáshoz $E(r_0 \to r_N) = NE(r_0 \to r_1)$ energia kell. Már ebből is látszik, hogy véges energiával csak véges magasságra lehet feljutni.

Ha a bolygó nem végtelen hosszú (a hossza mondjuk $H$), akkor amíg a végeitől távol vagyunk, és $r \ll H$, addig az erőtörvény $1/r$-es, de ha már $r \simeq H$, az erőtörvény jellege megváltozik, és $r \gg H$ esetén a megszokott $1/r^2$-es lesz. Egy ilyen bolygóról már véges nagyságú kezdősebességgel indulva is meg lehet szökni.

*Dolgos Gergely* (Budapest, Árpád Gimn., 11. o.t.) és
*Siroki László* (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

*Megjegyzés.* Integrálszámítás segítségével belátható, hogy a második kozmikus sebesség az első kozmikus sebességnek kb. $\sqrt{2}\cdot\ln(H/R)$-szerese. (A Föld esetében az arány $\sqrt{2}$.) Ez a logaritmikus faktor még $H \gg R$ esetén sem túlságosan nagy (pl. $H = 10\,R$-nél $v_{II}/v_I$ kb. 3, és $H = 1000\,R$-nél sem nagyobb 10-nél).

*(G. P.)*

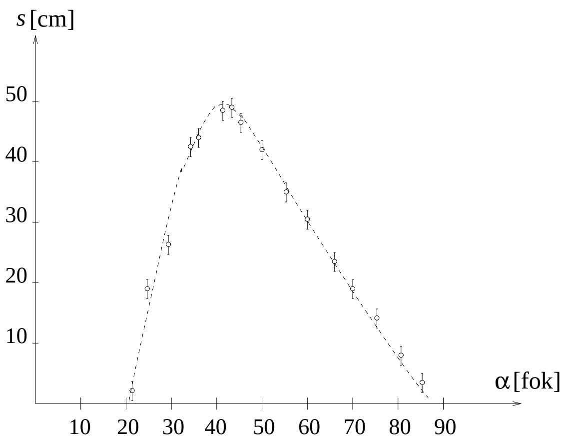
37 dolgozat érkezett. Helyes 10 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 13, hiányos (2–3 pont) 8, hibás 6 dolgozat.

## A mérési feladat megoldása

**M. 226.** *Készítsünk rajztáblából egy változtatható hajlásszögű lejtőt! Illesszük a rajztábla alját az asztal széléhez úgy, hogy a lejtőn lecsúszó test ütközés nélkül hagyja el a lejtőt és essen a talajra.*

*Mérjük meg, hogy mekkora hajlásszög esetén esik le legtávolabbra a rajztábla tetejéről lecsúszó pénzérme! Függ-e az eredmény a rajztábla hosszától, illetve az asztal magasságától, valamint a pénzérmétől?*

(*6 pont*) A *Bay Zoltán fizikaverseny* (Sarkad) kísérleti feladata alapján

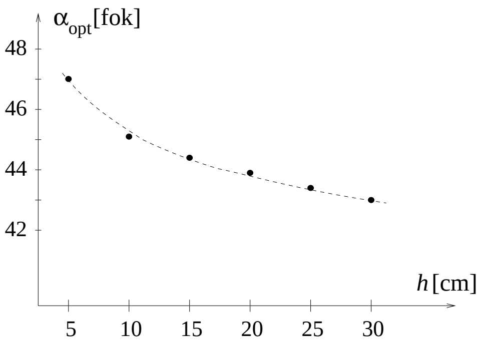



*1. ábra. Az esés távolsága a lejtő hajlásszögének függvényében*

**Megoldás.** A mérés elvégzésekor a legnagyobb problémát az érme talajra érési helyének meghatározása okozta, mert az érme innen rendszerint továbbgurult (-repült, -pattant). A feladat megoldói a legkülönbözőbb „trükköket" alkalmazták. Nagyon sokan másolópapírt helyeztek a földre, amelyen a leeső érme jól megfigyelhető nyomot hagyott. Többen apró szemű anyagot (lisztet, búzadarát, homokot, teafüvet stb.) szórtak a földre, és ezt használták nyomjelzőként. Rajztábla helyett néhányan más „csúszóalkalmatosságot" (gyúródeszkát, polclapot, mérnöki rajzasztalt, plexilapot) használtak; ez a mérés lényegét nem változtatja meg, tehát elfogadható módosítás.

