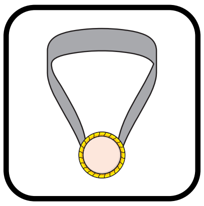
ERICSSON-DÍJ TANÁROKNAK



Az Ericsson cég magyarországi Kutatás-Fejlesztési Igazgatósága által alapított díjat általános és középiskolai fizika- és matematikatanárok nyerhetik el, az alább részletezett feltételek szerint. A díj alapításának célja, hogy támogassa és erősítse a magyarországi matematikai és természettudományos alapképzés világviszonylatban is kiemelkedő színvonalát, igényességét. Ennek köszönhető ugyanis, hogy a hazai műszaki és természettudományi diplomával rendelkezők tudása megfelelő szellemi értéket képvisel az igényes hazai és külföldi befektetők előtt és vonzóvá teszi Magyarország bekapcsolását a távközlés és egyéb csúcstechnológiák nemzetközi kutatási fejlesztési láncába.

Az ERICSSON-DÍJAKAT minden évben két kategóriában ítélik oda, általános iskolában, szakközépiskolában, gimnáziumban, illetve speciális matematika vagy fizika tagozaton tanító tanárok körében, 2001-ben a következő kiírás alapján.

1. Ericsson a matematika és fizika tehetségeinek gondozásáért díj

4 matematika- és 4 fizikatanár részére egyenként 200 000 Ft-tal járó díj, melyet olyan tanárok kaphatnak, akiknek tanítványai a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok versenyein, vagy a Varga Tamás, Kalmár László, Arany Dániel matematikaversenyek, matematika vagy fizika OKTV, Öveges József, Mikola Sándor, Fényes Imre, Szilárd Leó fizikaversenyek, a Nemzetközi Matematika vagy Fizika Diákolimpiák, a Kürschák József matematikai tanulóversenyek vagy az Eötvös Loránd fizikaversenyek valamelyikén az 1996–97-es tanévtől kezdődően I–III. díjat nyertek.

2. Ericsson a matematika és fizika népszerűsítéséért díj

4 matematika- és 4 fizikatanár részére egyenként 200 000 Ft-tal járó díj, melyet olyan tanárok kaphatnak, akik tanítványaikkal az 1999–2000. tanév óta aktívan bekapcsolódtak a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok vagy az ABACUS folyóiratának pontversenyeibe (korábban iskolájukból egyáltalán nem vagy csak csekély eredménnyel versenyeztek a tanulók), vagy a tanítás mellett évek óta a legtöbbet teszik a tantárgyuk iránti érdeklődés felkeltéséért és megszerettetéséért.

A díjakat a MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány ítéli oda, a Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat Ericsson-díjbizottságainak ajánlása alapján. A díjazandókra írásos javaslatot nyújthatnak be szakmai és társadalmi szervezetek, a javasolt tanár tevékenységét ismerő kollégák, tanítványok.

A javaslatokat legkésőbb **2001. október 1-ig kell** eljuttatni a Bolyai János Matematikai Társulathoz vagy az Eötvös Loránd Fizikai Társulathoz, mindkettő címe: 1027 Budapest, Fő u. 68. A bizottságok a beérkezett javaslatok és a versenyek eredményei alapján teszik meg ajánlásaikat a díjazottakra 2001. november 1-ig. A díj átadására 2001 novemberében kerül sor.

Ifjúsági Bolyai Pályázat

2000-ben első alkalommal került sor az Ifjúsági Bolyai Pályázat kiírására. A pályázatot az Oktatási Minisztérium és a Bolyai-Díj Alapítvány írta ki, a 2000. évi Bolyai-Díjas, *Freund Tamás* akadémikus által megjelölt, agykutatással kapcsolatos témákban. A pályázatok bírálatára *Pokorni Zoltán* oktatási miniszter 12 fős bizottságot kért fel, amelyben a Magyar Tudományos Akadémia négy tagja – köztük az idegtudományok olyan neves képviselői, mint *Friedrich Péter,* vagy *Palkovits Miklós* – mellett olyan kiemelkedő tanáregyéniségek, mint *Holics László* vagy *Radnai Gyula* kaptak helyet.* A bizottság munkáját *Csermely Péter* egyetemi tanár vezette. Az Ifjúsági Bolyai Pályázatra sok, igen jó pályamunka érkezett. A bíráló bizottság azonban a kiváló pályamunkán túl olyan kutatóegyéniségeket keresett, akik céltudatosságukkal, eredeti gondolkodásukkal is kiemelkednek kortársaik közül. Emiatt döntött úgy, hogy a 2001. évi Ifjúsági Bolyai Pályázat díját a felsőoktatási kategóriában nem adja ki. A középiskolás pályázók között azonban volt a magas elvárásoknak megfelelő jelölt: *Korcsmár Péter,* a szombathelyi Bolyai János Gimnázium 12/a osztályos tanulója, aki felkészítő tanárával, *Baranyai Józseffel* együtt március 24-én vehette át a díjat, amely a pénzjutalmon túl Péternek egyetemi felvételt is jelentett. Korcsmár Péter „Lehetséges epilepsziás szikramechnaizmusok a hippocampusban" címmel nyújtotta be és védte meg a *Czéch Gábor* (Pécsi Tudományegyetem) segítségével végzett kísérleteiről szóló magas színvonalú, önálló kutatásról tanúskodó tudományos dolgozatát. Korcsmár Péter ez év nyarától Freund Tamás laboratóriumában fogja folytatni kutatásait.

Aki szeretne részt venni bármilyen kutatási programban, keresse fel a

`http://kutdiak.kee.hu`

honlapot, és jelentkezzen a már 3500 fős hazai és határon túli kutató diák-csapat új tagjának. Jelentkezésével lehetőséget kap arra, hogy a legkiválóbb magyar tudósokkal működhessen együtt, és sikerrel indulhasson a következő, 2002-es Ifjúsági Bolyai Pályázat-on, vagy más hasonló versenyeken.

Díjkiosztó ünnepség lapunk többszáz megoldójával

Az Ifjúsági Bolyai Pályázat díját 2001. március 24-én *Pokorni Zoltán* oktatási miniszter adta át, aki kiemelte beszédében, hogy az Oktatási Minisztérium fontos feladatának tekinti a közoktatásban és a felsőoktatásban tanuló, a természettudományok iránt érdeklődő, egy meghatározott téma kutatásában való elmélyedésre képes, tehetséges tanulók munkájának támogatását, elismerését. Beszédet mondott még *Csermely Péter* bizottsági elnök, és dolgozata alapján színvonalas előadást tartott a díjazott, *Korcsmár Péter.*

Az ünnepség második részében *Pálinkás József* államtitkár beszélt a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokról, emelyet diákként, majd később fizikusként is jól ismert. A folyóirat több mint 100 éve segíti a tehetséges diákok munkáját. A KöMaL feladatmegoldó rovata összegyűjti azokat a diákokat, akik érdeklődnek a matematika vagy a fizika iránt, és szeretnek feladatokat megoldani. Ez a lap mindig fontos szerepet töltött be az oktatásban, ezt is igazolja az a számos világhírű tudós matematikus, fizikus, de akár a számítástechnika különböző területén vezető pozíciót betöltő mérnök, közgazdász vagy kiváló tanár, akiknek pályája éppen a lap feladatainak megoldásával kezdődött.

---

* Holics László 1959 óta lapunk fizika szerkesztőbizottságának tagja, Radnai Gyula 1988-tól a fizika szerkesztőbizottság vezetője.

Ezt az ünnepi alkalmat használta fel az államtitkár annak bejelentésére, hogy az Oktatási Minisztérium 10 millió forinttal támogatja a KöMaL munkáját. Az összeggel a Minisztérium a lap fenntartását és megújulását kívánja segíteni. Ez lehetővé teszi a külső megújuláson (több színes oldal) kívül a tartalom és a példányszám növelését is. Angol nyelvű változatának megjelentetésével a lap nemzetközi folyóirattá válhatna.

Az ünnepség nagyszámú meghívottai között jelen voltak a KöMaL régi és új szerkesztői, szerkesztőbizottságának tagjai, egykori és mai megoldói, cikkeinek és feladatainak szerzői, vesenynyertesek, a lap olvasói, tanárok és diákok.

Nekik köszönte meg a lap jelenlegi főszerkesztője, *Oláh Vera* mindenkori támogatásukat, megemlítve, hogy volt olyan időszak a lap életében, amikor az anyagi problémák még a következő havi szám megjelentetését is bizonytalanná tették.

Ezután *Bor Zsolt* akadémikus – aki, mint diák, maga is feladatmegoldója volt a Középiskolai Matematikai Lapoknak – emlékezett vissza a régi megoldókra, és közben a 107 éves folyóirat régi számaiból 107 megoldó fényképét vetítette ki a hallgatóságnak. Az egykori megoldók közül sokan világhírű tudósok lettek, nem egyszer külföldi emigrációban. A jelen lévő fiatalok számára különösen érdekes volt ezekkel a nevekkel így találkozni. A válogatás természetesen szubjektív volt, nem is lehetett más. Kicsit sajnálatos, hogy kimaradtak néhányan olyanok, akik mint később a KöMaL szerkesztői, sokat tettek a lap fennmaradásáért és működéséért.

Feltétlenül ki kell emelni közülük *Surányi János* ny. egyetemi tanárt, aki maga is feladatmegoldó volt, és a II. világháború után 1947-ben újra elindította a lapot, amelynek 1959-ig főszerkesztője volt. Az ő kezdeményezésére először a Bolyai János Matematikai Társulat biztosította a lap folyamatos megjelenését. A lapszerkesztés másik nagy egyénisége, *Bakos Tibor* 1926-ban nyerte meg az országos matematika és fizika tanulmányi versenyt. A lap felelős szerkesztője volt 1974-ig, és 1998-ban bekövetkezett haláláig tagja volt a matematika szerkesztőbizottságnak. Ugyancsak említeni lehetett volna az 1998-ban elhunyt *Kunfalvi Rezső* középiskolai tanár nevét, aki 1959-ben elérte, hogy újra fizika rovattal bővüljön a lap, és 1975-ig ennek szerkesztője volt. Az ő kezdeményezése nélkül ma talán nem is lenne a lapban fizika rész.

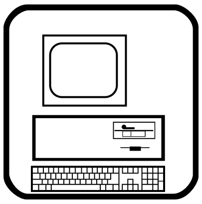
Természetesen kevés volt az idő mindazok felsorolására, akiknek szívügye volt a KöMaL, és valamilyen formában részt vettek a munkában. A rendezvényen megjelent többszáz résztvevő is igazolta, milyen sok ember számára fontos a lap, és milyen szívesen emlékeznek vissza rá. A nagy színházterem zsúfolásig megtelt, ülőhely sem jutott mindenkinek. A hangulatot fokozta az előadások után tartott fogadás, ahol lehetőség nyílt a beszélgetésre. Régi versenyzők, megoldók találkoztak egymással, volt tanáraikkal, tanítványaikkal.

Köszönet illeti az Oktatási Minisztériumot a szervezésért, Bor Zsolt akadémikust az ötletért, hogy az összejövetelre hívják meg a lap volt és jelenlegi megoldóit és szerkesztőit.

Szívből reméljük, hogy a KöMaL egykori és jelenlegi munkatársai, megoldók és szerkesztők ezentúl rendszeresen fognak találkozni.*

Fried Ervinné
volt főszerkesztő,
a szerkesztőbizottság tagja

* Mindazok, akik a tervezett találkozóról értesítést kérnek, kérjük, juttassák el címüket a szerkesztőségbe! A szerk.



Hírek

Sulineten a KöMaL archívuma

`www.sulinet.hu/komal`

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 1893 és 1999 között megjelent valamennyi számát, a teljes matematika és fizika archívumot, 20 000 feladatot és 2800 cikket jelentet meg az Oktatási Minisztérium a Sulinet elektronikus oldalain a lap kiadójával kötött szerződés alapján.

A Sulineten megjelenő adatbázis tartalma folyamatos fejlesztés alatt áll, állandó frissítésre és javításra van lehetőség, így az esetleges hibákat, amelyeket a felhasználók észrevesznek és jeleznek, a szerkesztőség azonnal kijavítja.

A feladatok téma és részletes témakör, időrend, kitűző, megoldó alapján kereshetők, a cikkek szerző vagy cím szerint találhatók meg. A KöMaL archívumot kezelő program angol nyelven is eligazít egy évszázad középiskolai matematika és fizika anyagában.

A szerkesztőség lehetőségei szerint az archívum adatbázisát a jövőben is állandóan karbantartja, további angol fordításokat készít, a cikkeket is ellátja témaköri besorolással, és a régi feladatok szövegét újra beírva fokozatosan biztosítja a teljes keresést. Az archívumot a jövő évben CD-n is kiadjuk.

Számítástechnika, informatika, internet – – a KöMaL jövő évi tervei

Az Oktatási Minisztérium idén a szokásos támogatásán (a tavalyi 4 millió forinton) túl további tízmillió forintot ígért a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok fejlesztéséhez. Lapzártáig a minisztériumtól a szokásos pályázatainkat **elutasító** két levél érkezett, a rendkívüli támogatás kifizetéséről viszont érdeklődésünkre telefonon nem teljesen kielégítő jövőbeni ígéreteket kaptunk. A kiadó kasszája mostanra kiürült, és semmilyen aláírt szerződésünk nincs.

Mindezek ellenére terveink vannak, és bízunk abban, hogy legalább év végére valamennyi pénz is lesz rá.

A Bolyai János Matematikai Társulat és a Neumann János Számítástudományi Társaság ez év elején kötött megállapodása alapján a jövő tanévtől kezdve a KöMaL újraindítaná rendszeres **informatika rovatát**. Az eddigi elképzelések szerint a rovatban néhány matematikai programcsomagot mutatunk be, és kísérleti jelleggel matematikához és fizikához kapcsolódó számítástechnikai problémákat fogunk kitűzni. A rovat szerkesztésében szívesen részt vevő tanár vagy diák munkatársakat várunk.

A KöMaL internetes bővítését is tervezzük: valódi elektronikus folyóiratot szeretnénk működtetni magyarul és **angolul,** amelyben animációk, élő levelezőlista és számítógépes alkalmazásokra támaszkodó vagy multimédiás cikkek jelennének meg a lapban írottakhoz kapcsolódóan. Várjuk olvasóink javaslatait, cikkeit! (Ld. pl. mostani számunkban *Béky Bence:* Számítógépes szimuláció a 31. Ortvay Rudolf Fizika Problémamegoldó Verseny egyik feladatához c. írását.)

FELHÍVÁS

Számítástechnika, informatika és internetes fejlesztéseinkhez közreműködő tanárok és diákok jelentkezését várjuk **2001. június 30-ig** a `szerk@komal.elte.hu` címen!

PÁLYÁZAT

A KöMaL szerkesztősége olvasói körében pályázatot hirdet **elektronikus folyóiratban megjelentethető** matematika témájú cikkekre. Olyan pályázatokat várunk, amelyek a számítógépet és annak grafikai, szimulációs és vizuális lehetőségeit használják fel matematikai jellegű problémák – esetleg kísérleti – megoldására.

