Sangaku, matematikai fatáblák japán templomokban

1. Bevezetés

Az Edo korszak (1603–1867) ideje alatt Japán el volt zárva a nyugati világtól. Ebben az időszakban tanult emberek (társadalmi helyzetüktől függetlenül) számos geometriai összefüggést fedeztek fel. Az eredményeket fatáblára rajzolták, szépen kiszínezték és elhelyezték egy-egy sintoista szentélyben vagy buddhista templomban, általában a tetőről lelógatva. Az ilyen táblát hívják *sangakunak*, amely matematikai táblát jelent japánul. A fatáblák közül több van, amely olyan igényesen lett elkészítve, hogy művészi alkotásnak is tekinthető. Sok ügyes geométer ajánlott sangakut köszönetként az égieknek egy-egy újabb tétel felfedezéséért. A bizonyításokat ritkán közölték, a problémák ezért kihívások lehettek mások számára. Egy sangakun rendszerint több feladat is szerepelt.

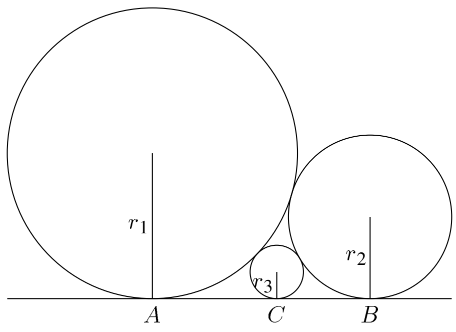
Borítónk második oldalán két sangaku látható.

A történelem folyamán számos sangaku elveszett, de így is több mint 800 megmaradt és azok ma is kellemes perceket szerezhetnek a geometria kedvelőinek. Az, hogy most kedvünkre nézelődhetünk a múlt eme relikviái közt, jórészt egy japán középiskolai tanárnak, Hidetoshi Fukagawanak köszönhető. Fukagawa afféle tudós tanár, aki Ph.D. fokozatot is szerzett matematikából. Néhány évtizeddel ezelőtt elhatározta, hogy tanulmányozni fogja a japán matematikatörténetet, hogy a tapasztalatok birtokában eredményesebben taníthassa a diákokat. Egy régi könyvtári könyvben talált említést bizonyos matematikai fatáblákról, amelyekről korábban sohasem hallott. Ezt követően bejárta Japánt, hogy összegyűjtse nemcsak a sangakuról maradt emlékeket, hanem a régi japán matematika (Wasan) más eredményeit is. A munka nem volt egyszerű, hiszen ahhoz, hogy a fennmaradt szövegeket el tudja olvasni, tanulmányoznia kellett a japán nyelv archaikus változatát, a kambunt is, amely az Edo korban a tudomány nyelve volt. Az összegyűjtött anyagot később több helyen is publikálta. 1989-ben jelent meg először angol nyelven gyűjteményes kötet a sangakuról, amelyet H. Fukagawa és D. Pedoe írtak [1, 4].

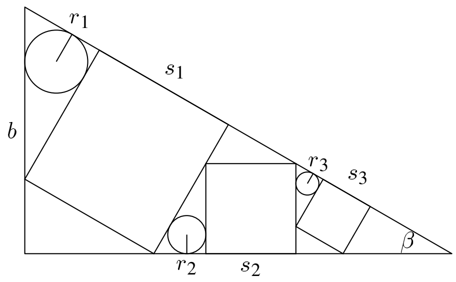
2. Sangaku feladatok

A továbbiakban egy kis ízelítőt adunk a *sangaku* problémákból. Az itt közölt feladatok mind geometriai problémák lesznek, de megjegyezzük, hogy fennmaradtak olyan fatáblák is, amelyen számelméleti kérdéseket, nevezetesen diophantoszi egyenleteket tárgyaltak. A sangaku problémák különböző nehézségűek. Vannak viszonylag könnyen megoldható feladatok, de akadnak olyanok is, amelyek elegáns megoldása komoly teljesítménynek számít. Az itt közölt feladatok megoldhatók pusztán elemi geometriai megfontolásokkal.

1. feladat. (1824, Gumma prefektúra) Milyen összefüggés van az *1. ábrán* látható körök sugara között, ahol a három kör és az egyenes kölcsönösen érintik egymást? (A válasz: $\frac{1}{\sqrt{r_3}}=\frac{1}{\sqrt{r_2}}+\frac{1}{\sqrt{r_1}}$.)



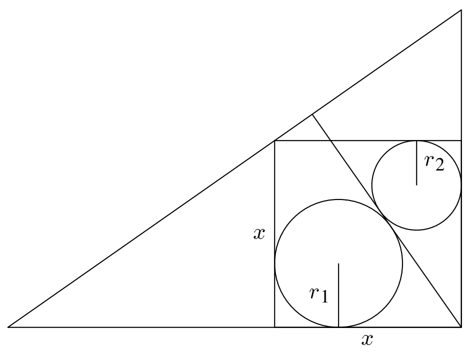
1. ábra



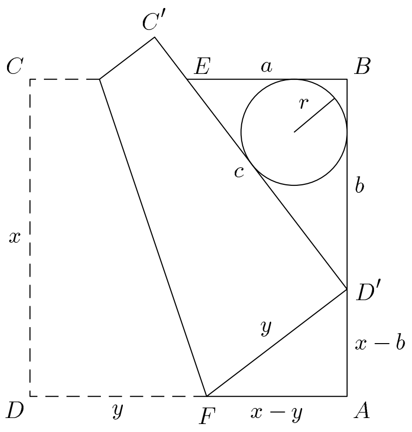
2. ábra

2. feladat. (1913, Mijagi prefektúra) Egy derékszögű háromszögbe négyzeteket rajzoltunk a *2. ábrán* látható módon. Milyen összefüggés van a keletkező háromszögekbe rajzolt körök r_1, r_2 és r_3 sugara között? (A válasz: $r_2=\sqrt{r_1r_3}$.)

3. feladat. (1811, Gumma prefektúra) Egy derékszögű háromszögbe négyzetet rajzoltunk, amelynek két oldala a befogókon fekszik. Az átfogóhoz tartozó magasság a négyzetet két részre osztja, amely alakzatokba egy-egy kört írtunk a *3. ábrán* látható módon. Határozzuk meg a négyzet x oldalhosszúságát a két kör r_1 és r_2 sugarának függvényében! (A válasz: $x=r_1+r_2+\sqrt{r_1^2+r_2^2}$.)



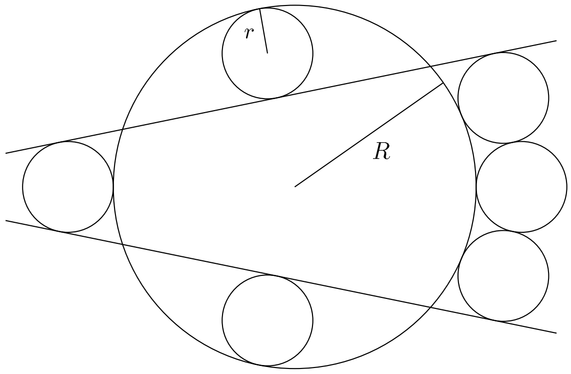
3. ábra



4. ábra

4. feladat. (1815, Shiga prefektúra) Egy négyzet alakú $ABCD$ papírlapot félbehajtottunk a *4. ábrán* látható módon úgy, hogy a D csúcs az AB oldalra essen. Bizonyítsuk be, hogy a BED' háromszögbe írt kör sugarának hossza megegyezik a $C'E$ szakasz hosszúságával!

5. feladat. (1872, Szaitama prefektúra) Milyen összefüggés van az *5. ábrán* látható nagy kör R és a 6 egybevágó kis kör r sugara között? (A válasz: $R=4r$.)



5. ábra

A feladatok megoldásai és további információ található a szerző honlapján a `http://www.inf.u-szeged.hu/~pszabo/Sangaku.html` címen.

Irodalomjegyzék

[1.] H. Fukagawa and D. Pedoe, *Japanese temple geometry problems – Sangaku,* Charles Babbage Research Centre, Winnipeg, Canada, 1989.

[2.] Hiroshi Okumura, Variations of the ratio 1 : 4, *Mathematics and Informatics Quarterly,* **3**:162–166, 1993.

[3] Y. Mikami, *The development of mathematics in China and Japan,* Chelsea Publishing Company, New York, 1914.

[4] Tony Rothman, Japanese temple geometry, Scientific American, 5, 1998. Elérhető a `http://www.sciam.com/1998/0598issue/0598rothman.html` címen is.

[5] D. E. Smith and Y. Mikami, *A history of Japanese mathematics,* Open Court Publishing Company, Chicago, 1914.

[6] T. Tarnai, Packing of equal circles in a circle, megjelent a *Structural Morphology: Toward the New Millennium* kötetben, The University of Nottingham, Nottingham, UK, 217–224, 1997.

[7] I. Yamamoto, *The Sangaku in Hyogo,* 1967 (magánkiadás japánul).

[8] Y. Yasutomi, *The Sangaku in Iwate,* Seijisya, Tokyo, 1987 (japánul).

Szabó Péter Gábor

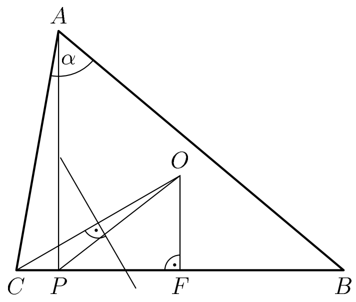
A 42. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldásai

1. *Legyen az ABC hegyesszögű háromszög körülírt körének középpontja O. Legyen P az A-ból induló magasságvonal talppontja a BC oldalon.*

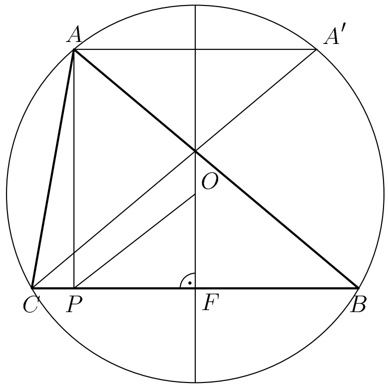
Tegyük fel, hogy $BCA\sphericalangle \geq ABC\sphericalangle + 30^\circ$.

Bizonyítsuk be, hogy $CAB\sphericalangle + COP\sphericalangle < 90^\circ$.

Megoldás. Legyen F a BC oldal felezőpontja. Az $FOC\sphericalangle$ éppen a $CAB\sphericalangle = \alpha$-hoz tartozó középponti szög fele, így $FOC\sphericalangle = \alpha$. Innen $OCP\sphericalangle = OCB\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$, tehát azt kell bizonyítani, hogy $POC\sphericalangle < OCP\sphericalangle$, ami ekvivalens $CP < OP$-vel (*1. ábra*).



1. ábra



2. ábra

Legyen A' az A tükörképe a BC felezőmerőlegesére; ekkor A' is a körülírt körön van, és $A'CB\sphericalangle = ABC\sphericalangle$. A feltétel szerint tehát $A'CA\sphericalangle = ACB\sphericalangle - A'CB\sphericalangle \geq 30^\circ$, és így AA', az ACA' szög szárai által a körből kimetszett húr hossza legalább r, a körülírt kör sugara (*2. ábra*). Így $FP = \dfrac{AA'}{2} \geq \dfrac{r}{2}$.

Mivel az ABC háromszög hegyesszögű, a körülírt kör BC húrja kisebb az átmérőnél, így CF, a húr fele, kisebb, mint r.

Innen $CP = CF - FP < r - \dfrac{r}{2} = \dfrac{r}{2} \leq FP$, a CP szakasz tehát az OP vetületénél, az FP szakasznál is kisebb.

Horváth Illés (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.)

2. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

minden a, b, c pozitív valós számra.

Megoldás. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $a \geq b \geq c$.

1. eset: $a+b\le 8c$. Ekkor $a^2+8bc\le b^2+8ca$, hiszen ebből ekvivalens lépésekkel $0\le b^2-a^2+8ac-8bc$, $\quad 0\le (a-b)(8c-a-b)$-t kapjuk, ami nyilvánvalóan igaz. Hasonló meggondolásokból, felhasználva a $b+c\le 8a$ összefüggést, $b^2+8ca\le c^2+8ab$ is igaz, tehát a, b, c azonosan rendezett a $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+8bc}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{b^2+8ca}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{c^2+8ab}}$ számokkal, így a Csebisev-egyenlőtlenségből:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge$$
$$\ge\frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+8ab}}\right).$$

Felhasználva a harmonikus és négyzetes közepek közti egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+8ab}}\right)=$$
$$=\frac{1}{\dfrac{3}{\dfrac{1}{\sqrt{a^2+8bc}}+\dfrac{1}{\sqrt{b^2+8ca}}+\dfrac{1}{\sqrt{c^2+8ab}}}}\ge\frac{1}{\sqrt{\dfrac{(a^2+8bc)+(b^2+8ca)+(c^2+8ab)}{3}}}.$$

Elég tehát belátni, hogy

$$\frac{a+b+c}{\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2+8ab+8bc+8ca}{3}}}\ge 1.$$

Ezt rendezve

$$\sqrt{3}(a+b+c)\ge\sqrt{a^2+b^2+c^2+8ab+8bc+8ca},$$
$$3(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)\ge a^2+b^2+c^2+8ab+8bc+8ca,$$
$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\ge 0,$$
$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0,$$

ami nyilvánvaló.

2. eset: $8c<a+b$. Ekkor

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}>\frac{a}{\sqrt{a^2+b(a+b)}}>\frac{a}{\sqrt{(a+b)^2}}=\frac{a}{a+b}.$$

Hasonlóan $\dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}>\dfrac{b}{a+b}$, tehát

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}>\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=1.$$

Ezzel az állítást beláttuk.

Csóka Endre (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 10. o.t.)

3. *Egy matematikaversenyen* 21 *lány és* 21 *fiú vett részt.*

(1) Mindegyik versenyző legfeljebb hat feladatot oldott meg.

(2) Mindegyik fiúhoz és mindegyik lányhoz van legalább egy olyan feladat, amelyet mindketten megoldottak.

Bizonyítsuk be, hogy van olyan feladat, amelyet legalább három lány és legalább három fiú megoldott.

Megoldás. Készítsünk egy 21×21-es táblázatot, amelynek oszlopai jelentsék az egyes fiúkat, míg a sorok a résztvevő lányokat. A táblázat minden egyes mezőjébe írjuk be annak a feladatnak a sorszámát, amelyet mind az oszlophoz tartozó fiú, mind a sorhoz tartozó lány megoldott.

(2) szerint ilyen feladat mindig létezik. (Ha több is van, akkor elég az egyik ilyen feladat sorszámát beírni.) Az *ábrán* látható 5-ös szám például azt jelenti, hogy az 5. feladatot a 2. számú fiú és a 3. számú lány is megoldotta.

	1. fiú	2. fiú	3. fiú	…	21. fiú	
1. lány						
2. lány						
3. lány		5				
⋮						
21. lány						

3. ábra

Ezek után vizsgáljuk az egyes oszlopokat. Fessük be kékre azokat a mezőket, amelyeken olyan szám áll, amelyik az adott oszlopban legalább háromszor előfordul.

Mivel az (1) feltétel szerint minden oszlopban legfeljebb hatféle szám szerepelhet, azért:

ha egy adott oszlopban

– egyféle számot festettünk be, akkor a többi maximum $(6-1)\cdot2=10$ mezőt fed le, tehát legalább 11 kék mezőnk van;

– kétféle számot festettünk be, akkor a be nem festettek száma maximum $(6-2)\cdot2=$ $=8$, azaz legalább 13 kék mező van;

– háromféle kék szám esetén minimum 15 kék mező van;

– 4, 5, 6-féle kék szám esetén is legalább $4\cdot3$, $5\cdot3$, $6\cdot3$, azaz 12, 15 és 18 mezőt festettünk be.