A mérést elvégzők azt az eredményt kapták, hogy a különböző érmék a $45 \pm 10$ fokos szögtartomány valamelyik értéke esetén esnek legmesszebbre az asztal szélétől. Az *1. ábrán* látható grafikon *Tóth Sándor* (Csongrád, Batsányi J. Gimn., 11. o.t.) mérési adatait alapján készült, a becsült mérési hibákat és az adatokra „szemmel” illesztett görbét is feltüntetve.

A feladat második részét nagyon sokan félreértették, és azt vizsgálták, hogy a földetérés távolsága hogyan változik a rajztábla hosszának és az asztal magasságának függvényében. A feladat az első részfeladat mérési adataiból kiolvasható eredménynek, vagyis annak a *szögnek* a fentiektől való függését kérdezte, amelynél az érme a *legtávolabbra* esik. Ezt a részfeladatot csak néhányan oldották meg elfogadhatóan; ők azt kapták, hogy az „optimális szög” a mérési hibahatáron belül *nem* függ sem a pénzérmétől (annak „névértékétől”), sem pedig az asztal magasságától. A rajztábla hosszával kapcsolatban megoszlottak a vélemények. *Geresdi Attila* (Pécs, Árpád Fejedelem Gimn., 12. o.t.) és *Orosz Gergő* (Miskolc, Földes F. Gimn., 12. o.t.) nem tudtak kimutatni a mérési hibán belül ilyen függést. *Kiss Imre* (Pécs, Babits M. Gyak. Gimn., 10. o.t.) és Tóth Sándor viszont azt találta, hogy ez a szögérték (amelynél a legmesszebbre repül az érme) enyhe csökkenést mutat az indítási magasság növelésekor. A *2. ábrán* látható grafikon Kiss Imre mérési adatait mutatja.



*2. ábra. Az „optimális” szög függése a lejtő magasságától*

A szög-, illetve helymeghatározás becsült mérési hibái 5 és 10 százalék közé tehetők.

81 dolgozat érkezett. Helyes Geresdi Attila, Kiss Imre, Orosz Gergő, Tóth Sándor, Szilágyi Péter megoldása. Kicsit hiányos (5 pont) 10, 4 pontot kapott 18, hiányos (1–3 pont) 37, nem tartalmaz értékelhető mérési adatokat 11 dolgozat.

## Fizikából kitűzött feladatok

**M. 229.** Vízszintes, sima és száraz műanyaglapon állítsunk elő (pl. szemcseppentővel) különböző tömegű vízcseppeket! Vizsgáljuk meg, hogyan függ a vízcsepp átmérője a csepp tömegétől!

(*6 pont*) Közli: *Varga István*, Békéscsaba

**P. 3478.** Becsüld meg, mekkora munkát végzel, miközben fekvésből szabályos fekvőtámasz-helyzetbe nyomod ki magadat!

(*3 pont*) *Károly Ireneusz verseny,* Szombathely

**P. 3479.** Egy csövön keresztül hidrogéngázt áramoltatnak, miközben a csövet körülvevő vízzel hűtik a gázt. A beáramló gáz hőmérséklete 60 C°, a kiáramlóé 30 C°. A hűtőtartályban 60 liter víz fér el, amit óránként cserélnek. A hűtővíz kezdeti hőmérséklete 10 C°, amikor pedig cserélik, 20 C°. Hány kg gáz áramlik át a csövön egy óra alatt?

(*4 pont*) *„Keresd a megoldást” verseny,* Szeged

**P. 3480.** Egy bolygón, amelynek sugara 5000 km, kilőnek egy rakétát az első kozmikus sebességgel, a függőlegeshez képest 60°-os szögben. Legfeljebb milyen magasra ér fel a rakéta?

