Változások a KöMaL-nál

Az Oktatási Minisztérium anyagi támogatásával sikerült a lapot kibővíteni, színesebbé tenni, valamint a szeptemberi számunkat minden középiskolába ingyen eljuttatni.

Újraindítottuk a számítástechnika rovatot.

Főszerkesztőváltás történt a lapunknál. Oláh Vera 1993 szeptemberétől 2001 júliusáig volt a KöMaL főszerkesztője. Munkáját dicséri, hogy vezetése alatt sokat fejlődött a KöMaL, és mégis sikerült megőrizni hagyományait. Az új főszerkesztő Nagy Gyula.

Reméljük, hogy azok is, akik most először veszik kézbe lapunkat, kedvet kapnak az olvasásához, és minél több diák fog bekapcsolódni valamelyik pontversenyünkbe.

Minden Olvasónknak jó tanulást, szórakozást és eredményes munkát kíván a szerkesztőség nevében

Nagy Gyula

Beszámoló a 42. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról

Az idei Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát Washingtonban, az Egyesült Államok fővárosában rendezték meg július 1. és 14. között 83 ország 473 diákjának részvételével. Az országok általában hattagú csapatokkal vettek részt, ha a csapatlétszám ennél kisebb volt, az alábbi felsorolásban az országnév után zárójelben jelzem a versenyzők számát. A résztvevők listája:

Albánia (5), Amerikai Egyesült Államok, Argentína, Ausztrália, Ausztria, Azerbajdzsán (3), Belgium, Belorusszia, Bosznia-Hercegovina, Brazília, Bulgária, Ciprus, Csehország, Dánia, Dél-Afrika, Dél-Korea, Ecuador, Észtország, Finnország, Franciaország, Fülöp-szigetek, Görögország, Grúzia, Guatemala (3), Hollandia, Hongkong, Horvátország, India, Indonézia, Irán, Írország, Izland, Izrael, Japán, Jugoszlávia, Kanada, Kazahsztán, Kína, Kirgizisztán (5), Kolumbia, Kuba, Kuvait (4), Lengyelország, Lettország, Litvánia, Luxemburg (2), Macao, Macedónia, Magyarország, Malajzia, Marokkó, Mexikó, Moldova (5), Mongólia, Nagy-Britannia, Németország, Norvégia, Olaszország, Oroszország, Örményország (5), Paraguay (5), Peru, Portugália, Románia, Spanyolország, Sri Lanka (4), Svájc, Svédország, Szingapúr, Szlovákia, Szlovénia, Tajvan, Thaiföld, Törökország, Trinidad és Tobago, Tunézia, Türkmenisztán (5), Új-Zéland, Ukrajna, Uruguay (2), Üzbegisztán, Venezuela (5), Vietnam.

A versenyen szokás szerint mindkét napon négy és fél óra alatt 3-3 feladatot kellett megoldani. (A feladatokat alább közöljük.) Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont járt, így egy versenyző maximális teljesítménnyel 42 pontot szerezhetett. (Ez egyébként négy versenyzőnek sikerült: két kínainak és két amerikainak.)

Idén a feladatok meglehetősen nehéznek bizonyultak, ennek megfelelően az egyes díjak ponthatára elég alacsony volt. Aranyérmet 30–42 ponttal, ezüstérmet 20–29 ponttal, bronzérmet pedig 11–19 ponttal lehetett szerezni.

A magyar csapatból

Harangi Viktor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) 22 ponttal,

Csóka Endre (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 10. o.t.) pedig 21 ponttal ezüstérmet, míg

Kovács Erika (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) és

Vörös László (Győr, Révai M. Gimn., 12. o.t.) egyaránt 19 ponttal,

Csikvári Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) pedig 14 ponttal bronzérmet nyertek.

A hatodik versenyző,

Horváth Illés (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) csak kevéssel maradt le a bronzéremről.

A csapat vezetője *Pelikán József* (ELTE, Algebra és Számelmélet Tanszék), helyettes vezetője *Dobos Sándor* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn.) volt.

Az országok (nem-hivatalos) pontversenyét Kína toronymagasan nyerte. Magyarország idén a 21. lett, ami rosszabb, mint az évek óta megszokott eredmények. Tudomásul kell azonban venni, hogy a mezőny egyre erősebb, és sok ország komoly összegeket áldoz a versenyzők felkészítésére.

Következzék a csapatverseny első 30 helyezettjének listája, pontszámaik feltüntetésével:

1. Kína 225, 2–3. Oroszország és USA 196, 4–5. Bulgária és Dél-Korea 185, 6. Kazahsztán 168, 7. India 148, 8. Ukrajna 143, 9. Tajvan 141, 10. Vietnam 139, 11. Törökország 136, 12. Belorusszia 135, 13. Japán 134, 14. Németország 131, 15. Románia 129, 16. Brazília 120, 17. Izrael 113, 18. Irán 111, 19–20. Hongkong és Lengyelország 107, 21. Magyarország 104, 22–23. Argentína és Thaiföld 103, 24. Kanada 100, 25. Ausztrália 97, 26. Kuba 92, 27. Üzbegisztán 91, 28. Franciaország 88, 29. Szingapúr 87, 30. Görögország 86.

A versenyzők felkészítésében Dobos Sándor mellett oroszlánrészt vállalt *Reiman István*, aki ezt a munkát már több mint 40 éve csinálja. Ezúton szeretnék köszönetet mondani neki.

Az egyes versenyzők tanárai a következők voltak:

Csikvári Péter: *Fazakas Tünde, Táborné Vincze Márta*

Csóka Endre: *Balázs Tivadar, Pósa Lajos, Reiman István, Páles Zsolt*

Harangi Viktor: *Fazakas Tünde, Táborné Vincze Márta, Pósa Lajos*

Horváth Illés: *Fazakas Tünde, Táborné Vincze Márta*

Kovács Erika: *Fazakas Tünde, Táborné Vincze Márta, Pósa Lajos*

Vörös László: *Zábrádiné Schmierer Emília, Zsebők Ottó*

A versenyről elmondható, hogy összességében jól rendezett volt. A vendéglátók kirándulásokat szerveztek a résztvevőknek (diákoknak többet, tanároknak kevesebbet). A záróünnepség a John F. Kennedy Kulturális Központban zajlott, aminek impozáns, új épülete közvetlenül a Potomac folyó partján fekszik.

A záróünnepség fényét nagymértékben emelte, hogy az aranyérmeseknek a díjat a világhírű matematikus, Andrew Wiles (a Fermat-tétel bizonyítója) adta át. A magyar csapatnak a záróbanketten sikerült megörökíttetnie magát Andrew Wiles társaságában. A fényképet a belső borítón közöljük.

A jövő évi diákolimpiát Skóciában, Glasgow-ban rendezik július 18. és 31. között.

Pelikán József

A 42. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatai

Első nap

1. Legyen az ABC hegyesszögű háromszög körülírt körének középpontja O. Legyen P az A-ból induló magasságvonal talppontja a BC oldalon.

Tegyük fel, hogy $BCA\sphericalangle \geq ABC\sphericalangle + 30^\circ$.

Bizonyítsuk be, hogy $CAB\sphericalangle + COP\sphericalangle < 90^\circ$.

2. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

minden a, b, c pozitív valós számra.

3. Egy matematikaversenyen 21 lány és 21 fiú vett részt.

- Mindegyik versenyző legfeljebb hat feladatot oldott meg.
- Mindegyik fiúhoz és mindegyik lányhoz van legalább egy olyan feladat, amelyet mindketten megoldottak.

Bizonyítsuk be, hogy van olyan feladat, amelyet legalább három lány és legalább három fiú megoldott.

Második nap

4. Legyen n egy 1-nél nagyobb páratlan egész, k_1, k_2, $\ldots$, k_n pedig adott egészek. Az 1, 2, $\ldots$, n számok mind az $n!$ darab $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ permutációjára legyen

$$S(a)=\sum_{i=1}^{n} k_i a_i.$$

Bizonyítsuk be, hogy van két olyan b és c permutáció, amelyekre $b \neq c$, és $n!$ osztója $(S(b)-S(c))$-nek.

5. Az ABC háromszögben legyen AP a $BAC\sphericalangle$ szögfelezője, ahol P a BC oldalon van, BQ pedig az $ABC\sphericalangle$ szögfelezője, ahol Q a CA oldalon van. Tudjuk, hogy $BAC\sphericalangle = 60^\circ$ és hogy $AB+BP=AQ+QB$.

Mik az ABC háromszög szögeinek lehetséges értékei?

6. Legyenek a, b, c, d egészek, amelyekre $a>b>c>d>0$. Tegyük fel, hogy

$$ac+bd=(b+d+a-c)(b+d-a+c).$$

Bizonyítsuk be, hogy $ab+cd$ nem prímszám.

❄

Figyelem! Az idei Kürschák József Matematikai Tanulóverseny 2001. október 12-én pénteken 14 órától kerül megrendezésre. További információt a Bolyai János Matematikai Társulattól lehet kérni a 201-6874-es telefonszámon.

Cardano és a kriptográfia
A rejtjelező-rácsok matematikája

Girolamo Cardano születésének 500. évfordulójára ajánlva

Bevezetés

Éppen csak elkezdődött a XVI. század, amikor Girolamo Cardano (1501–1576) olasz matematikus, fizikus, filozófus, orvos, (egyszóval igazi reneszánsz tudós) megszületett. 1545-ben megjelent munkája, az Ars Magna képleteket tartalmaz az általános alakú harmadfokú egyenlet gyökeire. Az utókor számára Cardano nevével általában ezen eredményei kapcsolódnak össze, pedig a mai napig kétséges, hogy ezeket a képleteket valóban ő fedezte-e fel.[1]

Ugyanakkor kevesen ismerik Cardanot mint a XVI. századi kriptográfia egyik legjelentősebb alakját. Ez nem annyira meglepő, hiszen természeténél fogva a kriptográfiát (a titkosírást, vagy rejtjelezést) „zárt ajtók mögött" művelték. Királyok, hadvezérek szigorúan bizalmas levelezését bonyolították különböző módszerekkel titkosított levelekkel. Mivel a bonyolultabb rejtjelezési módszerek és főleg azok megfejtése legtöbbször komoly matematikai ismereteket igényel, így érthető, hogy többnyire neves matematikusok nevéhez fűződik a kriptográfia elméleti alapjainak megteremtése.

Cardano egy akkor egészen új rejtjelezést dolgozott ki, amelyet ma Cardano-rácsnak neveznek. A Cardano-rács sikerét mi sem bizonyítja jobban, mint hogy 400 évvel később, a XX. század közepén, a nyugatnémet hírszerző szerv (BND = Szövetségi Információs Szolgálat) még használta.

A következőkben rövid történeti áttekintés után bemutatjuk a Cardano-rács alapgondolatát, majd annak több irányú általánosítását és néhány matematikai tulajdonságát.

Fáklyatávíró és intervallum rejtjelezés

Cardano behatóan tanulmányozta az előző korok rejtjelezési technikáit egészen az ókorig visszatekintve. Így akadt rá az i.e. II. században élt Polübiosz nevű görög történész leírására, amelyben egy érdekes és az addig megszokottól merőben különböző eljárást ír le.

---

[1] A matematika-történészek szerint egy bizonyos Scipione del Ferro (1465–1526) megtalálta az általános alakú harmadfokú egyenlet megoldását, melyet közölt kollégáival. Ez 1515 körül történhetett, amikor Olaszországban gyakran tartottak matematikai versenyeket. Ferro egyik kollégája azt javasolta Niccolo Tartaglia (1500–1557) akkori nagyképzettségű matematikusnak, hogy oldjanak meg harmadfokú egyenleteket. Tartaglia a kijelölt határidő előtt megoldotta az egyenleteket, módszerét azonban titokban tartotta. Cardano kitartó érdeklődésére elmondta neki a megoldást, de megeskette, hogy hallgat róla. Cardano azonban nem tartotta meg esküjét és 1545-ben az Ars Magna-ban ismertette a harmadfokú egyenlet megoldásának módszerét. Így kezdődött a heves, ádáz vita Tartaglia és Cardano között, amelynek végére a matematika-történet a mai napig nem tudott pontot tenni.

Polübiosz fáklyatávírója

Készítsük el az *1. ábrán* látható 5 sorból és 5 oszlopból álló táblázatot.

	1.	2.	3.	4.	5.
1.	a	f	m	r	y
2.	b	g	n	s	z
3.	c	h	o	t	
4.	d	i	p	u	
5.	e	l	q	x	

1. ábra

Az üzenetet küldőnél 10 fáklya van, 5-5 mindkét kezénél. Az üzenetet betűnként küldi el úgy, hogy a bal kezével annyi fáklyát emel föl, ahányadik sorban, a jobb kezével pedig annyit, ahányadik oszlopban helyezkedik el a küldendő betű a táblázatban. Például a „t” betű esetén a bal kezében 3, míg a jobb kezében 4 fáklya van.

„Ezt a módszert Cleoxenusz és Demokritosz találta ki, de én tökéletesítettem.” – írja büszkén Polübiosz.

Joggal lehetett büszke, mert bár a fáklyával történő üzenet továbbítást már a régi kínaiak[2] is ismerték, az ő rendszere volt az első táblázatba foglalt rejtjelező eljárás, amelynek nagy előnye, hogy — a módszer megváltoztatása nélkül — könnyen cserélhető a táblázatbeli ABC, illetve a táblázatbeli betűk elhelyezése.

Kérdés: *A fenti* 22 *betűs ABC betűi hányféleképpen helyezhetők el a táblázatban? És ha kitöltjük mind a* 25 *betűhelyet a táblázatban?*

Ezt az eljárást fejlesztette tovább Cardano úgy, hogy az ABC betűinek megadásához csak két fáklyát használt (egyet-egyet mindkét kézben) és a fáklyák elhelyezkedése, illetve egymáshoz való viszonya kódolta a megfelelő sort és oszlopot.

Ez a módszer adhatta Cardanonak az ötletet, hogy megalkossa a táblázaton alapuló titkosírás két nagy családját. Az egyik az „intervallum rejtjelezés”, amelyben az üzenet titkosítása a betűk közötti távolságokon alapul. A módszert az egyszerűség kedvéért egy példán mutatjuk be. Készítsük el a *2. ábrán* látható táblázatot.

Á	a	e	r	n	c	b
B	i	o	d	l	g	q
C	u	s	m	f	p	t

2. ábra

Legyen az üzenet: *csacsi.* (A lépéseket a *3. ábrákon* követhetjük.) Írjuk az üres levélpapír bal felső sarkába az Á, B, C betűk bármelyikét. Ez csupán a szöveg kezdetét jelöli (C). Helyezzük a táblázat üres négyzetét a megjelölt betűre, majd a *csacsi* első betűjét (c) tartalmazó, nagybetűvel jelzett mező jelét (Á) írjuk a papírra pontosan a c betű fölé (lásd *3.a) ábra*). Most helyezzük a táblázat üres négyzetét az utoljára felírt nagybetűre, és keressük ki a táblázatból a következő betűt, az „s”-et. Ezzel ugyanúgy járunk el, mint az előzőkben, azaz a táblázatbeli *s* betű fölé írjuk a papírra a mező jelét (C). A fenti lépéseket addig folytatjuk, amíg van hely a levélpapír adott sorában, majd a legelső lépést megismételve új sort nyitunk, és az eljárást folytatjuk a küldendő szöveg végéig. A megfejtő dolgát azzal nehezítjük meg, hogy az üresen maradt helyeket tetszőleges, Á, B,

---

[2] A Kínai Nagy Falon már 2000 évvel ezelőtt, száz méterenként felállított fáklyások útján tudtak több száz kilométerre, nagyon gyorsan (és pontosan) üzeneteket eljuttatni.