Összefoglalva: láthatjuk, hogy minden oszlopban legalább 11 kék mező van, ez pedig 21 oszlop esetén már több, mint a mezők fele $\left(21\cdot11>\frac{21^2}{2}+0{,}5\right)$.

Most vizsgáljuk a sorokat, és fessük pirosra egy adott soron belül azokat a mezőket, amelyeken szereplő számok legalább háromszor fordulnak elő az adott sorban.

Ekkor ugyanúgy belátható, hogy a mezők több, mint fele piros. A skatulya-elv miatt lesz tehát olyan mező, amelyik kék is és piros is, és ez azt jelenti, hogy az ezen mezőkhöz tartozó feladatot legalább három lány (mert a mező kék) és legalább 3 fiú (mert a mező piros) megoldotta.

Vörös László (Győr, Révai M. Gimn., 12. o.t.)

4. *Legyen n egy* 1*-nél nagyobb páratlan egész, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ pedig adott egészek.*

Az 1, 2, $\ldots$, n *számok mind az* $n!$ *darab* $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ *permutációjára legyen*

$$S(a)=\sum_{i=1}^{n} k_i a_i.$$

Bizonyítsuk be, hogy van két olyan b *és* c *permutáció, amelyekre* $b\neq c$*, és* $n!$ *osztója* $(S(b)-S(c))$*-nek.*

Megoldás. [1] Legyen az $n!$ permutáció A_1, A_2, $\ldots$, $A_{n!}$. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, vagyis $n!\nmid S(A_i)-S(A_j)$, ahol $i\neq j$. Mivel $n!$ permutáció van, és $n!$-féle maradék $n!$-sal osztva, ez csak úgy lehetséges, hogy minden maradék pontosan egyszer fordul elő.

Így egyrészt

$$\sum_{i=1}^{n!} S(A_i)\equiv 1+\ldots+n!\equiv\left(\frac{n!+1}{2}\right)n!\not\equiv 0 \pmod{n!},$$

mivel $\dfrac{n!+1}{2}$ nem egész, hiszen $n!+1$ páratlan.

Másfelől az 1, 2, $\ldots$, n számok mindegyike $(n-1)!$ permutációban szerepel adott k_i szorzóval, vagyis

$$\sum_{i=1}^{n!} S(A_i)=(n-1)!\cdot\sum_{i=1}^{n} k_i(1+2+\ldots+n)=(n-1)!\cdot\frac{(n+1)}{2}\cdot n\cdot\sum_{i=1}^{n!} k_i=$$
$$=\sum_{i=1}^{n!} k_i\cdot n!\cdot\left(\frac{n+1}{2}\right)\equiv 0 \pmod{n!},$$

hiszen $\dfrac{n+1}{2}$ egész.

Ellentmondásra jutottunk, hiszen a tagokat kétféle módon összeadva eltérő maradékokat kaptunk $n!$-sal osztva, vagyis a feltevésünk nem teljesül, tehát az állítás igaz.

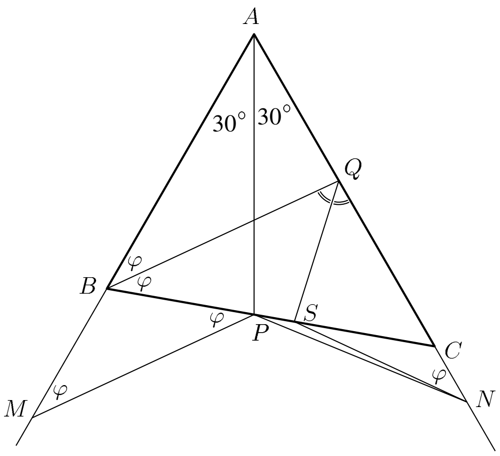
Kovács Erika Renáta (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.)

5. *Az* ABC *háromszögben legyen* AP *a* $BAC\sphericalangle$ *szögfelezője, ahol* P *a* BC *oldalon van,* BQ *pedig az* $ABC\sphericalangle$ *szögfelezője, ahol* Q *a* CA *oldalon van. Tudjuk, hogy* $BAC\sphericalangle=60^\circ$ *és hogy* $AB+BP=AQ+QB$.

Mik az ABC *háromszög szögeinek lehetséges értékei?*

Megoldás. Legyen az M pont az AB szakasz B-n túli meghosszabbításának az a pontja, amelyre $BM=BP$. Hasonlóan legyen N az AQ szakasz Q-n túli meghosszabbításának az a pontja, amelyre $BQ=QN$. A BQC szög felezője messe BC-t S-ben.

[1] A megoldás során a feladat eredeti szövegétől eltérően a permutációkat nagybetűkkel jelöljük.



4. ábra

Legyen $BPM\sphericalangle=\varphi$, ekkor $BM=BP$ miatt $BMP\sphericalangle=\varphi$ és $PBA\sphericalangle=2\varphi$. Tehát $QBC\sphericalangle=\varphi$. A QBS és a QNS háromszögek egybevágóak, mert $QB=QN$, a QS oldaluk közös, továbbá $SQB\sphericalangle=NQS\sphericalangle$. Tehát $QBS\sphericalangle=QNS\sphericalangle=\varphi$. Így az AMP háromszög és az ANP háromszög is egybevágó, mert az

$$AM=AB+BM=AB+BP=AQ+BQ=AQ+QN=AN$$

oldalak egyenlőek, közös az AP oldaluk, és egyenlő az A-nál levő szögük. Ezért $AMP\sphericalangle=ANP\sphericalangle=\varphi$.

Tehát $QNP\sphericalangle=QNS\sphericalangle=\varphi$. Ekkor két eset lehetséges: $P=S$ vagy $P\neq S$, és így P, S, N egy egyenesen vannak.

Ha $P=S$, akkor a BQP és a QPN háromszögek, valamint az APM és APN háromszögek egybevágóságából kapjuk, hogy $BP=PN=PM$, azaz $BP=PM=BM$, azaz az ABC háromszög B-nél lévő szöge $180^\circ-60^\circ=120^\circ$, ami nem lehetséges, mert így $ABC\sphericalangle+BAC\sphericalangle=180^\circ$.

Tehát P, S, N egy egyenesen vannak, azaz $N=C$. Így $ABC\sphericalangle=ANS\sphericalangle=\varphi$, azaz $180^\circ-BAC\sphericalangle+ABC\sphericalangle+ACB\sphericalangle=60^\circ+2\varphi+\varphi$. Innen $\varphi=40^\circ$ és $2\varphi=80^\circ$. Tehát az egyetlen lehetséges megoldás, hogy $ABC\sphericalangle=80^\circ$, $ACB\sphericalangle=40^\circ$ és $BAC\sphericalangle=60^\circ$.

Ez a megoldás jó is, mert a $QBC\sphericalangle=QCB\sphericalangle$ összefüggésből kapjuk, hogy $BQ=QC$. Továbbá az APM és APC háromszög egybevágó, mert két szögük, az A-nál, valamint az M és C-nél levő szögek megegyeznek, és van egy közös oldaluk: AP. Tehát $AB+BP=AB+BM=AM=AC=AQ+QC=AQ+QB$.

Tehát az egyetlen megoldás a 60°, 80°, 40°-os háromszög.

Csikvári Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.)

6. *Legyenek a, b, c, d egészek, amelyekre $a>b>c>d>0$. Tegyük fel, hogy*

$$ac+bd=(b+d+a-c)(b+d-a+c).$$

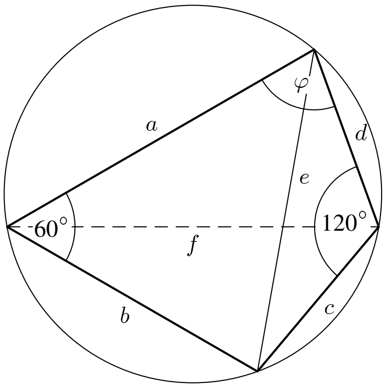
Bizonyítsuk be, hogy $ab+cd$ nem prímszám.

Megoldás. Kibontva $ac+bd$ szorzatalakját, majd rendezve az egyenlőséget a következőhöz jutunk:

(1) $$a^2+b^2-ac=b^2+d^2+bd.$$

(1)-ben pozitív egészek egyenlősége áll, és nyilván

$$a^2+c^2-2ac\cos 60^\circ=b^2+d^2-2bd\cos 120^\circ.$$



5. ábra

Ez pedig azt jelenti, hogy létezik olyan e hosszúságú szakasz, hogy az a, c, e oldalú háromszögben e-vel szemben 60°-os, a b, d, e oldalú háromszögben pedig e-vel szemben 120°-os szög van. Így az ábrán látható a, c, b, d oldalú, e átlójú négyszög húrnégyszög (két szemközti szögének az összege 180°). Használhatjuk tehát Ptolemaiosz tételét: ha f a másik átló hossza, akkor

(2) $$ab+cd=ef.$$

Most számoljuk ki f hosszát. Két koszinusztételt felírva:

$$a^2+d^2-2ad\cos\varphi=f^2=b^2+c^2+2bc\cos\varphi.$$

Ebből $\cos\varphi$-re a következő érték adódik: $\cos\varphi=\dfrac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}$, amit visszahelyettesítve:

(3) $$f^2=a^2+d^2-2ad\cdot\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}=\frac{a^2bc+bcd^2+ab^2d+ac^2d}{ad+bc}=$$
$$=\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}.$$

Ezt a kifejezést írjuk be (2) négyzetébe:

$$(ab+cd)^2=e^2f^2=e^2\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}.$$

Osztva $(ab+cd)$-vel:

(4) $$ab+cd=\frac{(ac+bd)\cdot e^2}{ad+bc}.$$

Legyen $P=ab+cd$, $Q=ac+bd$, $R=ad+bc$ és $E=e^2$. Ekkor P, Q, R, E pozitív egészek, és (4) szerint

(5) $$PR=EQ.$$

Mivel $P-Q=(a-d)(b-c)$ és $Q-R=(a-b)(c-d)$, azért $a>b>c>d$ miatt $P>Q>R>0$, és így (5)-ből $E>R>0$.

Ha P prím, akkor $P \mid EQ$ miatt $P \mid E$ vagy $P \mid Q$, és így $R = \frac{E}{P} \cdot Q = E \cdot \frac{Q}{P}$ alapján $Q \mid R$ vagy $E \mid R$. Mivel láttuk, hogy mind Q, mind pedig E nagyobb R-nél, egyik oszthatóság sem állhat fenn, P tehát valóban nem lehet prímszám.

Harangi Viktor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.)

Felvételi előkészítő feladatsor

Pollák György matematikus barátom emlékére

1. Számítsuk ki a derékszögű háromszög oldalainak hosszát, ha a területe $T = 43{,}2$ területegység, a beírható kör sugara $\varrho = 2{,}4$ egység.

2. Igazoljuk, hogy a

$$2x^2 - 2(b+c)x + (ab + bc + ca - a^2) = 0$$

egyenletnek minden a, b, $c \in \mathbf{R}$ esetén van valós megoldása. Mikor van az egyenletnek két egyenlő megoldása, és mi ekkor a megoldás?

3. Egy húrtrapéz párhuzamos oldalai a és b $(a > b)$, az átlók a párhuzamos oldalakkal α $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ szöget alkotnak. Fejezzük ki a, b és α-val a trapéz köré írt kör sugarát.

4. Egy mértani sorozat első tagja 3-mal nagyobb a sorozat hányadosánál, és van olyan n pozitív egész, amelyre az első n tag összege 35, és az első tag, valamint az n-edik tag szorzata 100. Számítsuk ki a sorozat első tagját, hányadosát és n értékét.

5. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmeny a $P(5;3)$ ponton, és a $3x + 2y = 16$ és $3x + 2y = 11$ egyenletű egyeneseket olyan pontokban metszi, amelyek abszcisszájának különbsége 1.

6. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az $x^2 - 4x \sin xy + 4 = 0$ kétismeretlenes egyenletet.

7. Egy téglalap alapú gúla oldalélei egyenlők, hosszuk c, a téglalap oldalai a és b. A csúcstól számítva milyen távolságban kell egy alappal párhuzamos síkot állítani, hogy ez a sík a gúlát két egyenlő térfogatú részre ossza? Fejezzük ki a síkmetszet területét a, b, c-vel.

8. Milyen határok között változik $q - p$ értéke, ha q és p olyan valós számok, hogy az $x^2 - px - q = 0$ egyenlet gyökei valósak, és az egyenlet gyökeire $x_1^2 + x_2^2 = \frac{q}{2}$ teljesül?

Rábai Imre

Megoldásvázlatok, eredmények a 2001/6. sz. felvételi előkészítő feladataihoz

1. Mivel $x^2+2x-3\neq 0$, azért $x\neq -3$, $x\neq 1$. A másodfokú tényezőket szorzattá bontjuk:

$$\frac{2x+2}{7}=\frac{(x-3)(x+2)(x+1)}{(x+3)(x-1)}.$$

Szorozzuk mindkét oldalt $7(x+3)(x-1)$-gyel: $2(x+3)(x-1)(x+1)=7(x-3)(x+2)(x+1)$. Most 0-ra rendezünk, és kiemelünk $(x+1)$-et: $0=(x+1)(5x^2-11x-36)$. A másodfokú tényezőt szorzattá bontjuk: $0=(x+1)(x-4)(5x+9)$, így a megoldások: $x_1=-1$, $x_2=4$, $x_3=-\frac{9}{5}$.

2. A feladatban szereplő törtek nevezői és az osztandó nem nulla: $a\neq -1;\ 0;\ 1$. Hozzunk egyszerűbb alakra:

$$\left(\frac{a+1}{1-a}+\frac{a-1}{a+1}-\frac{4a^2}{a^2-1}\right):\left(\frac{2}{a^3+a^2}-\frac{2-2a+2a^2}{a^2}\right)=$$

$$=\frac{-a^2-2a-1+a^2-2a+1-4a^2}{(a-1)(a+1)}:\frac{2-(2-2a+2a^2)(a+1)}{a^2(a+1)}=\frac{-4a(a+1)}{(a-1)(a+1)}\cdot\frac{a^2(a+1)}{-2a^3}=\frac{2a+2}{a-1}.$$

Alakítsuk ezt a következő módon: $\frac{2a+2}{a-1}=\frac{2(a-1)+4}{a-1}=2+\frac{4}{a-1}$. Vagyis az $a-1$ lehetséges értékei: $-4;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 4$, amiből a-ra adódik: $-3;\ -1;\ 0;\ 2;\ 3;\ 5$.

A kikötéseket figyelembe véve az a értékei: $-3;\ 2;\ 3;\ 5$.

3. Számoljuk ki a, b és c pontos értékét:

$$a=-\frac{\sin 39^\circ+\sin 13^\circ}{\sin 26^\circ\cdot\cos 13^\circ}=\frac{2\sin\frac{39^\circ+13^\circ}{2}\cdot\cos\frac{39^\circ-13^\circ}{2}}{\sin 26^\circ\cdot\cos 13^\circ}=$$

$$=-\frac{2\sin 26^\circ\cdot\cos 13^\circ}{\sin 26^\circ\cdot\cos 13^\circ}=-2.$$

$$b=\sqrt{10^{2+\lg 25}}=\sqrt{10^{\lg 100+\lg 25}}=\sqrt{10^{\lg 2500}}=\sqrt{2500}=50.$$

$$c=\left(\frac{1}{\sqrt5-2}\right)^3-\left(\frac{1}{\sqrt5+2}\right)^3=(\sqrt5+2)^3-(\sqrt5-2)^3=17\sqrt5+38-(17\sqrt5-38)=76.$$

A három pont: $A(1;-2)$, $B(3;50)$, $C(4;76)$. Így $\overrightarrow{AB}(2;52)$, $\overrightarrow{BC}(1;26)$, vagyis $\overrightarrow{AB}=2\cdot\overrightarrow{BC}$. Ez azt jelenti, hogy A, B, C egy egyenesen vannak.