(*5 pont*) *Schwartz-emlékverseny,* Nagyvárad (Románia)

**P. 3481.** Hogyan függ a hőmérséklettől egy homogén anyagból készült fizikai inga lengésideje?

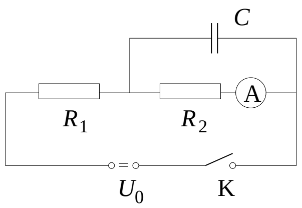
(*4 pont*) Közli: *Horváth István,* Fonyód

**P. 3482.** Három koncentrikus, vékony fémgömbhéj közül az $R$ sugarú középső gömbhéjon $Q$ töltés van, az $R_{\mathrm{b}}=\frac{1}{2}R$ sugarú belső és az $R_{\mathrm{k}}=\frac{3}{2}R$ sugarú külső gömbhéjat leföldeltük.

$a$) Mekkora töltés van a földelt gömbhéjakon?

$b$) Ábrázoljuk a térerősséget a középponttól mért távolság függvényében!

(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs




**P. 3483.** Az *ábra* szerinti kapcsolásban a K kapcsoló kezdetben nyitott és a kondenzátor töltetlen. Ezután zárjuk a kapcsolót, és hagyjuk, hogy a kondenzátor maximálisan feltöltődjön, majd nyitjuk a kapcsolót. Határozzuk meg az ampermérő által mért értékeket

$a$) közvetlenül a kapcsoló zárása után;

$b$) a kapcsoló zárását követően hosszú idő múlva;

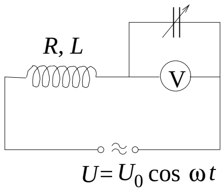
$c$) közvetlenül a kapcsoló nyitása után!

($U_0=30$ V, $R_1=10$ kΩ, $R_2=5$ kΩ.)

(*4 pont*) *Nagy László verseny,* Kazincbarcika

**P. 3484.** Mekkora legyen az *ábrán* látható változtatható kondenzátor kapacitása, hogy a voltmérő a legnagyobb feszültséget mutassa?

(*5 pont*) *Madas László* feladata nyomán




**P. 3485.** A Nap sokkal nagyobb erővel vonzza a Földet, mint a Hold.

$a$) Mekkora a két erő aránya?

$b$) Mi a magyarázata annak, hogy a Hold árapálykeltő hatása mégis többszöröse a Napénak?

(*5 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Budapest

**P. 3486.** Az $^{14}$N mag kötési energiája 16,19 pJ, a $^{14}$C mag kötési energiája 16,37 pJ. Melyik atommag bomlik a másikra, és miért?

(*5 pont*) *Szilárd Leó nukleáris verseny,* Paks

**P. 3487.** Száz éve (1901. december 5-én) született Werner Heisenberg, Nobel-díjas német elméleti fizikus. Az általa bevezetett határozatlansági reláció alapján becsüljük meg, mekkora egy fenyőtű hegyén „ülő” szénatom, illetve elektron sebességének határozatlansága!

(*4 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

❄

A feladatok megoldásai a következő címre küldendők:
**KöMaL Szerkesztőség, Budapest 112, Pf. 32. 1518**
A beküldési határidő: **2001. december 11.**

❄

## Olimpiai levelezés

**OLI. 4.** *Egy víztartály keresztmetszete a magasság függvényében (mondjuk hatványfüggvény szerint) változik. Milyen legyen ez a függvény, ha azt szeretnénk elérni, hogy a tartályban levő víz mennyisége a fenéken levő csap kinyitása után – a radioaktív bomlástörvényhez hasonlóan – időben exponenciálisan csökkenjen? Modellezzük víztartályokkal a radioaktív bomlási sorokat!*

*Útmutatás:* $x^n$ *változási üteme (*$x$ *szerinti deriváltja)* $n \cdot x^{n-1}$.