	C				Á		C	Á					Á		C	B
Á		a	e	r	n	ⓒ	a	e	ⓐ	a	e	r	n	ⓒ	a	e	a
B		i	o	d	l	g	i	o	i	i	o	d	l	g	i	o	ⓘ
C		u	s	m	f	p	u	ⓢ	u	u	s	m	f	p	u	ⓢ	u
	C				**Á**		**C**	**Á**					**Á**		**C**	**B**

3.a) ábra

CSOROGATEAAFALON**Á**LMOS**C**SIGAB**Á**RELÉGLASSANKIM**Á**SZHATNA**C**SEND**B**EN
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
kezdőpont (c) (s) (a) (c) (s) (i)

3.b) ábra

C-től különböző betűkkel töltjük ki (lásd *3.b) ábra*). (Még jobb, ha értelmes szöveggé tudjuk kiegészíteni a rejtett szöveget, de ez nem feltétlenül szükséges.)

Az üzenet fogadójánál természetesen ugyanolyan táblázat van, mint a küldőnél. Így a fenti eljárást a kezdőponttól elvégezve olvashatóvá válik az üzenet. Mai szemmel ez az eljárás érdekes, de nem túl praktikus, mivel a táblázat használata elég nehézkes, és sok helyet használ az információtartalomhoz képest. Cardano a nehéz érthetőség kritikáját több kortársától is megkapta, akik akkor még nem tudhatták, hogy módszerével Cardano messze megelőzte korát, és elvetette a nem szimmetrikus rejtjelezés alapjait. A fenti eljárás ugyanis az addig szokásostól eltérően nem csupán betű-betű megfeleltetés, azaz betűhelyettesítés[3], hanem többértelmű megfeleltetés: a három nagybetű nindegyike 6-6 kisbetűt kódol, így a megfejtéshez többlet információra van szükség (a betű elhelyezkedése a sorban, vagyis távolsága a viszonyítási betűtől). Ellentétben tehát az egyszerű betűhelyettesítéssel, itt az üzenet és a rejtjelezett szöveg betűstatisztikája egyáltalán nem egyezik meg!

A Cardano-rács

A táblázaton alapuló másik módszercsalád, ami a mai napig is Cardano nevét viseli, az úgynevezett Cardano-rács. A rács itt egy betűkből álló mátrixot jelent. Hogy miről is van szó, ahhoz idézzük fel magának Cardanonak a szavait[4]:

„Végy két azonos méretű pergamen lapot, és azonos vonalak mentén készíts kivágásokat[5] *különböző helyeken. Ezek a kivágások legyenek kicsik, de mégis legalább*

---

[3] A betű-betű megfeleltetés azt jelenti, hogy az üzenet minden betűjéhez valamely szabály szerint egy ABC más betűjét rendeljük hozzá. A kriptográfiában ezt nevezik *helyettesítésnek.* Az így rejtjelezett szöveg betűinek eloszlása tehát pontosan megegyezik az eredeti szöveg betűinek eloszlásával.

[4] Az idézet Charles J. Mendelsohn: Cardan on cryptography [6] cikkéből származik.

[5] kis ablakokat

akkorák, mint az ABC nagybetűi. Az összes kivágásokba összesen 120 betűt lehessen elhelyezni. Az egyik pergamen lapot majd a levelező társadnak adod. Amikor alkalom adódik, először írd az üzenetedet olyan tömören, ahogy csak lehetséges, így az üzenet kevesebb betűt is tartalmazhat, mint amennyi a kivágott ablakokban elhelyezhető. Amikor beírtad az üzeneted az egyik pergamen lapra, tedd ugyanezt a másikkal is. Ezután töltsd ki az első lapon az üresen maradt helyet úgy, hogy teljes mondatokra egészítsék ki a már ráírt szöveget. Ez a kitöltés úgy történjen, hogy a teljes szöveg stílusa és tartalma összefüggő és egységes legyen. Amikor a levelező társad megkapja a te üzenetedet, ráhelyezi a megfelelő kivágásokkal ellátott pergament, és így elolvashatja az üzenetet."

A rejtjelező rács figyelemre méltó „divattá" vált a kriptográfiában. A Cardano-rács sikerét talán annak köszönheti, hogy egyszerű, de mégis fantasztikus változatosságot biztosít. Ekkora siker nagyon ritkán tapasztalható a tudomány, hát még a kriptográfia történetében. Hiszen az ismeretek állandó bővülésével a titkok megfejtésének technikája általában utoléri a titkosítók technikáját. Bár Cardano neve e téren nem vonult be a köztudatba, rejtjelező rácsa 450 éven át fennmaradt, sőt még a szépirodalomba is bevonult. *Jules Verne: Sándor Mátyás* című regényében éppen ilyen rejtjelező rács birtokába jutva fejti meg Sándor Mátyás elfogott titkos üzenetét a két gonosz, Torontál és Sárkány. A titkos levél és a megfejtéséhez szükséges rács már a regény elején megjelenik, és így a további cselekmény egyik „főszereplőjévé" válik.

Alábbi példánkban egy 6 × 6-os rácsot mutatunk be, amelyben felfedezhető bizonyos rokonság az úgynevezett intarzia játékkal is[6]. A *4. ábra* rácsába Karinthy Frigyes saját intarziáját írtuk be. Így még érdekesebb, hogy ugyanabban a szövegben mennyi különböző szöveg lehet elrejtve. Az *5., 6., 7. ábrákban* megvastagított számok a Cardano-rács kis ablakait jelölik, azaz a *4. ábrára* pontosan ráhelyezve és az ablakok helyén levő betűket balról jobbra haladva soronként lefelé összeolvasva megkapjuk a rejtett szöveget.

A *4. ábrába* beírt szöveg: „MAGÁT EGY ÉGI KAR INTI FRIGYE SIKERÜLNI FOG"

Az *5. ábra* rácsával kiolvasható rejtett szöveg: „MÁTÉ KINT INOG".

A *6. ábra* rácsával kiolvasható rejtett szöveg: „EGYÉK INGYEN".

A *7. ábra* rácsával kiolvasható rejtett szöveg: „AGG KINT FIGYEL".

Egy $n \times n$-es rácsba (amelyben n sor és n oszlop van) n^2 betűből álló szöveget írhatunk be. Ha az elrejtendő szöveg k betűből áll (ahol természetesen $k < n^2$) akkor a k ablakot tartalmazó rácsok száma $\binom{n^2}{k} = \frac{n^2!}{k!(n^2-k)!}$. Hogy ez mekkora változatosságot jelent, annak illusztrálására nézzük az *5. ábra* rácsát, itt $n = 6$, $k = 12$, a lehetséges

---

[6] Az intarzia játék a szórejtésnek egy sajátságos neme, amelyben az a cél, hogy bizonyos szavakat (többnyire személyneveket) kell folyamatosan elhelyezni egy másik szövegben. Karinthy, Kosztolányi, Molnár Ferenc és mások kedvelt kávéházi szórakozása volt az intarzia játék. Az egyik legsikeresebb intarzia Kosztolányié: Vendég panasza az étkezdében: *„Itt rossz a koszt, ó lány, ide zsörtölődni jár csak az ember."* Az intarzia a rejtjelezéshez képest valóban csak játék, hiszen elegendő a rejtett szöveg első betűjét megtalálni, abból már a teljes intarzia-szöveg kiolvasható, míg a Cardano-rácsnál minden ablak helyét külön-külön meg kell fejteni ahhoz, hogy a rejtett szöveg kiolvasható legyen.

M	A	G	Á	T	E
G	Y	É	G	I	K
A	R	I	N	T	I
F	R	I	G	Y	E
S	I	K	E	R	Ü
L	N	I	F	O	G

4. ábra

1	2	3	**4**	**5**	6
7	8	**9**	10	11	**12**
13	14	**15**	**16**	**17**	18
19	20	**21**	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	**32**	33	34	**35**	**36**

5. ábra

1	2	3	4	5	**6**
7	**8**	**9**	10	11	**12**
13	14	**15**	**16**	17	18
19	20	21	**22**	**23**	24
25	26	27	**28**	29	30
31	**32**	33	34	35	36

6. ábra

1	**2**	**3**	4	5	6
7	8	9	**10**	11	**12**
13	14	**15**	**16**	**17**	18
19	20	**21**	**22**	**23**	24
25	26	27	**28**	29	30
31	32	33	34	35	36

7. ábra

különböző rácsok száma tehát

$$\frac{36!}{12!\cdot 24!}=31\cdot 29\cdot 28\cdot 25\cdot 17\cdot 13\cdot 9=1\,251\,677\,700.$$

Ugyanígy számítható ki a *6. ábrára* ($n=6$, $k=11$) és a *7. ábrára* ($n=6$, $k=13$) a lehetséges rácsok száma.

Fordítsunk a rácson!

A Cardano-rács előzőkben leírt egyszerű képzési eljárása (ablakok tetszőleges kivágása) után — a továbbiakban ezt *egyszerű rácsnak* nevezzük — mutatunk egy másik rács-előállítási és -kitöltési módszert, amelyet forgató-rácsnak neveznek.

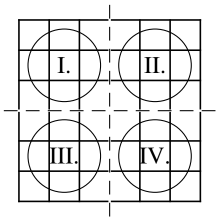
A forgató-rács olyan rejtjelező eszköz, amely 90 fokonként elforgatva ablakaival pontosan egyszer lefedi a hozzá tartozó betűmátrix összes mezőjét.

Itt tehát már nem lehet tetszőlegesen kivágni a rács ablakait, hiszen az elforgatások során ugyanarra a mezőre nem kerülhet több ablak. A rács ablakait úgy kell kijelölni, hogy elforgatáskor valamennyi ablak mindig más és más helyre kerüljön. Látható, hogy a forgató-rács előállításához szükséges, hogy a *rács mérete, n páros legyen.* Ha ugyanis a kivágható ablakok száma k, akkor ahhoz, hogy az n^2 mező mindegyikére a rács négy helyzete során pontosan egyszer kerüljön ablak, $k=\dfrac{n^2}{4}$ ablakra van szükség.

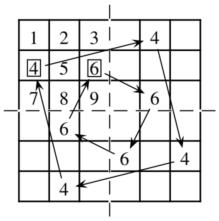
A forgató-rács előállítását is egy konkrét példán keresztül mutatjuk be.

Legyen a rács mérete $n=6$, ekkor tehát $k=9$ ablakot kell kivágnunk.

1. lépés: Osszuk fel a 6×6 mezőt tartalmazó mátrixot négy zónára a *8. ábra* szerint. Így az I–IV. zónák mindegyikébe pontosan kilenc mező esik.



8. ábra



9. ábra

1		3		X	$\boxed{1}$
$\boxed{X}$	5	$\boxed{X}$		$\boxed{5}$	
				X	$\boxed{3}$
3	X				
	5		X	5	X
1	X		3		1

10. ábra

1	2	3	7	4	$\boxed{1}$
$\boxed{4}$	5	$\boxed{6}$	8	$\boxed{5}$	2
7	8	9	9	6	$\boxed{3}$
3	6	9	$\boxed{9}$	8	7
2	5	$\boxed{8}$	6	5	4
1	4	$\boxed{7}$	3	$\boxed{2}$	1

11. ábra

2. lépés: Válasszunk ki az I. zóna kilenc mezőjéből k_1 számút, ahol $1 \le k_1 \le 9$. Példánkban $k_1 = 2$, és a 4. és 6. mezőt választottuk (lásd *9. ábra*).

3. lépés: Forgassuk el a rácsot először 90 fokkal, és jelöljük meg a II. zónában azokat a mezőket, melyeket a kiválasztott (4. és 6.) mezők fednek. Majd forgassuk tovább a rácsot 90 fokonként, és jelöljük be ugyanígy a többi zónában is a fedett mezőket (lásd *9. ábra*). Így a k_1 ablak kijelölésével, négy forgatás után $4 \cdot k_1$ mező válik foglalttá.

4. lépés Most a II. zónában válasszunk a még nem foglaltakból $k_2 = 3$ mezőt. Példánkban ezek az 1., 3., 5. mezők (lásd *10. ábra*, ahol X jelöli a már foglalt mezőket, a bekeretezett számok jelölik az ablak-kivágásokat, a zóna számozása pedig értelemszerűen az I. zóna számozásának 90°-os elforgatottja). A négy elforgatással így újabb $4k_2$ mező válik foglalttá.

5. lépés: A fentiekhez hasonlóan végezzük el ugyanezt a III. és IV. zónákban is. Ekkor $4k_1 + 4k_2 + 4k_3 + 4k_4 = n^2$, azaz az ablakok számára valóban $k = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 9$ adódik[7] (lásd *11. ábra*, ahol a bekeretezett számok jelölik a kivágott ablakokat).

Vegyük észre, hogy a k ablak mindegyikét szabadon jelölhetjük ki az I–IV. zónák valamelyikében, így az összes lehetséges (maximális számú ablakot tartalmazó) $n \times n$-es forgatórácsok száma $4^k = 4^{\frac{n^2}{4}}$. Példánkban ez $4^9 = 262\,144$.

Kérdés: *Azonos n rácsméret és k ablakszám esetén forgató-, vagy egyszerű rácsból van-e több?*

Megelőlegezzük a választ, amelyre az Olvasó jut e kérdés megválaszolása során: azonos rácsméret és ablakszám esetén nagyságrendekkel több a lehetséges egyszerű rácsok száma. Ugyanakkor rejtjelezési szempontból ez az összehasonlítás sántít, mivel az egyszerű rács betűmezőinek csak egy részében van a rejtett szöveg, míg a forgató-rácsnak mind az n^2 mezőjét felhasználhatjuk a rejtett szöveg beírására[8].

Illusztrációként bemutatjuk a *3. ábra* szövegének a *11. ábra* forgató-rácsával való rejtjelezését (lásd *12., 13., 14., 15. ábra*).

1. lépés: Rajzoljunk egy üres lapra akkora négyzetet, mint a forgató-rácsunk mérete, és helyezzük rá a rácsot.

2. lépés: Balról jobbra és fentről lefelé haladva írjuk a rács ablakaiba a szöveg kilenc betűjét.

3. lépés: Forgassuk el a rácsot 90 fokkal, és ismételjük meg a 2. lépést.

4–5. lépés: Ismételjük meg a 3. lépést még kétszer.

A *15. ábra* betűmátrixát kapjuk eredményül, amelyet elküldünk a címzettnek, aki a rács birtokában az 1–5. lépésekhez hasonló módszerrel el tudja olvasni az üzenetet.

---

[7] Természetesen az ablakok száma lehet ennél kevesebb is, de akkor a rács a négy körbeforgatás során nem fedi le az összes betűmezőt, így nem írhatjuk tele a szövegmátrixot.

[8] Az egyszerű ráccsal történő rejtjelezésnél a rejtett szöveg betűinek sorrendje nem változik, míg a forgató-rács összekeveri a rejtendő szöveg betűit. A kriptográfiában a betűk helyettesítése és a betűk keverése a két alapvető módszercsalád, amelyeket önmagukban, vagy együttesen használ fel. A forgató-rács nagy előnye kriptográfiai szempontból, hogy lehetővé teszi a két módszer egyesítését. Érdemes tehát felfigyelni arra, hogy a rejtjelezési eljárásoknál nem elegendő csupán mennyiségi megfontolásokat figyelembe venni!

	1	2	3	4	5	6
1						**M**
2	**A**		**G**		**Á**	
3						**T**
4				**E**		
5			**G**			
6			**Y**		**É**	

12. ábra

	1	2	3	4	5	6
1					**G**	M
2	A		G		Á	
3	**I**	**K**			**A**	T
4			**R**	E		
5	**I**		G		**N**	
6			Y	**T**	É	**I**

13. ábra

	1	2	3	4	5	6
1		**F**		**R**	G	M
2	A		G	**I**	Á	
3	I	K	**G**		A	T
4	**Y**		R	E		
5	I	**E**	G	**S**	N	**I**
6	**K**		Y	T	É	I

14. ábra

	1	2	3	4	5	6
1	**E**	F	**R**	R	G	M
2	A	**Ü**	G	I	Á	**L**
3	I	K	G	**N**	A	T
4	Y	**I**	R	E	**F**	**O**
5	I	E	G	S	N	I
6	K	**G**	Y	T	É	I

15. ábra

Példánkban külön érdekesség, hogy az így megfejtett szövegből az *5., 6., 7. ábra* egyszerű rácsaival újabb rejtett szövegek olvashatók ki.