4. Az I. eset: x Ft befektetés esetén egy év múlva a követelés $1{,}2x$ Ft. Vegyük figyelembe az infláció mértékét is, ezért az összeg értéke $\frac{1{,}2x}{1{,}15}\approx 1{,}0435x$ Ft lesz.

A II. eset: x Ft befektetés esetén egy év múlva a követelés $1{,}12x$ Ft. Most is vegyük figyelembe az infláció mértékét, így az összeg értéke $\frac{1.12x}{1{,}07}\approx 1{,}0467x$ Ft lesz.

Vagyis a II. változat a jobb a takarékoskodni szándékozónak.

5. Legyen az első tag a, a differencia pedig d, ekkor

$$a^2+2(a+d)^2+3(a+2d)^2+4(a+3d)^2=10a^2+40ad+50d^2=(a+5d)^2+(3a+5d)^2.$$

6. A körök átmennek a megfelelő magasságtalppontokon a Thalesz tétel szerint. A két kör közös húrja AA', ahol A’ magasságtalppont. Ha M a magasságpont, akkor a húr szeleteire vonatkozó tétel alapján: $AM \cdot MA' = DM \cdot ME$ és $AM \cdot MA' = FM \cdot MG$. Ebből következik, hogy $DM \cdot ME = FM \cdot MG$, vagyis a D, E, F, G pontok egy körön vannak.

7. A három oldal ismeretében az ABC háromszög területe kiszámítható, például így:

$$t_{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{27(27-20)(27-13)(27-21)} = \sqrt{15\,876} = 126\ \text{cm}^2.$$

Pitagorasz tételét alkalmazva: $A'B' = \sqrt{21^2 + (25-5)^2} = 29$ cm, $B'C' = \sqrt{20^2 + (25-4)^2} = 29$ cm, $C'A' = \sqrt{13^2 + (5-4)^2} = \sqrt{170}$ cm.

Az $A'B'C'$ háromszög egyenlő szárú, alaphoz tartozó magassága is Pitagorasz tételével számolható ki: $m_{b'} = \sqrt{29^2 - \left(\frac{\sqrt{170}}{2}\right)^2} = \sqrt{798{,}5}$ cm.

Így $t_{A'B'C'} = \dfrac{\sqrt{170} \cdot \sqrt{798{,}5}}{2} = \dfrac{\sqrt{135\,745}}{2}$ cm^2.

Ha a szóban forgó két sík hajlásszöge α, akkor $t_{ABC} = t_{A'B'C'} \cdot \cos\alpha$, hiszen az $A'B'C'$ háromszög merőleges vetülete az alaplap síkjára az ABC háromszög. Vagyis $\cos\alpha \approx 0{,}6840$, amiből $\alpha \approx 46{,}8^\circ$.

8. Mivel $f(x) = 2x^6 - 3x^4 + x^2 = x^2(x^2 - 12x^2 - 1)$, azért

$$f(\sin\alpha) + f(\cos\alpha) = -\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)(2\sin^2\alpha - 1) - \cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)(2\cos^2\alpha - 1) =$$

$$= -\sin^2\alpha\cos^2\alpha(2\sin^2\alpha - 1) - \cos^2\alpha\sin^2\alpha(2\cos^2\alpha - 1) =$$

$$= -\sin^2\alpha\cos^2\alpha(2\sin^2\alpha - 1 + 2\cos^2\alpha - 1) = -2\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 1) = 0,$$

ami igaz, mert $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ minden α esetén.

Számadó László

Matematika gyakorlatok megoldása

C. 605. *Oldjuk meg az alábbi egyenletet.*

$$\frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}} = x$$

($[x]$ az x szám egész részét és $\{x\}$ a tört részét jelöli.)

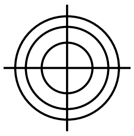
Megoldás. Az $x \neq 0$, mert akkor a nevezőkben 0 állna. Hozzuk közös nevezőre az egyenlet bal oldalát:

$$\frac{\{x\} + [x]}{\{x\} \cdot [x]} = x.$$

A számlálóban x áll (a szám tört része és egész része magát a számot adja). Az $x \neq 0$-val egyszerűsítve és rendezve kapjuk, hogy $\{x\} \cdot [x] = 1$. Mivel $\{x\}$ sohasem negatív, azért $[x] > 0$.

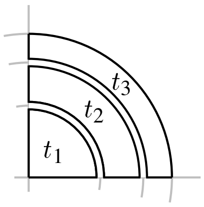
Legyen tehát $[x] = n > 1$ egész, ekkor az egyenlet szerint $\{x\} = \frac{1}{n}$, tehát $x = [x] + \{x\} = n + \frac{1}{n}$. Könnyen látható, hogy ha n tetszőleges 1-nél nagyobb egész, akkor $0 < \frac{1}{n} < 1$ miatt $\left[n + \frac{1}{n}\right] = n$ és $\left\{n + \frac{1}{n}\right\} = \frac{1}{n}$; tehát az egyenlet megoldásai az $n + \frac{1}{n}$ alakú számok, ahol $n > 1$ egész.

378 dolgozat érkezett. 5 pontos 215, 4 pontos 117, 3 pontos 16, 2 pontos 18, 1 pontos 7, 0 pontos 5.



C. 610. *Az ábrán látható céltábla három koncentrikus körből és két egymásra merőleges egyenesből áll, amelyek átmennek a körök középpontján. Az így keletkezett* 12 *rész területe egyenlő. Adjuk meg a három kör sugarának arányát.*

Megoldás. Jelöljük a körök sugarát $r_1 < r_2 < r_3$-mal. A feltétel szerint az *ábrán* vastagon kihúzott területek egyenlők, azaz



$$t_1 = \frac{r_1^2\pi}{4} = t_2 = \frac{(r_2^2 - r_1^2)\pi}{4} = t_3 = \frac{(r_3^2 - r_2^2)\pi}{4}.$$

Az első két egyenlőségből: $r_1^2 = r_2^2 - r_1^2$, ahonnan $r_2 = \sqrt{2}r_1$.

A második és harmadik egyenlőségből: $r_2^2 - r_1^2 = r_3^2 - r_2^2$.

Az r_2^2 helyébe az előbb kapott $2r_1^2$-et helyettesítve: $r_1^2 = r_3^2 - 2r_1^2$, ahonnan $r_3 = \sqrt{3}r_1$. A sugarak aránya:

$$r_1 : r_2 : r_3 = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}.$$

520 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 456, 4 pontot 8, 3 pontot 4, 2 pontot 27, 1 pontot 8, 0 pontot 15 beküldő. Nem versenyszerű 2 dolgozat.

C. 611. *Határozzuk meg az a, b, c, d, e számjegyeket úgy, hogy a velük felírt két ötjegyű számra teljesüljön az $\overline{abcde} \cdot 9 = \overline{edcba}$ egyenlőség.*

Rényi Gusztáv, Budapest

Megoldás. Az ötjegyű $\overline{abcde}$ számot 9-cel megszorozva az ugyancsak ötjegyű $\overline{edcba}$ számot kapjuk, ami csak úgy lehetséges, ha a értéke 1.

Azaz $\overline{1bcde} \cdot 9 = \overline{edcb1}$, amiből következik, hogy $e = 9$, mert egyetlen olyan (egyjegyű) szám van, amit 9-cel szorozva a szorzat 1-re végződik, és ez a 9.

Egyenlőségünk a következő alakba írható:

$$9 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 \cdot b + 9 \cdot 10^2 \cdot c + 9 \cdot 10 \cdot d + 81 = 9 \cdot 10^4 + 10^3 \cdot d + 10^2 \cdot c + 10 \cdot b + 1.$$

Rendezés után:

(1) $$899b+80c+8=91d.$$

Mivel d legalább 1 és legfeljebb 9, azért

$$91\le 899b+80c+8\le 819.$$

Innen következik, hogy $b=0$ lehet csak, és (1)-ből

$$80c+8=8(10c+1)=91d.$$

A bal oldal osztható 8-cal, így a jobb oldal is, és mivel 91 páratlan, azért d-nek kell 8-cal oszthatónak lennie, így $d\le 9$ miatt $d=8$. Akkor pedig $80c+8=728$, és így $c=9$.

Az ötjegyű szám tehát: 10 989. Valóban $10\,989\cdot 9=98\,901$; a feladatnak ez az egyetlen megoldása van.

Pajna Gabriella (Debrecen, Tóth Á. Gimn., 11. o.t.)

Megjegyzés. A kezdeti feltételekből következik, hogy a keresett szám osztható 9-cel, hiszen a szorzat osztható 9-cel, a jegyei összege pedig egyenlő az eredeti szám jegyeinek összegével. Ha már tudjuk, hogy $\overline{1bcd9}\cdot 9=\overline{9dcb1}$, akkor ebből b csak 0 vagy 1 lehet, különben keletkezne maradék a 4. helyiértéken. Ha $b=1$, akkor viszont $d=7$, mert csak $7\cdot 9+8$ esetén lesz 1 az egyesek helyén álló számjegy. Ekkor $a+b+c+d+e=1+1+c+8+9=19+c$, ami csak $c=8$ esetén osztható 9-cel, de $11889\cdot 9\ne 98811$. Ha viszont $b=0$, akkor $d=8$ kell legyen, mert csak $8\cdot 9+8$ végződik 0-ra. $1+0+c+8+9=18+c$ miatt $c=9$. Valóban, $10989\cdot 9=98901$.

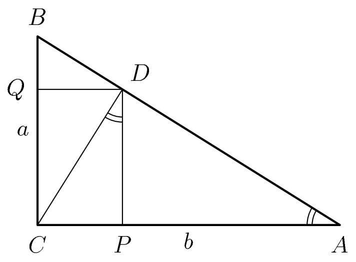
444 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 273, 4 pontot 108, 3 pontot 33, 2 pontot 13, 1 pontot 16, 0 pontot 1 versenyző.

C. 612. *Az ABC háromszög C csúcsánál derékszög van. Jelölje D a C csúcsból az AB átfogóra bocsátott magasság talppontját. A D-ből a befogókra bocsátott merőlegesek talppontja legyen P és Q. Bizonyítsuk be, hogy a DP és a DQ szakaszok összege legfeljebb akkora, mint a befogók hosszainak harmonikus közepe.*

Varga István, Békéscsaba

Megoldás. Azt állítjuk, hogy $PD+DQ\le \dfrac{2ab}{a+b}$, ahol a és b a derékszögű háromszög befogóit jelölik a szokásos módon.

Az ABC háromszög területe:



$$T=\frac{ab}{2}=\frac{b\cdot DP}{2}+\frac{a\cdot DQ}{2},$$

innen

(1) $$a=\frac{b\cdot DP}{b-DQ}$$

és

(2) $$b=\frac{a\cdot DQ}{a-DP}.$$

A PDC háromszög hasonló az ABC háromszöghöz; mindkettő derékszögű, és $CDP\sphericalangle = BAC\sphericalangle$ merőleges szárú hegyesszögek. Ezért a megfelelő oldalak aránya:

$$\frac{a}{b}=\frac{PC}{DP}=\frac{QD}{DP},$$

innen

$$(3)\qquad a=\frac{b\cdot QD}{DP} \qquad \text{és} \qquad (4)\qquad b=\frac{a\cdot DP}{QD}.$$

Az (1) és (3) egyenlőségből:

$$\frac{b\cdot DP}{b-DQ}=\frac{b\cdot DQ}{DP}, \qquad \text{innen} \qquad b=\frac{DP^2+QD^2}{QD}.$$

A (2) és (4) egyenlőségből:

$$\frac{a\cdot DQ}{a-DP}=\frac{a\cdot DP}{QD}, \qquad \text{innen} \qquad a=\frac{DP^2+QD^2}{DP}.$$

A kapott a és b értékeket a bizonyítandó állításba helyettesítve:

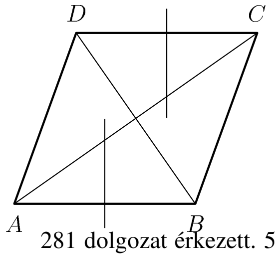
$$PD+DQ\le \frac{\dfrac{2(DP^2+QD^2)}{DP}\cdot\dfrac{DP^2+QD^2}{QD}}{\dfrac{DP^2+QD^2}{DP}+\dfrac{DP^2+QD^2}{QD}}.$$

A műveleteket és egyszerűsítéseket elvégezve azt kapjuk, hogy $(DP-QD)^2\ge 0$, ez pedig mindig teljesül.

Czirják István (Budapest, Szent István Gimn., 12. o.t.)

213 dolgozat érkezett. 5 pontos 166, 4 pontos 28, 3 pontos 11, 2 pontos 6, 1 pontos 2.

C. 620. *Egy trapézt szimmetrikus trapéznak nevezünk, ha alapjainak felező merőlegese egybeesik. Igaz-e, hogy ha egy trapéz szimmetrikus, akkor szimmetrikus trapéz?*



Megoldás. Az állítás nem igaz. Tekintsünk egy rombuszt, amelyik nem négyzet. A rombusz egyben trapéz is, hiszen van két párhuzamos oldala és szimmetrikus (mert egyben deltoid is); az átlói egyben a szimmetriatengelyei. Rajzoljuk meg az AB és CD alapjainak felezőmerőlegesét. Mivel ezek két egymással párhuzamos egyenesre merőlegesek, azért egymással párhuzamosak, de nem esnek egybe.

281 dolgozat érkezett. 5 pontos 186, 4 pontos 31, 3 pontos 8, 2 pontos 3, 1 pontos 53.

C. 623. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:*

$$(1)\qquad a^2b^2-a^2-ab+1=0$$

$$(2)\qquad a^2c-ab-a-c=0$$

$$(3)\qquad abc=-1.$$

Javasolta: *Kiss Sándor,* Szatmárnémeti

Megoldás. A (3) egyenletből fejezzük ki a c-t, és helyettesítsük be a (2) egyenletbe:

$$a^2 \cdot \left(-\frac{1}{ab}\right) - ab - a - \left(-\frac{1}{ab}\right) = 0.$$

Rendezve az egyenletet azt kapjuk, hogy

$$1 - a^2 - a^2b^2 - a^2b = 0. \tag{4}$$

Vonjuk ki a (4) egyenletből az (1)-et:

$$2a^2b^2 + a^2b - ab = 0,$$

szorzattá alakítva az $ab(2ab + a - 1) = 0$ egyenlethez jutunk. Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. A (3) egyenlet miatt $ab \neq 0$, így $2ab + a - 1 = 0$, ahonnan

$$a = \frac{1}{2b+1}, \qquad (2b + 1 \neq 0,\ \ b \neq -\frac{1}{2}).$$

Ezt helyettesítve (1)-be a

$$\left(\frac{1}{2b+1}\right)^2 b^2 - \left(\frac{1}{2b+1}\right)^2 - \frac{1}{2b+1} \cdot b + 1 = 0$$

b-ben másodfokú egyenletet kaptuk, ahonnan rendezés után $3b^2 + 3b = 0$ adódik, vagyis $3b(b + 1) = 0$. Mivel $b \neq 0$, $b = -1$.