Ajánlott témák:

1. *Gyökvonás a komplex számsíkon*

Alapfeladat: ismeretes, hogy az $x_{n+1}=x_n+\dfrac{a}{x_n}$ sorozat határértéke $\sqrt{a}$ vagy $-\sqrt{a}$ a kezdőértéktől függően. Vizsgáljuk meg a fenti iterációt a komplex számsíkon.

2. *Sorozat periódusainak vizsgálata*

Alapfeladat: a 2, 0, 0, 1 számokból kiindulva készítsük el azt a sorozatot, amelynek minden további jegye az előző 4 összegének a tízes maradéka. Hányadik lépés után ismétlődik meg a sorozatban a 2, 0, 0, 1 csoport? Vizsgáljuk meg az ilyen típusú sorozatok periodicitását.

3. *Esik az eső...*

Mennyi idő múlva lesz teljesen vizes a járda? A járdát tekintsük adott alakzatnak (intervallum, kör, téglalap stb.), az esőcseppeket pedig – a véletlen eloszlású középpontjuk által meghatározott – ponthalmazoknak (kicsi szakasz vagy kör stb.).

Feltételek: A cikkeket magyar és lehetőleg angol nyelven, HTML formában e-mailen a `szerk@komal.elte.hu` címre küldjék be. (Amennyiben Java appletet alkalmaznak, kérjük a forrásprogramot is!)

A nyertes pályázó 30 000 Ft-os **Metropolis-díjban** részesül.

A közlésre érdemes további pályázatokat szerzői díj kifizetésével megjelentetjük.

Beküldési határidő: 2001. július 15.

Közlemény

A MATFUND alapítvány fiatal kutatóknak kiírt pályázatán 2000-ben 9000 Ft és 30.000 Ft közötti juttatásban részesültek a következő egyetemi hallgatók:

Ábrány Miklós, Bérczi Gergely, Felszeghy Bálint, Gerő Tamás Mikós, Gnädig Anna Dóra, Gröller Ákos, Gueth Krisztián, Gulyás Nándor, Horváth Gábor, Kiss Tamás, Kocsis Bence, Németh Péter, Lippner Gábor, Liptai Bernadett, Nagy Réka, Pap Júlia, Pál András, Péterfalvi Csaba, Siska András, Szabadka Zoltán, Szita István, Varga Áron, Végh A. László és Vörös Zoltán.

KöMaL – 2001/5 MAT0105 cianmagentayellowblack2002. június 19. – 8:51 (5. lap)

A 2000/2001. tanévi matematika pontverseny állása

A nehezebb feladatok

Az eddig feldolgozott feladatok: szeptembertől januárig és az A. 258.

Feladatonként egy helyes megoldással elérhető: 75 pont.

1. *Csóka Endre* 10. o.t. 65 pont; **2.** *Kunszenti-Kovács Dávid* 10. o.t. 61 pont; **3.** *Csikvári Péter* 11. o.t. 59 pont; **4.** *Gerencsér Balázs* 11. o.t. 51 pont; **5.** *Harangi Viktor* 11. o.t. 49 pont; **6.** *Varjú Péter* 12. o.t. 46 pont; **7.** *Kovács Erika Renáta* 11. o.t. 42 pont; **8.** *Vörös László* 12. o.t. 37 pont; **9.** *Hablicsek Márton* 9. o.t. 32 pont; **10.** *Ambrus Gergely* 12. o.t. 28 pont; **11.** *Vígh Viktor* 12. o.t. 26 pont; **12.** *Kiss-Tóth Christian* 8. o.t. 25 pont; **13.** *Balogh János* 11. o.t. 24 pont; **14–15.** *Koch Dénes* 12. o.t., *Rácz Béla András* 9. o.t. 23 pont; **16.** *Csernenszky András* 11. o.t. 22 pont; **17–18.** *Horváth Illés* 11. o.t., *Vajda Péter* 12. o.t. 21 pont; **19–20.** *Jankó András* 10. o.t., *Pach Péter Pál* 9. o.t. 15 pont; **21.** *Nagy Zoltán* 10. o.t. 12 pont; **22.** *Bartha Ferenc* 10. o.t. 11 pont; **23–25.** *Garab Ábel* 10. o.t., *Szalai Attila* 10. o.t., *Szalay Zsófia* 11. o.t. 10 pont; **26–27.** *Balka Richárd* 12. o.t., *Béky Bence* 11. o.t. 9 pont; **28–31.** *Boros Vazul* 11. o.t., *Farkas Viktor* 11. o.t., *Fűrész Gábor* 11. o.t., *Kórus Péter* 9. o.t. 8 pont; **32.** *Kocsis Albert Tihamér* 9. o.t. 7 pont; **33–35.** *Juhász Máté Lehel* 9. o.t., *Kőrizs András* 11. o.t., *Lajkó Miklós* 10. o.t. 6 pont.

Kevesebb pontja van 104 versenyzőnek.

B feladatok

A szeptember–decemberi összesítés után: a maximális elérhető pontszám: 107 pont.

Általános iskolások

1. *Kiss-Tóth Christian* 8. o.t. 102 pont; **2.** *Birkner Tamás* 8. o.t. 81 pont; **3.** *Eckert Bernadett* 8. o.t. 80 pont; **4.** *Paulin Roland* 7. o.t. 75 pont; **5.** *Hartmann Zoltán* 8. o.t. 65 pont; **6.** *Szabó Teodóra* 8. o.t. 48 pont; **7.** *Knipl Diána* 8. o.t. 45 pont; **8.** *Tassy Gergely* 8. o.t. 26 pont; **9.** *Kovács Péter* 7. o.t. 25 pont; **10.** *Torma Róbert* 8. o.t. 18 pont; **11.** *Klár Tímea* 8. o.t. 15 pont; **12.** *Király Csaba* 8. o.t. 12 pont; **13.** *Horváth Tamás* 7. o.t. 10 pont; **14.** *Béres Edit* 8. o.t. 8 pont; **15.** *Sali András* 8. o.t. 7 pont; **16–18.** *Agócs István* 8. o.t., *Bengery Zsófia* 8. o.t., *Rátkai András* 8. o.t. 5 pont.

Kevesebb pontja van 13 versenyzőnek.

9. osztályosok

1. *Hablicsek Márton* 95 pont; **2.** *Horváth Márton* 94 pont; **3.** *Rácz Béla András* 90 pont; **4.** *Puskás Anna* 87 pont; **5.** *Kocsis Albert Tihamér* 86 pont; **6.** *Maga Péter* 85 pont; **7.** *Paulin Dániel* 84 pont; **8.** *Pál Ágnes* 80 pont; **9.** *Kovács Levente* 79 pont; **10–11.** *Kórus Péter*, *Németh Adrián* 77 pont; **12–13.** *Hubai Tamás*, *Pach Péter Pál* 76 pont; **14.** *Egri Attila* 72 pont; **15.** *Konfár András* 71 pont; **16.** *Tóth Anett* 67 pont; **17.** *Kovács Dóra Judit* 64 pont; **18–19.** *Pongrácz András*, *Szilágyi Péter* 59 pont; **20–21.** *Juhász Máté Lehel*, *Mátis Gábor* 58 pont; **22–23.** *Hangya Miklós*, *Szabó Botond* 55 pont; **24–25.** *Matyuska Ferenc*, *Varga Nóra* 54 pont; **26.** *Kovács Gábor* 51 pont; **27.** *Kajtár Máté*

50 pont; **28.** *Papp Zoltán* 49 pont; **29–30.** *Halbrucker Tamás*, *Kocsis Tibor* 48 pont; **31–32.** *Fehér Balázs*, *Klobb Maja* 47 pont; **33.** *Bauer Péter* 45 pont; **34.** *Bánfi László* 43 pont; **35.** *Hudáky Zsuzsanna* 42 pont; **36–38.** *Molnár Katalin*, *Nyeste Szabolcs*, *Zsigmond Anna* 40 pont; **39–40.** *Deák Péter*, *Sándor Ágnes* 39 pont; **41–44.** *Darabos Judit*, *Holler Péter*, *Rakyta Péter*, *Seress Bence* 37 pont; **45–46.** *Fehér Gábor*, *Ferencz Emőke* 36 pont; **47–48.** *Breitenstein Csaba*, *Kovács Adrián* 35 pont; **49–51.** *Bori Kata*, *Kelemen Ferenc*, *Kutasi Dávid* 34 pont; **52–56.** *Fejes Lívia*, *Genczler Kata*, *Kiss Balázs*, *Sebestyén Krisztián*, *Vörös András* 33 pont; **57–58.** *Klausz Balázs*, *Sebestyén Péter* 32 pont; **59–65.** *Bagócsi Szilvia*, *Dányádi Zsolt*, *Elter Csaba*, *Gáti Beatrix*, *Mészáros Anna*, *Simon Zsolt*, *Terjéki Péter* 31 pont; **66.** *Mukli Péter* 30 pont; **67–69.** *Bán Zoltán*, *Dobler Zsófia*, *Gombai Zsófi* 27 pont; **70.** *Fokas-Rodatos András* 26 pont; **71.** *Kovács Tamás* 25 pont; **72–79.** *Antal László*, *Balogh Rita*, *György András*, *Majoros Vera*, *Mosolygó György*, *Osgyán Balázs*, *Papp Gábor*, *Varga Zsuzsa* 24 pont; **80.** *Berki Tímea* 23 pont; **81–84.** *Bodó Anita*, *Fekete László*, *Magony Krisztina*, *Szőke Edina* 22 pont; **85–88.** *Bednay Dezső*, *Hegyháti Máté*, *Tárnok Gábor*, *Timkó Helga* 21 pont; **89–91.** *Bernát Péter*, *Hegyi Gábor*, *Töttős László* 20 pont; **92–94.** *Béky Zsófia*, *Peleskey Miklós Péter*, *Tuska Gábor* 19 pont; **95–99.** *Barcza Krisztina*, *Csízi Csaba*, *Farkasinszki Katalin*, *Luksander Viktória*, *Tasi Eszter* 18 pont; **100–106.** *Caimacan Dávid*, *Flach Viktória*, *Illés Balázs*, *Kereszturi Csaba*, *Nagy Gergely*, *Simon Péter*, *Sümeghy Tamás* 17 pont; **107–113.** *Édes János*, *Fülöp László*, *Kaposi Ambrus*, *Király András*, *Kramarics Áron*, *Lékai Dénes*, *Tóth András* 16 pont; **114–117.** *Farkas Tamás*, *Novák Zsófia*, *Orosz Tamás*, *Szűcs Norbert* 15 pont.
Kevesebb pontja van 174 versenyzőnek.

10. osztályosok

1. *Szekeres Balázs* 97 pont; **2.** *Nagy Zoltán* 95 pont; **3.** *Sparing Dániel* 92 pont; **4.** *Bóka Gergely* 91 pont; **5.** *Bergmann Gábor* 87 pont; **6–7.** *Bérczi Kristóf*, *Jelitai Kálmán* 86 pont; **8–9.** *Backhausz Ágnes*, *Blastik Márta* 84 pont; **10–11.** *Bartha Ferenc*, *Malakuczi Viktor* 82 pont; **12–13.** *Komjáthy Júlia*, *Tábor Áron* 80 pont; **14.** *Simon Balázs* 76 pont; **15.** *Jankó András* 75 pont; **16.** *Koltai Péter* 72 pont; **17–20.** *Belső Róbert*, *Boros Balázs*, *Fehér Ádám*, *Kalcsú Áron* 69 pont; **21–22.** *Lang Péter*, *Szalai Attila* 68 pont; **23–24.** *Ruppert László*, *Szücs Tamás* 67 pont; **25.** *Rácz Judit* 66 pont; **26.** *Kiss Demeter* 65 pont; **27.** *Torma Ákos* 64 pont; **28.** *Rácz Éva* 63 pont; **29.** *Rendes Gábor* 62 pont; **30–32.** *Buti Tamás*, *Prekopcsák Zoltán*, *Szűcs Mónika* 60 pont; **33–36.** *Herczegh Attila*, *Herr Annamária*, *Sándor Nóra*, *Surján Veronika* 59 pont; **37.** *Szilágyi Zoltán* 58 pont; **38.** *Sevecsek Zsuzsanna* 57 pont; **39–40.** *Kovács Andrea*, *Sipos Gábor* 55 pont; **41.** *Sipőcz Brigitta* 53 pont; **42–44.** *Garab Ábel*, *Márton Sándor*, *Pongrácz Eszter* 52 pont; **45–48.** *Antal Áron*, *Balogh Ágnes*, *Balogh Zoltán*, *Ureczky Dóra* 51 pont; **49–50.** *Kiss Zsuzsanna*, *Nagy Károly* 50 pont; **51–53.** *Bárkai János*, *Molnár László*, *Pálvölgyi Dénes* 49 pont; **54–56.** *Balogh László*, *Pusztai Erika*, *Salát Máté* 48 pont; **57–58.** *Molnár Ágnes*, *Szalay Gergely* 47 pont; **59.** *Nagy Tibor* 46 pont; **60.** *Geleji János* 45 pont; **61.** *Markó Roland* 43 pont; **62–63.** *Csoma Péter*, *Tölgyesi Csaba* 42 pont; **64.** *Bisztray Márta* 40 pont; **65–66.** *Lajkó Miklós*, *Sepler Gábor* 39 pont; **67–69.** *Széll Károly*, *Török Dávid*, *Varga Pál* 38 pont; **70.** *Besenyei Balázs* 37 pont; **71–73.** *Gyöngyösi Győző*, *Honti Edit Anna*, *Simon Zsolt* 36 pont; **74–75.** *Glowinsky Janka*, *Mihók Péter* 35 pont; **76–79.** *Baráth Géza*, *Durham Patrick*, *Simon Attila*, *Varga Noémi* 34 pont; **80–85.** *Balaton Attila*, *Bálint Márton*, *Bori Eszter*, *Fliszár Vilmos*, *Köber Csaba*, *Pusztai János* 32 pont; **86–90.** *Blaskó János*, *Márton Noémi Petra*, *Reiss Tibor*, *Sipos Kinga*, *Szabó László* 31 pont; **91.** *Horváth Eszter* 30 pont; **92–93.** *Gábor Sámuel*, *Módos András* 29 pont; **94–97.** *Bakonyi Ákos*, *Bicskei Norbert*, *Hajnalka Zsolt*, *Hudecz Viktor* 28 pont; **98–103.** *Csekő Anna*, *Drüszler Anikó*, *Hajdú Huba*, *Komáromy Dávid*, *Tukacs Lívia*, *Virág*

Éva 27 pont; **104–105.** *Metzing András*, *Szöllősi Ádám* 26 pont; **106–110.** *Kósa Fruzsina*, *Madocsai Rita*, *Maróti László*, *Szücs András*, *Tamás Katalin* 25 pont; **111–114.** *Borbély Attila*, *Kalocsai Ákos*, *Kormos Attila*, *Mándy Péter* 24 pont; **115–116.** *Csetri András*, *Márton Szabolcs* 23 pont; **117–119.** *Koncsek Sándor*, *Palkovics Márta*, *Vági Andrea* 22 pont; **120–122.** *Karches Tamás*, *Magyar Róbert*, *Töreki Péter* 21 pont; **123–125.** *Fehér Borbála*, *Fülöp Anita*, *Hanzséros Eszter* 20 pont.
Kevesebb pontja van 144 versenyzőnek.