A Cardano-rács történetének másik érdekessége, hogy pontosan Cardano *Ars Magna*-jának megjelenése után 250 évvel, 1795-ben jelent meg Carl Friedrich Hindenburg német matematikus könyve (lásd [4]), amelynek VI. fejezetét teljesen a rejtjelezésnek, ezen belül a rejtjelező rácsoknak szenteli. Nem a Cardano-rácsnak, mert (a tudománytörténetben nem szokatlan módon) Cardano nevét meg sem említi.

Hindenburg könyve nem csupán pontos leírását adja a Cardano-rácsnak, hanem bizonyos továbbfejlesztését is bemutatja. Ennek lényege, hogy ha a rács oldalait megjelöljük az a, b, c, d betűkkel, akkor a rácsforgatásokat megadhatjuk, mint e négy betű egy-egy permutációját. Ezzel a különböző rácsok számát $4! = 24$-szeresére növelhetjük.

Kérdés: *Hogyan módosul a rácsforgató algoritmus a permutációs forgatás esetén?*

Amint azt a következőkben látni fogjuk, a permutációknak nemcsak a rácsok kitöltésében van nagy szerepe, hanem a rácsok ablakainak meghatározásában is.

Permutációk, latin négyzetek és rejtjelező rácsok

Latin négyzetnek olyan $n \times n$-es négyzetes mátrixot nevezünk, amelynek minden sora és minden oszlopa az 1, 2, …, n számoknak egy permutációja.

Egy $n \times n$-es mátrixot *permutációs mátrixnak* nevezünk, ha a mátrix pontosan n darab 1-est tartalmaz úgy, hogy minden sorban és oszlopban pontosan egy 1-es áll, a többi elem pedig nulla.

Egyszerű, de a rejtjelező rácsok szempontjából fontos eredmény (lásd [1]) a következő:

Minden $n \times n$-es $L(n)$ latin négyzet egyértelműen felírható n darab permutációs mátrix segítségével a következő alakban:

$$L(n) = 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + \ldots + n \cdot P_n, \qquad (1)$$

éspedig úgy, hogy a P_k permutációs mátrixban éppen ott szerepel 1*, ahol $L(n)$-ben k van, a többi eleme pedig nulla.*

(Az „összeadás” művelet a mátrixok ugyanazon helyén álló elemeinek összeadását, míg a „számmal való szorzás” a mátrixok minden elemének a megszorzását jelenti.)

Az így adódó permutációs mátrixok rejtjelező rácsként használhatók fel. Az eljárást a következő példán keresztül mutatjuk be:

$$L(4)=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\\2&1&4&3\\4&3&1&2\end{bmatrix}$$

$$P_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ P_2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ P_3=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix},\ P_4=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Mindegyik P_i permutációs mátrix egy olyan rejtjelező rácsként fogható fel, ahol az 1-esek helyén vannak az ablakok. Így a forgatás helyett most a permutációs mátrixokat kell – mint rácsokat – egymás után a betűmátrixra helyezni ahhoz, hogy a titkosított szöveget beírjuk, illetve kiolvassuk. Mivel a fenti egyértelmű felbontási tétel miatt az így készített rácsok ablakai pontosan lefedik a betűmátrix n^2 mezőjét, ezzel a módszerrel a teljes betűmátrixot kitölthetjük rejtjelezett szöveggel, akárcsak a forgató-rácsoknál. További előny, hogy a latin négyzet felbontásának egyértelműsége nem sérül, ha a felbontást adó permutációs mátrixok (rácsok) sorrendjét megváltoztatjuk. Így a lehetséges rácsfelhasználások száma a felbontások számának $n!$-szorosa.[9]

A rácsok tényleges alkalmazását megnehezíti terjedelmes helyigényük, hiszen n karakter betűmátrixba írásához szükség van a teljes permutációs mátrixra, és ehhez, bináris mátrix lévén, n^2 byte tárolását kell biztosítani. Ha a permutációs mátrixokat megszámozzuk, azaz bármely $n\times n$-es permutációs mátrixhoz kölcsönösen egyértelműen hozzárendeljük az $1, 2, \ldots, n$ számok egy permutációját, akkor a tárigény csökken.

Egy ilyen számozáshoz csak a mátrixban szereplő 1-esek megfeleltetésére van szükség, mivel az összes többi helyen nulla van. Legyen a permutációs mátrix i-edik sorának j-edik oszlopában 1-es. Ekkor a megfelelő permutáció i-edik eleme legyen a j. A permutációs mátrix definíciója szerint mindegyik sorban csak egy 1-es lehet, így valóban permutációt kapunk.

Ezek után a permutációkat egy megfelelő algoritmus (lásd [2]) segítségével sorszámokkal láthatjuk el 1-től $n!$-ig; ha a permutációs mátrixokat rejtjelező rácsként használjuk, akkor a mátrix, illetve az ehhez tartozó permutáció helyett elegendő a megfelelő sorszámot elküldeni a rejtjelezett üzenettel.

Az $1, 2, \ldots, n$ számok egy permutációjának a tárolásához $c(n)$ darab karakterre van szükség, ahol

$$c(n)=\big([\lg n]+1\big)\,n \tag{2}$$

---

[9] Helyhiány miatt csak utalni tudunk a latin négyzetek azon lényeges tulajdonságára, hogy minden latin négyzet egy művelettáblaként fogható fel, amely műveletek bizonyos feltételek mellett, a rejtjelezés szempontjából igen kedvező tulajdonságokkal rendelkeznek (nem kommutatív, nem asszociatív). Egy következő cikkben térünk ki eme előnyös tulajdonságok és a napjainkban általánosan elterjedt, „számelmélet alapú” módszerek összevetésére.

Az $n!$ szám számjegyeinek száma (jelöljük $j(n)$-nel):

$$j(n) = \left[\lg n! + 1\right]. \tag{3}$$

Ekkor

$$\frac{j(n)}{c(n)} = \frac{\left[\lg n! + 1\right]}{n\left(\left[\lg n\right] + 1\right)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \lg i + 1}{n\left(\left[\lg n\right] + 1\right)}, \tag{4}$$

és ezért

$$\lim_{n\to\infty} \frac{j(n)}{c(n)} = 1. \tag{5}$$

Ez a megfeleltetés mégis jól használható a gyakorlatban, mivel a használatos értékekre az 1. táblázat értékei adódnak. Ez azt mutatja, hogy 25–50% megtakarítást érhetünk el, ha a permutáció helyett annak sorszámát tároljuk, illetve küldjük el.

n	$j(n)$	$c(n)$	$\frac{j(n)}{c(n)}$
10	7	20	.35
100	158	300	.526
200	375	600	.625
300	615	900	.683
400	869	1200	.724
500	1134	1500	.756

1. táblázat

A Cardano-rács általánosítása: k-rács (pókháló-rács)

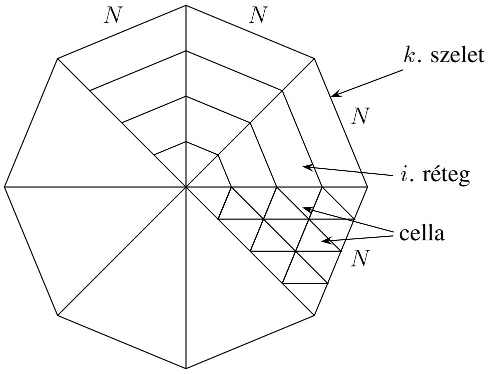
Cardano és Hindenburg is négyzet alakú rácsokkal dolgozott. Megmutatjuk, hogy tetszőleges szabályos k-szögre értelmezhető a rejtjelező rácsmodell.

Tekintsük a *16. ábra* szerinti konstrukciót. Ez egy k oldalú szabályos sokszög, amelynek mindegyik oldala N egység hosszú, azaz mindegyik szeletének legkülső rétege N darab cellát tartalmaz. Minden szeletben $\frac{N}{2}$ réteg és az i-edik rétegében $N-(2i-1)$ cella van. Ebből következik, hogy az egy szeletben levő összes cellák száma:

$$\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} N-(2i-1) = \frac{N^2}{4}.$$

A teljes k-rács celláinak száma tehát $k\frac{N^2}{4}$. (A Cardano-rács esetében $k=4$, amelyre valóban a négyzetrács celláinak számát kapjuk.)

Természetesen a k-rács forgatási szöge most nem 90°, hanem $\frac{360^\circ}{k}$. Az igazi problémát a rács ablakainak elhelyezése jelenti. Tekintsük az alábbi mátrixot (lásd *17. ábra*), amelynek k sora, (ez felel meg a k-rács szeleteinek) és $N-2i+1$ oszlopa van (az i-edik réteg cellaszámának megfelelően).



16. ábra

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & . & . & . & N-2i+1 \\
\hline
1 & . & \mathsf{X} & . & \mathsf{X} & \dots & . & . & . & . \\
2 & . & . & . & . & \dots & . & . & . & \mathsf{X} \\
3 & . & . & . & . & \dots & . & \mathsf{X} & . & . \\
. & \mathsf{X} & . & . & . & \dots & . & . & . & . \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
. & . & . & . & . & \dots & . & . & \mathsf{X} & . \\
k-1 & . & . & . & . & \dots & . & . & . & . \\
k & . & . & \mathsf{X} & . & \dots & \mathsf{X} & . & . & .
\end{array}
$$

17. ábra

A *17. ábrán* az X ablak kivágást jelöl. A forgató-rács szabályait figyelembe véve a mátrix minden oszlopában pontosan egy ablak lehet. Ebből adódik, hogy az i-edik rétegben k^{N-2i+1} ablak-kombináció lehetséges.

Mivel a rétegek elrendezései függetlenek egymástól, így a k-rács összes ablakkombinációinak száma, azaz a különböző k-rácsok száma:

$$FR_k^N=\prod_{i=1}^{\frac{N}{2}} k^{N-2i+1}=k^{\sum\limits_{i=1}^{\frac{N}{2}} N-2i+1}=k^{\frac{N^2}{4}}. \tag{6}$$

Láthatjuk, hogy $k=4$ esetén ez pontosan a különböző Cardano-rácsok számát adja. A Hindenburg-féle permutációs forgatás itt is alkalmazható, csak itt egy k jelből álló sorozatot használunk, és így $k!$-szorosára nő a rácsvariációk száma. Az alábbi 2. táblázatban érdekességként bemutatjuk néhány rácsmérethez tartozó k-rácsoknak a számát.

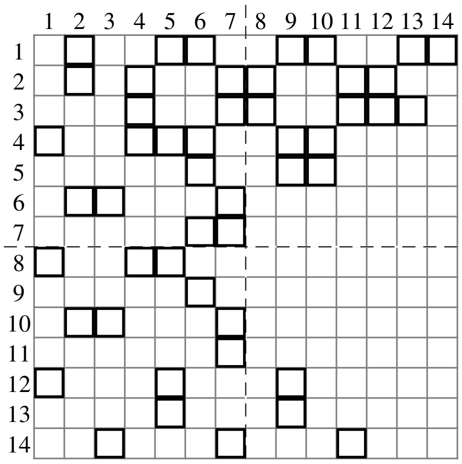
k	N	FR_k^N	k	N	FR_k^N
3	4	81	4	10	1 125 899 906 842 624
3	6	19 683	5	4	625
3	8	43 046 720	5	6	1 953 125
3	10	847 288 598 528	5	8	152 587 894 784
4	4	256	6	4	1 296
4	6	262 144	6	6	10 077 696
4	8	4 294 967 296	6	8	2 821 109 841 920

2. táblázat

Végül a *18. ábrán* megadunk egy rejtjelezett négyzetes szövegmátrixot, amelyhez tartozó Cardano-rácsot a *19. ábrán* (az ábrán a négyzetek jelölik az ablakokat) találjuk. A szöveg megfejtése (talán tartalma is) tanulságos lehet, a rácsot pedig újabb szövegek rejtjelezésére is felhasználhatja a kedves Olvasó.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	D	E	Z	E	G	Y	E		S	Z	R	S	E	R
2	E		T	V	I	O	O	L		H	T		E	M
3	B	T		H	E	A	O	L	R			N	E	E
4	M	A	Z		V	O		T	L	T	A	K	I	O
5	N		J	:		.	Á	T			R	Ö	L	T
6	N	V	O	E	M	A	L			A			K	V
7	I	É	N	L	Á	T		G	O	N	A	T		G
8	E	E	-	G	Y	E		Y	O	E	G	É	S	Y
9	S		N	Z	E	S	R	N	I	E	M		I	
10	B	Z	E	E	D	E	R	N	G	É	R		M	T
11		E	G	F	E	S		O		L	E	A		T
12	E	T		É	G	R	S		Y	D	T	V	É	U
13	L	N	Ö	P		I	R	E	E	A	N	G	G	É
14	E	N	G	?	I		Y	.	K	E	S	.	Z	R

18. ábra



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1		□			□	□			□	□			□	□
2		□		□			□	□			□	□		
3				□			□	□			□	□	□	
4	□			□	□	□			□	□				
5						□			□	□				
6		□	□				□							
7						□	□							
8	□			□	□									
9						□								
10		□	□				□							
11							□							
12	□				□				□					
13					□				□					
14			□				□				□			

19. ábra

Irodalomjegyzék

[1] *J. Dénes–A. D. Keedwell:* Latin squares and 1-factorizations of complete graphs I. Ars Combin. 25A, 1988. 109–126.

[2] *Dénes Tamás:* Algoritmusok az összes n-edfokú permutáció előállítására, Információ Elektronika, 1975. 1–2.

[3] *Philip J. Davis, Reuben Hersh:* A matematika élménye, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1984.

[4] *Carl Friedrich Hindenburg:* Urchid der Reinen und Angewandten Mathematic herausgegeben von Carl Friedrich Hindenburg, Leipzig, 1795.

[5] *Lukácsy András:* Elmés játékok, játékos elmék, Minerva Kiadó, Budapest, 1960.

[6] *Charles J. Mendelsohn:* Cardan on cryptography, Scripta Math., 1938.

[7] *Révay Zoltán:* Titkosírások, Zrínyi Katonai Kiadó, Budapest, 1978.

[8] *Sain Márton:* Matematikatörténeti ABC, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.

[9] *Sain Márton:* Nincs királyi út! (matematikatörténet), Gondolat Kiadó, 1986.

[10] *Simonyi Károly:* A fizika kultúrtörténete, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1986.

[11] *B. L. van der Waerden:* Egy tudomány ébredése, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1977.

Dénes Tamás

Rátz László Vándorgyűlés

Miskolc, 2001. július 4–7.

Parádés szervezés és derűs hangulat jellemezte a matematikatanárok hagyományos vándorgyűlését az idén. A szakmai előadásokat és szemináriumokat nagy érdeklődés mellett „telt házakkal” tartották a város három különböző iskolájában. A szünetekben a folyosókon szoftver-cégek matematikai termékeivel és új oktatási anyagokkal lehetett ismerkedni. A színvonalas szakmai programok után a szervezőbizottság változatos szabadidős elfoglaltságokat kínált kihasználva a város nyújtotta lehetőségeket. Orgonakoncert, kirándulás és sportprogramok: foci a Vidék csapatának győzelmével és termáluszoda látogatás gazdagították a programot. Ezúton is köszönjük a szervezőknek a kellemes napokat!