Az $a = \dfrac{1}{2b+1}$-ből $a = -1$, és (3) miatt $c = -1$.

Az egyenletrendszer megoldása: $a = -1$, $b = -1$, $c = -1$.

Helyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy ezek az értékek valóban kielégítik az egyenletrendszer.

222 dolgozat érkezett. 5 pontos 160, 4 pontos 16, 3 pontos 12, 2 pontos 6, 1 pontos 13, 0 pontos 15.

C. 627. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:*

$$a + b = c + d,$$
$$a^3 + b^3 = c^3 + d^3.$$

Javasolta: *Ábrány Miklós,* Beregszász

Megoldás. Az (1) egyenletet emeljük négyzetre, a (2) egyenlet két oldalát pedig alakítsunk szorzattá:

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2cd + d^2, \tag{3}$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = (c + d)(c^2 - cd + d^2). \tag{4}$$

Ha $a+b=0$, akkor $a=-b$, de akkor $c+d=0$ is teljesül, és így $c=-d$.

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy ezek valóban megoldásai az egyenletrendszernek.

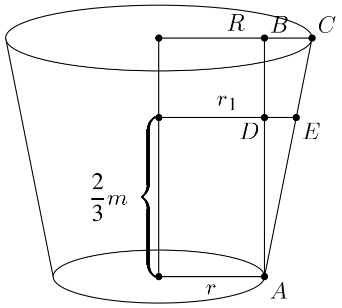
Ha $a+b=c+d\neq 0$, akkor egyszerűsítsük a (4) egyenletet $a+b=c+d$-vel, és vonjuk ki (3)-ból; azt kapjuk, hogy $ab=cd$, és mivel $a+b=c+d$, a gyökök és együtthatók ismert összefüggése miatt a és b, valamint c és d ugyanannak a másodfokú egyenletnek a gyökei. Ez pedig azt jelenti, hogy vagy $a=c$ és $b=d$, vagy $a=d$ és $b=c$, és ezek ugyancsak megoldásai az egyenletrendszernek.

182 dolgozat érkezett. 5 pontos 55, 4 pontos 37, 3 pontos 36, 2 pontos 22, 1 pontos 23, 0 pontos 7. Nem versenyszerű 2.

C. 634. *Csonkakúp alakú, felfelé szélesedő* 1 *literes háztartási mérőedényen a* $1/2$ *liter jele az edény magasságának* $2/3$ *részénél található. Mekkora az alapkör és a fedőkör átmérőjének aránya?*

Megoldás. Jelölje a csonkakúp magasságát m, alapkörének sugarát r, a fedőkör sugarát R, a $\frac{1}{2}$ literes magasságban metsző kör sugarát pedig r_1.

Az *ábrán* látható ABC háromszög hasonló az ADE háromszöghöz. A hasonlóságból:



$$(R-r):m=(r_1-r):\frac{2}{3}m,$$

ahonnan

$$r_1=\frac{2}{3}(R-r)+r=\frac{2}{3}R+\frac{1}{3}r.$$

A csonkakúp térfogata: $V=\frac{m\pi}{3}(R^2+Rr+r^2)$, így a teljes térfogat (1 liter $=1000$ cm^3):

$$1000=\frac{m\pi}{3}(R^2+Rr+r^2).$$

A $\frac{1}{2}$ literhez tartozó térfogat: $500=\frac{\frac{2}{3}m\pi}{3}(r_1^2+r_1r+r^2)$.

A két egyenlet mindegyikéből fejezzük ki az m értéket, tegyük egyenlővé, és utána helyettesítsük be az $r_1=\frac{2R+r}{3}$ értéket:

$$\frac{3000}{(R^2+Rr+r^2)}=\frac{4500}{2(r_1^2+r_1r+r^2)},$$

$$12\left[\left(\frac{2R+r}{3}\right)^2+\frac{(2R+r)r}{3}+r^2\right]=9R^2+9Rr+9r^2.$$

Rendezve, a következő egyenlet kapjuk: $25r^2+13Rr-11R^2=0$. Osszunk végig R^2-tel, és vezessük be a keresett $\frac{r}{R}$ arányra az u változót: $25u^2+13u-11=0$, ahonnan a pozitív megoldás $u=\frac{\sqrt{1269}-13}{50}$.

Az alapkör és a fedőkör átmérőjének aránya, $u=\frac{r}{R}\approx 0{,}452$.

120 dolgozat érkezett. 5 pontos 73, 4 pontos 3, 3 pontos 8, 2 pontos 5, 1 pontos 14, 0 pontos 17.

Matematika feladatok megoldása

B. 3422. *Igazoljuk, hogy* $7^{2001}-3^{3335}$ *osztható* 100*-zal.*
(*3 pont*)

Megoldás.

$$7^{2001}-3^{3335}=7^{3\cdot 667}-3^{5\cdot 667}=\left(7^3\right)^{667}-\left(3^5\right)^{667}=$$

$$=\left(7^3-3^5\right)\left[\left(7^3\right)^{666}+\left(7^3\right)^{665}\cdot 3^5+\left(7^3\right)^{664}\cdot\left(3^5\right)^2+\ldots+\left(3^5\right)^{666}\right]=$$

$$=(343-243)\left[7^{3\cdot 666}+7^{3\cdot 665}\cdot 3^5+7^{3\cdot 664}\cdot 3^{3\cdot 2}+\ldots+3^{5\cdot 666}\right]=$$

$$=100\cdot\left(7^{3\cdot 666}+7^{3\cdot 665}\cdot 3^5+7^{3\cdot 664}\cdot 3^{3\cdot 2}+\ldots+3^{5\cdot 666}\right).$$

Tehát $7^{2001}-3^{3335}$ valóban osztható 100-zal.

Danyi Barbara (Salgótarján, Táncsics M. Közg. és Ker. Szki., 12. o.t.) megoldása alapján

Megjegyzés. A megoldók többsége az ismert $a-b\mid a^n-b^n$ összefüggést használta. Ezenkívül néhányan a végződések periodicitását vizsgálták (a 7 hatványaiban 4-esével, a 3 hatványaiban 20-asával ismétlődik az utolsó két számjegy).

477 dolgozat érkezett. 3 pontos 450, 2 pontos 8, 1 pontos 12, 0 pontos 5. Nem versenyszerű 2.

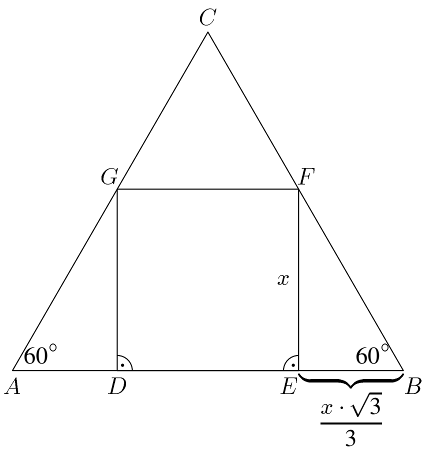
B. 3424. *Egy szabályos háromszögbe négyzetet írunk, amelynek minden csúcsa a háromszög kerületén van. A négyzet egyik oldala egy kisebb szabályos háromszöget metsz le; ebbe hasonló módon ismét négyzetet írunk, és így tovább. A háromszög hányadrészét fedi le a négyszögek végtelen sorozata?*
(*3 pont*)

I. megoldás. Legyen a nagy szabályos háromszög három csúcsa A, B és C. Az első beírt négyzet két csúcsa ABC-nek ugyanarra az oldalára esik. Legyen ez a két csúcs D és E, a négyzet másik két csúcsa pedig F és G (lásd az *ábrát*). Jelöljük a négyzet oldalának hosszát x-szel. Mivel ADG és BFE olyan derékszögű háromszögek, amelyeknek A-nál, illetve B-nél lévő szöge 60°-os, azért $AD = BE = \frac{x \cdot \sqrt{3}}{3}$, és így

$$AB = AD + DE + EB = x\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right).$$

Az $ABFG$ trapéz területe tehát

$$T_{ABFG} = \frac{1}{2} \cdot \left[x + x\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right] \cdot x = x^2 \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{3}.$$



Ez az $EFGD$ négyzet területének, x^2-nek $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$-szorosa. Ugyanilyen összefüggést kapunk a GFC háromszögbe írható négyzet és az ottani trapéz területe között, majd tovább az újabb és újabb négyzetek és trapézok területe között. A trapézok végtelen sorozata a teljes ABC háromszöget lefedi, minden trapéz területének $\frac{3}{3+\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}634$-ed részét fedi le a megfelelő négyzet, tehát a négyzetek végtelen sorozata az ABC háromszög területének $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ részét fedi le.

II. megoldás. Az I. megoldás jelöléseit használjuk. Az ABC háromszög területe

$$T_{ABC} = AB^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x^2.$$

A CGF háromszög hasonló a CAB háromszöghöz, hasonlóságuk aránya megegyezik a két háromszögbe írható négyzetek oldalainak arányával. Vagyis a második háromszögbe írható négyzet oldala

$$x \cdot \frac{GF}{AB} = x \cdot \frac{1}{1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}} = x \cdot \left(2\sqrt{3} - 3\right).$$

Ugyanilyen hasonlóságok alapján az i-edik háromszögbe ($i = 1, 2, 3, 4, \ldots$) írható négyzet oldala $x \cdot \left(2\sqrt{3} - 3\right)^{i-1}$. Ezért a négyzetek végtelen sorozata által lefedett terület

$$T = x^2 \cdot \left(1 + \left(2\sqrt{3} - 3\right)^2 + \left(2\sqrt{3} - 3\right)^4 + \ldots\right).$$

Ennek a végtelen mértani sornak az összege az ismert képlet szerint:

$$T=x^2\cdot\frac{1}{1-\left(2\sqrt{3}-3\right)^2}=x^2\cdot\frac{3\sqrt{3}+5}{8}.$$

A lefedett terület és az ABC háromszög területének hányadosa tehát

$$\frac{T}{T_{ABC}}=\frac{x^2\cdot\frac{3\sqrt{3}+5}{8}}{x^2\cdot\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}634.$$

Hablicsek Márton (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.) megoldásai alapján

270 dolgozat érkezett. 3 pontos 150, 2 pontos 69, 1 pontos 31, 0 pontos 18. Nem versenyszerű 2.

B. 3429. *Legyen* $q=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, *és legyen* $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ *egy olyan függvény, amelyre tetszőleges pozitív egész* n *esetén*

$$\left|f(n)-qn\right|<\frac{1}{q}.$$

Igazoljuk, hogy $f\left(f(n)\right)=f(n)+n$.
(*4 pont*)

Megoldás. Nyilván $\dfrac{1}{q}>|f(0)|$, ezért $f(0)=0$. Az f függvény értéke minden más helyen pozitív egész, hiszen $f(n)=0<n$ esetén

$$\frac{1}{q}>|f(n)-qn|=|-qn|$$

szerint $n<\dfrac{1}{q^2}<1$, ami lehetetlen.

Könnyen ellenőrizhető továbbá, hogy $q(q-1)=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=1$. Így tetszőleges n természetes számra

$$\begin{aligned}\left|f\left(f(n)\right)-f(n)-n\right|&=\left|f\left(f(n)\right)-qf(n)+(q-1)f(n)-q(q-1)n\right|=\\&=\left|f\left(f(n)\right)-qf(n)+(q-1)\left(f(n)-qn\right)\right|.\end{aligned}$$

A minden a, b valós számra teljesülő $|a+b|\le|a|+|b|$ egyenlőtlenség szerint az előbbi abszolút érték legfeljebb

$$\left|f\left(f(n)\right)-qf(n)\right|+\left|(q-1)\left(f(n)-qn\right)\right|=\left|f\left(f(n)\right)-qf(n)\right|+(q-1)|f(n)-qn|,$$

ami a feladat feltétele szerint $\frac{1}{q}+(q-1)\frac{1}{q}=1$-nél kisebb. Tehát $\left|f\big(f(n)\big)-f(n)-n\right|<1$, ami csak az $f\big(f(n)\big)-f(n)-n=0$ esetben állhat fenn, hiszen $f\big(f(n)\big)$, $f(n)$ és n egészek.

Bóka Gergely (Szolnok, Verseghy Ferenc Gimn., 10. o.t.)

65 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 50, 3 pontot 4, 2 pontot 4, 1 pontot 3, 0 pontot 4 versenyző.

B. 3431. *OKOSBANK páncélszekrényén több különböző zár van. A bankban n pénztáros dolgozik, mindegyiknek kulcsa van a zárak némelyikéhez. (Egy pénztárosnak több kulcsa is lehet, és egy zárhoz többüknek is lehet kulcsa.) Tudjuk, hogy bármelyik k pénztáros együtt mindig ki tudja nyitni a páncélszekrényt, de $k-1$ pénztáros soha. Legalább hány zár van a páncélszekrényen?*

(*5 pont*) *Vígh Viktor,* Szeged

Megoldás. Akárhogyan választunk is ki $k-1$ pénztárost, van olyan zár, amelyikhez egyiküknek sincs kulcsa; a többi $n-k+1$ pénztáros mindegyike rendelkezik ehhez a zárhoz való kulccsal. Így az n pénztáros minden $k-1$ elemű részhalmazához tartozik (legalább) egy zár, amelyet egyikük sem tud kinyitni, és különböző $(k-1)$-es halmazokhoz különböző az ily módon hozzárendelt zár. A zárak száma tehát legalább annyi, mint a $k-1$ elemű (pénztáros) részhalmazok száma, vagyis $\binom{n}{k-1}$.

Megmutatjuk, hogy ez a becslés éles, azaz $\binom{n}{k-1}$ zár esetén létezik a kulcsoknak olyan kiosztása, amelyre a feladat feltételei teljesülnek. Számozzuk meg a zárakat 1-től $\binom{n}{k-1}$-ig, és lássuk el ugyanezekkel a sorszámokkal a pénztárosok n elemű halmazának $k-1$ elemű részhalmazait. Tekintsük a következő elosztást: egy pénztáros pontosan akkor kapjon kulcsot az i-edik sorszámú zárhoz, ha nem tartozik hozzá az i-edik sorszámmal jelölt részhalmazhoz. Ekkor semelyik $k-1$ pénztáros sem tudja a páncélszekrényt kinyitni, hiszen az ő halmazuk sorszámával jelölt zárhoz egyiküknek sincs kulcsa. Viszont k pénztáros között már mindegyik kulcsnak akad gazdája, hiszen (minden i-re) az i-edik zárhoz kulccsal nem rendelkezők száma pontosan $k-1$.

Ambrus Gergely (Szeged, Radnóti M. Gimn., 12. o.t.)

81 dolgozat érkezett. 5 pontos 44, 4 pontos 21, 2 pontos 1, 1 pontos 1, 0 pontos 6. Nem versenyszerű 8 dolgozat.