11. osztályosok

1. *Somogyi Dávid* 105 pont; **2.** *Hargitai Gábor* 99 pont; **3.** *Balogh János* 98 pont; **4.** *Béky Bence* 96 pont; **5.** *Jesch Dávid* 95 pont; **6.** *Kőrizs András* 94 pont; **7–9.** *Boros Vazul*, *Pallos Péter*, *Szalay Zsófia* 93 pont; **10–12.** *Marton József*, *Takács Gergő*, *Tran Thanh Long* 91 pont; **13.** *Tóth Ágnes* 90 pont; **14.** *Horváth Illés* 89 pont; **15.** *Soproni Péter* 88 pont; **16.** *Sásdy Gabriella* 87 pont; **17.** *Hamar Gergő* 86 pont; **18.** *Reiss Attila* 85 pont; **19.** *Nagy Ambrus* 83 pont; **20–22.** *Csáky Attila*, *Dömötör Csilla*, *Ta Vinh Thong* 82 pont; **23.** *Kucsara Péter* 80 pont; **24.** *Zavarkó Gábor* 79 pont; **25.** *Koreck Ferenc* 73 pont; **26.** *Baur Eszter* 72 pont; **27.** *Antal Ágnes* 71 pont; **28.** *Siroki László* 70 pont; **29.** *Dénes Ferenc* 69 pont; **30–31.** *Ábel Dániel*, *Kevei Péter* 63 pont; **32–35.** *Csötönyi Nóra*, *Kerékfy Péter*, *Váradi Vajk*, *Zakar István* 60 pont; **36.** *Csordás Hunor* 59 pont; **37.** *Szebenyi Zoltán* 58 pont; **38.** *Major Gergely* 55 pont; **39–40.** *Farkas Viktor*, *Kádas Attila* 54 pont; **41.** *Kovács Péter* 52 pont; **42.** *Boróczki Lajos* 50 pont; **43–44.** *Balog Gergely*, *Fűrész Gábor* 49 pont; **45–46.** *Szabó Andrea*, *Zsbán Ambrus* 48 pont; **47.** *Morvai Krisztina* 47 pont; **48.** *Zsurkó Mátyás* 45 pont; **49–51.** *Iván Szilárd*, *Raikovich Tamás*, *Tolvaj Nóra* 44 pont; **52–53.** *Róna Péter*, *Spanczér Ilona* 43 pont; **54.** *Tardos Attila* 41 pont; **55–57.** *Bálint Vilmos*, *Kádár Cecília*, *Klacso János* 40 pont; **58–60.** *Barta Zsolt*, *Farkas Dóra*, *Pernek Ákos* 39 pont; **61.** *Kőrösi Attila* 38 pont; **62.** *Regula Gergely* 37 pont; **63–64.** *Beke Krisztina*, *Czeininger Zoltán* 36 pont; **65.** *Mult Attila* 35 pont; **66–68.** *Asztalos Gyula*, *Farkas Máté*, *Gyökeres Ágnes* 33 pont; **69–74.** *Berta Balázs*, *Kriesch Tamás*, *Seleljo Erzsébet*, *Sipos Szabó Eszter*, *Siska Ádám*, *Szintai Judit* 32 pont; **75–76.** *Farkas Melinda*, *Martinovic Boris* 31 pont; **77.** *Vadai Zsolt* 30 pont; **78–82.** *Hornung András*, *Iberpaker Péter*, *Keszi-Petik János*, *Kiss Gergely Péter*, *Szirmay Márta* 29 pont; **83–84.** *Tóth János*, *Varga Petra* 28 pont; **85.** *Bartha Ágnes* 27 pont; **86–87.** *Asztalos Márk*, *Szebelédi Csaba* 26 pont; **88–92.** *Komlós Gábor*, *Pajna Gabriella*, *Szente Dávid*, *Völgyi Krisztina*, *Zoltán Illés* 25 pont; **93–95.** *Czakó Péter*, *Kókai Zsuzsanna Luca*, *Madár Ivett* 24 pont; **96–98.** *Németh Norbert*, *Tímár Gábor*, *Varga Gábor* 23 pont; **99–103.** *Bertus-Barcza Tímea*, *Horváth Szabolcs*, *Izsák Andrea*, *Molnár Viktor*, *Varga Viktória* 22 pont; **104–108.** *Lestyán Gyula*, *Makk Péter*, *Szilágyi Örs*, *Vasas Éva Zsuzsanna*, *Zséger Ádám* 21 pont; **109–115.** *Bein Márton*, *Devecsery Ágnes*, *Leicht Zoltán*, *Molnár Tamás*, *Pilissy György*, *Szabó Tamás*, *Zámbó Virág* 20 pont.
Kevesebb pontja van 167 versenyzőnek.

12. osztályosok

1. *Ambrus Gergely* 104 pont; **2.** *Babos Attila* 100 pont; **3.** *Lovrics Anna* 97 pont; **4.** *Zalán Péter* 95 pont; **5.** *Nagy Tamás* 94 pont; **6.** *Pacz Bence Tamás* 92 pont; **7.** *Lovrics Klára* 91 pont; **8.** *Balka Richárd* 90 pont; **9–10.** *Andrássy Zoltán*, *Kármán Péter* 86 pont; **11.** *Pogátsa Attila* 81 pont; **12.** *Vajda Péter* 79 pont; **13.** *Deli Lajos* 76 pont; **14.** *Eördegh Péter* 74 pont; **15.** *Bakó Dániel* 72 pont; **16.** *Fehér Gergely* 68 pont; **17.** *Árvay Eszter* 67 pont; **18–20.** *Boros M. Mátyás*, *Szekeres András*, *Takács József* 66 pont; **21.** *Tóth Szilveszter* 64 pont; **22.** *Székelyhidi Tamás* 62 pont; **23.** *Fenyvesi Zsuzsanna* 61 pont; **24.** *Kisfügedi Viktória* 59 pont; **25–29.** *Bicskei László*, *Bohák András*, *Börcsök József*, *Legány Csaba*, *Soós Károly* 58 pont; **30.** *Imrefi József* 56 pont; **31–32.** *Király Attila*, *Siklósi Dávid* 51 pont; **33–35.** *Fekete Árpád*, *Kozma László*, *Nagy Gergely* 50 pont; **36.** *Veres Péter* 49 pont; **37.** *Körtvélyessy Csaba* 48 pont; **38.** *Vonnák Dzsamila* 45 pont; **39.** *Fodor Gyula* 44 pont; **40.** *Győző Miklós* 43 pont; **41.** *Vizer Tibor* 42 pont; **42–44.** *Simon Győző*, *Várkonyi Dániel*, *Wéber Zoltán* 40 pont; **45–46.** *Horváth Szilárd*, *Király Ferenc* 38 pont; **47.** *Enyedi Gábor* 36 pont; **48.** *Mitcsenkov Attila* 34 pont; **49–50.** *Makai Tamás*, *Medgyesi László* 33 pont; **51.** *Dőrr Zsuzsanna* 32 pont; **52.** *Reiczigel Zsófia* 30 pont; **53–54.** *Bartos Imre*, *Horváth Tamás* 29 pont; **55.** *Harcz Ádám* 28 pont; **56.** *Stépán József* 26 pont; **57.** *Kolláth Endre* 25 pont; **58–60.** *Darabos Andrea*, *Kolozsváry Georgina*, *Tokodi Tünde* 24 pont; **61–62.** *Mészáros Gergely*, *Nagy Dávid* 23 pont; **63–65.** *Rakamazi Richárd*, *Szabó Géza*, *Vona Gábor* 22 pont; **66–68.** *Baka Nóra*, *Bogatin György*, *Feró Dalma* 21 pont; **69–70.** *Ratatics Péter*, *Rév Tamás* 20 pont. Kevesebb pontja van 80 versenyzőnek.

C gyakorlatok

Az eddig feldolgozott feladatok: szeptembertől decemberig és a C. 610., 611., 612. A maximális elérhető pontszám: 105 pont.

Legfeljebb 10. osztályosok

1. *Birkner Tamás* 8. o.t. 115 pont; **2.** *Nyul Balázs* 10. o.t. 114 pont; **3–5.** *Fehér Ádám* 10. o.t., *Nagy Gábor* 10. o.t., *Sándor Nóra* 10. o.t. 113 pont; **6.** *Bérces Péter* 10. o.t. 112 pont; **7.** *Ruppert László* 10. o.t. 108 pont; **8.** *Simon Attila* 10. o.t. 106 pont; **9.** *Szilágyi Zoltán* 10. o.t. 104 pont; **10–12.** *Komáromi István* 8. o.t., *Nikházy Orsolya* 9. o.t., *Révész Dániel* 10. o.t. 102 pont; **13–15.** *Karches Tamás* 10. o.t., *Sali András* 8. o.t., *Sipka Bálint* 9. o.t. 101 pont; **16–17.** *Medvey Ádám* 9. o.t., *Szabó Botond* 9. o.t. 100 pont; **18–20.** *Rácz Miklós* 8. o.t., *Sándor Ágnes* 9. o.t., *Szabó Dávid* 9. o.t. 99 pont; **21–24.** *Lang Péter* 10. o.t., *Simon Balázs* 10. o.t., *Világi Dávid* 10. o.t., *Vincze Nándor* 10. o.t. 98 pont; **25–26.** *Vaskó Renáta* 9. o.t., *Wettl Márta* 10. o.t. 97 pont; **27.** *Penha Felizardo Renáta* 10. o.t. 96 pont; **28–32.** *Bartolits Dániel* 9. o.t., *Oláh Zsolt* 9. o.t., *Oltványi Gábor* 9. o.t., *Rendes Gábor* 10. o.t., *Szilágyi Péter* 9. o.t. 94 pont; **33–36.** *Csapó Tamás* 10. o.t., *Hajdú Huba* 10. o.t., *Kordás Tímea Beáta* 9. o.t., *Mándy Péter* 10. o.t. 93 pont; **37–39.** *Besenyei Balázs* 10. o.t., *Lakatos Szilvia* 10. o.t., *Sevecsek Zsuzsanna* 10. o.t. 92 pont; **40–44.** *Baráth Géza* 10. o.t., *Gyenese Péter* 10. o.t., *Nándori Péter* 9. o.t., *Salát Máté* 10. o.t., *Szalontay Lukács* 9. o.t. 90 pont; **45.** *Regős Gábor* 8. o.t. 89 pont; **46–51.** *Békefi Edina* 9. o.t., *Kiss Attila* 9. o.t., *Kórus Péter* 9. o.t., *Márton Zsuzsanna* 10. o.t., *Matyuska Ferenc* 9. o.t., *Sali Dániel* 8. o.t. 88 pont; **52–54.** *Balogh Viktor* 10. o.t., *Rückert Péter* 10. o.t., *Szűcs Mónika* 10. o.t. 87 pont; **55–57.** *Fehér Borbála* 10. o.t., *Tölgyesi Csaba* 10. o.t., *Vehovszky Balázs* 10. o.t. 86 pont; **58–59.** *Herczeg Lynda* 10. o.t., *Pinczehelyi Tamás* 10. o.t. 84 pont; **60–62.** *Metzing András* 10. o.t., *Németh Márk* 9. o.t., *Sántha Katalin* 10. o.t. 83 pont; **63–67.** *Balán Gábor* 10. o.t., *Grósz Krisztina* 10. o.t., *Krivosija Zoltán* 10. o.t., *Papp Gábor* 9. o.t., *Sipos Kinga* 10. o.t. 82 pont; **68–71.** *Horváth András* 9. o.t., *Nemeskéri Tamás* 10. o.t., *Szalay Gergely* 10. o.t., *Varga Réka* 10. o.t. 80 pont; **72–75.** *Csekő Anna* 10. o.t., *Sáfár Simon* 9. o.t., *Tuska Gábor* 9. o.t., *Vass Márton* 8. o.t. 79 pont; **76–82.** *Gál András* 10. o.t., *Horváth Brigitta* 8. o.t., *Kincses Lilla* 9. o.t., *Márton Szabolcs* 10. o.t., *Sipőcz Éva* 10. o.t., *Szabó-Bálint Zoltán* 10. o.t., *Szabó Kinga* 10. o.t. 78 pont; **83–87.** *Elter Csaba* 9. o.t., *Homoki Kata* 9. o.t., *Nemes Katalin* 9. o.t., *Sipőcz Eszter* 9. o.t., *Varga Márta* 10. o.t. 77 pont; **88–91.** *Megyesi Balázs* 9. o.t., *Németh Bálint* 10. o.t., *Szücs András* 10. o.t., *Tar Orsolya* 10. o.t. 76 pont; **92–96.** *Borbás Péter* 9. o.t., *Fülöp Anita* 10. o.t., *Katona András* 9. o.t., *Márton Noémi Petra* 10. o.t., *Szabó Balázs*