A feladat vázlatos megoldása vagy végeredménye 1 hónapon belül elektronikus (esetleg hagyományos) levélben küldhető be a `gnadig@komal.elte.hu` címre (illetve a Szerkesztőségbe). Minden levélíró néhány napon belül névre szóló választ kap, melyből megtudhatja, hogy jó-e a megoldása, vagy ha nem, hol hibázott és hogyan léphetne tovább.

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS

(Volume 51. No. 9. December 2001)

# Problems in Mathematics

**New exercises for practice – competition C** (see page 548): **C. 650.** In a picture gallery, the price of the picture frames is proportional to the price of the paintings in them. In order to reduce the differences between the prices of the pictures, the manager interchanges the frames of two pairs of pictures. In one case, one picture, that was originally five times as expensive as the other one, is now only three times as expensive. How does the ratio of the prices of the "Winter Landscape" and the "Naughty Boy" change if the "Winter Landscape" originally cost nine times as much as the "Naughty Boy"? **C. 651.** The shaded figure in the diagram is bounded by semicircles. The diameter $AB$ has a segment of length $1/5$ units within the shaded figure. Find the perimeter and area of the shaded figure. **C. 652.** Let $s$ be a positive integer of an odd number of digits. Let $f$ denote the number that consists of the digits of $f$, but in opposite order. Prove that $s+f$ is divisible by 11 if and only if $s$ is also divisible. **C. 653.** For how many different values of the parameter $p$ do the following simultaneous equations have exactly one solution? $x^2-y^2=0$, $xy+px-py=p^2$ **C. 654.** $f_a$, $f_b$ and $f_c$ denote the lengths of the interior angle bisectors in a triangle of sides $a$, $b$, $c$, and area $T$. Prove that $\frac{f_a\cdot f_b\cdot f_c}{abc}=4T\cdot\frac{a+b+c}{(a+b)(b+c)(a+c)}$. (Proposed by *G. Kovács,* Budapest)

**New exercises – competition B** (see page 549): **B. 3502.** The semicircle of diameter $AB$ intersects the altitude drawn from vertex $C$ of triangle $ABC$ at point $C_1$, and the semicircle of diameter $BC$ intersects the altitude from $A$ at point $A_1$. Prove that $BC_1=BA_1$. (*3 points*) **B. 3503.** Given are the segments $a$,$b$,$c$,$d$ and $f$. Assuming that there exists a quadrilateral whose sides are $a$,$b$,$c$,$d$ and the length of the segment connecting the midpoints of two opposite sides is $f$ construct the quadrilateral. (*4 points*) **B. 3504.** If $S(n)$ denotes the sum of the digits of the number $n$ in decimal notation, and $U_k=11\ldots1$ is the number that consists of $k$ ones, find the values of $k$ for which $S(U_k^2)=(S(U_k)^2)$. (*4 points*) **B. 3505.** A regular octagon is subdivided into parallelograms. Prove that there is a rectangle among the parallelograms. (*5 points*) **B. 3506.** $f$ is a polynomial for which $f(x^2+1)-f(x^2-1)=4x^2+6$. Find the polynomial $f(x^2+1)-f(x^2)$. (*4 points*) **B. 3507.** Let $f(x)$ be a polynomial of integer coefficients, $p$ and $q$ coprime numbers such that $q\neq 0$. Prove that if $p/q$ is a root of the polynomial, then $f(k)$ id divisible by $p-kq$ for every integer $k$. Is the converse of the statement also true? (*4 points*) **B. 3508.** The triangles $ABC$ and $A_1B_1C_1$ are symmetric about a line. Draw a parallel through $A_1$ to $BC$, through $B_1$ to $AC$, and finally, through $C_1$ to $AB$. Prove that the three lines all pass through a common point. (*4 points*) **B. 3509.** Prove that, if $0<x<\frac{\pi}{2^{k+1}}$, then $\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\ldots+\frac{1}{\sin 2^k x}<\cot x$. (*3 points*) (Proposed by *J. Balogh,* Kaposvár) **B. 3510.** Consider the planes through the vertices of tetrahedron $ABCD$ that are parallel to the opposite faces. The four planes enclose another tetrahedron. Prove that $A$, $B$, $C$ and $D$ are the centroids of the faces of the new tetrahedron. (*3 points*) **B. 3511.** For the non-negative numbers $a$, $b$, $c$ and $d$, $a\le 1$, $a+b\le 5$, $a+b+c\le 14$, $a+b+c+d\le 30$. Prove that $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\le 10$. (*5 points*)