B. 3435. *Keressük meg az alábbi egyenletrendszer nemnegatív megoldásait:*

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{100}=5050$$

$$x_2^2-x_1^2=3 \qquad \ldots \qquad x_k^2-x_{k-1}^2=2k-1 \qquad \ldots \qquad x_{100}^2-x_{99}^2=199.$$

(*4 pont*)

Megoldás. A 2., 3., $\ldots$, k. egyenleteket összeadva:

$$x_k^2 - x_1^2 = 3 + 5 + \ldots + (2k-1) = k^2 - 1,$$

ezért

$$x_k = \sqrt{x_1^2 + k^2 - 1};$$

az x_1 tehát az összes többi ismeretlen értékét egyértelműen meghatározza. Ha $x_1 = 1$, akkor ennek alapján $x_k = k$ (minden $2 \le k \le 100$-ra, sőt $k = 1$-re is); könnyen látható, hogy ez valóban megoldása az egyenletrendszernek. Ha $x_1 < 1$, akkor $x_k = \sqrt{x_1 + k^2 - 1} < k$, ezért

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{100} < 1 + 2 + \ldots + 100 = 5050;$$

ilyen megoldás tehát nincs. Hasonlóan $x_1 > 1$ esetén $x_k > k$, az első egyenlet ismét nem teljesül, hiszen ekkor $x_1 + x_2 + \ldots + x_{100} > 5050$. Tehát az egyetlen megoldás: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $\ldots$, $x_{100} = 100$.

Szalay Zsófia (Budapest, Szt. István Gimn., 11. o.t.)

190 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 104, 3 pontot 6, 2 pontot 2, 1 pontot 61, 0 pontot 13 beküldő. Nem versenyszerű 4 dolgozat.

B. 3438. *Az $f(x, y, z)$ függvényre teljesül, hogy bármely t valós számra*

$$f(x+t, y+t, z+t) = t + f(x, y, z);$$

$$f(tx, ty, tz) = tf(x, y, z);$$

$$f(x, y, z) = f(y, x, z) = f(x, z, y).$$

Mennyi $f(2000, 2001, 2002)$?
(*5 pont*)

Megoldás. A harmadik tulajdonságból következik, hogy az f függvény szimmetrikus, azaz az x, y, z változók bármely permutációjára egyenlő értéket vesz föl.

Így tetszőleges d valós számra egyfelől

$$f(-d, 0, d) = f(d, 0, -d),$$

másfelől a második tulajdonságot $t = -1$-re alkalmazva

$$f(-d, 0, d) = -f(d, 0, -d).$$

A két eredményt összevetve

$$f(-d, 0, d) = 0.$$

Az első tulajdonság felhasználásával végül

$$f(2000, 2001, 2002) = 2001 + f(-1, 0, 1) = 2001.$$

Megjegyzések. 1. Hasonlóan igazolható, hogy ha x, y és z egy számtani sorozat szomszédos elemei úgy, hogy $y = \frac{x+z}{2}$, akkor $f(x, y, z) = y$.

2. A feladatban megadott tulajdonságú függvény létezik, például $f(x,y,z)=\dfrac{x+y+z}{3}$. Az viszont nem igaz, hogy a megadott tulajdonságok csak erre a függvényre teljesülnek. *Rácz Béla András* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn.) végtelen sok ilyen függvényt talált. Könnyű ellenőrizni, hogy tetszőleges valós a esetén az alábbi függvények rendelkeznek a megadott tulajdonságokkal:

$$f(x,y,z)=\begin{cases} \dfrac{x+y+z}{3}, & \text{ha } x,\ y \text{ és } z \text{ között nincsenek egyenlők,} \\ ax+(1-a)z, & \text{ha } x=y; \\ ay+(1-a)x, & \text{ha } y=z; \\ az+(1-a)y, & \text{ha } x=z. \end{cases}$$

117 dolgozat érkezett. 5 pontos 79, 4 pontos 19, 3 pontos 3, 2 pontos 1, 1 pontos 11, 0 pontos 4.

B. 3441. *Pinokkiónak* 9*-féle akadályon kell sikerrel túljutnia, hogy hús-vér gyerek lehessen. Nehéz dolga van; ha egy akadályon elbukik, akkor vissza kell térnie az előzőhöz, és ott újra kell próbálkoznia. Ha a legelső akadályon bukik el, akkor fabábu marad örökre. Pinokkió nem tanul a kudarcokból, ezért az egyes akadályokon a siker valószínűsége mindig* $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \ldots, \frac{9}{10}$*, akárhányadszor is próbálkozik. Milyen sorrendben rendezze el a Kékhajú Tündér a Pinokkióra váró akadályokat ahhoz, hogy Pinokkió a legnagyobb eséllyel változzék át igazi gyerekké, és mekkora ebben az esetben a siker valószínűsége?*

(*5 pont*)

I. megoldás. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor Pinokkiónak csak két akadállyal kell megbirkóznia, amelyeken a siker, illetve a kudarc valószínűsége s_1, s_2, illetve b_1, b_2. Ha Pinokkió pontosan k-szor bukik el a második akadályon – itt k tetszőleges természetes szám lehet –, akkor az első akadályon mindannyiszor újra át kell jutnia. Ekkor tehát a végső siker valószínűsége $p_k=s_1(b_2s_1)^k\cdot s_2$. Annak a valószínűsége tehát, hogy Pinokkió mindkét akadályon sikerrel jut át $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$. Az összeg végtelen mértani sor, első tagja s_1s_2, hányadosa b_2s_1, ami most 0 és 1 közé esik. A sor tehát konvergens, összege

$$s=\frac{s_1s_2}{1-b_2s_1}. \tag{1}$$

A nevező $1=b_1+s_1$ felhasználásával $b_2+s_1(1-b_2)=b_1+s_1s_2$, és így

$$s=\frac{s_1s_2}{b_1+s_1s_2}. \tag{2}$$

Ha bevezetjük az $s_1*s_2=\dfrac{s_1s_2}{b_1+s_1s_2}$ jelölést, akkor látható, hogy a $*$ művelet nem kommutatív. s_1*s_2 és s_2*s_1 közül a számlálók egyenlősége miatt az a nagyobb, amelyiknek a nevezője kisebb. Így $s_1*s_2>s_2*s_1$ pontosan akkor teljesül, ha $b_1<b_2$, azaz

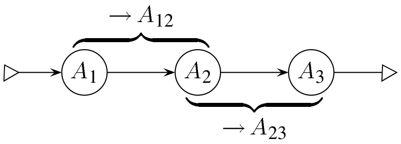
$s_1 > s_2$. Két akadály esetén tehát a könnyebb akadállyal kezdve lesz nagyobb esélye Pinokkiónak. A józan ész is ezt sugallja: érdemes a könnyebb feladatokkal kezdeni.

Megjegyzés. A talált eredmény és a tapasztalat általában is szemléletes választ sugall a feladat első kérdésére: az akadályok növekvő nehézségi sorrendjében számíthat Pinokkió a legnagyobb esélyre, és a fenti okoskodás egy teljes indukciós bizonyítás biztató kezdőlépéseként is felfogható. A gyors folytatáshoz arra volna szükség, hogy három – vagy több – akadály esetén tetszőleges sorrendben lehessen a szomszédos akadálypárok fenti „összevonásával” az akadályok számát csökkenteni. Ez azonban nem teljesül, a művelet nem asszociatív: ha például $s_1 = s_2 = s_3 = \dfrac{1}{2}$, akkor $s_1 * s_2 = s_2 * s_3 = \dfrac{1}{3}$, és így

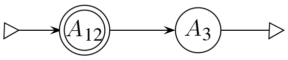
$$(s_1 * s_2) * s_3 = \frac{1}{3} * \frac{1}{2} < \frac{1}{2} * \frac{1}{3} = s_1 * (s_2 * s_3).$$

A továbblépéshez tehát az asszociativitás hiányában azt is meg kell vizsgálnunk, hogyan lehet három akadályt egyetleneggyel helyettesíteni: ebben az esetben is meg kell oldanunk a feladatot.

Legyen most három akadály, A_1, A_2, A_3 ebben a sorrendben, és rajtuk a siker és kudarc valószínűsége s_i, illetve b_i $(i = 1, 2, 3)$.



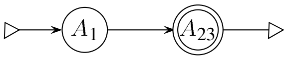
Ekkor az $(A_1(s_1), A_2(s_2))$ akadálypárt a fentiek szerint az $A_{12}(s_1 * s_2)$ akadállyal helyettesítve



helyes eredményt kapunk annak a valószínűségére, hogy Pinokkió eljut az A_3 akadály elé, ha azonban itt hibázik, akkor „felülről” érkezik vissza az A_{12} akadályhoz, és ebben az esetben a siker valószínűsége már nem ugyanaz az összevont és az eredeti változatban.

Megjegyzés. Könnyen meggondolható, hogy annak a valószínűsége, hogy Pinokkió „felülről” érkezve sikerrel túljut az A_1, A_2 páron, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} s_2(b_2 s_1)^k = \frac{1}{s_1} \cdot (s_1 * s_2)$, így ezután az $s_1 * s_2$ helyettesítés nem jogos.

Az (A_2, A_3), illetve az őket helyettesítő $A_{23}(s_2 * s_3)$



akadályhoz viszont Pinokkió már nem kerülhet „felülről”, hiszen ezt csak a célból visszafordulva tehetné meg. Ez azt jelenti, hogy az $A_1(s_1)$, $A_2(s_2)$, $A_3(s_3)$ akadályhármas az $A_1(s_1)$, $A_{23}(s_2 * s_3)$ akadálypárral, ez utóbbi pedig, mint láttuk, az egyetlen $A_{123}(s_1 * (s_2 * s_3))$ akadálypárral egyenértékű.

A $*$ művelet tehát $s_1 * (s_2 * s_3)$ zárójelezéssel számítja ki helyesen a három akadályon való sikeres átjutás valószínűségét, innen pedig már adódik, hogy n darab akadály esetén

(3) $$s_1 * (s_2 * (\ldots * (s_{n-1} * s_n) \ldots))$$

a megfelelő zárójelezés.

A feladat megoldása ezek után kétféle módon fejezhető be. Az eddigiek és (2) alapján igazolhatjuk, hogy a (3) alatti mennyiség valóban akkor a legnagyobb, ha az akadályok növekvő nehézségi sorrendben követik egymást, majd (2) és (3) felhasználásával kiszámoljuk ezt az értéket, ha $n=9$, $s_1=\frac{9}{10}$, $s_2=\frac{8}{10}$, $\ldots$, $s_9=\frac{1}{10}$. A másik lehetőségnek az látszik, hogy (2) alapján általános formulát keresünk a (3) kifejezésre, és ehhez keressük meg a maximális értéket adó elrendezést.

I. lehetőség. Mivel n darab akadálynak $n!$ darab sorrendje létezik, ezek között van olyan, amikor a (3) értéke maximális. Megmutatjuk, hogy ha ebben az esetben az s_i értékek nem csökkenő sorrendben követik egymást, azaz ha van olyan $1 \le k < n$, hogy $s_k < s_{k+1}$, akkor a (3) kifejezés értéke növelhető, pontosabban

$$s_1*(s_2*(\ldots s_k*(s_{k+1}*\ldots*(s_{n-1}*s_n)\ldots)\ldots)) < s_1*(\ldots*(s_{k+1}*(s_k*\ldots*s_n))\ldots),$$

a k-adik és a $(k+1)$-edik akadály cseréjével a siker valószínűsége nő. (1)-ből látható, hogy s_1*s_2 mindkét komponensében szigorúan monoton növő, és így elegendő igazolni, hogy

$$s_k*(s_{k+1}*\ldots*(s_{n-1}*s_n)\ldots) < s_{k+1}*(s_k*\ldots*(s_{n-1}*s_n)\ldots),$$

azaz a $(k+1)$-edik utáni akadályok – ha vannak ilyenek – összevonása után $s_k < s_{k+1}$-ből

$$s_k*(s_{k+1}*s) < s_{k+1}*(s_k*s) \tag{4}$$

következik. (Ha $k+1=n$, akkor $s=1$ választással $s_{k+1}*1=s_{k+1}$, és $s_k*1=s_k$ miatt az állítás a két tagról látottak szerint teljesül.)

(4) igazolásához egyszerűen fejtsük ki a két oldalt. (2) szerint

$$s_k*(s_{k+1}*s)=\frac{s_k\cdot(s_{k+1}*s)}{b_k+s_k\cdot(s_{k+1}*s)}=\frac{s_ks_{k+1}s}{b_kb_{k+1}+b_ks_{k+1}s+s_ks_{k+1}s}=\frac{s_ks_{k+1}s}{b_kb_{k+1}+s_{k+1}s},$$

és ezután ugyanígy

$$s_{k+1}*(s_k*s)=\frac{s_{k+1}s_ks}{b_{k+1}b_k+s_ks}.$$

Mivel a számlálók egyenlők és a feltétel miatt a második tört nevezője kisebb, az állítás valóban igaz.

Ezek után a maximális valószínűséget adó elrendezésben az akadályok lépésenként összevonhatók:

$$s_8'=s_8*s_9=\frac{2}{10}*\frac{1}{10}=\frac{1}{41};\qquad s_7'=s_7*s_8'=\frac{3}{10}*\frac{1}{41}=\frac{3}{290},$$
$$s_6'=s_6*s_7'=\frac{4}{10}*\frac{3}{290}=\frac{1}{146};\qquad s_5'=s_5*s_6'=\frac{5}{10}*\frac{1}{146}=\frac{1}{147};$$
$$s_4'=s_4*s_5'=\frac{6}{10}*\frac{1}{147}=\frac{1}{99};\qquad s_3'=s_3*s_4'=\frac{7}{10}*\frac{1}{99}=\frac{7}{304};$$
$$s_2'=s_2*s_3'=\frac{8}{10}*\frac{7}{304}=\frac{7}{83},\qquad \text{végül}\qquad s_1'=s_1*s_2'=\frac{9}{10}*\frac{7}{83}=\frac{63}{146}.$$

Pinokkió maximális esélye tehát $\frac{63}{146}\approx 0{,}4315$.

II. lehetőség. Természetesebb alakot kapunk, ha a (2) összefüggés reciprokát tekintjük:

$$\frac{1}{s_1 * s_2} = 1 + \frac{b_1}{s_1} \cdot \frac{1}{s_2}.$$

A jobb oldal második tagjában $\frac{1}{s_2} = \frac{s_2 + b_2}{s_2} = 1 + \frac{b_2}{s_2}$, így ha $r_1 = \frac{b_1}{a_1}$ és $r_2 = \frac{b_2}{a_2}$, akkor

$$\frac{1}{s_1 * s_2} = 1 + r_1(1 + r_2) = 1 + r_1 + r_1 r_2,$$

és ez pontosan akkor kisebb, mint $\frac{1}{s_2 + s_1} = 1 + r_2 + r_1 r_2$, ha $r_1 < r_2$, azaz $s_1 > s_2$.

Innen egyszerű teljes indukcióval adódik, hogy

$$\text{(5)} \qquad \frac{1}{s_1 * (s_2 * \ldots * (s_{n-1} * s_n) \ldots)} = 1 + r_1 + r_1 r_2 + \ldots + r_1 r_2 \ldots r_n,$$

ahol $r_i = \frac{b_i}{s_i}$.

A maximális valószínűséget adó elrendezést akkor kapjuk, amikor (5) jobb oldala minimális. Ha két szomszédos akadályt, a k-adikat és a $(k+1)$-ediket fölcseréljük, akkor a megfelelő összegekben azok a tagok, amelyek r_k-t és r_{k+1}-et egyszerre tartalmazzák vagy nem tartalmazzák, azonosak, így a két összeg nagyságviszonya az egy-egy megmaradó tag, $r_1 r_2 \ldots r_{k-1} r_{k+1}$ és $r_1 r_2 \ldots r_{k-1} r_k$ nagyságviszonyától, vagyis r_{k+1} és r_k nagyságviszonyától függ. Ha $r_{k+1} < r_k$, akkor a két akadály cseréjével a siker valószínűségének reciproka csökken, a kérdéses valószínűség tehát növekszik. A maximális valószínűséget adó elrendezésben tehát az r_i értékek növekvően, az akadályok így a siker valószínűségének csökkenő sorrendjében vannak elrendezve.