9. o.t. 75 pont; **97–99.** *Gőbölös Márton* 10. o.t., *Padányi Balázs* 9. o.t., *Szrnka Éva* 10. o.t. 74 pont; **100–101.** *Sápi Csilla* 10. o.t., *Tollner Dávid* 10. o.t. 73 pont; **102–105.** *Dombai Balázs* 10. o.t., *Lengyel Tímea* 9. o.t., *Ollár Mariann* 9. o.t., *Rátkai András* 8. o.t. 72 pont; **106–107.** *Kormos Attila* 10. o.t., *Varga Bálint* 9. o.t. 70 pont; **108–109.** *Molnár László* 10. o.t., *Török Zoltán Bálint* 9. o.t. 69 pont; **110–116.** *Baku György* 8. o.t., *Hegyi Gábor* 9. o.t., *Horváth Viktória* 9. o.t., *Kutasi Dávid* 9. o.t., *Lux András* 9. o.t., *Sipos Gábor* 10. o.t., *Virág Éva* 10. o.t. 68 pont; **117–123.** *Bartakovics Zoltán* 10. o.t., *Béky Zsófia* 9. o.t., *Bokor Mihály* 10. o.t., *Caimacan Dávid* 9. o.t., *Illés Balázs* 9. o.t., *Reiss Tibor* 10. o.t., *Wacha András Ferenc* 10. o.t. 67 pont; **124–130.** *Benyó Edina* 9. o.t., *Füle Orsolya* 10. o.t., *Karlik Zsuzsanna* 10. o.t., *Komáromy Dávid* 10. o.t., *Korai Szabolcs* 10. o.t., *Kovács Tamás* 9. o.t., *Török Sándor Miklós* 10. o.t. 66 pont; **131.** *Lengyel Krisztina* 10. o.t. 65 pont; **132–137.** *Ásványi Vera* 8. o.t., *Hudáky Zsuzsanna* 9. o.t., *Kocsis Szilveszter* 8. o.t., *Mukli Péter* 9. o.t., *Sarkadi Csaba* 9. o.t., *Simon Péter* 9. o.t. 64 pont; **138–143.** *Antal László* 9. o.t., *Beringer Dorottya* 8. o.t., *Breitenstein Csaba* 9. o.t., *Csige Tamás* 9. o.t., *Hotzi Bernadette* 7. o.t., *Német Balázs* 9. o.t. 63 pont; **144.** *Szőke Edina* 9. o.t. 62 pont; **145–148.** *Belles Gellért* 10. o.t., *Darányi Dóra* 9. o.t., *Gáspár Orsolya* 10. o.t., *Kövecses Dóra* 10. o.t. 61 pont; **149–155.** *Boros Gergő* 8. o.t., *Csizmadia Péter* 9. o.t., *Fehér Gábor* 10. o.t., *Ferenci Tamás* 9. o.t., *Kárpáti Péter* 9. o.t., *Kriván Eszter* 9. o.t., *Raikovich Márton* 8. o.t. 60 pont; **156–158.** *Bánfi László* 9. o.t., *Németh Bertalan* 8. o.t., *Pohankovics András* 10. o.t. 59 pont; **159–163.** *Dőry Zsófia* 8. o.t., *Kis László* 10. o.t., *Mayer Péter* 9. o.t., *Oroszi Gyöngyi* 9. o.t., *Szabó Tamás* 8. o.t. 58 pont; **164–169.** *Bácsi Ádám* 9. o.t., *Bárkai János* 10. o.t., *Gyovai Krisztina* 10. o.t., *Kollár Edina* 9. o.t., *Makó Imre* 9. o.t., *Vörös Gergő* 10. o.t. 57 pont; **170–172.** *Fábián Máté* 9. o.t., *Törzsök Gyula* 10. o.t., *Wyszoczky Gábor* 9. o.t. 56 pont; **173–178.** *György András* 9. o.t., *Kiss-Dózsai Ákos* 9. o.t., *Koncsek Sándor* 10. o.t., *Nagy Ildikó* 9. o.t., *Novák Zsófia* 9. o.t., *Petrás Attila* 10. o.t. 55 pont; **179–185.** *Aspirán Katalin* 8. o.t., *Éliás Gergely* 10. o.t., *Fehér Zoltán* 9. o.t., *Király Csaba* 8. o.t., *Salgó László* 9. o.t., *Strobl Hajnalka* 10. o.t., *Udvari Balázs* 7. o.t. 54 pont; **186–191.** *Dezső Dóra* 9. o.t., *Földényi Miklós* 8. o.t., *Hóbor Fruzsina* 10. o.t., *Magony Krisztina* 9. o.t., *Piczil Balázs* 9. o.t., *Szabó Zoltán* 10. o.t. 53 pont; **192–199.** *Balogh József* 10. o.t., *Biri Bernadett* 9. o.t., *Bíró Zoltán* 10. o.t., *Kovács Attila* 10. o.t., *Ozsváth Berta* 10. o.t., *Sümegi Edina* 9. o.t., *Szirom Zoltán* 10. o.t., *Vakulya Gergely* 10. o.t. 52 pont; **200–207.** *Baráth Gellért* 10. o.t., *Bednay Dezső* 9. o.t., *Fülöp István* 10. o.t., *Illés Balázs* 9. o.t., *Klár Tamás* 10. o.t., *Makai Andrea* 10. o.t., *Tassy Gergely* 8. o.t., *Zsigmond Anna* 9. o.t. 51 pont; **208–212.** *Kulcsár Katalin* 10. o.t., *Lakatos Péter* 9. o.t., *Nagy Tamás* 9. o.t., *Sziklási Béla* 9. o.t., *Urbán Andrea* 10. o.t. 50 pont; **213–218.** *Berényi Sándor* 9. o.t., *Biró Szabolcs* 9. o.t., *Horváth Zsolt* 8. o.t., *Magyar Attila* 9. o.t., *Mátis Gábor* 9. o.t., *Vértesy Éva* 9. o.t. 49 pont; **219–227.** *Boros Benedek* 9. o.t., *Geiger Adél* 9. o.t., *Horváth Csaba* 9. o.t., *Kovács Gergely* 9. o.t., *Márk Ágnes* 10. o.t., *Miklós Katalin* 10. o.t., *Pluhár Gabriella* 10. o.t., *Soós Gábor* 10. o.t., *Tóth Gergely* 10. o.t. 48 pont; **228–232.** *Andrásik Miklós* 10. o.t., *Buza Ágnes Kinga* 9. o.t., *Novotny Tamás* 9. o.t., *Rauscher Anna* 10. o.t., *Zákány Máté* 10. o.t. 47 pont; **233–238.** *Bedő Anett* 10. o.t., *Fancsali Dániel* 10. o.t., *Max György* 8. o.t., *Micskó Anna* 9. o.t., *Szemán Éva* 9. o.t., *Szűr Árpád* 10. o.t. 46 pont; **239–243.** *Borsódi Éva* 10. o.t., *Dombi Nóra* 10. o.t., *Harangozó Péter* 9. o.t., *Nagy András* 10. o.t., *Peskó Gergely* 9. o.t. 45 pont.
Kevesebb pontja van 611 versenyzőnek.

11–12. osztályosok

1–2. *Deli Lajos* 12. o.t., *Erdei Zsuzsa* 11. o.t. 110 pont; **3–4.** *Csáky Attila* 11. o.t., *Szekeres András* 12. o.t. 108 pont; **5.** *Kármán Péter* 12. o.t. 107 pont; **6.** *Árvay Eszter* 12. o.t. 106 pont; **7.** *Takács Gergő* 11. o.t. 103 pont; **8.** *Horváth Bertalan* 12. o.t. 101

pont; **9–11.** *Farkas Dóra* 11. o.t., *Horváth Ágnes* 11. o.t., *Kolláth Endre* 12. o.t. 100 pont; **12.** *Rischák Rózsa* 11. o.t. 98 pont; **13–15.** *Ásványi Katalin* 11. o.t., *Baur Eszter* 11. o.t., *Papp Gábor* 11. o.t. 97 pont; **16–17.** *Legány Csaba* 12. o.t., *Végh Anita* 12. o.t. 96 pont; **18.** *Kádár Cecília* 11. o.t. 95 pont; **19.** *Raffai Péter* 12. o.t. 94 pont; **20–21.** *Kőszegi Katalin Adrienn* 12. o.t., *Szintai Balázs* 12. o.t. 93 pont; **22.** *Reményi Zsolt* 12. o.t. 92 pont; **23.** *Monostori Eszter* 12. o.t. 91 pont; **24.** *Germán Tibor* 12. o.t. 90 pont; **25.** *Pajna Gabriella* 11. o.t. 88 pont; **26–28.** *Kisfügedi Viktória* 12. o.t., *Soós Károly* 12. o.t., *Steiner Attila* 12. o.t. 87 pont; **29–30.** *Medgyesi László* 12. o.t., *Székelyhidi Zsolt* 11. o.t. 85 pont; **31.** *Taksonyi Rita* 11. o.t. 84 pont; **32.** *Jónás Ivett* 11. o.t. 82 pont; **33–36.** *Dörnyei Renáta* 11. o.t., *Lelovics András* 11. o.t., *Nagy Judit* 11. o.t., *Tóth Georgina Zsófia* 11. o.t. 81 pont; **37–38.** *Pál Zsófia* 11. o.t., *Szirmay Márta* 11. o.t. 79 pont; **39.** *Bács Boglárka* 11. o.t. 78 pont; **40.** *Rév Tamás* 12. o.t. 76 pont; **41–42.** *Nagy Dávid* 12. o.t., *Sánta János* 11. o.t. 74 pont; **43–49.** *Bartha Ágnes* 11. o.t., *Csicsai Roland* 11. o.t., *Jáger Viktor* 11. o.t., *Mitcsenkov Attila* 12. o.t., *Németh Andrea* 11. o.t., *Poór Gergő* 11. o.t., *Szintai Judit* 11. o.t. 73 pont; **50–51.** *Agócs Angéla* 11. o.t., *Sásdy Gabriella* 11. o.t. 71 pont; **52.** *Szabó Zsolt* 11. o.t. 68 pont; **53–54.** *Fodor Zsuzsa* 11. o.t., *Varga Áron* 11. o.t. 66 pont; **55–56.** *Flaskár Anett* 11. o.t., *Juhász Gábor* 11. o.t. 64 pont; **57–58.** *Avramucz György* 11. o.t., *Péics Berkes Lóránt* 12. o.t. 63 pont; **59–61.** *Saly Miklós* 12. o.t., *Szanyi Gyöngyvér* 11. o.t., *Turai Péter* 11. o.t. 62 pont; **62–66.** *Burai Csilla* 11. o.t., *Fenyvesi Zsuzsanna* 12. o.t., *Gyócsi Péter* 11. o.t., *Pszota Zsolt* 11. o.t., *Szilágyi Örs* 11. o.t. 61 pont; **67–70.** *András Anikó* 12. o.t., *Hegedűs Ferenc* 11. o.t., *Nyolczas Viktor* 11. o.t., *Wéner Balázs* 12. o.t. 60 pont; **71.** *Nieder Szabolcs* 12. o.t. 59 pont; **72–75.** *Béhm A. Diana* 12. o.t., *Béla Szilvia* 11. o.t., *Janó Edit* 12. o.t., *Vasas Éva Zsuzsanna* 11. o.t. 58 pont; **76–77.** *Havran Zsolt* 11. o.t., *Rakamazi Richárd* 12. o.t. 56 pont; **78–79.** *Lajtai Péter* 11. o.t., *Papp Katalin* 11. o.t. 55 pont; **80–83.** *Cseke Péter* 11. o.t., *Hernádi Zsuzsanna* 11. o.t., *Martinovic Boris* 11. o.t., *Széles Ildikó* 12. o.t. 54 pont; **84–86.** *Juhász Sándor* 11. o.t., *Markó Péter* 11. o.t., *Várnai Tímea* 11. o.t. 53 pont; **87–90.** *Bóta Gergely* 11. o.t., *Czirják István* 12. o.t., *Domonkos Brigitta* 12. o.t., *Dömötör Piroska* 12. o.t. 52 pont; **91–94.** *Buthi Irma* 11. o.t., *Hajdú János* 11. o.t., *Papp András* 12. o.t., *Völgyi Krisztina* 11. o.t. 51 pont; **95–99.** *Berényi Amarilla* 11. o.t., *Fekete Zsolt* 12. o.t., *Kamondi Krisztina* 12. o.t., *Sándor Attila* 12. o.t., *Ugra Dániel* 11. o.t. 50 pont; **100–102.** *Gaál Zsófia* 11. o.t., *Nagy Péter* 12. o.t., *Várnai Csilla* 11. o.t. 49 pont; **103.** *Kamarás Csaba* 11. o.t. 48 pont; **104–105.** *Baski Attila* 12. o.t., *Varga Zoltán* 12. o.t. 47 pont; **106–107.** *Garai Tamás* 12. o.t., *Takács András* 11. o.t. 46 pont; **108.** *Varga Petra* 11. o.t. 45 pont.
Kevesebb pontja van 275 versenyzőnek.

Niccolo Fontana (más néven Tartaglia) számolómester egy versenyfeladatáról

Niccolo Fontana 1499-ben született az itáliai Brescia városában. Egy szegény lovasküldönc fia, édesapját hatéves korában elveszti, s így árvaságra jut. 1512-ben a Brescia városában fosztogató és gyilkoló francia zsoldosok elől a nők és a gyerekek egy templomba menekültek. Ide menekült Niccolo fiúcska is az édesanyjával. Azt hitték, hogy a templomban menedéket lelnek, de a söpredék a templomba is betört, és kegyetlenül kaszabolta, öldöste az ott levő nőket és gyermekeket. Így kapott a kisfiú is több kardvágást, amelyek egyike az arcát érve felhasította a száját. A gyermek túlélte a vérengzést, de ettől fogva nehezen beszélt, hebegett. Kortársai ezért ragasztották rá a *Tartaglia* (dadogó) csúfnevet. Ez annyira megragadt rajta, hogy a matematikatörténet ma is gyakran így emlegeti. A nálunk Pascal-háromszög néven ismert elrendezést például az olasz iskolákban mind a mai napig Tartaglia háromszögének nevezik.

Niccolo Fontana (Tartaglia)

Nem kapott rendszeres iskolai képzést, édesanyjának csak arra telt, hogy fiát 14 éves korában 15 napig járassa iskolába. De Fontana 23 éves korában már matematikával kereste a kenyerét. Önállóan tanulta a matematikát és a latint, amely a tudomány nemzetközi nyelve volt. Számolómesterként pedig a hozzá forduló iparosok, építészek és kereskedők gyakorlati számítási problémáit oldotta meg, és így legalább akkora hírnév és megbecsülés övezte, mintha egyetemi katedrája lett volna.

A matematikatörténetbe Fontana a harmadfokú egyenlet általános megoldási módszerének – egyik – fölfedezőjeként írta be a nevét.

Úgy tűnik, hogy először *Scipione del Ferro* (1465–1526) bolognai matematikus találta meg a harmadfokú egyenletek egy csoportjának az általános megoldási eljárását 1515 körül ([6] 172. old.). Ő az $x^3+b\cdot x=c$ $(b>0,\ c>0)$ alakú egyenletek megoldási eljárását fedezte fel. (Az ilyen, $x^3+b\cdot x=c$ $(b>0,\ c>0)$ harmadfokú egyenletet nevezték del Ferro típusú egyenletnek.) Titkát sokáig megtartotta, csak halála előtt nem sokkal árulta el vejének, *Annibale della Nave* professzornak, aki az utóda lett a bolognai egyetemen, ezenkívül a bresciai *Antonio Maria Fiore* professzortársával közölte a megoldóképletet.

Akkoriban divatos volt a „matematikai párbaj”. A másik problémáit igyekezett a két résztvevő megoldani a tudomány, saját maguk és párfogóik nagyobb dicsőségére. A győztes hírneve nőtt, de a vesztes sem bűnhődött túl szigorúan; följegyezték a krónikák, hogy egy esetben például vendégül kellett látnia a győztest és annak 29 barátját. Érthető, hogy a harmadfokú egyenlet megoldásának ismerete az ilyen párbajok során szinte legyőzhetetlenné tette a titok tudóját.

Általunk most nem tárgyalt előzmények után 1535-ben del Ferro módszerének ismeretében Antonio Maria Fiore egyetemi professzor matematikai párbajra hívta ki *Tartaglia* számolómestert. Tartaglia tudta, hogy Fiore ismeri az $x^3+b\cdot x=c$ típusú harmadfokú egyenlet megoldóképletét, így arra számított, hogy ellenfele neki is ilyen típusú problémákat tűz majd ki. Ezért gőzerővel látott neki a kutatásnak, és az 1535. február 13-ra virradó éjszaka meg is találta az említett típusú harmadfokú egyenletek megoldásának titkát, néhány nap múlva pedig az $x^3=b\cdot x+c$ $(b>0,\ c>0)$ típusúakét is.

A Nagy Matematikaverseny 1535. február 22-én zajlott le. Tartaglia két óra alatt megoldotta Fiore valamennyi problémáját, aki viszont egyetlen eggyel sem boldogult ellenfele problémái közül. Így az iskolázatlan számolómester legyőzte kihívóját, az egyetemi professzort, aki ráadásul nem is maga fedezte fel azt a képletet, amit tudott, hanem Scipione del Ferro professzortól tanulta.