**New problems – competition A** (see page 550): **A. 278.** $P$ is a point on the extension of the diagonal $AC$ of rectangle $ABCD$ beyond $C$, such that $BPD\angle=CBP\angle$. Find the ratio $PB:PC$. **A. 279.** Are there such rational functions $f$ and $g$ that $\big(f(x)\big)^3+\big(g(x)\big)^3=x$? **A. 280.** For each positive integer $n$, let $f_n(\vartheta)=\sin\vartheta\cdot\sin(2\vartheta)\cdot\sin(4\vartheta)\cdot\ldots\cdot\sin(2^n\vartheta)$. For all real $\vartheta$ and all $n$, prove that $|f_n(\vartheta)|<\frac{2}{\sqrt{3}}|f_n(\pi/3)|$. (IMC 8, Prague, 2001)

## Problems in Informatics

**I. 10.** Suppose we know the positions of $N$ sticks placed onto a field. Our aim is to encircle the area these sticks occupy with a single rope from outside. (Of course, in general not all sticks will be touching the encircling rope.) Write a program that reads the number $N$, and both coordinates $x$ and $y$ of each of the $N$ sticks, then prints the length of rope needed to encircle the area. (*10 points*)

**I. 11.** Write a program that simulates the orbit of a planet around our Sun. The Sun is to be placed in the middle of the screen, its position is fixed throughout the simulation, and its mass is denoted by $N$. We know the instantaneous position $(X,Y)$ of the planet, its mass $B$, further its velocity vector $V$ (perpendicular to the straight line connecting the Sun and the planet). The program should compute the position of the planet in each time step $T$, according to its original position, velocity vector and the forces acting on it. Your program should read the values $N$, $X$, $Y$, $B$, $V$ and $T$, then draw the orbit of the planet. (*10 points*)

**I. 12.** Numbers having very many digits (e.g. 100) can not be added together or multiplied by Excel, therefore one should look for an alternative solution. These large numbers can be represented, for example, by writing only one digit into each cell, however, addition and multiplication should be devised for numbers of this form. Prepare a sheet to add and multiply two numbers which have been entered into the first two rows, and having at most 100 digits—one digit per cell. The product can not have more than 100 digits either. During the solution of the problem, you are only allowed to use the first seven rows and 201 columns of the sheet. The following example shows a solution for numbers having at most 10 digits:

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1st number | | | | | | | | 1 | 5 | 3 |
| 2 | 2nd number | | | | | | | | 4 | 5 | 6 |
| 3 | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | |
| 5 | Sum: | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | 0 | 9 | 6 |
| 7 | Product | | | | | | 6 | 9 | 7 | 6 | 8 |

(*10 points*)

## Problems in Physics

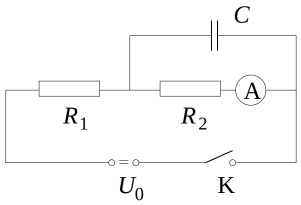
**M. 229.** On a smooth and dry horizontal plastic surface prepare a few water drops of different mass (e.g. with an eye-dropper). Examine the relation between the diameter and the mass of the water drops.