Hagyományosan a vándorgyűlés megnyitóján adja át a Beke Manó Emlékdíj Bizottság az évi Beke Manó Emlékdíjakat a matematikaoktatásban kiemelkedő teljesítményt nyújtó kollégáknak. A bizottság díjainak indoklását honlapunkon megtalálhatják.

A Beke Manó díj 1. fokozatát kapta megosztva *Szeredi Éva* és *Szendrei Julianna* a magyar matematikaoktatás megújításáért, a tanár-, illetve tanítóképzés szakmai színvonalának emeléséért, hosszú időn át végzett kiváló és eredményes munkájáért.

A Beke Manó díj 2. fokozatában részesültek: *Horváth Eszter* sok éven át végzett kiváló tanári–nevelői munkájáért és a matematikatanítás színvonalának emelését szolgáló példamutató tevékenységéért.

Katz Margit a kisiskolások értő, örömmel végzett matematikatanulását, a tanítók gyermeket és szakmát értő, örömteli matematikatanítását segítő munkájáért.

Királyné Nagy Éva a matematikaoktatás színvonalának emelését szolgáló, igényes szaktanári, szakvezetői munkájáért.

Lux Judit, aki a Budapesti Móricz Zsigmond Gimnázium egyik „legszerényebb, legműveltebb, leglelkiismeretesebb tanára” kiváló munkájáért.

Nádasi Márta több évtizedes kiváló felsőtagozatos tanári, szaktanácsadói és közoktatás-vezetői munkájáért.

Oláh Vera az általános és középiskolai matematika tanítás népszerűsítéséért, tanárok és diákok szakmai fejlődéséért a Kömal főszerkesztőjeként végzett óriási munkájáért.

Oláh Vera 1992-től tagja a KöMaL szerkesztőbizottságának, 1993 szeptembertől a lap főszerkesztője. Elévülhetetlen érdemeket szerzett a lap életbentartásában, fejlődésében, s ezzel a minőségi oktatás fejlesztésében. Részt vállalt a 100 éves Kömal rendezvényeinek szervezéséből, kiadványainak megjelentetésében. A „születésnapi” CD sok iskolában hozzáférhetővé tett minden korábbi cikket, feladatot az érdeklődő tanárok, diákok számára. 1993 óta a lap feladatmegoldó tábora szélesedett. A népszerűsítés szélesebb fokát jelzi, hogy a lap számos részlete ma már az interneten is olvasható.

Az utóbbi néhány évben a KöMaL Ifjúsági Ankétja az ifjúsági matematikai élet jelentős rendezvényévé nőtte ki magát. Ennek szervezése, anyagi és szellemi alapjának biztosítása is nagy részben Oláh Vera erőfeszítéseinek eredménye.

Nagy Gyula

Beszámoló a X. Nemzetközi Magyar Matematika Versenyről

> „A matematika érdekes és szép is: az emberi gondolat mindig izgalmas és szép kalandja. A valódi igazság mindig szép, és a valódi szépség mindig igaz.”
>
> Rényi Alfréd

Ezt az idézetet látták a programfüzet borítóján a Kárpát-medence különböző országaiban élő magyar középiskolások 2001. évi versenyének résztvevői. A tizedik, jubileumi találkozót 2001. április 7. és 10. között rendezték meg a nagykanizsai Batthyány Lajos Gimnázium és Egészségügyi Szakközépiskolában. Az intézet aulájában „Komáromtól Kanizsáig” címmel gyönyörű kiállítás számolt be az elmúlt tíz év versenyeiről. Az ünnepélyes megnyitó április 7-én 10 órakor kezdődött a Hevesi Sándor Művelődési Központ színháztermében. Az iskola tanulóinak nagyon szép műsora után Tarnóczki Attila alpolgármester és Mayer Ferenc igazgató üdvözölte a résztvevőket.

A négynapos programban városnézés, színház, hangverseny, baráti találkozók, előadások, kirándulások, sportversenyek nyújtottak felejthetetlen élményeket. Külön meg kell említeni vendéglátóink szerető gondoskodását, figyelmét. *Tüttő István* polgármester fogadásán megismerhettük Nagykanizsa életét.

A négyórás írásbeli verseny április 8-án volt, a résztvevők minden évfolyamon 6-6 feladatot kaptak. A versenybizottság munkáját *Hortobágyi István* irányította.

Április 10., kedd – a búcsúzás napja volt. A záróünnepségen a díjazottak értékes jutalmakat kaptak, *Dr. Pintér Ferencet*, a verseny főszervezőjét pedig felköszöntötték a résztvevő diákok és tanárok. Pintér tanár úr a találkozó egész ideje alatt, mint a versenyt megelőző hónapokban is, a háttérben dolgozott értünk.

A legjobb teljesítményeket a következő diákok érték el:

9. osztály

Első díjat kapott:
Kórus Péter (Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium); **Kocsis Albert Tihamér** (Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium).

Második díjat kapott:
Dányádi Zsolt (Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium); **Balogh László** (Nyíregyháza, Krúdy Gyula Gimnázium); **Nedeczky Gábor** (Kaposvár, Táncsics Mihály Gimnázium); **Hegyháti Máté** (Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimnázium); **Peres Sámuel** (Dunaszerdahely, Magyar Tanítási Nyelvű Gimnázium).

Harmadik díjat kapott:

Pál Ágnes (Bonyhád, Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium); **Doba Viktor** (Arad, Csíky Gergely Líceum); **Sümeghy Tamás** (Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimnázium); **Zsuga Sándor** (Kecskemét, Bányai Júlia Gimnázium); **Toldi Bence** (Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium).

10. osztály

Első díjat kapott:

Nagy Zoltán Lóránt (Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium); **Kalcsú Áron** (Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimnázium); **Koltai Péter** (Komárom, Selye János Gimnázium).

Második díjat kapott:

Bartha Ferenc (Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium); **Nagy Gábor** (Kaposvár, Táncsics Mihály Gimnázium); **Bergmann Gábor** (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimnázium); **Héri István** (Nyíregyháza, Krúdy Gyula Gimnázium).

Harmadik díjat kapott: **Szalag Attila** (Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium); **Tölgyesi Csaba** (Kecskemét, Bányai Júlia Gimnázium); **Szilágyi Zoltán** (Sepsiszentgyörgy, Székely Mikó Kollégium).

11. osztály

Első díjat kapott:

Balogh János (Kaposvár, Táncsics Mihály Gimnázium); **Koreck Ferenc** (Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium).

Második díjat kapott:

Kovács Erika Renáta (Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium); **Jesch Dávid** (Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimnázium).

Harmadik díjat kapott: **Siroki László** (Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium); **Spanczér Ilona** (Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimnázium); **Reiss Attila** (Kecskemét, Bányai Júlia Gimnázium).

12. osztály

Első díjat kapott:

Nagy Tamás (Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimnázium); **Veres Péter** (Székelyudvarhely, Tamási Áron Gimnázium); **Vörös László** (Győr, Révai Miklós Gimnázium).

Második díjat kapott:

Nagy Dávid (Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium); **Mezei Tímea** (Sepsiszentgyörgy, Székely Mikó Kollégium); **Bartha Tamás** (Nagykanizsa; Batthyány Lajos Gimnázium).

Harmadik díjat kapott:

Dávid Róbert (Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimnázium); **Vajda Péter** (Kaposvár, Táncsics Mihály Gimnázium); **Molnár Zoltán** (Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimnázium); **Magyari Karola** (Csíkszereda, Márton Áron Gimnázium).

A versenyt a következő években is megrendezzük, minden második évben Magyarországon, közben pedig a környező országok valamelyikében.

A záróünnepélyen *Bíró Béla*, a Székely Mikó Kollégium igazgatója meghívta a jelenlévőket a jövő évi versenyre Sepsiszentgyörgyre.

Bogdán Zoltán

Beszámoló a Gordiusz Matematika Tesztverseny országos döntőjéről

Az 5. alkalommal megrendezett kétfordulós GORDIUSZ feleletválasztós tesztversenyre az országból és a határon túlról több, mint 9600 középiskolás nevezett be. A Pécsett április 7-én megrendezett döntőre 173 versenyző kapott meghívást.

Az első fordulóban és a döntőben is 30 (évfolyamonként különböző) feladatot kellett megoldani 90 perc alatt. Amíg a verseny tartott, a kísérő tanároknak Somfai Zsuzsa tartott előadást. A színvonalas versenyt közös feladatmegoldás követte; a versenyzők és kísérőik részére városnézés, mecseki séta, Nagy Bandó András estje egészítette ki a programot. A válaszok számítógépes kiértékelése után másnap, április 8-án volt az eredményhirdetés. Eredmények:

9. évfolyam

1.	**Egri Attila**	(Hajdúszoboszló, Hőgyes Endre Gimnázium);
2.	**Tóth Anett**	(Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium);
3.	**Sebó Andrea**	(Makó, Erdei Ferenc Kereskedelmi és Közgazdasági Szki.).

10. évfolyam

1.	**Ruppert László**	(Pécs, Janus Pannonius Gimnázium);
2.	**Csóka Endre**	(Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium);
3.	**Pelládi Gábor**	(Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium).

11. évfolyam

1.	**Hamar Gergő**	(Dombóvár, Illyés Gyula Gimnázium);
2.	**Péterfalvi Ferenc**	(Pécs, Janus Pannonius Gimnázium);
3.	**Kamarás Csaba**	(Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Iskola).

12. évfolyam

1.	**Babos Attila**	(Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Iskola);
2.	**Vető Bálint**	(Érd, Vörösmarty Mihály Gimnázium);
3.	**Wéber Zoltán**	(Tata, Eötvös József Gimnázium).

Különdíjat kapott minden évfolyamon a legeredményesebben szereplő határon túli versenyző: *Gazdag Lehel, Szilágyi Zoltán* (Sepsiszentgyörgy, Székely Mikó Kollégium), *Sipos István, András Csaba* (Nagyvárad, Ady Endre Líceum); a legeredményesebb baranyai versenyző: *Ruppert László*, és az a hat tizenkettedikes diák, akik négy alkalommal kerültek döntőbe: *Bozsik Balázs* (Szolnok, Varga Katalin Gimnázium), *Fehér Gergely* (Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium), *Jelenka József* (Békéscsaba, Rózsa Ferenc Gimnázium), *Paczári Krisztián* (Nyíregyháza, Zrínyi Ilona Gimnázium), *Szeti Balázs* (Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimnázium) és *Vető Bálint* (Érd, Vörösmarty Mihály Gimnázium).

Sok más információ mellett a teljes eredménylista megtalálható a verseny honlapján: `www.extra.hu/gordiusz-matek`.

Poronyi Gábor

A tanárképző főiskolák 2001. évi Péter Rózsa matematikaversenye

Az idei matematikaversenyt a szegedi tanárképző főiskola 2001. április 9. és 11. között rendezte meg. Hat város főiskolájából 5-5 hallgató mérte össze tudását. A dolgozatokat április 10-én délelőtt írták. A feladatokat a főiskolák oktatóinak javaslatai alapján állította össze a verseny elnöke, *Urbán János*. Minden város javaslataiból választott egyet-egyet, majd – ahogy korábban is – a saját feladatával megtoldva állt össze az alábbi hét feladat.

❄

1. Egy kocka három, páronként kitérő élén vegyünk föl egy-egy pontot. Az így kapott háromszögek közül hány olyan van, amelynek súlypontja a kocka középpontja?

2. Jelölje a_n a Pascal-háromszög n-edik sorában álló elemek reciprokainak összegét ($n=0$, 1, 2, ...). Konvergens-e az (a_n) sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

3. A valós számok halmazán értelmezett f függvényre fennáll, hogy ha $x \in \mathbf{R}$, akkor

$$f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}f(x).$$

Igazoljuk, hogy f periodikus függvény.

4. Az a, b, c pozitív valós számok összege 1. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{2} \le \frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}<1.$$

5. Legyenek adottak az a, b, c pozitív valós számok és az $n>1$ egész szám úgy, hogy

$$a^n+b^n=c^n$$

teljesül. Igazoljuk, hogy ha $1 \le k < n$ egész, akkor az a^k, b^k, c^k hosszúságú oldalakkal szerkeszthető háromszög! Mely k-ra lesz az így kapott háromszög derékszögű, hegyesszögű és tompaszögű?

6. Egységélű kockát merőlegesen vetítünk egy síkra. Határozzuk meg a vetület területének maximumát!

7. Az ABC háromszöget ($AC \neq BC$) úgy helyezzük el a derékszögű koordináta-rendszerben, hogy az AB oldal felezőpontja legyen az origó és a C csúcshoz tartozó (belső) szögfelező egyenes párhuzamos legyen valamelyik tengellyel. Igazoljuk, hogy az a hiperbola, amely illeszkedik az A csúcsra és asszimptotái a tengelyek, tartalmazza a B és C csúcsot is!

❄

A díjkiosztó ünnepségre másnap, április 11-én került sor. A 30 résztvevő diák közül 16-an kaptak értékes díjakat. *Szendrei János* köszönte meg a diákok és az oktatók lelkes részvételét. Jövőre Szombathelyen találkozunk.

Fried Katalin

A Műszaki Főiskolák 23. Országos Hajós György Matematikai Versenye

A versenyt 2001. április 11. és 13. között a Szegedi Tudományegyetem Szegedi Élelmiszeripari Főiskolai Kar rendezte. A versenyen 16 főiskola, illetve főiskolai kar versenyzője vett részt.

A Versenybizottság a következő feladatokat tűzte ki:

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$2^{\frac{3}{2}-|x|}=|x+1|+|x-1|.$$

(15 pont)

Javasolta: *Hajdú Edit*

2. Egy a élhosszúságú kocka alaplapja az $ABCD$, fedőlapja pedig az $EFGH$ négyzet. (Az A felett van E, B felett F és így tovább.) A kockát elmetsszük egy síkkal. A metsző sík illeszkedik az A csúcsra, a BC oldal Y felezőpontjára és a CG oldal C-hez közelebbi X harmadolópontjára. Határozza meg a két rész térfogatának arányát! (20 pont)

Javasolta: *Ácsné Török Katalin*

3. Tekintettünk egy természetes számot. Felírtuk a számjegyeit fordított sorrendben, és kivontuk a nagyobbikból a kisebbiket. A különbséget megszoroztuk egy tetszőleges, 0-tól különböző természetes számmal. A kapott számban áthúztunk egy 0-tól különböző számjegyet. A maradék számjegyekből kapott csonka szám 20 010 412, a verseny dátuma. Mivolt az áthúzott számjegy? (20 pont)

Javasolta: *Hosszú Ferenc*

4. Adott 2001 db pozitív egész szám: a_1; a_2; $\ldots$; a_{2001}. Tudjuk, hogy $a_2>a_1$, és $3\le n\le$ ≤ 2001 esetén $a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}$. Bizonyítsa be, hogy $a_{2001}>2^{1999}$! (20 pont)

Javasolta: *Sándor Endre*

5. Az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényről tudjuk, hogy $f(x)=a\ln(x^2+b)+c$. A függvény minimális értéke $1-\ln 2$, és az inflexiós pontokban húzott érintők az origóban merőlegesen metszik egymást. Határozza meg a, b és c értékét! (25 pont)

Javasolta: *Lukács Antal*

Az egyéni verseny első hat helyezettje:

1. *Szabó Anita Ivett,* Budapesti Műszaki Főiskola, Keleti Károly Gazdasági Kar	78 pont
2. *Bíró István,* Budapesti Műszaki Főiskola, Keleti Károly Gazdasági Kar	77 pont
3. *Fenyvesi Zoltán,* Zrínyi M. Nemzetvédelmi Egyetem, Bolyai J. Kat. Műsz. Főisk. Kar	73 pont
4. *Nagy Ferenc Richárd,* Szent István Egyetem, Ybl Miklós Műszaki Főiskolai Kar	72 pont
5. *Néveri Richárd,* Budapesti Műszaki Főiskola, Bánki D. Gépészmérnöki Főiskolai Kar	68 pont
6. *Bella Zsuzsanna,* Széchenyi István Főiskola	65 pont

A csapatverseny első három helyezettje:

1. Budapesti Műszaki Főiskola, Keleti Károly Gazdasági Kar	198 pont
2. Budapesti Műszaki Főiskola, Neumann János Informatikai Kar	163 pont
3. Zrínyi M. Nemzetvédelmi Egyetem, Bolyai J. Katonai Műszaki Főiskolai Kar	158 pont

Scharnitzky Viktor
a Versenybizottság elnöke

Felvételi előkészítő feladatsor

1. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\frac{2x+2}{7}=\frac{(x^2-x-6)(x+1)}{x^2+2x-3}.$$

2. Mely a egész számok esetén lesz a következő kifejezés helyettesítési értéke is egész?

$$\left(\frac{a+1}{1-a}+\frac{a-1}{a+1}-\frac{4a^2}{a^2-1}\right):\left(\frac{2}{a^3+a^2}-\frac{2-2a+2a^2}{a^2}\right)$$

3. Három pont, $A(1;a)$, $B(3;b)$, $C(4;c)$ második koordinátájáról tudjuk, hogy

$$a=-\frac{\sin 39^\circ+\sin 13^\circ}{\sin 26^\circ\cdot\cos 13^\circ},\qquad b=\sqrt{10^{2+\lg 25}},\qquad c=\left(\frac{1}{\sqrt5-2}\right)^3-\left(\frac{1}{\sqrt5+2}\right)^3.$$

Egy egyenesen van-e ez a három pont?