Valószínűleg az történhetett, hogy Fiore $x^3+b\cdot x=c$ típusú egyenleteket tűzött ki, míg Tartaglia $x^3=b\cdot x+c$ (b, $c>0$) típusú egyenleteket adott fel a professzornak. Ő mindkét változattal elboldogult, míg Fiore csak a saját maga által kitűzött típussal. Ezt erősíti meg a skóciai Szent András Egyetem matematikatörténeti adatbázisa is a Tartaglia címszónál [7]. Érdekes lenne megtudni a Nagy Matematikaverseny problémáit, de arról nem hallottam, hogy ezek fönnmaradtak volna.

A történet folytatását *Sain Márton:* Nincs királyi út c. könyvében [1] olvashatjuk. Megemlítjük azért, hogy a harmadfokú egyenlet általános megoldóképletét sem Ferroról, sem Tartagliaról, hanem *Girolamo Cardano-ról* (1501–1576) nevezték el. Ő a Tartagliatól megtudott megoldóképletet nem tartotta tovább titokban, hanem *Ars magna sive de regulis algebraicis* (A nagy tudomány, azaz az algebra törvényeiről) című, 1545-ben Nürnbergben megjelent művében közzétette az eredményt. Becsületesen leírja könyvében, hogy a harmadfokú egyenlet megoldóképletét ő Tartagliatól hallotta.

Girolamo Cardano

A harmadfokú egyenlet olyan alakja, amely az $x^3+b\cdot x=c$, $x^3=b\cdot x+c$ és $x^3+c=b\cdot x$ (b, $c>0$) egyenleteket egyaránt magában foglalja:

$$x^3+px+q=0.$$

(p, q tetszőleges valós számok.) A Cardano-formula ismert alakja:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

A del Ferro által megoldott eset pozitív p-nek és negatív q-nak felel meg.

Jól látható, hogy a jelentéktelennek tűnő különbség, a negatív p esete miért okozhatott megoldhatatlannak látszó nehézséget: az $x^3-x=0$ egyenletre (gyökei nyilvánvaló szorzattá alakítás után -1, 0, 1) alkalmazva például a titokzatos

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}}$$

alak adódik, és a kortársak nem nagyon tudtak mit kezdeni a negatív számok rejtélyes négyzetgyökével.

Ha nem is tudjuk felidézni a Nagy Matematikaverseny példáit, azért megvizsgáljuk Tartaglia számolómester egy fennmaradt versenypéldáját. Azért nevezem versenypéldának, mert könnyen elképzelhető, hogy Tartaglia a versenyen is tűzött ki hasonló jellegű problémát.

Osszuk fel a 8*-at két részre úgy, hogy e két résznek és a részek különbségének a szorzata maximális legyen.*

Tartaglia a megoldás módszerét szokásához híven titokban tartotta, és csak a végeredményt közölte: *A két rész különbségének négyzete legyen egyenlő a* 8 *fél része négyzetének és ennek a harmadának összegével.*

Ez kissé lakonikus feleletnek tűnik, ezért a problémát és Tartaglia válaszát is lefordítjuk az algebra nyelvére.

A Tartaglia-probléma algebrai jelölésekkel: *Keressük az a és b pozitív számokat, amelyekre $a+b=8$, és az $a\cdot b\cdot(a-b)$ szorzat maximális.* Maximum[1] esetén nyilván $a>b$.

Tartaglia válasza algebrai jelölésekkel: *az a és b olyan számok, amelyekre $a+b=8$ mellett az is teljesül, hogy*

$$(a-b)^2=\left(\frac{8}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{8}{2}\right)^2.$$

Tehát $(a-b)^2=\dfrac{64}{3}$ és így $\left.\begin{aligned} a-b&=\frac{8}{\sqrt{3}},\\ a+b&=8.\end{aligned}\right\}$ Innen $a=4+\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ és $b=4-\dfrac{4}{\sqrt{3}}$. Tartaglia azt állította, hogy $a+b=8$ esetén az $a=4+\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ és $b=4-\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ számokra lesz maximális az $a\cdot b\cdot(a-b)$ szorzat. Mindenesetre meglepődhettek azok, akikkel csupán így közölte Tartaglia a választ. Hogyan tudták ellenőrizni, hogy jó-e az eredmény? Ezt nem tudom, de arra lehet gondolni, hogy miután nem tudtak olyan a, b számpárt mondani, amelyre nagyobb lett volna az $a\cdot b\cdot(a-b)$ szorzat, mint a Tartaglia számpárjánál adódó $\dfrac{256\sqrt{3}}{3}$, elfogadták a választ. Tartaglia végeredménye valóban helyes, és ezt fogjuk a továbbiakban bebizonyítani.

Próbáljuk meg rekonstruálni Tartaglia eljárását. Vezessük be ismeretlenként a két rész különbségét: $x=a-b$ $(a>b)$. Ekkor, figyelembe véve, hogy $a+b=8$,

$$a=\frac{8+x}{2} \qquad \text{és} \qquad b=\frac{8-x}{2}.$$

Így a következő függvény maximumát kell meghatároznunk:

$$f(x)=(a-b)\cdot a\cdot b=x\cdot\frac{8+x}{2}\cdot\frac{8-x}{2}=\frac{64x-x^3}{4},$$

ha $8>x>0$.

Ma már a legtöbb érettségiző meg tudja oldani a feladatot (ha tanult deriválni), de a differenciálszámítást több, mint 150 évvel később fedezte föl Newton és Leibniz. Nézzük, hogyan gondolkodhatott Tartaglia a harmadfokú egyenletek tudósaként.

Jelöljük M-mel az f függvény maximumát a bővebb $x>0$ halmazon. Ekkor arra az x-re, amelyre a függvény felveszi a maximumát fennáll, hogy

$$x\cdot\frac{8+x}{2}\cdot\frac{8-x}{2}=M.$$

[1] A kor matematikájában – és még vagy 200 évig – az ilyen típusú, főleg gyakorlati eredetű szélsőérték problémáknál egyáltalán nem vetődött föl, hogy létezik-e a szóban forgó maximum.

Ezt rendezve az

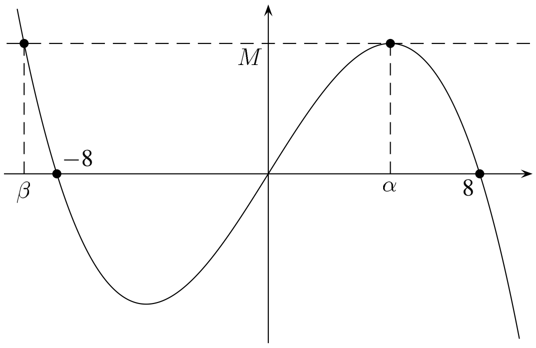
$$x^3 - 64 \cdot x + 4 \cdot M = 0$$

harmadfokú egyenletet kapjuk, és ennek az egyenletnek gyöke a maximumot szolgáltató x.

Azt a legnagyobb M értéket keressük, amelyre a

$$\frac{64x - x^3}{4} = M$$

egyenletnek van pozitív gyöke. Bár Tartaglia idejében – és még többszáz évig – nem beszéltek függvényekről, és nem rajzoltak grafikonokat, mi fölrajzoljuk az



$$y = \frac{64x - x^3}{4}$$

függvény grafikonját, hogy lássuk azt, amit ő nyilván egészen más módon látott át.

A keresett M értékre mindenesetre az

$$x^3 - 64x + 4M = 0$$

egyenletnek két gyöke van, egy pozitív, α és egy negatív, β. Az $x^3 + px + q = 0$ típusú egyenletek szakértőjeként pedig Tartaglia tudhatta, hogy ha az egyenletnek két gyöke van – ma úgy mondanánk, hogy α kétszeres gyök –, akkor a Cardano-formulában a négyzetgyök alatt álló

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

mennyiség értéke 0.

Most $p = -64$, $q = 4M$, és így a

$$4M^2 - \left(\frac{64}{3}\right)^3 = 0$$

összefüggésből $M > 0$ miatt $M = \dfrac{256\sqrt{3}}{3}$, ez tehát a maximum értéke, az egyenlet pedig

(1) $$x^3 - 64x + \frac{1024\sqrt{3}}{3} = 0.$$

A Cardano-formula az egyenlet – egyik – gyökét is kiszámolja: most $x = 2\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}} = -2\sqrt[3]{2M} = -\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$. Láthatjuk – például a grafikonról –, hogy ez az egyszeres β gyök.

Egy harmadfokú egyenlet egy gyökét ismerve viszont kiemelhetjük a megfelelő elsőfokú gyöktényezőt:

$$x^3 - 64x + \frac{1024\sqrt{3}}{3} = \left(x + \frac{16\sqrt{3}}{3}\right)\left(x^2 - \frac{16\sqrt{3}}{3}x + \frac{64}{3}\right) = \left(x + \frac{16\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2,$$

vagy a csak 1540-ben megszülető Viète-ről elnevezett formulákra hivatkozva megállapíthajtuk, hogy az $x^3 + px + q = 0$ típusú egyenlet gyökeinek az összege 0, és így $2\alpha + \beta = 0$, $2\alpha - \frac{16\sqrt{3}}{3} = 0$.

Hogy Tartaglia így okoskodott-e vagy másképp, nem tudhatjuk. Egy bizonyos értelemben sokkal többet kellett tudnia, hiszen a Nagy Matematikaverseny problémáit megoldva abban az esetben is elő tudta állítani a harmadfokú egyenlet gyökeit, amikor, mint az idézett példában, negatív szám volt a négyzetgyök alatt. Így, úgy, vagy másképpen, de a keresett

$$x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

értékhez már hozzá tudott férni. Innen pedig $a = 4 + \frac{x}{2} = 4 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $b = 4 - \frac{4\sqrt{3}}{3}$, és valóban: $(a-b)^2 = x^2 = \frac{8^2}{3} = 4^2 + \frac{4^2}{3}$.

Az eredmény Tartagliatól származó formája azt látszik sugallni, hogy ő talán $(a-b)^2$ értékét határozta meg az $a + b = 8$; $ab(a-b) = M = \frac{256\sqrt{3}}{3}$ feltételből. Erre azonban nem látszik közvetlen út.

Befejezésül nézzük meg, hogy egy mai diák hogyan oldhatná meg elemi úton Tartaglia feladatát.

Az $f(x) = x \cdot \frac{8+x}{2} \cdot \frac{8-x}{2}$-ben három kifejezés szorzatát láthatjuk, és erről esetleg eszünkbe juthat a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség három számra fennálló alakja. Mint tudjuk, $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$ minden nemnegatív a_1, a_2 és a_3 valós számra, és itt pontosan akkor van egyenlőség, ha $a_1 = a_2 = a_3$.

Ezzel közvetlenül nem sokra mennénk, mert ekkor

$$\frac{x + \frac{8-x}{2} + \frac{8+x}{2}}{3} \geq \sqrt[3]{x \cdot \frac{8-x}{2} \cdot \frac{8+x}{2}},$$

$$\frac{x+8}{3} \geq \sqrt[3]{x \cdot \frac{8-x}{2} \cdot \frac{8+x}{2}}.$$

Az egyenlőtlenség természetesen igaz, de bal oldalon is változót tartalmazó kifejezés áll, így nem mutatja a jobb oldal maximumát. Arra kellene törekedni, hogy a bal oldalon konstans álljon.

Az f függvénynek pontosan ugyanazon x helyen van maximuma, mint az f^2 függvénynek, hiszen $0 \le x \le 8$ esetén az f függvény nemnegatív. Emeljük tehát négyzetre f-et.

$$f^2(x) = \frac{x^2 \cdot (64 - x^2)^2}{16}, \qquad \text{azaz} \qquad 16 \cdot f^2(x) = x^2 \cdot (64 - x^2) \cdot (64 - x^2).$$

Innen láthatjuk, hogy ha 2-vel megszorozzuk az egyenletet, akkor a jobb oldali három tényező összegében már kiesik az x változó.

$$32 f^2(x) = 2x^2(64 - x^2)(64 - x^2).$$

Ha most alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget a $2x^2$, $64 - x^2$, $64 - x^2$ számokra, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{2x^2 + (64 - x^2) + (64 - x^2)}{3} \ge \sqrt[3]{2x^2(64 - x^2)(64 - x^2)},$$
$$\frac{128}{3} \ge \sqrt[3]{32 \cdot f^2(x)}.$$

Innen

$$\frac{8^3}{6 \cdot \sqrt{3}} \ge f(x),$$

az f maximuma $x > 0$ esetén:

$$f_{\max} = \frac{8^3}{6 \cdot \sqrt{3}}.$$

Meg kell határoznunk még, hogy milyen x-re veszi fel az f függvény a maximumát.

Az $f(x)$-re kapott egyenlőtlenségben pontosan akkor áll egyenlőség, amikor a számtani közép egyenlő a mértani középpel. Ez, mint tudjuk, akkor és csak akkor teljesül, ha a három szám egyenlő egymással. Vagyis:

$$2x^2 = 64 - x^2 = 64 - x^2.$$

Ebből $x^2 = \frac{64}{3}$, tehát $x = \sqrt{\frac{64}{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}}$ (hiszen $x \ge 0$). Így az

$$a - b = x = \frac{8}{\sqrt{3}},$$
$$a + b = 8$$

kétismeretlenes egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy

$$a = 4 + \frac{4}{\sqrt{3}}, \qquad b = 4 - \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Tehát ezekre a számokra lesz maximális a vizsgált szorzat, amint azt már az előbb is láttuk.

Feladatok

1. Oldjuk meg a Tartaglia-problémát kissé általánosabban: tekintsük a pozitív S számot, és ezt bontsuk fel két olyan a és b pozitív szám összegére, amelyekre maximális lesz az $a \cdot b \cdot (a - b)$ szorzat!

2. Írjunk adott R sugarú gömbbe maximális térfogatú hengert!

Johannes Kepler (1571–1630) nagy német csillagász alighanem az 1615-ben megjelent *Stereometria doliorum vinorum* (A boroshordók térmértana) című művében foglalkozott ezzel a problémával. A probléma szoros kapcsolatban van a Tartaglia feladattal, és lényegében hasonló módon oldható meg.

Irodalom

[1] *Sain Márton:* Nincs királyi út! Matematikatörténet, Gondolat, Budapest, 1986.

[2] *Sain Márton:* Matematikatörténeti ABC (5., átdolgozott és bővített kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.

[3] *Struik, Dirk, J.:* A matematika rövid története, Gondolat, Budapest, 1958.

[4] *Tikhomirov, Vladimir, M.:* Stories about Maxima and Minima, *American Mathematical Society,* 1990. Mathematical Association of America, 1990.

[5] *Freud Róbert* (szerk): Nagy pillanatok a matematika történetében, Gondolat, Budapest, 1981. 2. fejezet.

[6] *Eves, Howard:* Great Moments in Mathematics (Before 1650), Mathematical Association of America, 1980, Lecture 16.

[7] `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians`

Érdekes regény: *John Banville:* Kepler, Európa Könyvkiadó, Budapest, 1963.