Pinokkió esetében ez az elrendezés az $r_i = \frac{i}{10 - i}$ arányokat adja. Az $r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_i$ szorzat így $\frac{i!}{9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (9 - i + 1)} = \frac{1}{\binom{9}{i}}$, a maximális valószínűség tehát:

$$\left(\binom{9}{0}^{-1} + \binom{9}{1}^{-1} + \ldots + \binom{9}{9}^{-1} \right) = \frac{63}{146}.$$

II. megoldás. Ha az akadályok ebben a sorrendben A_1, A_2, $\ldots$, A_n, és a k-adik akadályon s_k, illetve $1 - s_k = b_k$ a siker és a kudarc valószínűsége, akkor jelölje p_k annak a valószínűségét, hogy a $(k-1)$-edik akadályon túljutva Pinokkió igazi gyerek lesz. Ekkor a feladat kérdése éppen p_1-re vonatkozik. Érdemes két „mesterséges” értéket is bevezetni, ezek $p_0 = 0$ és $p_{n+1} = 1$. Előbbi azt a szomorú feltételt jelenti, hogy az első akadályon elbukva Pinokkió vállalkozása nem sikerül, utóbbi pedig azt, hogy ha az utolsó akadályon is sikerrel túljut, akkor a történet boldog véget ér.

Ha Pinokkió sikerrel veszi a k-adik akadályt is – ennek s_k a valószínűsége –, akkor ezután p_{k+1} eséllyel jut a célba; ha nem – a kudarc valószínűsége a k-adik akadályon

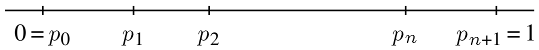
b_k –, akkor újra kell próbálkoznia a $(k-1)$-edik akadályon, ahonnan p_{k-1} a végső siker valószínűsége.

Ez azt jelenti, hogy

$$p_k = b_k \cdot p_{k-1} + s_k \cdot p_{k+1}, \qquad \text{ha } k = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

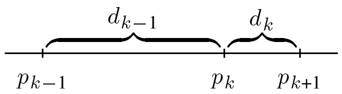
(Vegyük észre, hogy $k=1$ és $k=n$ esetén a bevezetett $p_0=0$ és $p_{n+1}=1$ értékekkel (6) szintén teljesül.)

Egy n-ismeretlenes egyenletrendszert kaptunk a bevezetett valószínűségekre, nekünk ezek egyike, p_1 értékét kell megtalálnunk. Algebrai lépések helyett nézzük meg, mit jelentenek geometriailag a (6) egyenletek.



A p_k valószínűségek jelentéséből nyilvánvaló, hogy $0=p_0<p_1<\ldots<p_n<1=$ $=p_{n+1}$, tehát a p_k számok a $[0;1]$ intervallum egy felosztását adják.

A $p_k=b_k \cdot p_{k-1}+s_k \cdot p_{k+1}$ egyenlet azt mondja, hogy a p_k szám a $[p_{k-1};p_{k+1}]$ intervallumot



úgy osztja két részre, hogy $\dfrac{d_k}{d_{k-1}}=\dfrac{b_k}{s_k}$, azaz bevezetve az $r_k=\dfrac{b_k}{s_k}$ jelölést

$$p_{k+1}-p_k=d_k=r_k \cdot d_{k-1}. \tag{7}$$

Innen ismételt helyettesítéssel kapjuk, hogy $d_k=r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_k \cdot d_0$, és így $d_0=p_1-p_0=$ $=p_1$, valamint $d_0+d_1+\ldots+d_n=1$ miatt

$$1=d_0+d_1+\ldots+d_n=p_1(1+r_1+r_1r_2+\ldots+r_1r_2\ldots r_n),$$

azaz

$$p_1=\frac{1}{1+r_1+r_1r_2+\ldots+r_1r_2\ldots r_n}.$$

Lényegében az I. megoldás (5) formuláját kaptuk meg, innen a feladat megoldása az ott leírtak szerint fejezhető be.

Megjegyzések. 1. Az (7) egyenlőséget a (6) egyenletet átrendezéséből nyilván algebrai úton is megkaphatjuk.

2. Hasonlóan kapjuk, hogy a p_k valószínűségek értéke

$$p_k=p_1(1+r_1+r_1r_2+\ldots+r_1r_2\ldots r_{k-1})=\frac{1+r_1+r_1r_2+\ldots+r_1r_2\ldots r_{k-1}}{1+r_1+r_1r_2+\ldots+r_1r_2\ldots r_n}.$$

3. Érdekes eredményhez jutunk, ha az egyes akadályokon a siker valószínűsége állandó. Ekkor $\dfrac{b_i}{s_i}=r$, és ilyenkor vizsgálhatjuk a siker valószínűségét, amennyiben az akadályok száma a

végtelenhez tart. A bizonyítottak szerint n akadály esetén

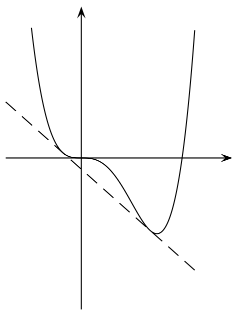
$$S = S(n) = \frac{1}{1 + r + \ldots + r^n}.$$

Ha $r \geq 1$ – azaz $s \leq \frac{1}{2}$ –, akkor a nevező nem korlátos, a siker valószínűsége nullához tart, ami szomorú, de nem meglepő. Ha viszont $r < 1$, vagyis $s > \frac{1}{2}$, tehát Pinokkió többre képes, mint a vak véletlen, akkor a nevező konvergens, összege $\frac{1}{1-r}$, és így a siker valószínűsége sem csökken $1 - r$ alá, akárhány akadállyal kell is szembenéznie Pinokkiónak.

54 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Ambrus Gergely, Babos Attila, Backhausz Ágnes, Béky Bence, Birkner Tamás, Fehér Gergely, Hargitai Gábor, Kiss Demeter, Kiss-Tóth Christian, Lovrics Klára, Maga Péter, Nagy 444 Zoltán, Paulin Roland, Rácz Béla András, Somogyi Dávid, Szalay Zsófia, Tábor Áron és Tóth János. 4 pontos 2, 3 pontos 14, 2 pontos 13, 1 pontos 4, 0 pontos 3 dolgozat.

B. 3470. *Írjuk föl annak az egyenesnek az egyenletét, amely az $y = 3x^4 - 4x^3$ egyenletű görbét két különböző pontban érinti.*
(*4 pont*)

I. megoldás. Az $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ függvény grafikonja az *1. ábrán* látható, szaggatott vonallal rajzoltuk meg a keresett egyenest.


1. ábra

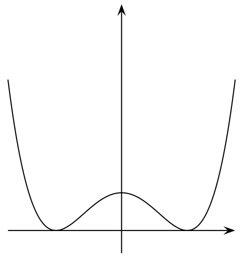
Vegyük észre, hogy ha a szóban forgó polinomokon elvégezzük az $x \leftarrow x + \frac{1}{3}$ helyettesítést – grafikusan ez azt jelenti, hogy a görbét eltoljuk az x tengely mentén $-\frac{1}{3}$ egységgel –, akkor a kapott $f_1(x) = f\left(x + \frac{1}{3}\right)$ negyedfokú polinom nem tartalmaz harmadfokú tagot:[1]

$$f_1(x) = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^4 - 4\left(x + \frac{1}{3}\right)^3 = 3x^4 - 2x^2 - \frac{8}{9}x - \frac{1}{9}.$$

$f_1(x)$-ben a páros fokú tagokat teljes négyzetté alakítva kapjuk, hogy

$$f_1(x) = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{8}{9}x - \frac{4}{9}.$$

[1] Ezt az – úgynevezett Tschirnhaus-féle – helyettesítést alkalmazzák az általános negyedfokú egyenlet megoldásának első lépéseként is a harmadfokú tag kiküszöbölésére.



2. ábra

Az $y=3\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2$ grafikonját (*2. ábra*) nyilván az x tengely érinti kétszer, így az $f_1(x)$ grafikonjának kettős érintője $y=-\frac{8}{9}x-\frac{4}{9}$. A keresett egyenest most már az inverz $x\leftarrow x-\frac{1}{3}$ helyettesítéssel kapjuk; egyenlete:

$$y=-\frac{8}{9}\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{4}{9}=-\frac{8}{9}x-\frac{4}{27}.$$

II. megoldás. Az $y=ax+b$ egyenletű egyenes pontosan akkor érinti két pontban az $y=3x^4-4x^3$ függvény grafikonját, ha a $p(x)=3x^4-4x^3-ax-b$ polinom grafikonja két helyen érinti az x tengelyt, azaz két többszörös gyöke van. A görbe negyedfokú, ezért mindkét többszörös gyök kétszeres, több gyöke nincsen, így ha a gyökök x_1 és x_2, akkor a $p(x)$ gyöktényezős alakja

$$(*)\qquad p(x)=3(x-x_1)^2(x-x_2)^2.$$

A jobb oldalon a műveleteket elvégezve:

$$3x^4-4x^3-ax-b=$$
$$=3x^4-6(x_1+x_2)x^3+3(x_1^2+4x_1x_2+x_2^2)x^2-6x_1x_2(x_1+x_2)x+3x_1^2x_2^2.$$

Az együtthatók egyenlőségéből

$$(1)\qquad x_1+x_2=\frac{2}{3},$$

$$(2)\qquad x_1^2+4x_1x_2+x_2^2=0,$$

$$(3)\qquad 6x_1x_2(x_1+x_2)=a,$$

$$(4)\qquad -3x_1^2x_2^2=b.$$

(2)-ből $(x_1+x_2)^2=-2x_1x_2$, azaz (1) felhasználásával $x_1x_2=-\frac{2}{9}$. Innen (3)-ból $a=-\frac{8}{9}$, (4)-ből pedig $b=-\frac{4}{27}$.

A keresett egyenes egyenlete tehát csak $y=-\frac{8}{9}x-\frac{4}{27}$ lehet, ez az egyenes pedig valóban megoldás, ugyanis az (1), (2) egyenletekből álló rendszer megoldásai valós számok ($x_1=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}$ és $x_2=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}$), és így a fenti lépések megfordíthatók, a $(*)$ szorzat tényezői valós együtthatós polinomok.

Rácz Béla András (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.)

III. megoldás. Ha a tetszőleges valós szám, akkor a görbét az $(a;f(a))$ pontjában érintő egyenes egyenlete

$$y=f'(a)(x-a)+f(a).$$

Ha $b \neq a$, akkor a $(b; f(b))$-beli érintő pontosan akkor lesz ugyanez az egyenes, ha

$$f'(a) = f'(b) \tag{1}$$

$$f(a) - a \cdot f'(a) = f(b) - b \cdot f'(b). \tag{2}$$

(1)-ből $a - b \neq 0$-val osztva kapjuk, hogy

$$a^2 + ab + b^2 - a - b = 0, \tag{3}$$

(2)-ből pedig ugyanígy, hogy

$$9(a+b)(a^2+b^2) - 8(a^2+ab+b^2) = 0. \tag{4}$$

(3) szerint $a^2 + ab + b^2 = a + b$; ezt felhasználva, (4)-ből

$$a^2 + b^2 = \frac{8}{9}, \tag{5}$$

amit (3)-ba helyettesítve

$$a + b - ab = \frac{8}{9}. \tag{6}$$

Az (5), (6) egyenletrendszer közvetlenül negyedfokú egyenletre vezet; mivel mindkét egyenlet szimmetrikus, érdemes bevezetni az $u = a + b$, $v = ab$ új ismeretleneket: így az

$$u^2 - 2v = \frac{8}{9},$$
$$u - v = \frac{8}{9}$$

egyenletrendszerhez, és innen $v = u - \frac{8}{9}$ helyettesítésével az $u^2 - 2u + \frac{8}{9} = 0$ egyenlethez jutunk. Ennek gyökei $u_1 = \frac{2}{3}$, $u_2 = \frac{4}{3}$. Ennek megfelelően $v_1 = -\frac{2}{9}$ és $v_2 = \frac{4}{9}$.

A keresett a és b értékek most már a

$$t^2 - u_1 t + v_1 = 0, \qquad \text{illetve a} \qquad t^2 - u_2 t + v_2 = 0$$

egyenletek megoldásai.

Az első esetben $a = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$ és $b = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}$, a második esetben viszont a két gyök egyenlő, $a = b = \frac{2}{3}$. A megoldást az $a \neq b$ feltétellel keressük, így a második lehetőség elesik.

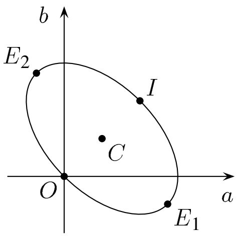
Ha $a = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$, akkor $f'(a) = -\frac{8}{9}$ és $f(a) - a \cdot f'(a) = -\frac{4}{27}$, így az $(a; f(a))$-beli érintő egyenlete

$$y = -\frac{8}{9}x - \frac{4}{27}.$$

Mivel lépéseink megfordíthatóak, ugyanez a $(b;f(b))$-beli érintő egyenlete is.

Kármán Péter (Budapest, Móricz Zs. Gimn., 12. o.t.)

Megjegyzések. 1. Az $a=b=\frac{2}{3}$ az $y=3x^4-4x^3$ görbe – egyik – inflexiós pontjának az abszcisszája. Szigorúan véve itt is két egybeeső érintőről beszélhetünk, most azonban az érintési pontok is egybeesnek.



3. ábra

2. A III. megoldásban kapott (3) feltételt ($\frac{f'(a)-f'(b)}{a-b}=0$) az $(a;b)$ koordináta-rendszerben ábrázolva egy ellipszist kapunk (*3. ábra*). Ez az ellipszis azokból a $P(a;b)$ pontokból áll, amelyekre az $(a;f(a))$ és $(b;f(b))$- pontokban az $y=3x^4-4x^3$ görbéhez párhuzamos érintők húzhatók. Az ellipszis tengelyei párhuzamosak a koordinátatengelyek szögfelezőivel, középpontja pedig a $C\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ pont.

Az ellipszis kistengelyének végpontjai, O, és $I\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ az $y=3x^4-4x^3$ görbe két inflexiós pontját adják. Első ránézésre meglepőbb, hogy a nagytengely végpontjai, $E_1\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ és $E_2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ éppen a kettős érintő érintési pontjait szolgáltatják. Ez a kapcsolat világossá válik, ha átgondoljuk a negyedfokú görbe „szimmetriáját” az $x=\frac{1}{3}$ pontra nézve. Ez az érték az érintők meredekségét számoló harmadfokú derivált grafikonja szimmetria-középpontjának az abszcisszája, és ha a negyedfokú polinomból kivonjuk a kettős érintő egyenletét, akkor a kapott negyedfokú görbe már valóban tengelyesen szimmetrikus lesz az $x=\frac{1}{3}$ egyenesre. (Ez indokolja – többek között – az I. megoldás helyettesítését.) Ez pedig azt jelenti, hogy a kettős érintő érintési pontjainak abszcisszái is szimmetrikusan helyezkednek el az $x=\frac{1}{3}$ pontra, a *3. ábrán* a megfelelő pont rajta van az $a+b=\frac{2}{3}$ egyenletű egyenesen is, ami éppen az ellipszis nagytengelye.

Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a tulajdonság minden olyan negyedfokú görbére teljesül, amelynek létezik kettős érintője, pontosabban szólva az $\frac{f'(a)-f'(b)}{a-b}=0$ pontosan ebben az esetben lesz valós ellipszis egyenlete. Az így kapott ellipszisek hasonlók, excentricitásuk $\frac{\sqrt{3}}{3}$, állásuk olyan, ahogyan azt a *3. ábra* mutatja, kistengelyük végpontjai a negyedfokú görbe inflexiós pontjait – azaz a harmadfokú derivált szélsőértékeit –, nagytengelyük végpontjai pedig a kettős érintő érintési pontjait adják.

49 dolgozat érkezett. 4 pontos Babos Attila, Balka Richárd, Bóka Gergely, Boros Vazul, Horváth Illés, Horváth 424 Márton, Kármán Péter, Lovrics Anna, Pallos Péter, Rácz Béla András és Ta Vinh Thong megoldása. 3 pontot kapott 26, 2 pontot 4, 1 pontot 4, 0 pontot 4 versenyző.

B. 3471. *Egy hangya mászkál az $x^2+y^2+xy=6$ egyenletű görbe által határolt területen. Útvonala a koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenes szakaszokból áll. A hangya a görbe tetszőleges pontjából kiindulva addig megy egyenesen a görbe belsejében, amíg újra eléri a görbe határát. Ekkor 90°-kal elfordul és folytatja útját a görbe belsejében. A hangya csak akkor áll meg, ha olyan határponthoz ér, amelyben már járt, vagy ha nem tudja útját a fenti szabálynak megfelelően folytatni. Bizonyítsuk be, hogy függetlenül a kiindulási ponttól a hangya előbb-utóbb megáll.*

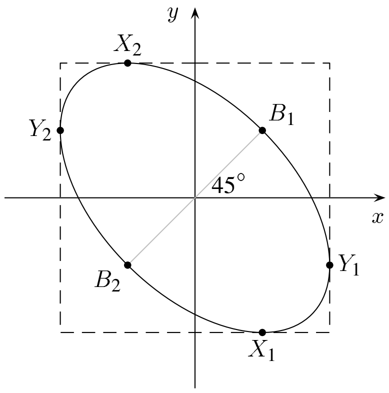
(*5 pont*) *Gillis–Turán matematikaverseny,* 2000

I. megoldás. Ha a hangya a görbe $P(a;b)$ pontjában tartózkodik, akkor az

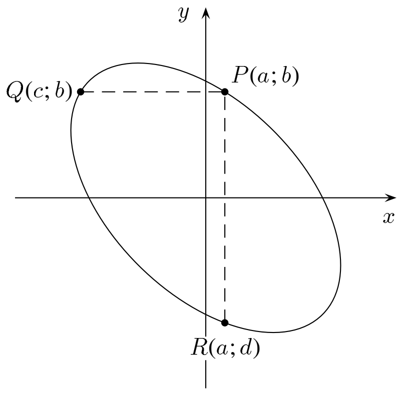
$$x^2+bx+b^2-6=0 \qquad \text{és az} \qquad y^2+ay+a^2-6=0$$

egyenleteknek van valós gyöke – éppen a, illetve b –, és így az egyenletek diszkriminánsa, $D_b=24-3b^2$ és $D_a=24-3a^2$ nem negatív. Ha valamelyikük, például $D_a=0$, azaz $|a|=2\sqrt{2}$ (ekkor $b=-\frac{a}{2}$), akkor a hangya az y tengellyel párhuzamosan nem tud tovább haladni. Ez a két pont $Y_1(2\sqrt{2};-\sqrt{2})$, illetve $Y_2(-2\sqrt{2};\sqrt{2})$. Hasonlóan, amikor $D_b=0$, azaz a hangya az $X_1(\sqrt{2};-2\sqrt{2})$ vagy az $X_2(-\sqrt{2};2\sqrt{2})$ pontban van, akkor az x tengellyel párhuzamosan nem mehet tovább.

Mindez jól látható, ha meggondoljuk, hogy a szóban forgó görbe ellipszis (*1. ábra*), az X_i, Y_i pontok pedig a tengelyekkel párhuzamos érintők érintési pontjai.



1. ábra



2. ábra

Ha a hangya a fenti négytől különböző $P(a;b)$ görbepontban tartózkodik, akkor mindkét megengedett irányban el tud indulni. Ha P nem az útvonal kezdőpontja, akkor persze csak az egyik irány mentén mehet tovább, hiszen a másik irányból kellett megérkeznie.

Ha például az x tengellyel párhuzamosan a görbe $Q(c;b)$ pontjába jut, akkor a fentiek szerint $c\neq a$, és ez a két szám, a és c az $x^2+bx+b^2-6=0$ egyenlet két valós gyöke, azaz $a+c=-b$.

Hasonlóan kapjuk, hogy ha a hangya az y tengellyel párhuzamos útvonalon az $R(a;d)$ pontba lép a P-ből, akkor $d+b=-a$ (*2. ábra*).

Látható, hogy a hangya bármely lépésének végpontjai olyan pontok a görbén, amelyek összesen 4 koordinátájából kettő megegyezik, és ennek, valamint a további két koordinátának az összege 0, $a+b+c=0$ és $a+b+d=0$.

Ha tehát a hangya például az x tengellyel párhuzamosan indul el a $P_0(a;b)$ pontból, akkor útja során a következő görbepontokon halad át:

$$P_0(a;b)\to P_1(-a-b;b)\to P_2(-a-b;a)\to P_3(b;a)\to$$
$$\to P_4(b;-a-b)\to P_5(a;-a-b)\to P_6(a;b),$$

látható tehát, hogy ha útja során nem érinti az X_i, Y_i pontok egyikét sem, akkor pontosan a hatodik lépésben megáll. Ha útközben ezek valamelyikébe jut, akkor persze már korábban is megállhat.

Babos Attila (ELTE Radnóti M. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

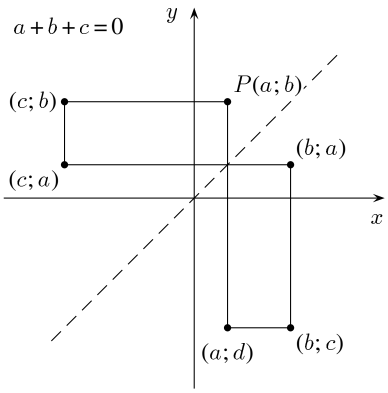
Megjegyzések. 1. Könnyen látható, hogy az X_i pontokba csak az y tengellyel párhuzamosan érkezhet a hangya, az X_1-be a $B_1(\sqrt{2};\sqrt{2})$, az X_2-be pedig a $B_2(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$ pontból. Ugyanez a két pont – azok a pontok az ellipszisen, amelyek koordinátái egyenlők –, ahonnan az Y_1 és az Y_2 pontokban eljuthatunk.

Összefoglalva tehát, ha a hangya az X_i, Y_i, B_i pontoktól különböző helyzetből indul, akkor pontosan a hatodik lépés után áll meg, a B_i pontokból indulva egy, az X_i, Y_i pontokból indulva pedig két lépés után akad el.

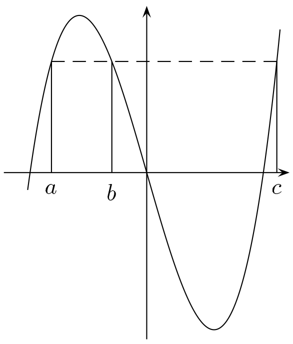
A lényegében helyes megoldások szerzői többé-kevésbé így okoskodtak, de szinte mindenki megfeledkezett a hangya kivételes útvonalainak vizsgálatáról.

2. A $c=-a-b$ jelöléssel a hangya útvonala – a kivételes pontoktól eltekintve – az $(a;b)$, $(c;b)$, $(c;a)$, $(b;a)$, $(b;c)$, $(a;c)$, $(a;b)$ pontokon át vezet, a pontok koordinátái között csak az a, b, c számok fordulnak elő, úgy, hogy $a+b+c=0$ (*3. ábra*). Maga az útvonal – ahogyan a görbe is – tengelyesen szimmetrikus az $y=x$ egyenletű egyenesre.

Az ilyen számhármasok érdekes kapcsolatban állnak a B. 3470. feladat egy lehetséges megközelítésével. (Lásd a megjegyzést a B. 3470. feladat III. megoldásához e szám 413. oldalán.)



3. ábra



4. ábra

Ha az $f(x)=x^3-6x$ harmadfokú polinomból indulunk ki (*4. ábra*), akkor a feladatban szereplő ellipszis egyenlete:

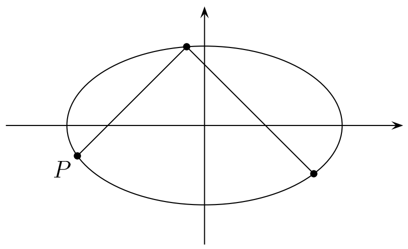
$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=0,$$

az ellipszis pontjainak koordinátái pedig olyan $(a;b)$ számpárok, amelyekre $f(a)=f(b)$.

A szélsőértékektől eltekintve f minden többszörösen fölvett értékét háromszor veszi föl, a hangya egy adott útvonala pedig éppen egy ilyen számhármast határoz meg az út során érintett görbepontok koordinátáiként. Ebben az értelmezésben a feladat állítása nyilvánvaló.

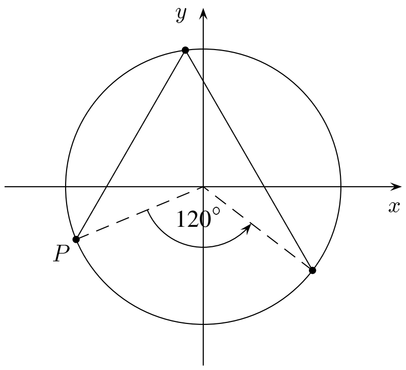
II. megoldás. Forgassuk el a görbét – és a hangya útvonalát is – $(-45°)$-kal, ekkor egyenlete $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$ alakú lesz (*5. ábra*).

Az elforgatott útvonal egy, a koordinátatengelyekkel 45°-os szöget bezáró töröttvonal. Az ellipszis excentricitása, $\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, így ha a görbére és a hangya útvonalára is $\sqrt{3}$ arányú merőleges affinitást alkalmazunk, akkor az ellipszis origó középű körbe, a hangya útvonala pedig olyan töröttvonalba megy át, amelynek szomszédos szakaszai 60, illetve $-60°$-os szöget zárnak be az x tengellyel (*6. ábra*).

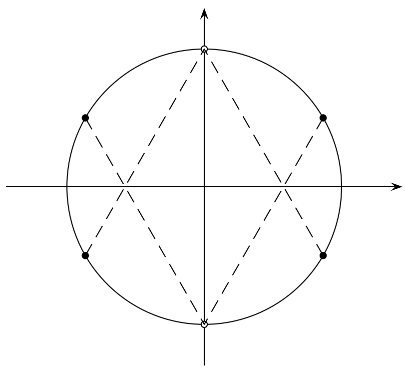


5. ábra

A hangya két egymást követő lépése utáni helyzetét tehát megkaphatjuk, ha útvonalának P kezdőpontját 120°-kal elforgatjuk a kör kezdőpontja körül. A forgatás iránya a hangya haladási irányától függ, és mivel az utazás során ez nem változik, hat egymást követő lépés után a hangya visszajut oda, ahonnan elindult, és így valóban megáll.



6. ábra



7. ábra

Mindez majdnem minden kezdőpontra teljesül annak a hat pontnak a kivételével, amelyek közül négyben az x tengellyel 60, illetve $-60°$-os szöget bezáró érintők érintik a kört – ezekbe a pontokba érve a hangya elakad –, kettő pedig a függőleges átmérő két végpontja – innen juthat a hangya az érintési pontokba (*7. ábra*).

Megjegyzés. A második bizonyításból nyomban adódik – de a görbe egyenletét vizsgálva is kiderül –, hogy az állítás kizárólag az ellipszis alakján múlik, azon, hogy a kis- és a nagytengely aránya, a görbe excentricitása $1:\sqrt{3}$.

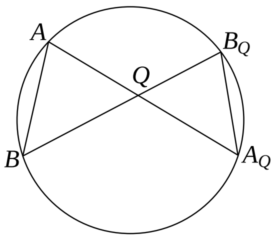
30 dolgozat érkezett. 5 pontos Ambrus Gergely, Babos Attila, Balka Richárd, Balogh 541 János, Bérczi Kristóf, Birkner Tamás, Csáky Attila, Dányádi Zsolt, Hablicsek Márton, Hargitai Gábor, Kiss-Tóth Christian, Kocsis Albert Tihamér, Lovrics Anna, Pallos Péter, Paulin Dániel, Paulin Roland, Rácz Béla András, Simon Balázs, Szilágyi Zoltán, Tábor Áron, Tóth 370 Ágnes és Tóth János megoldása. 4 pontot kapott 5, 3 pontot 1, 2 pontot 1, 0 pontot 1 versenyző.

Nehezebb feladatok megoldása

A. 251. *Adott a térben egy gömb. Ha a P pont illeszkedik a gömbre, a Q pont pedig nem, akkor jelölje P_Q a PQ egyenes és a gömb P-től különböző metszéspontját. Ha a PQ egyenes érinti a gömböt, akkor legyen $P_Q=P$.*

Igazoljuk, hogy ha a gömb A, B, C, D pontjai nincsenek egy síkban, akkor legfeljebb két olyan Q pont létezik, amelyre az $A_QB_QC_QD_Q$ tetraéder egyenlő oldalú. (Egy tetraédert egyenlő oldalúnak nevezünk, ha a lapjai egybevágóak.)

Megoldás. Legyen Q egy, a feltételeknek megfelelő pont, és legyen a gömbre vonatkozó hatványa p. Tekintsük az A, B, A_Q és B_Q pontokat.



Az ABQ és B_QA_QQ háromszögek hasonlóságából

$$A_QB_Q=\frac{B_QQ\cdot AB}{AQ}=\frac{BQ\cdot B_QQ\cdot AB}{AQ\cdot BQ}=\frac{|p|\cdot AB}{AQ\cdot BQ}.$$

Ugyanígy kapjuk, hogy

$$C_QD_Q=\frac{|p|\cdot CD}{CQ\cdot DQ}.$$

Mivel az $A_QB_QC_QD_Q$ tetraéder egyenlő oldalú, $A_QB_Q=C_QD_Q$. Behelyettesítve az előbbi eredményeket,

$$\frac{AQ\cdot BQ}{CQ\cdot DQ}=\frac{AB}{CD}.$$

Teljesen hasonlóan

$$\frac{AQ\cdot CQ}{BQ\cdot DQ}=\frac{AC}{BD}\qquad\text{és}\qquad\frac{AQ\cdot DQ}{BQ\cdot CQ}=\frac{AD}{BC}.$$

E három egyenletből kiszámíthatjuk az AQ, BQ, CQ és DQ távolságok arányát:

$$AQ:BQ:CQ:DQ=$$
$$=\sqrt{AB\cdot AC\cdot AD}:\sqrt{BA\cdot BC\cdot BD}:\sqrt{CA\cdot CB\cdot CD}:\sqrt{DA\cdot DB\cdot DC}.$$

Mint ismeretes, azok a Q pontok, amelyekre az $AQ:BQ$ arány egy megadott érték, egy gömbön vannak, amelynek középpontja az AB egyenesen van, és különbözik az A és B pontoktól. (Az ilyen gömböket Apollóniusz-gömböknek is nevezzük.) Ha az arány 1, akkor a gömb elfajul az AB szakasz felező merőleges síkjává. Hasonlóképpen azok a Q pontok, amelyekre az $AQ:CQ$, illetve $AQ:DQ$ arány megfelelő, vagy az AC, illetve AD szakaszok felező merőleges síkján, vagy pedig egy olyan gömbön helyezkednek el, amelynek középpontja az AC, illetve AD egyenesen van, de nem eshet ezeknek a szakaszoknak a végpontjaiba. A továbbiakban megmutatjuk, hogy ennek a három Apollóniusz-gömbnek, illetve -síknak legfeljebb két közös pontja lehet. Jelöljük a három gömböt, illetve síkot G_b-vel, G_c-vel, illetve G_d-vel.