4. Az alábbi két változat közül melyik a kedvezőbb:
I. A bank évi 20% kamatot fizet, az éves infláció pedig 15%,
II. A bank évi 12% kamatot fizet, az éves infláció pedig 7%.

5. Egy egész számokból álló számtani sorozat első négy tagja: a_1, a_2, a_3, a_4. Mutassuk meg, hogy $1\cdot a_1^2+2\cdot a_2^2+3\cdot a_3^2+4\cdot a_4^2$ felírható két négyzetszám összegeként!

6. Adott az ABC hegyesszögű háromszög. Az AC átmérőjű körnek és a B csúcsból induló magasság egyenesének metszéspontjai D és E, az AB átmérőjű körnek és a C csúcsból induló magasság egyenesének metszéspontjai pedig F és G. Mutassuk meg, hogy a D, E, F, G pontok egy körön vannak!

7. Az ABC háromszög alapú egyenes hasáb alapélei $AB=21$ cm, $BC=20$ cm és $CA=13$ cm hosszúságúak. Az oldaléleken bejelöljük az A', B', C' pontokat: $AA'=5$ cm, $BB'=25$ cm és $CC'=4$ cm. Mekkora szöget zár be az $A'B'C'$ háromszög síkja az ABC háromszög síkjával?

8. Legyen $f(x)=2x^6-3x^4+x^2$. Bizonyítsuk be, hogy $f(\sin\alpha)+f(\cos\alpha)=0$.

Számadó László

A Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozó egy évtizede (1991–2000) dokumentumokban

Szerk.: Oláh György

Tíz év diákrendezvényeinek programját, a X. diáktalálkozó előadásainak kivonatát, rengeteg versenyfeladatot tartalmaz a Debreceni Egyetemen kiadott füzet, amelynek szerkesztője, a versenyek fáradhatatlan szervezője, Oláh György tanár úr.

Magyarország és Szlovákia legjobb magyar matematikatanárai és versenynyertes diákok voltak az előadók az egy-egy hétvégén tartó Nagy Károly találkozókon. Korosztályok szerint egyidőben öt helyszínen hallgatták őket a két ország magyar 8–12. osztályosai.

Természetesen mindig volt színházi előadás, és esténként baráti beszélgetések.

A rendező város és lakóinak kedvessége, szíveslátása is hozzájárult e hétvégék sikeréhez és ahhoz, hogy mostanra hagyományt teremtettek a Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozók.

KöMaL 2001–2002 matematika–fizika–számítástechnika pontverseny

Versenykiírás

A most induló pontversenyek 2001 szeptemberétől 2002 májusáig tartanak, minden hónapban egy-egy újabb feladatcsoport példáit lehet beküldeni.

A versenyekbe minden általános iskolás és középiskolás korú tanuló benevezhet. Kérjük, hogy a versenyzők **1–12-ig** jelöljék, **hányadik osztályba járnak** (az osztály egyéb jelölését – pl. II.B. – nem kell feltüntetni). Egy tanuló több pontversenyben is indulhat, a versenyfeltételeket az alábbiakban ismertetjük.

Matematika versenyek

Három kategóriában indítunk versenyt növekvő nehézségi sorrendben **C**, **B** és **A** kategóriában. **Minden feladatra csak egy megoldást értékelünk.** Természetesen örömmel várunk általánosításokat, megjegyzéseket, másfajta megoldási vagy kitűzésre tett javaslatokat, ezeket szívesen közöljük, sőt, a pontversenyen kívül **különdíj** formájában is elismerjük.

C *pontverseny* – könnyebb matematika gyakorlatok

A **C** pontverseny feladatait azoknak az olvasóinknak ajánljuk, akik kezdetben túl nehéznek vagy szokatlannak találják a másik két kategória feladatait. Itt rendszeresen közlünk az iskolai tananyaghoz szorosabban kapcsolódó feladatokat is, így azok is megtalálják a kedvükre valót, akik valamivel – de nem sokkal – szeretnének túllépni az iskolai matematika keretein.

Az itt kitűzött feladatok egy része általános iskolásoknak is ajánlható, más része azonban a 11–12. évfolyam tanulmányaira támaszkodik. A feladatok sorrendje nagyjából megfelel az iskolai tananyagnak: **egy feladatsoron belül az alacsonyabb sorszámúakat**

ajánljuk a fiatalabbaknak. A **C** pontversenyt három kategóriában értékeljük. Az első: a 10. évfolyamig nem speciális matematika tagozatosok, a második: azok a 11–12. évfolyamosok, akik nem speciális matematika tagozatos osztályba járnak, a harmadik a legfeljebb 10. évfolyamos speciális matematika tagozatosok. (A 11–12-es „spec. matosok” és a matematikát tovább tanulni szándékozók inkább a B pontversenyben induljanak.) A **C** pontversenyben havonta 5 gyakorlat megoldása küldhető be, mindegyikre legfeljebb 5 pont kapható.

B *pontverseny* – matematika feladatok

A **B** pontversenyben havonta összesen 10 feladatot tűzünk ki. Itt találhatók a lap hagyományos gyakorlatai és feladatai. A feladatok sorrendje nagyjából megfelel az iskolai tananyagnak: **egy feladatsoron belül az alacsonyabb sorszámúakat ajánljuk a fiatalabbaknak.** A feladatok – szándékaink szerinti – nehézségét a közölt pontszám jelzi (ez 3, 4 vagy 5 lehet). A **B** pontversenyben az eredményes versenyzéshez nincs szükség valamennyi feladat megoldására. Nem kell tehát mind a 10 feladatra megoldást küldeni, feladatsoronként mindenkinek a **legtöbb pontot elért, legfeljebb 6 megoldását számítjuk be a pontversenybe.** Ki-ki gondolja végig, mely példákkal foglalkozna szívesen, hogyan érhetné el a legtöbb pontot. A **B** pontverseny eredményét 5 korcsoportban tartjuk nyilván: a 8. évfolyamig, a 9., 10., 11. és 12. évfolyamokban.

A *pontverseny* – nehezebb matematika feladatok

A legigényesebb és legfelkészültebb diákok számára jelent továbbra is kihívást az **A** pontverseny. E verseny résztvevőit nem különítjük el évfolyamonként, mindannyian együtt versenyeznek, minden megoldásra egységesen legfeljebb 5 pontot kaphatnak.

Fizika versenyek

M *pontverseny* – fizika mérési feladatok

Havonta 1 mérési feladatot tűzünk ki, valamennyi korosztály számára közösen. A feladatok megoldásával 6–6 pontot lehet szerezni. A mérési feladatok kidolgozásánál hasznos lehet a korábbi számainkban megjelent megoldások áttanulmányozása. A mérési jegyzőkönyv feltétlenül tartalmazza a mérés elvének áttekinthető leírását (a mérési elrendezés vázlatos rajzával), megfelelő számú és pontosságú mérési adatot (áttekinthető táblázatban, a mértékegységeket is megadva), a mérési adatok kiértékelését (lehetőleg milliméterpapíron grafikusan ábrázolva), és a hiba nagyságrendjének becslését.

P *pontverseny* – fizika feladatok

Havonta kb. 10 elméleti feladatot tűzünk ki, nem nehézségi, hanem az életkornak megfelelő sorrendben. A pontszámokat a feladat után feltüntetjük. Mindenki szabadon választhat a kitűzött elméleti feladatok közül. A 9–12. évfolyamosoknak **legfeljebb 5,** a náluk fiatalabbaknak **legfeljebb 3** megoldását számítjuk be a pontversenybe. Az elméleti versenyt korosztályonként (8. évfolyamig, 9., 10., 11., 12. évfolyam) külön-külön összesítjük és értékeljük, a mérési versenytől függetlenül.

Számítástechnika verseny

Idén egy kategóriában indítunk versenyt, havonta 3 különböző jellegű, matematikához kapcsolódó feladattal. **Minden feladatra csak egy megoldást értékelünk.** Természetesen örömmel várunk általánosításokat, megjegyzéseket, másfajta megoldási vagy kitűzésre tett javaslatokat, ezeket szívesen közöljük, sőt, a pontversenyen kívül **különdíj** formájában is elismerjük.

Az itt kitűzött feladatok egy része általános iskolásoknak is ajánlható, nagyobb része azonban a 9–10. évfolyam tanulmányaira támaszkodik. Két feladatot valamilyen programozási nyelven (Pascal, C++, BASIC, Delphi) kell megoldani, egyet pedig táblázatkezelővel (Excel).

Csak olyan programok küldhetők be, amelyek szintaktikusan helyesek. Értékelésük részben futási eredmények alapján történik, részben pedig a megoldás algoritmusának elemzésével.

Értékelés

A pontversenyek állása 2001 november végétől a `http://komal.elte.hu` címen a honlapunkon látható, és 2002 januárjától kezdődően alkalmanként a lapban is közöljük.

Mind a matematika, mind a fizika versenyek hivatalos végeredménye 2002 szeptemberi számunkban jelenik meg. A legeredményesebb versenyzők arcképét 2002 decemberi számunkban közöljük. A legjobbak a MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány pályadíjait és tárgyjutalmakat kapnak az 2002. évi Ifjúsági Matematikai, Fizikai és Számítástechnikai Ankét rendezvényén.

Az okleveleket 2002 szeptemberében eljuttatjuk az iskolákba (a végzős diákokét lakáscímükre).

A benevezés módja

Nevezni lehet a szeptemberi számban található „Nevezési lap”-pal, vagy annak bármilyen – akár a minta alapján egyénileg elkészített – másolatával. A kitöltött nevezési lapot az első dolgozatokat tartalmazó borítékban küldjék el versenyzőink. Nevezési lap igényelhető az Eötvös Loránd Fizikai Társulatban vagy a Szerkesztőségben is. A pontversenybe az interneten keresztül is be lehet nevezni, az erre vonatkozó információk az újság honlapján olvashatók.

Minden diáknak csak *egy* nevezési lapot kell beküldenie!

A nevezési lapot nyomtatott, jól olvasható betűkkel töltsük ki, az 5., 6., 7., 8., 9., 10., 11., vagy 12. osztály megjelölésével. Az iskola igazolását a szaktanár vagy az igazgató írja alá.

A nagyon gyakori családnevű versenyzők válasszanak egy *háromjegyű* jelzőszámot is, és mind a nevezési lapra, mind pedig az év során beküldött dolgozataik fejlécére az így bővített nevet írják (pl. Kiss 349 Anna, Szabó 344 Péter). Kérjük viszont, hogy a továbbiakban ezt a számot *minden egyes* beküldött dolgozatukon tüntessék föl.

Kérjük, hogy azok a versenyzők, akik tavaly már választottak jelzőszámot, **idén is ugyanazt a számot** használják!

A pontversenybe a tanév során bármikor be lehet kapcsolódni nevezési lap beküldésével.

KöMaL az Interneten – a megoldások elektronikus beküldéséről

A KöMaL elektronikus változatának internet címe:

`http://komal.elte.hu`

Itt található elektronikus nevezési-, illetve megrendelőlap is.

Az újság elektronikus változatát havonta frissítjük. A példákat és a mindenkori pontszámokat (a legeredményesebb versenyzők fényképeivel) rendszeresen közöljük.

A fenti internet címen olvashatók a feladatok elektronikus beküldésének szabályai is.

Bővülnek a lap internet-változatának szolgáltatásai. A beküldési határidő után egy-két héttel már **hozzáférhetők lesznek a kitűzött feladatok vázlatos megoldásai,** korábbi cikkek interaktív változatai kerülnek a honlapra, végül egy-két, csak itt kitűzött probléma megoldására interaktív műhelyeket szeretnénk létrehozni, ahol a közreműködők **együtt dolgozva** jutnának el a megoldáshoz.

Kérjük, hogy a szerkesztőségnek szánt üzeneteket a `szerk@komal.elte.hu`, a megoldásokat viszont csak a `megoldas@komal.elte.hu` e-mail címekre küldjék.

A dolgozatok beküldése

A beküldési határidő a feladatok kitűzésénél szerepel, fizikából a lap megjelenését követő hónap 11., számítástechnikából a 13., matematikából a 15. napja, munkaszüneti nap esetén a következő munkanap. A határidő azt jelenti, hogy a küldeményt legkésőbb a határidő napján kell postára (vagy elektronikus postára) adni.
A határidő után a személyesen behozott dolgozatokat sem fogadjuk el!

FIGYELEM! A dolgozatok beküldési helye megváltozott!

A matematikai és a fizika dolgozatok minden kategóriában egységesen a következő címre küldendők:

KöMaL Szerkesztőség (KöMaL feladatok), Bp. 112, Pf. 32. 1518

A matematika és a fizika feladatok egy borítékban is beküldhetők, a határidő ilyen esetben a hónap 11. napja.

A számítástechnika megoldásokat csak elektronikus levélben lehet beküldeni a következő címre: `szamtech@komal.elte.hu`

Kérjük, mindenki ügyeljen a helyes címzésre. A rossz címre küldött dolgozatokat nem tudjuk értékelni.

A dolgozatok formája

A szerkesztőség munkatársainak általában nagy mennyiségű dolgozatot kell rövid idő alatt feldolgozniuk. A postán beküldött dolgozatok szétválogatása, javítása és a pontszámok gyors könyvelése akkor lehetséges, ha versenyzőink betartják az alábbi formai követelményeket:

- Minden egyes megoldás **külön lapra** kerüljön. Ez azért nagyon fontos, mert a különböző feladatok más-más javítóhoz kerülnek. A lapok **A/4 méretűek** (kb. 21 cm × × 30 cm) legyenek.
- **Minden egyes** beküldött lap **bal felső sarkában** nyomtatott betűkkel szerepeljen:
  - a példa betűjele (A, B, C, M, P) és száma **pirossal**,
  - a beküldő teljes **neve** és **osztálya**,
  - az **iskola neve** városnévvel együtt,
  - a beküldő **e-mail** címe (ha van). (Azok, akik a dolgozataikat javítóktól esetleges hibáikról visszajelzést szeretnék, tüntessék fel e-mail címüket is!)
- A geometria feladatok megoldásához mellékeljenek ábrát.

- Minden egyes megoldást – feladatonként külön-külön – **négyrét hajtsanak össze** (több lapból álló dolgozatokat egybe) úgy, hogy a **fejléc kívülre kerüljön**. A különböző feladatok megoldásait azonban az előbb mondottak miatt nem szabad egybe hajtogatni!
- Törekedjenek az **olvasható írásra** és a rendezett külalakra!