Csete Lajos, Markotabödöge

Beszámoló a 12. Gillis–Turán matematikaversenyről

Ez év március 29. és április 5. között került sor, ezúttal Budapesten, immár a tizenkettedik alkalommal az izraeli és magyar diákok közötti matematikaversenyre. A két országot, most először, hattagú csapatok képviselték. A magyar csapat tagjai a következők voltak:

Csikvári Péter	11. évf.	(Fővárosi Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium);
Csóka Endre	10. évf.	(Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen);
Harangi Viktor	11. évf.	(Fővárosi Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium);
Horváth Illés	11. évf.	(Fővárosi Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium);
Vizer Tibor	12. évf.	(Révai Miklós Gimnázium, Győr);
Vörös László	12. évf.	(Piarista Gimnázium, Kecskemét).

A verseny első két napján a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák lebonyolítása szerint három-három feladattal kellett megbirkózniuk a versenyzőknek. Mindkét napon

4,5 óra gondolkodási idő állt rendelkezésre és az egyes feladatok kifogástalan megoldásával 7-7 pontot lehetett szerezni. A feladatsor meglehetősen nehéznek bizonyult, a legnehezebb, hatodik feladatra nem érkezett teljes megoldás.

A legjobb eredményt *Ran Tessler* izraeli diák érte el 38 ponttal. A magyar versenyzők teljesítménye a következőképpen alakult: *Csóka Endre:* 37 pont; *Csikvári Péter:* 31 pont; *Harangi Viktor:* 30 pont; *Vörös László:* 27 pont; *Horváth Illés:* 12 pont; *Vizer Tibor:* 11 pont.

Bár a verseny egyéni volt, természetesen kiszámoltuk a két csapat összpontszámát: eszerint, akárcsak az egyéni versenyben, a vendégek egyetlen ponttal bár, de megelőzték a magyar csapatot.

A harmadik napon a hagyományos csapatversenyre került sor. A téma, amit egy hónappal korábban megkaptak a felkészülő diákok, a verseny magyar névadója, *Turán Pál* tiszteletére a következő volt: *Extremális gráfok és Turán típusú tételek.* A csapatverseny feladatsorát *Simonovits Miklós,* a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet tudományos tanácsadója állította össze. A kitűnően felkészült csapatok lényegében valamennyi feladatot megoldották.

Az utolsó oldalon a versenyen készült fényképek láthatók.

A továbbiakban a verseny magyar résztvevőinek beszámolóját közöljük: hogyan látták ők ezt a néhány napot.

❄

A budapesti Lauder Javne iskola volt a vendéglátója az idei találkozónak, amely szokás szerint a kétnapos egyéni versennyel kezdődött 2001. március 30-án, pénteken. Külön kihívás volt számunkra, hogy a sabbath, a zsidó szombat miatt a második versenynapot csak naplemente után kezdhettük. Így mi este 6 órakor, az izraeliek pedig 8-kor vágtak neki a 4 és fél órás versenynek. Meglehetősen nehéz volt végig koncentrálni.

Másnap a kiránduláson pihenhettük ki a fáradalmakat. Fogaskerekűvel felmentünk a János-hegyre, ahol a kilátóból megcsodálhattuk Budapest látképét, majd lelibegőztünk. Ekkor adódott először lehetőségünk arra, hogy megismerkedjünk az izraeli diákokkal.

A hétfői csapatverseny kellemes légkörben telt el – ennek az eredménye ugyanis nem számított bele a két egyéni dolgozat értékelésébe. A feladatok is könnyebbnek bizonyultak, csupán a 2. feladatot nem oldotta meg az összes csapat.

Kedden délelőtt két előadást hallgattunk meg angol nyelven; az izraeliek kísérőtanárát, majd *Simonovits Miklóst,* a csapatverseny feladatainak összeállítóját. Ezután a díszebéden belekóstolhattunk a kóser konyhaművészetbe. Lehetőségünk nyílt közös játékra is, és tapasztalhattuk, hogy Izraelben is igen népszerű a foci. A folytatásban *T. Sós Vera* és *Tardos Gábor* adott elő a Lauder iskola csodálatosan felszerelt multimédia termében. Mindketten a matematika egymástól távol eső területeinek meglepő kapcsolatáról beszéltek. Végül megnéztünk egy angol nyelvű, Erdős Pálról szóló dokumentumfilmet.

Az utolsó napon a búcsúünnepségen tudtuk meg, hogy összesítésben egy ponttal kikaptunk. Nem baj, majd a diákolimpián...

Csikvári Péter, Gerencsér Balázs, Harangi Viktor, Horváth Illés
Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.

12. Gillis–Turán Matematikaverseny, 2001 tavaszán

Első nap

1. Keressünk olyan pozitív egész x, y, z számokat, amelyekre

$$2000x^2+y^2=2001z^2,$$

továbbá, amelyekre teljesül, hogy $x>z>1999\cdot 2000\cdot 2001>y$.

2. Adottak az e egyenesen az A, B, C és D pontok ebben a sorrendben. Mi azon P pontok mértani helye a síkban, amelyekre az APB és a CPD szögek egyenlők?

3. Határozzuk meg azokat a folytonos f függvényeket, amelyekre minden x valós számra

$$f\big(f(x)\big)=x+f(x).$$

Második nap

4. $p(x)=x^3-3x+1$. Adjunk meg olyan harmadfokú polinomot, amelynek a gyökei a $p(x)$ gyökeinek az ötödik hatványai.

5. Az ABC háromszög beírt körének középpontja I, B_1 és C_1 az AC, illetve az AB oldalak felezőpontjai. A C_1I és B_1I egyenesek B_2-ben és C_2-ben metszik AC-t, illetve AB-t. Tudjuk, hogy az ABC és az AB_2C_2 háromszögek területe egyenlő. Mekkora a CAB szög?

6. Adott 32 pozitív egész úgy, hogy egyikük sem nagyobb 60-nál, az összegük pedig 120. Bizonyítsuk be, hogy két egyenlő összegű csoportba rendezhetők.

Csapatverseny

Az alábbi feladatokban G_n mindig n-pontú egyszerű (többszörös élek nélküli, hurokél mentes) gráf, K_n pedig az n-pontú teljes gráf. $e(G_n)$ a G_n éleinek a számát jelöli.

A feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy ha K_n éleit n színnel színezzük úgy, hogy minden szín ténylegesen előfordul, akkor az így kapott színezett gráf tartalmaz olyan háromszöget, amelynek élei különböző színűek.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$e(G_n)\ge \frac{n^2}{4}+2,$$

akkor G_n tartalmaz két olyan háromszöget, amelyeknek egyetlen közös csúcsa van.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$e(G_n) > \frac{1}{2}n\sqrt{n} + \frac{n}{4},$$

akkor G_n tartalmaz 4 hosszúságú kört.

4. a) Jelölje $K(2,3)$ azt a teljes páros gráfot, amelynek 3 fekete és 2 fehér csúcsa van. Bizonyítsuk be, hogy ha G_n nem tartalmazza $K(2,3)$-at, akkor

$$e(G_n) \le \frac{1}{\sqrt{2}}n\sqrt{n} + n.$$

b) Bizonyítsuk be, hogy ha adott $n \ge 16$ pont a síkon, akkor a köztük fellépő távolságok közül legfeljebb $n\sqrt{n}$ lehet egységnyi hosszú.

5. Legyen p adott prím és tekintsük az (x,y) egész számpárokat $\bmod p$. Készítsük el azt a gráfot, amelynek csúcsai ezek a párok, és két csúcs, (x,y) és (x',y') között pontosan akkor halad él, ha

$$xx' + yy' \equiv 1 \pmod{p}.$$

Az ily módon esetleg létrejövő hurokéleket hagyjuk el a gráfból.

a) Bizonyítsuk be, hogy az így kapott gráf nem tartalmaz 4 hosszúságú kört.

b) Bizonyítsuk be, hogy az n végtelen sok értékére létezik olyan G_n gráf, amelyiknek legalább

$$\frac{1}{2}n\sqrt{n} - n$$

éle van és nem tartalmaz 4 hosszúságú kört.

❄

Az alábbiakban közöljük a verseny legnehezebb feladatának a megoldását.

6. *Adott* 32 *pozitív egész úgy, hogy egyikük sem nagyobb* 60*-nál, az összegük pedig* 120*. Bizonyítsuk be, hogy két egyenlő összegű csoportba rendezhetők.*

Megoldás. Az állítás bizonyítását több segédtételre bontjuk. A bizonyítás során föltesszük, hogy az adott számok, a_1, a_2, ..., a_{32} nagyság szerint növekvő sorba vannak rendezve.

1. Lemma. *Ha a pozitív egész számokból álló* a_i *sorozatra teljesül, hogy*

$$a_i \le 1 + \sum_{j<i} a_j$$

minden $1 \le i \le n$ *esetén, akkor a sorozat „univerzális", azaz minden 1 és* $\sum_{i=1}^{n} a_i$ *közötti pozitív egész előáll az* a_i *különböző elemeinek az összegeként.*

A lemma állítása többé-kevésbé ebben a formában az 1960. évi *Kürschák* verseny 2. feladata volt, és azóta lényegében közismertté vált. A bizonyítás teljes indukcióval történhet, és megtalálható *Hajós György–Neukomm Gyula–Surányi János:* Matematikai Versenytételek II. című alapvető művében. (Tankönyvkiadó, Budapest, 1988)

Ha a sorozat részletösszegei helyett a sorozat tagjait vizsgáljuk, akkor az alábbi, könnyebben kezelhető elégséges feltételt kapjuk:

Ha $a_i \le i$ teljesül minden $1 \le i \le n$ esetén, akkor az a_i sorozat univerzális.

A bizonyítás nyilvánvaló, és ahogyan például az egyik legismertebb univerzális sorozat, a 2-hatványok sorozata mutatja, a feltétel valóban csupán elégséges.

2. Lemma. Ezt a lemmát is általános alakban mondjuk ki, mert ebben a formában a paraméterek különböző értékeire is felhasználjuk majd a bizonyítás során.

Ha adott m darab növekvően elrendezett pozitív egész szám, amelyek S összegére $S < 4m - 6$ (ez most nyilván teljesül, hiszen $S = 120 < 4 \cdot 32 - 6$) akkor a sorozatra teljesül $a_i \le i$, ha $3 \le i \le m - 2$.

(Az adott intervallum akkor nem üres, ha $m > 4$, de ez most nyilván teljesül.) Ez azt jelenti, hogy az 1. Lemma következményeként adódó feltétel csak a sorozat kezdetén és végén sérülhet.

Bizonyítás.

Az alábbi becslés nyilvánvaló:

$$S = \sum_{j<i} a_j + \sum_{j \ge i} a_j \ge \sum_{j<i} 1 + \sum_{j \ge i} a_i = (i-1) + a_i(m+1-i), \tag{1}$$

és így

$$a_i \le \frac{S+1-i}{m+1-i} = 1 + \frac{S-m}{m+1-i}. \tag{$*$}$$

Eszerint az $\dfrac{S-m}{m+1-i} < i$ egyenlőtlenségből következik az $a_i \le i$ feltétel. Ez utóbbi pedig egyenértékű a másodfokú

$$f(i) = i^2 - (m+1)i + S - m < 0 \tag{2}$$

egyenlőtlenséggel. Mivel $f(3) = f(m-2) = 6 - 4m + S$, ami a feltétel ($S < 4m - 6$) szerint valóban negatív, a lemma állítását igazoltuk.

Megjegyzés. Érdemes felfigyelni arra, hogy a (2) egyenlőtlenség szerint a növekvő módon elrendezett a_i sorozatban az $\dfrac{m+1}{2}$-dik, középső tagra szimmetrikusan sérülhet az $a_i \le i$ feltétel.

3. Lemma. *Ha (a korábbi jelölésekkel) $a_1 \le a_2 \le \ldots a_m \le S/2$, és az első $m-2$ tag univerzális sorozatot alkot, akkor $S/2$ előáll a sorozat néhány elemének az összegeként.*

Bizonyítás. Mivel $a_m \le S/2$ és $S - a_{m-1} = a_m + \sum_{i=1}^{m-2} a_i \ge S/2$, ezért bármely pozitív egész előáll ebben az intervallumban.

Térjünk most rá a feladat állításának a bizonyítására. Ha a sorozat „alacsony értékekkel kezdődik”, azaz már az első elemtől kezdve univerzális, vagyis $a_1 \le 1$ és $a_2 \le 2$, akkor a 2. lemma szerint az első $m-2=30$ szám univerzális sorozatot alkot, és így a 3. lemma szerint készen vagyunk.

Ha nem ez a helyzet, akkor $a_1+a_2 \ge 4$. Mivel láttuk, hogy $a_i \le i$, ha $m-2=30 \ge$ $\ge i \ge 3$, mindenképpen teljesül, hogy $a_3 \le 3$. Az elemek rendezése miatt így $a_2 \le 3$. Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a_2 értéke 2 vagy pedig 3.

1. eset: $a_2=2$.

Az $a_1+a_2 \ge 4$ feltételből most $a_1 \le a_2$ miatt következik, hogy $a_1=a_2=2$. Ismét a 2. lemmát alkalmazzuk. Tegyük félre a két darab 2-est, és rendezzük a sorozat páratlan értékű tagjait tetszőlegesen párokba. Ez most megtehető, hiszen a számok összege páros. Így legalább $m-2 \ge 15 = \left\lceil \frac{32-2}{2} \right\rceil$ páros számot kapunk. Most $a_{31}+a_{32} \le 120 -$ $-(a_1+a_2)-28\cdot 2=60$, tehát ebben az esetben az eredeti sorozat bármely két tagjának az összege kisebb vagy egyenlő, mint 60. Felezzük meg a két darab 2-essel együtt összesen $m \ge 17$ darab **páros** számot! Így az

$$1=b_1=b_2 \le b_3 \le b_4 \le \ldots \le b_m \le 30$$

sorozatot kapjuk, amelyre $\sum_{j=1}^{m} b_j = 60$.

Erre a „felezett” sorozatra még mindig teljesül, hogy $4m-6 \ge 4\cdot 17-6 > 60$, tehát a 2. lemma szerint $b_j \le j$, ha $3 \le j \le m-2$, és mivel $b_1=b_2=1$, a 3. lemma felhasználásával következik, hogy a b_j sorozat elemeiből előállítható a 30. Ez pedig, 2-vel szorozva, a 60 előállítását adja az a_i sorozat elemeiből.

2. eset: $a_2=3$.

Láttuk, hogy $a_3 \le 3$, ezért most $a_3=3$. Az előző trükk most is működik: megmutatjuk, hogy a 3-asokat félretéve a megmaradó számok elegendően sok 3-mal osztható összegű csoportba rendezhetők.

Most $a_{30}+a_{31}+a_{32} \le 120-(a_1+a_2)-27\cdot 3 < 60$, tehát a sorozat bármely három tagjának az összege kisebb 60-nál. Az előbbi trükk szerint tegyünk félre két darab 3-ast – láttuk, hogy most van legalább ennyi. A megmaradó 30 szám összege osztható 3-mal, és így legalább $m-2 \ge \left\lceil \frac{32-2}{3} \right\rceil = 10$ csoportba rendezhetők (egyesével, kettesével, illetve hármasával) úgy, hogy a csoportok összege 60-nál kisebb, 3-mal osztható szám. Az így adódó $m \ge 12$ darab számot (a két darab félretett 3-assal együtt) 3-mal elosztva az alábbi sorozatot kapjuk:

$$1=b_1=b_2 \le b_3 \le \ldots \le b_m \le 20, \qquad \sum_{j=1}^{m} b_j = 40.$$

Készen vagyunk, hiszen most is $4m-6 \ge 4\cdot 12-6 > 40$, így a $b_1, b_2, \ldots, b_{m-2}$ univerzális, tehát a 3. lemma szerint $S/2=20$ előállítható az elemeiből.