**P. 3478.** Estimate how much work you do while you reach a proper press-up position from lying. **P. 3479.** Hydrogen gas is kept streaming through a tube while it is cooled by water surrounding the tube. The temperature of the incoming gas is $60\,\mathrm{C}^\circ$ and that of the outgoing gas is $30\,\mathrm{C}^\circ$. The capacity of the cooler tank is 60 liter and the water in it is completely changed in every hour. The initial temperature of the cooling water is $10\,\mathrm{C}^\circ$ and it is $20\,\mathrm{C}^\circ$ when it is changed. What is the amount of the gas in kgs that goes through the tube in one hour? **P. 3480.** From a 5000 km radius planet a rocket is launched at the first cosmic velocity in a direction at a $60^\circ$ angle to the vertical direction. What is the maximum height the rocket can reach? **P. 3481.** What

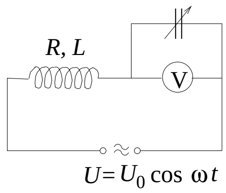


KöMaL – 2001/9 FIZ0109 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 20:50 (21. lap)

is the relation between the temperature and the swing period of a physical pendulum made of a homogeneous material? **P. 3482.** On the middle one of three thin concentric spherical metal shells of radius $R$ there is $Q$ electric charge. The inner spherical shell of radius $R_1 = \frac{1}{2}R$ and the outer spherical shell of radius $R_2 = \frac{3}{2}R$ are earthed. $a$) What is the amount of the electric charge on the earthed spherical shells? $b$) Plot the electric field strength versus the distance from the centre. **P. 3483.** In the connection shown in the *figure* the switch K is open and the capacitor is uncharged. Then we close the switch and let the capacitor charge up to the maximum and open the switch again. Determine the values indicated by the ammeter $a$) directly after closing the switch; $b$) a long time after the switch was closed; $c$) directly after reopening the switch; ($U_0 = 30$ V, $R_1 = 10$ kΩ, $R_2 = 5$ kΩ.)**P. 3484.** What should be the capacity of the adjustable capacitor shown in the *figure* so that the voltmeter indicates the highest voltage? **P. 3485.** The Sun attracts the Earth with a lot greater force then the Moon does. $a$) What is the ratio of the two forces? $b$) What is the explanation for the fact that despite this the tidal effect of the Moon is a few times bigger than that of the Sun. **P. 3486.** The binding energy of the $^{14}$N nucleus is 16.19 pJ and the $^{14}$C nucleus is 16.37 pJ. Which nucleus is the decay product of the other, and why? **P. 3487.** Werner Heisenberg, the Nobel Prize winner German theoretical physicist, was born a hundred years ago (5$^{\text{th}}$ December 1901). With the help of the uncertainty principle introduced by him estimate the uncertainty of the velocity of a carbon atom and an electron ‘sitting’ on the point of a pine needle!




**3483**




**3484**

## Nagyenergiájú ütközések

Ha egy viszonylag kicsi, de nagyon nagy sebességű test (például egy „puskagolyó”) egy nagyobb, de könnyen roncsolható másik testnek ütközik (ilyen felvétel látható a hátsó borítónkon), akkor furcsa, szabad szemmel soha meg nem figyelhető folyamatok játszódnak le.

Hasonlóan furcsa, de a közvetlen megfigyelés elől még inkább rejtett folyamatok mennek végbe egy nyugvó atommag és egy nagyon nagy energiájú proton, vagy más atommag ütközésekor. A fénynél csak egy „hajszálnyival” lassabb részecskék a magba becsapódva új részecskék *ezreit (!)* hozzák létre, ezeket hatalmas detektorokkal fogják fel és vizsgálják.

A hátsó borítón (alul) bemutatott képünkön a nagy európai kutatóközpontban, a Genf mellett működő CERN-ben ténylegesen végrehajtott ólom–ólomatommag ütközések egyik, számítógéppel rekonstruált „eseményét” láthatjuk. A középső kis kép az ütköző atommagok nukleonjait, illetve a kölcsönhatás során keletkező új részecskéket (pionokat, kaonokat) szemlélteti. A méréssorozat kiértékelésétől (melyben a KFKI-ban és az ELTE Atomfizikai Tanszékén dolgozó magyar fizikusok is aktívan részt vesznek) az elemi részecskék alapvető kölcsönhatásainak jobb megértését, és esetleg az anyag eddig ismeretlen, még soha nem látott új halmazállapotának, az ún. *kvark-gluon plazmának* a létrehozását várják.



KöMaL – 2001/9 FIZ0109 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 20:50 (22. lap)