Azokat a dolgozatokat, amelyeken nincs feltüntetve osztály és iskola városnévvel együtt, vagy külalakjuk miatt értékelhetetlenek, nem tekintjük versenyszerűnek.

A megoldásokhoz **kísérőjegyzéket** kérünk a minta szerint: minden borítékban egy külön papíron felsorolva az összes beküldött **dolgozat jelét** és **számát**. **Név** és **iskola** feltétlenül szerepeljen a kísérőjegyzéken!

MINTA dolgozat fejlécéhez:

C. 593.

Nagy 163 Róbert 9. évf.

Győr, Révai M. Gimn.

e-mail: robi@revai.hu

MINTA kísérőjegyzékhez:

Kísérőjegyzék

Nagy 163 Róbert 9. évf.

Győr, Révai M. Gimn.

A 2001. évi 5. számból a következő feladatokra küldök megoldást: C. 630., C. 633., B. 3464., B. 3466., B. 3467.

Összesen 5 dolgozat.

A dolgozatok külső alakja számítástechnikából

A számítástechnika megoldásokat csak elektronikus levélben lehet beküldeni az alábbi címre: `szamtech@komal.elte.hu`

- **A programozási feladatoknál a programfile első soraiban megjegyzésként szerepeljen:**
    - a példa száma,
    - a beküldő teljes neve és osztálya,
    - az iskola neve városnévvel együtt,
    - a beküldő e-mail címe.
- **A táblázatkezelő feladatoknál ezek az adatok külön munkalapon szerepeljenek, amelynek neve ADATOK legyen!**

A dolgozat tartalmáról

Maximális pontszám csak teljes megoldásért jár. A puszta eredményközlést nem értékeljük. Előfordulhat, hogy olyan feladatot tűzünk ki, amelynek megoldása szerepel valamely példatárban: ilyen esetben is csak akkor jár a teljes pontszám, ha a **végeredményhez vezető megoldást részletesen leírta** a versenyző. Matematikából a kimondott állításokat bizonyítani kell, fizikából az alaptörvényeket alkalmazva igazolni. A matematika példák megoldásaként csupán számítógépes programot nem fogadunk el!

Levezetés és hivatkozás nélkül csak a középiskolai tananyagban szereplő tételeket fogadjuk el, minden egyéb esetben fel kell tüntetni az idézett forrást (cím, oldalszám).

Tételekre való hivatkozáskor minden esetben meg kell mutatni, miért teljesülnek a tétel feltételei, és hogyan következik a tétel állításából a bizonyítás gondolatmenetének következő lépése.

Ha egy feladat megoldását ábra segíti, akkor azt külön lapon mellékeljék, de ezen is szerepeljenek a beküldő adatai és a feladat száma. Ügyeljenek a jelölések célszerű és érthető használatára.

Törekedjenek a megoldások rövid, olvasható leírására. Lapunkban a megoldások többségét közöljük: ajánljuk ezek tanulmányozását.

FONTOS!

A versenyek **egyéni** versenyek: a versenyzőknek **önállóan** kell elkészíteniük a példák megoldásait. A **közösen készített** vagy **másolt** dolgozatokat – beleértve az eredeti szerzőét is – **nem értékeljük**!

A csoportosan másolt dolgozatokat visszaküldjük az osztályt tanító tanárnak.

Néhány megjegyzés

Javasoljuk, hogy beküldött dolgozataikat két példányban (másolópapírral) készítsék, és a **másolatot őrizzék meg**, hogy a lapban közölt megoldással össze tudják hasonlítani. Ha a dolgozat esetleg elvész a postán, csak másolat esetén tudjuk elfogadni a reklamációt.

Egyéni kérésre közöljük mindazok pontszámát, akik ezt megcímzett és felbélyegzett válaszboríték mellékelésével vagy e-mail címük feltüntetésével kérik a szerkesztőségtől. (A dolgozatok feldolgozása sok időt vesz igénybe, ezért általában a beküldési határidő után 1–2 hónappal lehet érdeklődni az eredményekről.) A pontszámokat bárki megnézheti a KöMaL internet honlapján is.

Szép, érdekes és nem közismert feladatokat javasolhatnak kitűzésre. A javasolt feladatokat (megoldásokkal együtt) a szerkesztőség címére küldjék el.

A diákok elfogadott javaslatait év végén beszámítjuk a **különdíjért** *folyó versenybe.*

Szeretnénk, ha a kitűzött kérdések nem zárulnának le véglegesen a beküldési határidővel, a közölt megoldással. Bármely, a lapunkban megjelent feladathoz, cikkhez kapcsolódó megjegyzést, általánosítást szívesen látunk és alkalomadtán közöljük.

Örömmel fogadunk feladatjavaslatokat, cikkeket, szakköri munkáról szóló beszámolókat, közlésre alkalmas iskolai pályamunkákat. Javaslataikat, közleményeiket elküldhetik postán, vagy személyesen juttathatják el szerkesztőségünkbe.

Végezetül mindenkinek eredményes tanévet és sikeres versenyzést kíván a

Szerkesztőség

Tájékoztató a folyóirat előfizetéséről

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok megrendelhető a kiadónál, az Eötvös Loránd Fizikai Társulatnál. Előfizetési díj a 2001–2002-es tanévre (2001 szeptembertől 2002 májusig) 2340 Ft. Azonos címre küldendő, 10-nél nagyobb példányszámú megrendelés esetén a csoportos előfizetési díj 2100 Ft.

A Bolyai János Matematikai Társulat tagjai 400 Ft kedvezményt vehetnek igénybe a lap előfizetésekor, erről részletes tájékoztatót adtunk 2001. májusi számunk mellékletében. A két kedvezmény összevonható. **Megrendelőlap és részletes tájékoztató igényelhető** a kiadónál, illetve a szerkesztőségben.

Azok, akik az idén kérik felvételüket a Bolyai János Matematikai Társulatba, felvételi kérelmük elbírálása után (legközelebb várhatóan októberben) értesítést és tagdíjbefizetési csekket kapnak, ezért külön nem szükséges előbb jelentkezniük.

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok példányonként 260 Ft-ért megvásárolható a kiadónál és a szerkesztőségben (címeink az első oldal alján találhatóak). Ugyanitt a lap korábbi számai is beszerezhetők.

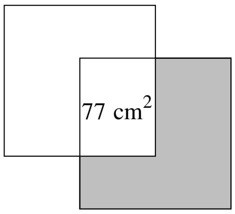
A KöMaL 2001–2002-es tanévi matematika fizika és számítástechnika pontversenyének *versenykiírása* a 343. oldalon kezdődik. Kérjük versenyzőinket, figyelmesen olvassák el!

Matematika gyakorlatok megoldása

C. 607. *Egy* 12 cm *oldalú négyzetet a P pont körül* 90°*-kal elforgatunk. A két négyzet együttesen* 211 cm^2 *területet fed le. Az elforgatott négyzetet a P körül ismét elforgatjuk* 90°*-kal, így egy harmadik négyzetet kapunk. A három négyzet által lefedett terület* 287 cm^2*. Határozzuk meg a P pont helyzetét.*

Javasolta: *Bakonyi Gábor,* Budapest

Megoldás. A második 90°-os forgatás után az eredeti négyzet P pontra vonatkozó tükörképét kapjuk. Ha a P pont nincs az eredeti négyzet belsejében, akkor ennek és az eredeti négyzetnek nincs közös része, így a három négyzet együttes területe nagyobb lenne $2\cdot 144\ \text{cm}^2=288\ \text{cm}^2$-nél.



Tegyük fel, hogy a négyzet belsejében van egy olyan P pont, amely körül elforgatva a négyzetet az együttes terület 211 cm^2. Egy négyzet területe 144 cm^2, a közös rész területe: $2\cdot 144\ \text{cm}^2-211\ \text{cm}^2=77\ \text{cm}^2$. Vonjuk ki a négyzet területéből a közös rész területét:

$$144\ \text{cm}^2-77\ \text{cm}^2=67\ \text{cm}^2,$$

ennyivel növekedett az elforgatás után a terület (az *ábrán* a bejelölt rész). Most a 2. négyzetet forgassuk el a P pont körül 90°-kal. Mivel az 1. négyzet elforgatottja a 2., a 2., elforgatottja a 3., azért az 1. és a 2. négyzet közös részének elforgatottja éppen a 2, és 3, négyzet közös része. Ezért az együttes lefedett terület legfeljebb annyival növekedhetett, mint az előbb, vagyis a 3 négyzet által lefedett terület legfeljebb

$$211\ \mathrm{cm}^2+67\ \mathrm{cm}^2=278\ \mathrm{cm}^2$$

lehet, ellentétben a megadott 287 cm^2-rel.

Nincs tehát a síkban a feltételnek megfelelő pont.

Udvari Béla (Baja, III. Béla Gimn., 7. o.t.)

109 dolgozat érkezett. 5 pontos 47, 4 pontos 10, 3 pontos 6, 2 pontos 3, 1 pontos 12, 0 pontos 31.

C. 608. *Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy KENO sorsolás alkalmával az* 1*-től* 80*-ig terjedő egész számok közül kisorsolt* 20 *szám egyikében sem fordul elő a* 8*-as számjegy?*

Megoldás. Az 1–80-ig terjedő egész számok közül 20 számot $\binom{80}{20}$-féleképpen választhatunk ki. Összesen 9 számban fordul elő a 8-as számjegy, ezek a 8., 18., 28., 38., 48., 58., 68., 78., 88. Tehát a kedvező esetek akkor fordulnak elő, ha a többi 71 számból választunk ki 20-at.

A keresett p valószínűség így:

$$p=\frac{\binom{71}{20}}{\binom{80}{20}}=\frac{\dfrac{71!}{51!\cdot 20!}}{\dfrac{80!}{60!\cdot 20!}}=\frac{71!}{51!}\cdot\frac{60!}{80!}.$$

Egyszerűsítünk 71!-sal és 51!-sal, ekkor a számlálóban és a nevezőben is 9 egész szám szorzata marad:

$$p=\frac{52\cdot 53\cdot 54\cdot 55\cdot 56\cdot 57\cdot 58\cdot 59\cdot 60}{72\cdot 73\cdot 74\cdot 75\cdot 76\cdot 77\cdot 78\cdot 79\cdot 80}.$$

A lehetséges egyszerűsítéseket elvégezve:

$$p=\frac{3\cdot 29\cdot 53\cdot 59}{4\cdot 5\cdot 37\cdot 73\cdot 79}=\frac{27\,249}{4\,267\,580}\approx 0{,}063\,748.$$

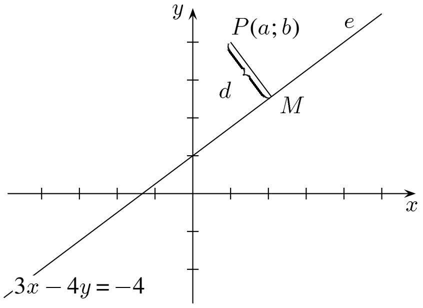
A keresett valószínűség közelítőleg 0,06.

369 dolgozat érkezett. 5 pontos 236, 4 pontos 42, 3 pontos 3, 2 pontos 20, 1 pontos 23, 0 pontos 45.

C. 609. *Bizonyítsuk be, hogy a* $3x-4y+4=0$ *egyenletű egyenes a sík bármely rácspontjától racionális távolságra van.*

Megoldás. Ábrázoljuk az egyenest a koordináta-rendszerben, és vegyünk fel egy tetszőleges $P(a;b)$ rácspontot (a és b egész).

Határozzuk meg a P pont távolságát az e egyenestől. Állítsunk P ponton keresztül merőlegest az e egyenesre. A merőleges egyenes egyenlete: $y-b=-\frac{4}{3}(x-a)$. Ezután meghatározzuk a két egyenes M metszéspontjának koordinátáit, majd a PM távolságot.



$$\begin{aligned} 3x-4y&=-4 && /\cdot 4 && /\cdot 3\\ 4x+3y&=3b+4a && /\cdot(-3) && /\cdot 4 \end{aligned}$$

Szorozzuk meg az első egyenletet (-4)-gyel, a másodikat 3-mal, majd az elsőt 3-mal és a másodikat 4-gyel, és adjuk össze az egyenleteket.

$$\begin{array}{rcl} -12x+16y&=&16\\ 12x+9y&=&9b+12a,\\ \hline 25y&=&9b+12a+16, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 9x-12y&=&-12\\ 16x+12y&=&12b+16a\\ \hline 25x&=&12b+16a-12, \end{array}$$

azaz $y=\frac{1}{25}(9b+12a+16)$ és $x=\frac{1}{25}(12b+16a-12)$. A P pont távolsága e-től:

$$PM=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=\sqrt{\left[\frac{1}{25}(12b+16a-12)-a\right]^2+\left[\frac{1}{25}(9b+12a+16)-b\right]^2}.$$

Alakítsuk át a gyökjel alatti kifejezéseket:

$$\left[\frac{1}{25}(12b+16a-12-25a)\right]^2+\left[\frac{1}{25}(9b+12a+16-25b)\right]^2=$$
$$=\left[\frac{1}{25}\cdot(12b-9a-12)\right]^2+\left[\frac{1}{25}(12a+16-16b)\right]^2.$$

Az $\frac{1}{25}$-öt ki lehet emelni a gyökjel alól, és a zárójeles kifejezésekből kiemelhető 3, illetve 4. Vagyis átalakítva kapjuk, hogy a gyökjel alatt

$$[3(4b-3a-4)]^2+[4(3a-4b+4)]^2$$

áll. Legyen $4b-3a-4=u$, akkor $-4b+3a+4=-u$. Ezt helyettesítve

$$PM=\frac{1}{25}\sqrt{(3u)^2+[4(-u)]^2}=\frac{1}{25}\sqrt{25u^2}=\frac{1}{25}\cdot 5|u|=\left|\frac{4b-3a-4}{5}\right|,$$

ez pedig valóban racionális, mivel a és b egészek.

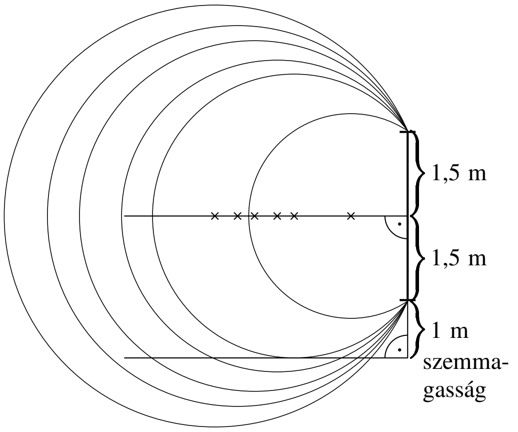
Megjegyzés. Az állítás minden olyan $px+qx+t=0$ egyenletű egyenesre igaz, amelyben p^2+q^2 négyzetszám (p, q, t egészek).

190 dolgozat érkezett. 5 pontos 102, 4 pontos 50, 3 pontos 12, 2 pontos 7, 1 pontos 4, 0 pontos 15.

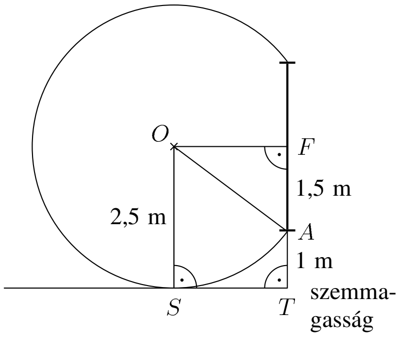
Matematika feladatok megoldása

B. 3410. *Egy három méter magas nagy festmény függ a falon, alsó széle egy méterrel van a néző szemmagassága felett. A kép látványa annál élvezhetőbb, minél nagyobb az a függőleges szög, amelyben látszik. Milyen távolságból nézve lesz ez a szög a lehető legnagyobb?*
(*4 pont*)

I. megoldás. A képhez tartozó adott szögű látókörök középpontjai a néző szemmagassága felett $1+\frac{3}{2}=2{,}5$ méterre vannak. A látószög annál nagyobb, minél kisebb a látókör sugara (*1. ábra*). Ezért a legkisebb sugarú olyan látókört kell megkeresnünk, amelynek van szemmagasságban lévő pontja. Ez nyilván az a kör, amelynek sugara 2,5 méter. A *2. ábrán* látható OAF derékszögű háromszög OF befogója Pitagorasz tétele alapján $OF=\sqrt{2{,}5^2-1{,}5^2}=2$ méter. Ez megegyezik az ST távolsággal, mert az $STFO$ négyszög téglalap.