Megjegyzések. 1. Szó szerint ugyanígy igazolható, hogy ha adott $m=3k+2$ darab szám, amelyek összege $S=12k$ és egyikük sem nagyobb, mint $S/2$, akkor ezek a számok két egyenlő összegű csoportra oszthatók. (A feladatban $k=10$, $m=32$, $S=120$.) Az is látható, hogy az állítás éles, két példa is mutatja, hogy $3k+1$ darab számra ez már nem feltétlenül tehető meg. Könnyen bizonyítható, hogy bárhogyan osztjuk is két csoportra az alábbi számokat, a csoportokban sosem lehet egyenlő a számok összege.

$$\{\underbrace{1,1,\ldots,1}_{3k-2\ \text{db}},3k,3k+1,3k+1\},\qquad \text{illetve}\qquad \{\underbrace{2,2,\ldots,2}_{3k-1\ \text{db}},3k+1,3k+1\}.$$

2. A feladat egy némileg általánosabb probléma – talán legnehezebb – részfeladata. Az általános kérdés a következő: milyen feltétel biztosítja, hogy egy S összegű m elemű halmaz két egyenlő összegű csoportra legyen felbontható (a nyilvánvalóan szükséges $a_i \le S/2$ feltételen kívül.) Azonnal adódik, hogy ha az S páratlan, akkor ez soha nem tehető meg. Ha S páros, de nem osztható 4-gyel, akkor azt kapjuk, hogy a kritikus elemszám $\dfrac{S}{2}+1$. Ha S osztható 4-gyel, de nem osztható 3-mal, akkor ez $\left\lceil\dfrac{S}{3}\right\rceil+1$, a versenyen kitűzött feladat pedig lényegében annak az esetnek a vizsgálata volt, amikor S osztható 3-mal is és 4-gyel is. Ilyenkor a legalacsonyabb a kritikus elemszám, $\dfrac{S}{4}+2$. Az olvasó könnyen találhat példákat, hogy az egyes esetekben megadott értékek valóban élesek és a fenti bizonyítás elemeit felhasználva maga is igazolhatja a kimondott állításokat.

3. A feladat egy természetesen adódó algoritmus elemzésével is megoldható, pontosabban úgy is eljuthatunk az alapvető 2. lemma egy változatához. Sajnos ez sem intézi el az idegesítő $a_1+a_2\ge 4$ esetet, így a ‚felezési', illetve ‚harmadolási' trükk nem látszik elkerülhetőnek.

Az algoritmus leírásakor természetesebben hangzik, ha a feladat szövegét némileg átalakítjuk: a számokról mint súlyokról beszélünk majd – tekintsük őket mondjuk grammokban adott mérőszámoknak –, a feladat pedig azt követeli meg, hogy ezeket a súlyokat két, egyenlő tömegű csoportra osszuk, ha úgy tetszik, egy mérleg két serpenyőjében rendezve el őket. Tekintsük tehát a súlyok növekvően elrendezett sorozatát, és tegyünk a mérleg két serpenyőjébe egy-egy zárt tartályt, amelyekbe pontosan $S/2$ grammnyi tömeg fér.

A legnehezebbikkel kezdve helyezzük el a súlyokat egyesével a tartályokban, az éppen sorra kerülőt a könnyebbik (nem nehezebbik) serpenyőbe téve. Ha elakadunk, azaz a soron következő súly egyik tartályban sem fér el, akkor megállunk. Ha ez a kiegyensúlyozó algoritmus úgy ér véget, hogy valamennyi súlyt sikerült elhelyeznünk, akkor nyilván megvalósítottuk a kívánt felosztást.

Nézzük, mi történik, ha elakadás nélkül sikerült elhelyeznünk az a_i-nél nem könnyebb súlyokat. Ha a két tartály tartalmát ebben az állapotban S_1 és S_2 jelöli ($S_1\le S_2$ nyilván föltehető), akkor nyilván $S_1+S_2=S-\sum\limits_{j>i}a_j$. Ha most $a_i\le S/2-S_2(\le S/2-S_1)$, akkor az a_i súly is elfér, az eljárás tehát nem akad el. Ez biztosan teljesül, ha $2a_i\le 1+(S/2-S_1)+(S/2-S_2)$. Vegyük észre az 1-est a jobb oldalon, ez azért illeszthető ide, mert egész számokkal dolgozunk. Ez viszont nem egyéb, mint

$$2a_i\le 1+S-\sum_{j>i}a_j=1+\sum_{j\le i}a_j$$

– ismerős? – így ha

$$a_k\le 1+\sum_{j<k}a_j,\qquad \text{ha}\quad k=m,\,m-1,\,\ldots,\,i,$$

akkor a kiegyensúlyozó algoritmus lépéseivel akadálytalanul elhelyezhetők az

$$a_m\ge a_{m-1}\ge\ldots\ge a_i$$

súlyok! A Kürschák-feladat feltétele ebben az értelmezésben az algoritmus sikeres lefutását biztosítja!

Vegyük észre, hogy mivel a nagy súlyok a feltétel szerint nem nagyobbak $S/2$-nél, az algoritmust el tudjuk indítani. Ezzel becsatlakoztunk a fenti megoldásba, hiszen ott láttuk, hogy $f(i)<0$-ból következik $a_i \le i$, ami most elégséges ahhoz, hogy sikeresen lefusson az algoritmus. Az kis kezdőértékek most azt jelentik, hogy amikor elértünk a_3-hoz, akkor ezután az eljárás befejezhető. Ebben a változatban nincs szükség az egyébként triviális 3. lemmára, a megoldás csak azon múlik, hogy jól kezdődik-e a sorozat (akkor végződik jól az algoritmus). Ebben a változatban a megoldás valamivel egyszerűbbé vált, aminek az lehet az oka, hogy itt kizárólag a kiegyensúlyozásra törekszünk, nem foglalkozunk azzal, hogy egyébként milyen számok állíthatók elő a megadott sorozat segítségével.

Megoldásvázlatok, eredmények a IV. mérőlap (2001/4. sz.) feladataihoz

1. A paralelogrammát két átlója négy egyenlő területű részre osztja. Egy ilyen részháromszög oldalai $\frac{13}{2}$, 10 és $\frac{21}{2}$ egység hosszúak. Ennek a részháromszögnek a területe a Heron-képlettel ($t^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$) kiszámítható. Ha a paralelogramma területe T, akkor

$$\left(\frac{T}{4}\right)^2=\frac{27}{2}\cdot\frac{14}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{6}{2},\qquad \text{ahonnan}\qquad T^2=(9\cdot 7\cdot 2)^2,\qquad T=126 \text{ területegység.}$$

Ismeretes, hogy bármely paralelogrammában az oldalak négyzetének összege egyenlő az átlók négyzetének összegével. Így ha az ismeretlen oldal hossza x egység, akkor

$$2x^2+2\cdot 10{,}5^2=13^2+20^2,\qquad x^2=174{,}25,\qquad x\approx 13{,}20 \text{ egység.}$$

A paralelogramma kerülete, $k\approx 47{,}40$ egység.

2. Azonos átalakításokkal, rendezéssel, majd felhasználva, hogy az $x\mapsto \lg x$ ($x\in \mathbf{R}^+$) függvény kölcsönösen egyértelmű,

$$\lg(x+9)+\lg|x-1|+\lg 4=\lg 100,\qquad (x>-9,\ x\neq 1),$$
$$(x+9)\cdot|x-1|=25.$$

Ha $-9<x<1$, akkor $x^2+8x-9=-25$, $(x+4)^2=0$, $x_1=-4$;
ha $x>1$, akkor $x^2+8x-9=25$, így $x_2=-4+5\sqrt{2}$.

($x_3=-4-5\sqrt{2}$ nem megoldás.) Az egyenlet megoldásai x_1 és x_2.

3. Azoknak a $P(x;y)$ pontoknak a halmazát keressük, amelyekre $PA^2+PB^2+PC^2=30$. A távolságok négyzetét a koordinátákkal kifejezve:

$$(x+2)^2+y^2+(x-2)^2+y^2+x^2+(y-5)^2=30,$$

azaz $x^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$. A keresett ponthalmaz kör. A kör középpontja $C\left(0;\frac{5}{3}\right)$, sugara $r=\frac{4}{3}$.

4. Legyen a mértani sorozat első tagja a, hányadosa q. A feltétel szerint

$$7(aq+aq^2)+2(a+aq^3)=0,$$
$$7aq(1+q)+2a(1+q)(1-q+q^2)=0,$$
$$a(q+1)(2q^2+5q+2)=0,$$

így $q=-1$ vagy $q=-2$ vagy $q=-\frac{1}{2}$.

Mivel $a\cdot\frac{q^5-1}{q-1}=22$, azért ha $q=-1$, akkor $a=22$, ha $q=-2$, akkor $a=2$, ha $q=-\frac{1}{2}$, akkor $a=\frac{11}{16}$.

5. Ismeretes, hogy $\frac{1}{\sin^2 x}=1+\operatorname{ctg}^2 x$ $(x\neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z})$, így $\sin^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x}$. A feltételből $\operatorname{ctg} x+\frac{1}{\operatorname{ctg} x}=-4$, ahonnan

$$\operatorname{ctg} x=2-\sqrt{3} \quad\text{vagy}\quad \operatorname{ctg} x=2+\sqrt{3}. \qquad \operatorname{ctg}^2 x=7-4\sqrt{3} \quad\text{vagy}\quad \operatorname{ctg}^2 x=7+4\sqrt{3},$$

$$\sin^2 x=\frac{1}{8-4\sqrt{3}}=\frac{8+4\sqrt{3}}{16}=\frac{4+2\sqrt{3}}{8}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(2\sqrt{2})^2} \text{ vagy } \sin^2 x=\frac{1}{8+4\sqrt{3}}=\ldots=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^2,$$

így

$$\sin x=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \text{ vagy } \sin x=-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \text{ vagy } \sin x=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \text{ vagy } \sin x=-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

(A feladat más módon is megoldható.)

6. Ha $p=1$, akkor az $x\mapsto 6x-1$ $(x\in\mathbf{R})$ függvénynek nincs legnagyobb értéke.

Az adott másodfokú $(p\neq 1)$ függvénynek $(x\in\mathbf{R})$ akkor van legnagyobb értéke, ha $p-1<0$, $p<1$. Teljes négyzetté alakítással:

$$x\mapsto(p-1)\left(x+\frac{p+2}{p-1}\right)^2+\left(p-2-\frac{(p+2)^2}{p-1}\right).$$

Ennek legnagyobb értéke (-6), tehát

$$p-2-\frac{(p+2)^2}{p-1}=-6, \qquad \text{ahonnan} \qquad p=-8.$$

Ezt a legnagyobb értéket az $x_0=-\frac{p+2}{p-1}$ helyen veszi fel a függvény, tehát $x_0=-\frac{2}{3}$.

7. Legyen D az $x^2+px+q=0$ egyenlet diszkriminánsa; a két gyök: $x_1=4$, $x_2=\frac{D}{2}$. Így az egyenlet:

$$x^2-\left(4+\frac{D}{2}\right)x+4\cdot\frac{D}{2}=0,$$

ahonnan $D=\left(4+\frac{D}{2}\right)^2-8D$, tehát $D=4$ vagy $D=16$. Az egyenlet ekkor $x^2-6x+8=0$, $p=-6$, $q=8$ vagy $x^2-12x+32=0$, $p=-12$, $q=32$.

8. Mivel a parabola érinti az x tengelyt, azért egyenletét $y=a(x-u)^2$ alakban kereshetjük. Az A pont rajta van a parabolán, tehát $2=a(3-u)^2$. Az A pontban a parabolához húzott érintő egyenlete: $4x+y=14$, így a $14-4x=a(x-u)^2$ egyenlet diszkriminánsa 0.

$ax^2-2(au-2)x+au^2-14=0$, $4(au-2)^2-4a(au^2-14)=0$, ahonnan $a(7-2u)=-2$, $a=\frac{2}{2u-7}$, tehát $2=\frac{2}{2u-7}\cdot(3-u)^2$, $(u-4)^2=0$, $u=4$, $a=2$.

A parabola egyenlete: $y=2(x-4)^2$.

Rábai Imre

Matematika gyakorlatok megoldása

C. 596. *Oldjuk meg a valós számok halmazán az* $\left[\frac{1}{1-x}\right]=\left[\frac{1}{1{,}5-x}\right]$ *egyenletet.* *(*$[a]$*, az* a *egész része az* a*-nál nem nagyobb egészek legnagyobbika.)*

Megoldás. Vizsgáljuk meg a két tört értékeit először -1 és 0 között:

$$-1\le\frac{1}{1-x}<0.$$

Rendezve az egyenlőtlenséget kapjuk, hogy $x\ge 2$. A $-1\le\frac{1}{1{,}5-x}<0$ egyenlőtlenségből $x\ge 2{,}5$.

Vagyis ha $x\ge 2{,}5$, akkor mindkét tört egész részének értéke -1. A 2,5-nél nagyobb vagy egyenlő számok tehát megoldásai az egyenletnek.

Most vizsgáljuk azt az esetet, amikor

$$0\le\frac{1}{1-x}<1 \qquad \text{és} \qquad 0\le\frac{1}{1{,}5-x}<1.$$

Az első törtre ez azt jelenti, hogy $x<0$, míg a másik törtre $x<\frac{1}{2}$. Most a közös megoldás a negatív számok halmaza, ekkor mindkét tört egész része 9, tehát ez is megoldása az egyenletnek.

Ha $0\le x<\frac{1}{2}$, akkor $\left[\frac{1}{1-x}\right]=1>0=\left[\frac{1}{1{,}5-x}\right]$, itt nincs megoldás.

Hasonlóan, ha $\frac{1}{2}\le x<1$, akkor $\left[\frac{1}{1{,}5-x}\right]<2\le\left[\frac{1}{1-x}\right]$, itt sincs megoldás.

Tegyük fel, hogy $1 < x < 1{,}5$; ekkor $[1-1-x] < 0 \le \left[\frac{1}{1{,}5-x}\right]$ miatt nincs megoldás.

Az az eset maradt, amikor $1{,}5 < x < 2{,}5$. Ekkor $\frac{1}{1{,}5-x} < \frac{1}{1-x} < 0$; ha az egész részek egyenlők, akkor

$$-k \le \frac{1}{1{,}5-x} < \frac{1}{1-x} < -(k-1),$$

ahol $k > 0$ egész. Az első egyenlőtlenség rendezve: $x \ge \frac{1}{k} + 1{,}5$, tehát $k \ge 2$. A második egyenlőtlenség pedig: $x < \frac{1}{k-1} + 1$.

Így azonban $\frac{1}{k-1} + 1 > \frac{1}{k} + 1{,}5$, azaz $\frac{1}{k(k-1)} > \frac{1}{2}$, $k(k-1) < 2$, ami lehetetlen.

A feladat megoldása tehát: $x < 0$, illetve $x \ge 2{,}5$.