Ha G_b, G_c és G_d egyike sem fajul el és van három közös pontjuk, akkor a közös pontokon átmenő kör mindhárom gömbre illeszkedik. A közös kör t tengelye (a kör síkjára a középpontban állított merőleges egyenes) mindhárom gömb középpontját tartalmazza. A tengely tehát tartalmazza az AB, AC, AD egyenesek egy-egy, A-tól különböző pontját. Ebből viszont következik, hogy A és t síkja tartalmazza az AB, AC és AD egyeneseket, ezáltal a B, C és D pontokat is; ez viszont ellentmond annak, hogy az A, B, C és D pontok nincsenek egy síkban.

Ha az egyik Apollóniusz-gömb, mondjuk G_b síkká fajul, akkor csak úgy lehet kettőnél több közös pontja G_c-vel és G_d-vel, ha a G_b síkot a G_c és G_d gömbök ugyanabban a körben metszik. A közös metszet-kör t tengelye átmegy a G_c és G_d gömbök középpontján, tehát metszi az AC és AD egyeneseket, tehát az ACD síkban van. Ugyanakkor t merőleges a G_b síkra, vagyis párhuzamos az AB szakasszal. Ebből ismét az következik, hogy az A, B, C és D pontok egy síkban vannak, ami ellentmondás.

Ha két Apollóniusz-gömb, például G_b és G_c fajul síkká, akkor ezek különböző irányúak, mert merőlegesek a különböző irányú AB, illetve AC szakaszokra. A két sík tehát egy egyenesben metszi egymást. Ennek az egyenesnek a G_d gömbbel legfeljebb két közös pontja lehet.

Végül, ha mindhárom Apollóniusz-gömb síkká fajul, akkor egyetlen közös pontjuk van: az $ABCD$ tetraéder körülírt gömbjének középpontja.

4 dolgozat érkezett. 5 pontos Csóka Endre megoldása, 4 pontot kapott Hablicsek Márton, Kiss-Tóth Krisztián és Kunszenti-Kovács Dávid.

A. 253. *Keressük meg az összes olyan* $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ *függvényt, amelyre tetszőleges* x, y *pozitív valós számok esetén*

$$f(x)f\left(yf(x)\right)=f(x+y). \tag{1}$$

IMC 2000, London

Megoldás. Először bebizonyítjuk, hogy tetszőleges x esetén $f(x)\le 1$. Tegyük fel, hogy valamely x-re $f(x)>1$. Ehhez találhatunk olyan pozitív y-t, amelyre $yf(x)=x+y$: ez a szám az $y=\dfrac{x}{f(x)-1}$. Behelyettesítve ezeket az értékeket (1)-be,

$$f(x)f(x+y)=f(x)f\big(yf(x)\big)=f(x+y),$$

amiből $f(x)=1$, ez pedig ellentmondás.

Az (1) egyenletben az $f\big(yf(x)\big)$ tényező minden esetben legfeljebb 1; ebből következik, hogy tetszőleges x,y számokra $f(x+y)\le f(x)$, vagyis az f függvény monoton fogy.

Most megmutatjuk, hogy a függvény vagy konstans 1, vagy pedig minden értéke kisebb 1-nél. Ha valamely $x>0$-ra $f(x)=1$, akkor az egyenletből $f(2x)=f(x+x)=$ $=f(x)f(xf(x))=1$. Ezt a lépést ismételgetve kapjuk, hogy $f(4x)$, $f(8x)$, $\ldots$ mindegyike 1. A monotonitás miatt az ezeknél kisebb helyeken is csak 1 lehet a függvény értéke. Ha tehát a függvény legalább egyszer felveszi az 1-et, akkor konstans 1.

A konstans 1 függvényre teljesül az (1) függvényegyenlet. A továbbiakban azt az esetet vizsgáljuk, ha f mindegyik értéke kisebb 1-nél. Az ilyen függvényekre az előbbi módon kapjuk, hogy szigorúan monoton fogynak, és így kölcsönösen egyértelműek.

Legyen $f(1)=a$; tetszőleges $t>0$ esetén helyettesítsük be (1)-be az $x=1$, $y=\frac{t}{a}$, illetve $x=t$, $y=1+\frac{1-a}{a}t$ számokat; ezek összege egyenlő, így (1) felhasználásával:

$$f(1)f(t)=f(1)f\left(\frac{t}{a}f(1)\right)=f\left(1+\frac{t}{a}\right)=$$
$$=f\left(t+\left(1+\frac{1-a}{a}t\right)\right)=f(t)f\left(\left(1+\frac{1-a}{a}t\right)f(t)\right).$$

$f(t)$-vel osztva kapjuk, hogy

$$f(1)=f\left(\left(1+\frac{1-a}{a}t\right)f(t)\right),$$

és mivel f kölcsönösen egyértelmű,

$$1=\left(1+\frac{1-a}{a}t\right)f(t),$$

amiből

$$f(t)=\frac{1}{1+\frac{1-a}{a}t}.$$

Bevezetve a $b=\frac{1-a}{a}$ jelölést, $f(t)=\frac{1}{1+bt}$, ahol $b>0$. Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy az ilyen alakú függvények is megoldások. A $b=0$ elfajuló eset a konstans 1 függvényt adja. Az összes megoldás tehát:

$$f(t)=\frac{1}{1+bt},$$

ahol $b\ge 0$.

10 dolgozat érkezett. A feladatot megoldotta (5 pont) Csikvári Péter, Csóka Endre, Gerencsér Balázs, Harangi Viktor, Kunszenti-Kovács Dávid, Varjú Péter és Vörös László. 2 pontot kapott 1, 1 pontot 1, 0 pontot 1 versenyző.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (640–644.)

C. 640. A Gergely naptár szerint 400 egymást követő év során összesen 97 szökőnapot kell beiktatni. Hány év elteltével lesz 1 nap eltérés a Gergely naptár és a „pontos” naptár között, ha egy év hossza 365 nap 5 óra 48 perc 46 másodperc?

C. 641. Egy téglalap alakú papírlapot az átlója mentén összehajtunk. A dupla rétegen túlnyúló részeket levágva, a megmaradt papír széthajtás után rombusz alakú lesz. Ezt most a középvonala mentén hajtjuk össze, és a papírt az előbbihez hasonlóan megint körbenyírjuk. Milyen téglalapból induljunk ki, hogy a végül megmaradt papír széthajtás után szabályos hatszög alakú legyen?

C. 642. Egy természetes szám négyzetének utolsó két jegyét felcserélve az eggyel nagyobb szám négyzetét kapjuk. Határozzuk meg az összes ilyen számot.

Javasolta: *Fried Ervin,* Budapest

C. 643. Az ABC háromszög területe t, kerülete k, a körülírt kör sugara R. Bizonyítsuk be, hogy $4tR\le\left(\frac{k}{3}\right)^3$.

C. 644. Egy háromszög szögei α, β és γ. Bizonyítsuk be, hogy:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}+\frac{\cos\beta}{\sin\alpha\sin\gamma}+\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}=2.$$

Javasolta: *José Luis Díaz,* Barcelona

Beküldési határidő: 2001. november 15.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (3482–3491.)

B. 3482. Négy jóbarát észrevette, hogy ha elosztják a könyveik számát a számjegyek összegével, akkor eredményül mind a négyen ugyanazt az egész számot, 13-at kapják. Bizonyítsuk be, hogy legalább kettejüknek ugyanannyi könyve van.

(*4 pont*) Javasolta: *Gerőcs László,* Budapest

B. 3483. Az $ABCD$ téglalap AB oldalának felezőpontja F. A C-ből induló szögfelező egy P pontjának vetülete a BC egyenesre Q. Bizonyítsuk be, hogy ha a PF egyenes merőleges a DQ egyenesre, akkor $AP=BC$.

(*3 pont*)

B. 3484. Egy háromszög α, β, γ szögeire $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ egymást követő egész számok. Mekkora a háromszög legnagyobb szöge?

(*3 pont*)

B. 3485. Az A halmaz elemei pozitív egész számok, és tetszőleges x, $y\in A$, $x>y$ esetén $x-y\ge\frac{xy}{25}$. Legfeljebb hány eleme lehet az A halmaznak?

(*4 pont*) *Vojtech Jarnik matematikaverseny,* Ostrava, 2001

B. 3486. Adott a síkon 2001 pont és egy egységnyi sugarú körvonal. Bizonyítsuk be, hogy található a körvonalon olyan pont, amelytől az adott pontokig mért távolságok összege legalább 2001.

(*4 pont*) *Nemzetközi Magyar Matematika Verseny,* 2001

B. 3487. Határozzuk meg mindazokat a pozitív valós számok halmazán értelmezett f függvényeket, amelyek az értelmezési tartományukban mindenütt eleget tesznek az $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x+6$ összefüggésnek.

(*3 pont*)

B. 3488. Egy téglalap alakú $ABCD$ biliárdasztal oldalai $AB=150$ cm, $BC=$ $=205$ cm. Az asztalon négy lyuk van, ezek a csúcsokban találhatók. Az A csúcsból (a lyuk felől) ellökünk egy golyót az asztal oldalával 45°-os szöget bezáró irányban. Valahányszor az asztal széléhez ér, a golyó rugalmasan visszapattan. Mi történik a golyóval?

(*4 pont*)

B. 3489. Bizonyítsuk be, hogy

$$2^n \mid \binom{2n}{0}+\binom{2n}{2}3+\ldots+\binom{2n}{2i}3^i+\ldots+\binom{2n}{2n}3^n.$$

(*5 pont*)

B. 3490. A Bergengóc Országgyűlés 100 képviselője a Parlament nagytermének 10 padsorában 10 oszlopban foglal helyet. A küldötteknek mind különböző a fizetése. Minden képviselő megkérdezi szomszédait (a maga mellett, előtt, mögött ülőket és az átlós szomszédait is, összesen tehát legfeljebb 8-at), hogy mennyi a fizetésük. A küldöttek meglehetősen irigyek: csak azok elégedettek a bérükkel, akiknek legfeljebb egy olyan szomszédja van, aki többet keres náluk. Legfeljebb hány olyan képviselő lehet a Parlamentben, aki meg van elégedve a fizetésével?

(*4 pont*) *Kvant*

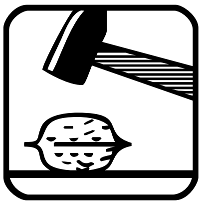
B. 3491. Döntsük el, hogy igaz-e a következő állítás. Ha adott a térben n piros pont, akkor mindig elhelyezhető $3n$ kék pont úgy, hogy a piros pontok által meghatározott minden tetraéder belsejében van legalább egy kék.

(*5 pont*) *Füredi Zoltán* ötletéből

❄

Beküldési határidő: 2001. november 15.
Cím: KöMaL szerkesztőség (KöMaL feladatok)
Budapest 112, Pf. 32. 1518

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (272–274.)



A. 272. A Bergengóc Országgyűlés 100 képviselője a Parlament nagytermének 10 padsorában 10 oszlopban foglal helyet. A küldötteknek mind különböző a fizetése. Minden képviselő megkérdezi szomszédait (a maga mellett, előtt és mögött ülőket, összesen tehát legfeljebb 4-et), hogy mennyi a fizetésük. A küldöttek meglehetősen irigyek: csak azok elégedettek a bérükkel, akiknek legfeljebb egy olyan szomszédja van, aki többet keres náluk. Legfeljebb hány olyan képviselő lehet a Parlamentben, aki meg van elégedve a fizetésével?

A *Kvant* nyomán

A. 273. Szerkesszük meg az ABC háromszöget, amelynek beírt köre az AB, BC, CA oldalakat rendre a C_1, A_1, B_1 pontokban érinti, ha adott az A csúcs, az A_1B_1 egyenes és a B_1C_1 szakasz felezőpontját a B csúccsal összekötő egyenes.

Javasolta: *Kálmán Tamás,* Budapest

A. 274. Legyenek a, b, c olyan pozitív egészek, amelyekre $ac=b^2+b+1$. Bizonyítsuk be, hogy az

$$ax^2-(2b+1)xy+cy^2=1$$

egyenletnek létezik egész megoldása.

Lengyel versenyfeladat

❄

Beküldési határidő: 2001. november 15.
Cím: KöMaL szerkesztőség (KöMaL feladatok)
Budapest 112, Pf. 32. 1518

Számítástechnikából kitűzött feladatok (4–6.)

I. 4. „Nagyon” prímeknek nevezzük az olyan prímszámokat, amelyek bármely kezdőszelete is prímszám. Például nagyon prím a 239, mert a 2, a 23 és a 239 is prím; nem nagyon prím a 241, ami ugyan prímszám, a 2 is prím, de a 24 nem az. Készíts programot, amely előállítja az összes N jegyű nagyon prímet ($1 \le N \le 8$)! A program írja ki ezen számok kezdőszeleteit is! A helyes megoldások közül az ér többet, amelyik rövidebb idő alatt fut le. Példa ($n = 3$ esetén): 2, 23, 233   2, 23, 239   2, 29, 293   3, 31, 311

(*10 pont*)

I. 5. Készítsünk programot, amely egy egységkockát ábrázol a képernyőn drótvázas és takart vonalas ábrázolásban! A kocka középpontja az origóban legyen, és a z tengely irányából adott távolságról nézzük. A program a kockát tetszőleges koordináta tengely körül tudja forgatni!

(*10 pont*)

I. 6. A rugó rezgésének „szemléltetésére” a következő a szimulációs modellt alkotjuk. Az „ideális” (elhanyagolható tömegű) rugóra akasszunk óvatosan egy M tömegű testet, aminek hatására a rugó valamennyire megnyúlik, majd nyugalomban marad. Ezzel a tömeggel együtt L hosszúságúra nyújtjuk a rugót. Elengedve, a rugón a tömeg rezgőmozgásba kezd. Ezt a mozgást kell utánozni úgy, hogy kellő rövidségű időegységet választva (Δt) kiszámítjuk az abban a pillanatban érvényes megnyúlást, eredő erőt (ami az M tömeg súlyából és a rugó megnyúlásától függő erőből tevődik össze), gyorsulást és sebességet. Írjunk Excel táblázatot (amelynek neve: RUGO.XLS) ennek a fizikai modellnek a vizsgálatára!

a) Adjuk meg az F (eredő erő), az a (gyorsulás), a v (sebesség) és az l (megnyúlás) alakulását az első 200 időegységben.

b) Ábrázoljuk grafikonon a megnyúlás változását!

c) A modell paraméterei (D rugóállandó, KE közegellenállási együttható, az L kezdeti megnyúlás, az M tömeg és a Δt időintervallum) a táblázat bal felső sarkában legyenek találhatók (igény szerint módosíthatók).

d) Hogyan alakul a szimuláció, ha a közegellenállást is figyelembe vesszük?

(*10 pont*)

A feladatok megoldásai a következő címre küldendők:

Cím: szamtech@komal.elte.hu

A beküldési határidő: **2001. november 13.**

Helyesbítés

A 2001/6. számunkban a tájékoztató a folyóirat előfizetéséről című részben téves a következő mondat: „A két kedvezmény összevonható”.

Helyesen így hangzik: A két kedvezmény nem összevonható.