1. ábra



2. ábra

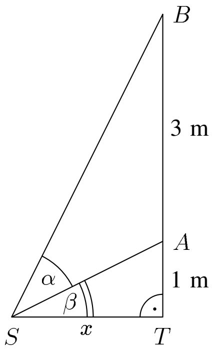
Tehát a kép látószöge 2 méter távolságból lesz a lehető legnagyobb.

Baur Eszter (Békéscsaba, Rózsa F. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

II. megoldás. Legyen a szemmagasságban lévő S pontnak a képet jelző AB szakaszt tartalmazó f egyenes és a szemmagasság T metszéspontjától való távolsága x (*3. ábra*). Ekkor $BA=3$ és $AT=1$, ezért ha $BSA\sphericalangle=\alpha$ és $AST\sphericalangle=\beta$, akkor $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{4}{x}$ és $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{x}$.

Mivel α nyilván hegyesszög, azért akkor a legnagyobb, amikor a tangense maximális. A tangensekre vonatkozó addíciós képlet szerint

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left((\alpha+\beta)-\beta\right) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{4}{x}-\frac{1}{x}}{1+\frac{4}{x^2}} = \frac{3}{x+\frac{4}{x}}.$$



3. ábra

Ez akkor a legnagyobb, ha $x+\dfrac{4}{x}$ a legkisebb. A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség szerint

$$x+\frac{4}{x} \geq 2\cdot\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}} = 4,$$

és egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $x=\dfrac{4}{x}$, azaz ha $x=2$ (tudjuk, hogy $x>0$).

Tehát a képet 2 méterről nézve lesz a látószög a legnagyobb.

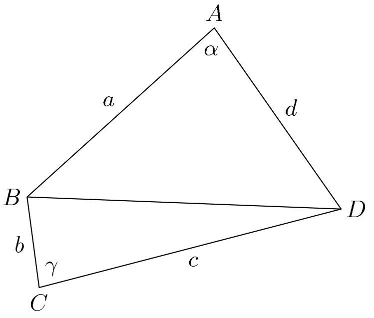
Fehér Ádám (Győr, Révai M. Gimn., 10. o.t.)

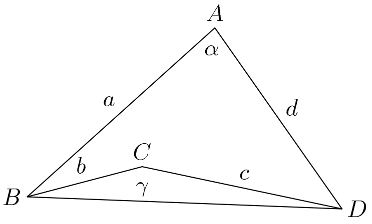
316 dolgozat érkezett. 4 pontos 248, 3 pontos 30, 2 pontos 29, 1 pontos 5, 0 pontos 4.

B. 3416. *Egy négyszöglapokkal határolt konvex poliéder felszíne A, éleinek négyzetösszege Q. Bizonyítsuk be, hogy $Q \geq 2A$.*

(*4 pont*) Javasolta: *Besenyei Ádám*, Tatabánya

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy egy tetszőleges négyszög oldalainak négyzetösszege legalább akkora, mint a négyszög területének négyszerese. Használjuk az *ábra* jelöléseit.





$$T_{ABCD} = T_{ABD} \pm T_{BCD} \leq T_{ABD}+T_{BCD} = \frac{a\cdot d\cdot\sin\alpha}{2} + \frac{b\cdot c\cdot\sin\gamma}{2} \leq \frac{ad+bc}{2}.$$

A mértani és a számtani közepek közötti egyenlőtlenség szerint $ad \leq \dfrac{a^2+d^2}{2}$ és $bc \leq$ $\leq \dfrac{b^2+c^2}{2}$, vagyis $4T_{ABCD} \leq a^2+b^2+c^2+d^2$ valóban.

Írjuk fel ezt az egyenlőtlenséget a poliéder minden lapjára, majd adjuk ezeket össze. A bal oldalon $4A$-t kapunk, a jobb oldalon pedig $2Q$-t, mivel minden él két laphoz tartozik a konvex poliéredben. Ezért $4A \le 2Q$, ami 2-vel elosztva éppen a bizonyítandó állítást adja.

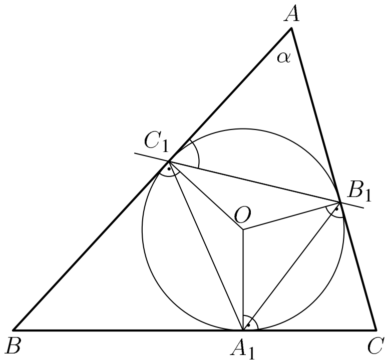
Babos Attila (Budapest, ELTE Radnóti M. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

151 dolgozat érkezett. 4 pontos 103, 3 pontos 20, 2 pontos 8, 1 pontos 4, 0 pontos 6. Nem versenyszerű 10.

B. 3423. *Alkothatnak-e egy háromszög beírt körének az oldalakon levő érintési pontjai tompaszögű háromszöget?*

(*3 pont*)

I. megoldás. Jelöljük a háromszög csúcsait és szögeit a szokásos módon A, B, C, illetve α, β, γ-val, a beírt kör érintési pontjait A_1, B_1, C_1-gyel, középpontját pedig O-val (lásd az *ábrát*). Egy külső pontból egy körhöz húzott két érintő hossza egyenlő, ezért az AB_1C_1 háromszög egyenlő szárú. Az alapon fekvő szögek egyenlőek, tehát



$$AB_1C_1\sphericalangle = AC_1B_1\sphericalangle =$$
$$= \frac{180^\circ - B_1AC_1\sphericalangle}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Vagyis $AB_1C_1\sphericalangle$ hegyesszög. Ez a szög a beírt kör rövidebbik B_1C_1 ívéhez tartozó érintőszárú kerületi szög, tehát megegyezik az ugyanehhez az ívhez tartozó közönséges kerületi szöggel, a $B_1A_1C_1\sphericalangle$-gel. Ezért ez utóbbi is hegyesszög.

Ugyanígy látható be, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög másik két szöge is hegyesszög, vagyis a beírt körnek az oldalakon lévő érintési pontjai mindig hegyesszögű háromszöget alkotnak.

II. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit. Mivel $OB_1 \perp AC$ és $OC_1 \perp AB$, azért a B_1C_1 egyenes elválasztja az A és az O pontokat. De B_1C_1 nyilván elválasztja az A és az A_1 pontokat is, ezért O és A_1 a B_1C_1 egyenesnek ugyanarra az oldalára esik. Vagyis O benne van abban a B_1C_1 egyenes által meghatározott félsíkban, amelyikben az $A_1B_1C_1$ háromszög is elhelyezkedik. Ez nyilván igaz az A_1B_1 és az A_1C_1 egyenesek által meghatározott félsíkokra is. Tehát O benne van a három félsík metszetében, azaz O az $A_1B_1C_1$ háromszög belső pontja.

Az $A_1B_1C_1$ háromszög köré írt kör éppen az ABC háromszög beírt köre. Tehát az $A_1B_1C_1$ háromszög tartalmazza a köré írt kör középpontját. Ez viszont azt jelenti, hogy a háromszög hegyesszögű. Vagyis egy háromszög beírt körének az oldalakon lévő érintési pontjai nem alkothatnak tompaszögű háromszöget.

215 dolgozat érkezett. 3 pontos 214, 0 pontos 1.

B. 3426. *Mit kapunk maradékul, ha az* x^{2001} *polinomot elosztjuk* $(x+1)^2$*-nel?*
(*4 pont*)

I. megoldás. A binomiális tétel szerint

$$x^{2001}=\big((x+1)-1\big)^{2001}=$$
$$=(x+1)^{2001}-\binom{2001}{1}(x+1)^{2000}+\binom{2001}{2}(x+1)^{1999}-\ldots+\binom{2001}{2000}(x+1)-1.$$

Az utolsó két tag kivételével mindegyik tag osztható $(x+1)^2$-nel, ezért a maradék az utolsó két tag összege, $2001(x+1)-1=2001x+2000$.

Zavarkó Gábor (Miskolc, Földes F. Gimn., 11. o.t.)

II. megoldás. A keresett maradék $ax+b$ alakú, azaz

(1) $$x^{2001}=(x+1)^2\cdot f+ax+b,$$

alkalmas f polinommal. Helyettesítsünk mindkét oldalon $x=-1$-et, ekkor

$$-1=-a+b,\qquad \text{vagyis}\qquad b=a-1.$$

Ezt (1)-be írva kapjuk, hogy

$$x^{2001}+1=(x+1)^2\cdot f+a(x+1).$$

Az $(x+1)$-gyel való osztás után ebből

(2) $$x^{2000}-x^{1999}+x^{1998}-\ldots+\ldots-x+1=(x+1)f+a.$$

Ismét az $x=-1$ helyettesítési értékeket képezve:

$$(-1)^{2000}-(-1)^{1999}+(-1)^{1998}-\ldots+\ldots-(-1)+1=a,$$

tehát $a=2001$, így a keresett maradék $2001x+2000$.

188 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 161, 3 pontot 18, 1 pontot 6, 0 pontot 2 beküldő. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

B. 3428. *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges háromszögben érvényes az alábbi összefüggés:*

$$\frac{r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c}{R^4}\le\frac{27}{16}.$$

(R a háromszög köré írt, r a háromszögbe írt, r_a, r_b, r_c pedig a hozzáírt körök sugarát jelentik.)

(*4 pont*) *Tőricht Pál* és *Árokszállási Tibor,* Paks

I. megoldás. Ha a háromszög oldalait a, b, c-vel, kerületét $2s$-sel, területét pedig T-vel jelöljük, akkor

(1) $$T=r\cdot s=r_a(s-a)=r_b(s-b)=r_c(s-c)=\frac{abc}{4R}.$$

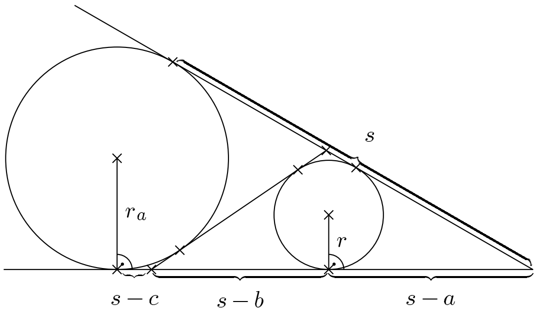
(Ezeknek az összefüggéseknek a bizonyítása megtalálható pl. lapunk 2000/9. számának 532. oldalán.) Héron képletét, valamint (1)-et használva:

$$r_a+r_b+r_c-r=\frac{T}{s-a}+\frac{T}{s-b}+\frac{T}{s-c}-\frac{T}{s}=$$

$$=\frac{T}{T^2}\left[(s(s-b)(s-c)+s(s-a)(s-c)+s(s-a)(s-b)-(s-a)(s-b)(s-c)\right]=$$

$$=\frac{1}{T}\left[(s-(s-a))(s-b)(s-c)+s(s-a)\left((s-c)+(s-b)\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{4T}\left[a\left(a^2-(b-c)^2\right)+\left((b+c)^2-a^2\right)\cdot a\right]=\frac{1}{4T}a(4bc)=\frac{abc}{T}=4R.$$



Vagyis a háromszög köré írható körének sugara egyszerűen kifejezhető a hozzáírt körök és a beírt kör sugarának segítségével.

Eredeti feladatunk ezek után egyszerűen megoldható a számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenség, illetve annak felhasználásával, hogy a körülírt kör sugara legalább kétszerese a beírt kör sugarának.

$$\frac{r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c}{R^4}\le\frac{r}{R}\cdot\left(\frac{r_a+r_b+r_c}{3R}\right)^3=\frac{r}{R}\cdot\left(\frac{4R+r}{3R}\right)^3=$$

$$=\frac{1}{27}\cdot\frac{r}{R}\left(4+\frac{r}{R}\right)^3\le\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(4+\frac{1}{2}\right)^3=\frac{27}{16}.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a háromszög szabályos.

II. megoldás. Ugyancsak az (1) összefüggéseket és Héron képletét felhasználva a bizonyítandó egyenlőtlenség

$$\frac{r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c}{R^4}=\frac{T^4}{s(s-a)(s-b)(s-c)R^4}=\frac{T^2}{R^4}\le\frac{27}{16},$$

azaz $\frac{T}{R^2}\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$ alakra hozható. Tudjuk, hogy $T=\frac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2}$, $R=\frac{a}{2\sin\alpha}=\frac{b}{2\sin\beta}$ (α, β, γ a háromszög szögei), ezért elég azt bizonyítani, hogy

$$\frac{T}{R^2}=2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

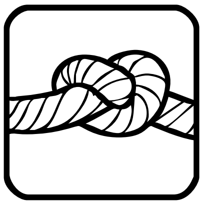
Mivel a $\sin x$ függvény a $(0,\pi)$ intervallumon pozitív és alulról konkáv, azért a számtani és mértani közép közötti, valamint a Jensen-egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\le\left(\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\right)^3\le\left(\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3=(\sin 60^\circ)^3=\frac{3\sqrt{3}}{8},$$

ami ekvivalens a bizonyítandó állítással. Egyenlőség csak szabályos háromszög esetén teljesül.

Balka Richárd (Sárvár, Tinódi S. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

134 dolgozat érkezett. 4 pontos 67, 3 pontos 33, 2 pontos 13, 1 pontos 7. Nem versenyszerű 14 dolgozat.



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (635–639.)

C. 635. Számtanórán megkérdezték a gyerekeket, hogy hány lába van összesen egy tyúknak, hat kutyának és hét palpigradinak (a palpigradi egy állat latin neve). Aladár szerint 46, Benő szerint 52, Cecília szerint 66, Dóra szerint 78, Eufrozina szerint pedig 82. Melyiküknek van igaza?

Zrínyi verseny feladata alapján

C. 636. Ábrázoljuk a derékszögű koordinátarendszerben azokat a pontokat, amelyek koordinátáira

$$-2 \le x \le 2, \qquad -3 \le y \le 3, \qquad \{x\} \le \{y\}.$$

(A $\{z\}$ a z szám törtrészét jelöli.)

C. 637. Melyik az a pozitív egész szám, amely a tízes és a nyolcas számrendszerben is háromjegyű, továbbá számjegyeinek összege mindkét esetben tizennégy?

C. 638. Hány olyan négyzetes oszlop van, amelyben az élek cm-ben mért mérőszáma egész szám, és a felszín mérőszáma cm^2-ben megadva annyi, mint a térfogat mérőszáma cm^3-ben megadva?

C. 639. Hány olyan pozitív egész számokból álló $(a;b)$ számpár van, amelyre

$$1 \le a \le 2001, \qquad 1 \le b \le 2001,$$

és az a és b számok legkisebb közös többszöröse 2001?

❄

Beküldési határidő: 2001. október 15.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest 112, Pf. 32. 1518

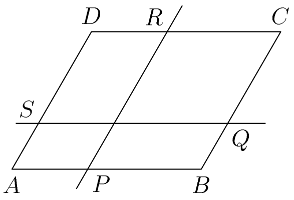
❄

FIGYELEM! A pontversenybe benevezni kívánó tanulók olvassák el a 343. oldalon található versenykiírást!

A B pontversenyben kitűzött feladatok
(3472–3481.)

B. 3472. Hány olyan időpont van reggel 6 és este 6 óra között, amikor nem tudjuk kitalálni az óráról a pontos időt, ha nem tudjuk megkülönböztetni a nagy- és a kismutatót?

(*3 pont*) *Kvant*



B. 3473. A 2 egységnyi területű $ABCD$ paralelogrammában az AD-vel párhuzamos egyenes a P és az R, az AB-vel párhuzamos egyenes pedig az S és a Q pontokban metszi a paralelogramma kerületét az *ábra* szerint. Mekkora az AQR, BRS, DPQ és CSP háromszögek területének összege?

(*3 pont*)

B. 3474. Határozzuk meg az $(\underbrace{111\ldots1}_{112\text{ db}})^2$ hátulról számított hetvenharmadik számjegyét.

(*4 pont*)

B. 3475. Az a, b, c oldalú háromszög szögei α, β, γ. Igazoljuk, hogy ha $3\alpha+2\beta=180^\circ$, akkor $a^2+bc-c^2=0$.

(*4 pont*) *Nemzetközi Magyar Matematika Verseny, 2001*

B. 3476. Egy szabályos 10 oldalú sokszög egy tetszőleges belső pontját a sokszög csúcsaival összekötve 10 darab háromszöget kapunk. A háromszögeket adott körüljárás szerint felváltva pirosra, illetve kékre festjük. Bizonyítsuk be, hogy a kék területek összege egyenlő a piros területek összegével.

(*4 pont*)

B. 3477. Legfeljebb mekkora lehet a 2^n fokos szög szinusza, ha n pozitív egész?

(*4 pont*)

B. 3478. Az ABC háromszög hozzáírt köreinek középpontjai O_1, O_2, O_3. Bizonyítsuk be, hogy $O_1O_2O_3$ háromszög területe legalább négyszerese ABC háromszög területének.

(*4 pont*) Javasolta: *Besenyei Ádám,* Budapest

B. 3479. Keressük meg a $6t^2+3s^2-4st-8t+6s+5$ kifejezés minimumát.

(*4 pont*)

B. 3480. Adottak az e egyenesen az A, B, C és D pontok ebben a sorrendben. Mi azon P pontok mértani helye a síkban, amelyekre az APB és a CPD szögek egyenlők?

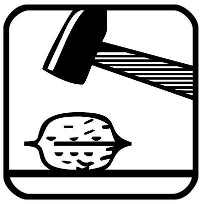
(*5 pont*) *Gillis–Turán matematikaverseny,* 2001.

B. 3481. Legyen $f_1(x) = -\dfrac{2x+7}{x+3}$, $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$. Határozzuk meg $f_{2001}(2002)$ értékét.

(*4 pont*)

Beküldési határidő: 2001. október 15.
Cím: KöMaL szerkesztőség (KöMaL feladatok)
Budapest 112, Pf. 32. 1518

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok
(269–271.)



A. 269. Egy kör keresztmetszetű lyukat két 1 méter oldalú négyzetlappal szeretnénk hézagmentesen lefedni. Milyen határok között mozoghat a lyuk átmérője?

A. 270. Igazoljuk, hogy tetszőleges a, b, c, d pozitív számokra

$$\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}} \le \sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}.$$

A. 271. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $p \ge 5$ prímszámra

$$\sum_{0<k<\frac{2p}{3}} \binom{p}{k}$$

osztható p^2-tel.

Vojtech Jarnik matematikaverseny, Ostrava, 2001

* * *

A feladatok megoldásai a következő címre küldendők:
KöMaL Szerkesztőség, Budapest 112, Pf. 32. 1518
A beküldési határidő: **2001. október 15.**

* * *

PÁLYÁZATI FELHÍVÁS

az Ipar Műszaki Fejlesztéséért Alapítvány „Az év kiemelkedő fiatal műszaki alkotója” cím elnyeréséért pályázatot hirdet

A pályázat célja:
Azoknak a fiatal tehetséges műszaki alkotóknak a díjazása, akik valamely jelentős eredményükkel kivívták a szakma, illetve közvetlen környezetük elismerését, és akiket – eredményeik szélesebb körben való megismertetése révén – évente példaképül lehet állítani a magyar műszaki társadalom elé. Első alkalommal az 1997–2000 között elért jelentős műszaki-tudományos eredményekkel lehet pályázni.

A pályázat részvételi feltételei:

- A pályázaton a tárgyévben max. 35. évüket betöltő, magyar állampolgárságú műszaki alkotók vehetnek részt.
- Szakterület: az ipar egésze (kivéve az építészetet és az élelmiszeripart).
- A pályázat témájának gyakorlati megvalósításáról már be lehessen számolni.
- A pályázat bizonyítsa a témakör hazai és nemzetközi szakirodalmának ismeretét.

A további tudnivalók megtalálhatók a `www.info.neti.hu` honlapon.
A pályázatokat az Ipar Műszaki Fejlesztéséért Alapítvány (1063 Budapest, Munkácsy Mihály u. 16.) címére kell megküldeni.

Számítástechnika szakkör a BME Matematikai Intézetében

FELHÍVÁS

A **Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Matematika Intézete** szakkört hirdet a *matematika és informatika* iránt érdeklődő, tehetséges középiskolások számára. A foglalkozás célja egyrészt olyan matematikai problémák bemutatása, amelyek megoldása során a számítógépek sikerrel alkalmazhatók, másrészt olyan a matematikai módszereknek a megismerése, amelyeket ma az informatikában is használnak.

A szakkörre elsősorban a 12-évfolyamos iskolák 11., illetve 12. évfolyamos diákjainak a jelentkezését várjuk. A foglalkozásokon való aktív részvételhez biztos matematikai tudás, jó feladatmegoldó készség és alapszintű programozási ismeretek hasznosak.

A szakkörökre 2001. októbertől kezdődően kéthetente hétfőn vagy kedden 15 : 30 órától 17 : 00 óráig, összesen tíz alkalommal kerül sor a BME Matematika Intézetében. Az érdeklődők levélben jelentkezhetnek **2001. szeptember 28-ig** a következő címen:

BME Matematika Intézet, 1111. Budapest, Egry József u. 1. H épület 312. szoba

A levélben írjanak néhány sort magukról, eddigi matematikai és számítástechnikai eredményeikről, érdeklődési körükről.

A foglalkozások ingyenesek! Az indulásról levélben küldünk értesítést. Honlapunk címe: `http://www.math.bme.hu/math-inst/index1.html`.

Budapest, 2001. augusztus

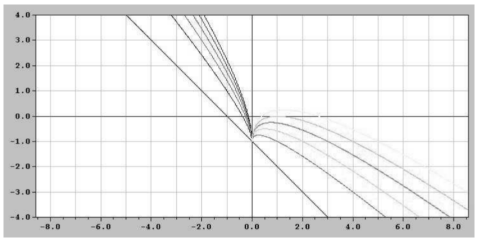
Szoftver-kalauz

A most induló cikksorozatunkban szeretnénk bemutatni a szoftverpiacon megtalálható matematikai oktató- és segédprogramokat. Szerencsére a bőség zavarával küzdünk, így a teljesség hiányában megpróbáltuk kiválasztani azokat a programokat, amelyeket a matematikaoktatásban, illetve az önálló tanulásban a legjobban alkalmazhatónak ítéltünk meg. Szó lesz algebrai, függvényábrázoló, geometriai szoftverekről, matematikai problémák megoldására kifejlesztett programnyelvekről, valamint a jelenleg forgalomban lévő CD-ROM-os segédanyagokról.

MatheAss

A KöMaL decemberi számában jelent meg a **B. 3415.** feladat: *A p paraméter mely értékeire van az $x+1=\sqrt{px}$ egyenletnek pontosan egy valós gyöke?* A megoldásban segítséget nyújthat számunkra egy matematikai program. Nézzük meg, a MatheAss miként teszi ezt.

Egy kis átalakítás után a következő alakban áll előttünk a feladat: $\sqrt{px}-x-1=0$. A problémát úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a $\sqrt{px}-x-1$ által meghatározott görbeseregből azokra vagyunk kíváncsiak, amelyek az x tengelyt egy pontban metszik. A program Analysis/Family of Curves menüpontjában megadhatjuk a görbe paramétert tartalmazó alakját, valamint a paraméter értékeit. Pl. vegyük p értékét -5 és 5 között egyesével. A kapott ábra elemzésével sikeresen megoldható a feladat. A továbbiakban ismerkedjünk meg a MatheAss programmal részletesebben.



1. ábra

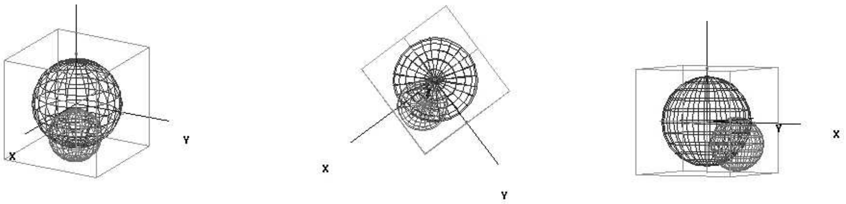
A MatheAss program nem oktatóprogram, tehát nem új ismeretek átadására szolgál, hanem matematikai segédeszköz, amely különböző feladattípusok egyszerű, gyors megoldására nyújt lehetőséget. Minden esetben csak a megoldást közli, a hozzá vezető utat nem. A program az általános iskolától a felsőoktatásig minden képzési szinten használható.

A program Windows környezetben fut, és a megszokott interaktiv helprendszerrel áll rendelkezésünkre. A funkciók menürendszerből és ikonsorról érhetők el. Installált állapotban kb. 3,2 Mbyte-nyi helyet foglal el a winchesteren. A program alapvetően német nyelvű, de futtatható angol, illetve francia nyelven is.

A MatheAss öt matematikai témakörrel foglalkozik: algebra, geometria, analízis, valószínűségszámítás, lineáris algebra. Ezeken belül több kisebb felhasználási területen nyújt számunkra segítséget. Nézzük ezeket:

Algebra A témakörön belül találkozunk a prímszámokkal, úgymint adott számok közötti prímszámok, ikerprímszámok száma; prímfelbontás, illetve legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös meghatározása. Megtalálható a tizedes és közönséges törtek közötti átalakítás. Megoldhatunk diofantoszi egyenleteket, illetve legfeljebb negyedfokú polinomegyenleteket együtthatóik megadásával. Ezen kívül rendelkezésünkre áll háromféle kalkulátor: különböző számrendszerekben (2–16) számolhatunk, és átváltást is végezhetünk; közönséges törtekkel számolhatunk eredménykonverzióval, és komplex számok közötti számításokat végezhetünk.

Geometria A menüben megtalálható címszavak: síkgeometria, térgeometria és koordinátageometria. Síkgeometrián belül foglalkozhatunk derékszögű és általános háromszögekkel, szabályos és általános sokszögekkel és körcikkekkel. A megfelelő számú adat megadása után a program kiszámolja a hiányzó értékeket. Pontjaival meghatározott sokszögeket transzformálhatunk (forgatás, tengelyes és középpontos tükrözés, eltolás, nagyítás/kicsinyítés stb.), több transzformáció is végezhető egymás után. Térgeometriai számításokhoz segítséget nyújtanak a szabályos testekhez, illetve az egyéb testekhez (henger, gömb, kúp stb.) kapcsolódó menüpontok. Itt is megfelelő számú adat megadásával a többi birtokába juthatunk. Koordinátageometriai számításokat síkban és térben is végezhetünk. Adott pontokon átmenő alakzatok egyenletének meghatározása; egyenesek, körök metszéspontjainak kiszámítása; egyenesek, síkok, gömbök metszeteinek meghatározása szerepel a lehetőségek között. A megoldásokat mindenütt interaktív ábrák illusztrálják (*2. ábra*).



2. ábra

Analízis Ábrázolhatunk folytonos függvényeket, intervallumokon értelmezett függvényeket, paraméteres görbéket, görbeseregeket és kétváltozós felületfüggvényeket is. Végezhetünk függvényelemzést, Newton-iterációt, és számolhatunk határozott integrált.

Valószínűségszámítás Itt belemélyedhetünk a statisztikába. Különböző regressziókat végezhetünk. Binomiális, hiperbolikus és normális eloszlást számolhatunk.

Lineáris algebra A témakör segítséget ad lineáris egyenletrendszerek megoldásában. Kiszámolja vektorok lineáris kombinációját, skaláris szorzatát, vektoriális szorzatát, valamint vegyes szorzatát. A mátrix-műveletek közül elvégzi a mátrixok invertálását és szorzását.

A program csak eredményeket közöl, így a megoldás megfontolása a mi feladatunk marad. Bonyolultabb számítások meggyorsításához, megoldási ötletek, tapasztalatok szerzéséhez, ellenőrzéshez, szemléltetéshez ideális segítséget nyújt.

MatheAss 8.0
© 1986–2000: Bernd Schultheiss, D-69168 Wiesloch, GERMANY
A program shareware változata letölthető a `www.matheass.de` honlapról.

Hubert Tibor, Sárváry Terézia

Számítástechnikából kitűzött feladatok (1–3.)

Sz. 1. A KöMaL honlapján megtalálható Bölcsföldi József és Balázs Géza (Perczel Mór Gimnázium, Siófok) cikke a barátságos számokról: „Pitagorasz óta ismeretes, hogy a és b természetes számok barátságos számpárt alkotnak, ha a önmagától különböző osztóinak összege b, és b önmagától különböző osztóinak összege a. A barátságos számpár tagjai közül az egyik értelemszerűen osztódús (megvastagított szám), a másik osztószegény. Ezek a párok a következők:

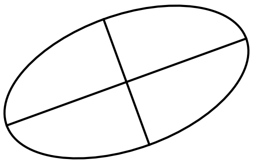
(**220**, 284), (**1184**, 1210), (**2620**, 2924), (**5020**, 5564), (**6232**, 6368), (**10 744**, 10856)."

Készítsünk programot, amely beolvas két természetes számot ($N < M < 1\,000\,000$), majd kiírja azon (b_i, b_j) barátságos számokat, amelyekre $N < b_i, b_j < M$.

(*10 pont*)

Sz. 2. A programozási nyelvek többsége képes arra, hogy egyetlen utasítással egy ellipszist rajzoljunk a képernyőre. Ez azonban csak olyan ellipszis lehet, amelynek tengelyei párhuzamosak a képernyő széleivel.

Készíts programot, amely tetszőleges állású ellipszist képes a képernyőre rajzolni! Paraméterként adjuk meg a két tengely hosszát, valamint a nagytengely és a képernyő felső széle által bezárt szöget fokban!



(*10 pont*)

Sz. 3. Megtakarított pénzünket N $(1 \le N \le 10)$ éven keresztül egy bankba rakjuk az alábbi módon:

1. N éven keresztül minden hónap elején beteszünk A forintot, és egy évre X százalékos kamattal ($X > 0$, valós szám) lekötjük.

2. A lekötés lejártakor, a következő hónap elején kapjuk meg az éves kamatot, ekkor a bent levő pénzt a kamattal együtt egy évre újra lekötjük.

Készítsünk táblázatot (PENZ.XLS), amelybe egy adott helyre beírva N, A és X értékét, N éven keresztül kiszámolja, hogy mennyi pénzünk van a bankban! A táblázatban pontosan N sor szerepeljen, azaz ha N-et változtatjuk, akkor a felesleges sorok ne látsszanak!

Példa: ($N = 3$, $A = 1000$, $X = 10$ esetén)

1. év:	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000	11000	12000
2. év:	13100	14200	15300	16400	17500	18600	19700	20800	21900	23000	24100	25200
3. év:	26410	27620	28830	30040	31250	32460	33670	34880	36090	37300	38510	39720

(*10 pont*)

A feladatok megoldásai a következő címre küldendők:

Cím: szamtech@komal.elte.hu

A beküldési határidő: **2001. október 13.**