Megjegyzés. A megoldók egy része az $\left[\frac{1}{1-x}\right]$ és az $\left[\frac{1}{1{,}5-x}\right]$ függvények grafikonjairól olvasta le a megoldásokat.

341 dolgozat érkezett. 5 pontos 175, 4 pontos 82, 3 pontos 22, 2 pontos 19, 1 pontos 1, 0 pontos 41.

C. 600. *Személygépkocsival utazunk Budapestről Kassa felé állandó sebességgel. Meglátunk egy kilométert jelző táblát, amin egy kétjegyű szám van. Fél óra múlva olyan táblához érünk, amelyen az előbbi számjegyek állnak fordított sorrendben. Újabb* 30 *perc múlva olyan táblához érünk, amelyen a két eddigi számjegyen kívül még egy* 0 *is van. Mekkora sebességgel haladunk?*

Megoldás. Jelölje az első kétjegyű számot $\overline{ab}$, fél óra múlva a kilométert jelző táblán $\overline{ba}$ áll, majd újabb félóra múlva $\overline{a0b}$, $\overline{ab0}$, $\overline{b0a}$, $\overline{ba0}$ háromjegyű számok valamelyike szerepel, hiszen az első számjegy nem lehet 0.

Jelöljük ezt a háromjegyű számot A-val. Mivel egyenletes sebességgel haladtunk, azaz egyenlő idő alatt egyenlő utakat tettünk meg, felírhatjuk a következő egyenletet:

$$(10b+a)-(10a+b) = A-(10b+a).$$

Rendezve az egyenletet:

$$A = 19b - 8a. \tag{1}$$

De b értéke legfeljebb 9 lehet, és a legalább 1, ezért

$$A \le 19\cdot 9 - 8 = 163,$$

azaz A első jegye 1.

Mivel a kilométert jelző számok növekednek, ezért $\overline{ab}$ biztosan kisebb, mint $\overline{ba}$, azaz a értéke 1 és a háromjegyű szám vagy $\overline{1b0}$, vagy $\overline{10b}$ alakú.

Ha $A=100+10b$, akkor az (1) egyenletből

$$100+10b=19b-8,$$

innen $9b=108$ és $b=12$, ami lehetetlen.

Ha $A=100+b$, akkor az (1) egyenletből $100+b=19b-8$, ahonnan $18b=108$ és $b=6$.

A háromjegyű szám tehát a 106.

A személyautó sebessége ezért $\dfrac{106\text{ km}-61\text{ km}}{\frac{1}{2}\text{ óra}}=90\ \dfrac{\text{km}}{\text{óra}}$.

Kecskeméti Balázs (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

616 dolgozat érkezett. 5 pontos 303, 4 pontos 51, 3 pontos 147, 2 pontos 70, 1 pontos 12, 0 pontos 22. Nem versenyszerű 11 dolgozat.

C. 601. *Oldjuk meg a következő egyenletet:*

$$x^2+x+\sqrt{x^2+x+7}=5.$$

Javasolta: *Gyanta Nándor,* Budapest

Megoldás. Vezessünk be új változót. Legyen $y=x^2+x+7$; átalakítva az egyenletet, azt kapjuk, hogy

$$y+\sqrt{y}=12. \qquad (1)$$

Rendezve és négyzetre emelve az

$$y^2-25y+144=0$$

másodfokú egyenlethez jutunk.

Az egyenlet két gyöke $y_1=16$ és $y_2=9$. Mivel a négyzetgyök pozitív, az $y_1=16$ nem megoldás, mert

$$16+\sqrt{16}>12.$$

Az $y_2=9$ megoldása az (1) egyenletnek. Ekkor

$$x^2+x+7=9, \qquad \text{ahonnan} \qquad x_1=-2, \quad x_2=1.$$

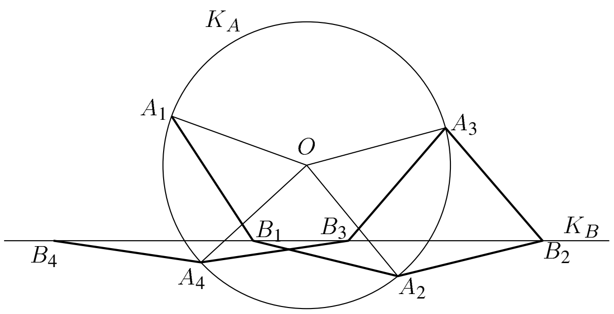
566 dolgozat érkezett. 5 pontos 427, 4 pontos 83, 3 pontos 17, 2 pontos 12, 1 pontos 12, 0 pontos 11. Nem versenyszerű 4 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása

B. 3366. *Ismét útnak indul az* **F. 3279.** *feladat szöcskéje. Most egy r sugarú kör és egy, a kör középpontján át nem menő egyenes pontjai között ugrál, a körről az egyenesre, onnan pedig vissza a körre. Bizonyítsuk be, hogy r hosszúságú ugrásokkal legfeljebb* 8 *pontba juthat el.*

(*5 pont*) Javasolta: *Hraskó András,* Budapest

I. megoldás. Az alábbi ábrán a szöcske A_1 kiindulási pontja és további 7 pont tartózkodási helye látható: B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4 és B_4. Az ábra egy olyan esetet mutat, amikor a szöcske nem ugrik vissza oda, ahol az előbb volt. Azt szeretnénk kitalálni, hogy hová ugrik ezután a szöcske, mi lesz az A_5 pont (*1. ábra*).



1. ábra

Mivel a bejelölt szakaszok mind egyenlő hosszúak, így az $A_1B_1A_2O$ és az $A_2B_2A_3O$ négyszög is rombusz. Ebből következik, hogy az A_1B_1 és az A_3B_2 szakaszok is párhuzamosak és egyenlőek, tehát az $A_1B_1B_2A_3$ négyszög paralelogramma, az A_1A_3 szakasz párhuzamos a B_1B_2 szakasszal, azaz az adott egyenessel.

Ha ugyanezt a gondolatmenetet úgy mondjuk el, hogy minden indexet 2-vel megnövelünk, akkor azt kapjuk, hogy az A_3A_5 szakasz is párhuzamos az adott egyenessel. Ez azt jelenti, hogy $A_1 = A_5$. Mivel a szöcske minden helyről legfeljebb két másikra ugorhat tovább, így az A_1, B_2, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4, A_1 „körút” bármely pontjából csakis ezen pontok valamelyikébe ugorhat. Ezért e 8 ponttól különböző helyre még akkor sem juthat, ha lépésismétlések után más irányt próbálna választani.

Sofró Csaba (Budapest, Deák F. Gimn., 11. o.t.) és
Kerékfy Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján

II. megoldás. A feladatot komplex számok segítségével is megoldhatjuk. A kör középpontja lesz a 0, a valós tengelyt pedig az adott egyenesre merőlegesen vesszük föl (*2. ábra*).

Mivel a szöcske a körről indul, így a páratlan sorszámú pontok a körön, a páros sorszámúak pedig az egyenesen vannak. Az ábráról leolvasható, hogy hová ugorhat tovább a szöcske:

$$z_{2i+1}=z_{2i+1}-0=z_{2i}-z_{2i-1};$$

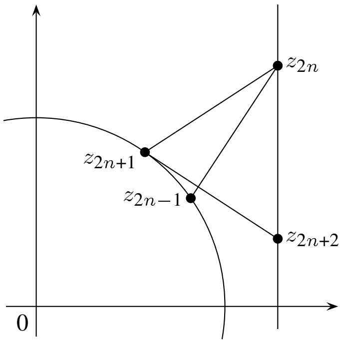
és

$$z_{2i+2}=z_{2i+1}+\overline{(z_{2i}-z_{2i+1})}=z_{2i+1}-\overline{z_{2i+1}}+\overline{z_{2i}},$$

ahol $\overline{z}$ a z szám komplex konjugáltját, azaz a valós tengelyre vonatkozó tükörképét jelöli.

A fenti szabályok alapján:

$$\begin{aligned}
z_3&=z_2-z_1,\\
z_4&=z_3-\overline{z_3}+\overline{z_2}=z_2-z_1-\overline{z_2}+\overline{z_1}+\overline{z_2}=z_2-z_1+\overline{z_1},\\
z_5&=z_4-z_3=z_2-z_1+\overline{z_1}-z_2+z_1=\overline{z_1},\\
z_6&=z_5-\overline{z_5}+\overline{z_4}=\overline{z_1}-z_1+\overline{z_2}-\overline{z_1}+z_1=\overline{z_2},\\
z_7&=z_6-z_5=\overline{z_2}-\overline{z_1},\\
z_8&=z_7-\overline{z_7}=\overline{z_2}-\overline{z_1}-z_2+z_1+z_2=\overline{z_2}-\overline{z_1}+z_1,\\
z_9&=z_8-z_7=\overline{z_2}-\overline{z_1}+z_1-\overline{z_2}+\overline{z_1}=z_1,\\
z_{10}&=z_8-\overline{z_8}=z_1-\overline{z_1}+z_2-z_1+\overline{z_1}+z_1=z_2.
\end{aligned}$$



2. ábra

Tehát a szöcske a kilencedik ugrással az első pontba jut vissza, a tizedikkel pedig a másodikba. Ez így egy zárt „ciklus”, és a szöcskének mindig legfeljebb 2 választási lehetősége van, hogy merre ugorjon tovább, tehát más pontra nem ugorhat, valóban csak 8 pontba juthat el.

Dénes Attila (Békéscsaba, Rózsa F. Gimn., 12. o.t.)

Megjegyzések. 1. A II. megoldás nem igazán új az előzőhöz képest, de egy elegáns algebrai átfogalmazás.

2. A **B. 3279.** feladatban a szöcske két – egymást 36°-os szöget bezáró – egyenes között ugrált, most pedig egy egyenes és egy kör között. A tapasztalatok birtokában az olvasó bizonyára könnyen válaszolni tud az alábbi kérdésre: ha két olyan r sugarú kör pontjai között ugrál a szöcske, amelyek nem mennek át egymás középpontján, akkor r hosszúságú ugrásokkal legfeljebb hány pontba juthat el?

52 dolgozat érkezett. 5 pontos 37, 4 pontos 1, 3 pontos 1, 0 pontos 13.

B. 3381. *Az osztályfőnök észrevette, hogy az osztályába járó* 30 *gyerek között van kettő, akinek ugyanazon a napon van a születésnapja. Mutassuk meg, hogy ez nem is olyan meglepő, hiszen annak valószínűsége, hogy* 30 *ember között van legalább kettő, akinek egy napon van a születésnapja, legalább* $1-\left(\frac{703}{732}\right)^{30}$.

(*5 pont*)

Megoldás. Azt kell megmutatni, hogy legfeljebb $\left(\frac{703}{732}\right)^{30}$ annak a valószínűsége, hogy 30 embernek csupa különböző napon van a születésnapja. Ezt két, egymástól eltérő modell esetén is igazoljuk.

1. *értelmezés:* A 30 születésnapot tekintsük a naptárban elfoglalt sorrendjükben felírva. A „kedvező esetek” száma (366 napos évvel számolva, hiszen akkor kapunk nagyobb értéket) $\binom{366}{30}$. Az összes esetek száma 366 elem 30-adosztályú ismétléses kombinációinak a száma: $\binom{395}{30}$. A keresett valószínűség így

$$p_1=\frac{\binom{366}{30}}{\binom{395}{30}}=\frac{366\cdot 365\cdot\ldots\cdot 337}{395\cdot 393\cdot\ldots\cdot 366}.$$

2. *értelmezés:* Különbséget teszünk az esetek között aszerint, hogy egy adott dátum a 30 ember közül – jelöljük őket rendre E_1, E_2, $\ldots$, E_{30}-cal – kinek a születésnapja. Annak a valószínűsége, hogy E_2 más napon született, mint E_1, nyilván $\frac{365}{366}$. Az E_1 és E_2 (eltérő) születési dátumának ismeretében $\frac{364}{366}$ annak a valószínűsége, hogy E_3 születésnapja E_1 és E_2 születésnapjától is különbözik; ezért hármójuk születésnapja $\frac{365\cdot 364}{366\cdot 366}$ valószínűséggel különböző. E gondolatmenetet folytatva kapjuk, hogy

$$p_2=\frac{366\cdot 365\cdot\ldots\cdot 337}{366^{30}}$$

annak a valószínűsége, hogy mind a 30 ember más-más napon született.

A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint:

$$\sqrt[30]{366\cdot 365\cdot\ldots\cdot 337}<\frac{366+365+\ldots+337}{30}=\frac{703}{2},$$

tehát

$$p_1<p_2<\frac{\left(\frac{703}{2}\right)^{30}}{366^{30}}=\left(\frac{703}{732}\right)^{30}.$$

Baharev Ali (Vác, Boronkay Gy. Gimn., 12. o.t.)

Megjegyzés. A kapott két különböző valószínűség annak a következménye, hogy a kétféle értelmezés során mást tekintettünk eseménynek: először a születésnapok elhelyezkedése (a naptárban) volt egy esemény, másodszor viszont egy lista, amelyben mindenki neve mellett szerepel a születési dátuma. Az eltérő értelmezésekre álljon itt a következő, nagyon egyszerű példa. Aladár és Botond feldob egy-egy érmét; annak a valószínűségét keressük, hogy a két dobás megegyező kimenetelű. Az egyformán valószínű lehetséges események:

$$[A(f);B(f)];\quad [A(f);B(i)];\quad [A(i);B(f)];\quad [A(i);B(i)].$$

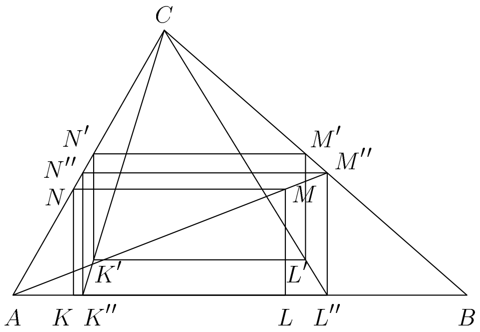
Mivel a 4 esetből kettőnél egyezik meg a két dobás eredménye, a keresett valószínűségre joggal mondhatjuk, hogy az $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Tegyük föl azonban, hogy nem tudunk jelen lenni a dobásoknál, ezért megkérünk egy közjegyzőt az események rögzítésére. Egy űrlapot kell kitöltenie, amelyen a „fej” és az „írás” dobások száma áll. Hányféle jegyzőkönyvet kaphatunk a dobások szemtanújától? Nyilván hármat, ezek:

[2 fej, 0 írás]; [1 fej, 1 írás]; [0 fej; 2 írás].

Ha arra gondolunk, hogy a jegyzőkönyvet véletlenszerűen kitöltve egyenlő eséllyel kaphatjuk a három változat bármelyikét, a keresett valószínűséget $\frac{1}{3}$-nak találjuk.

107 dolgozat érkezett. 5 pontos 65, 4 pontos 13, 3 pontos 10, 2 pontos 1, 1 pontos 9, 0 pontos 1. Nem versenyszerű 8 dolgozat.

B. 3397. *ABC egy hegyesszögű háromszög, a $KLMN$ pedig egy olyan téglalap, hogy N az AC szakaszra, K és L pedig az AB szakaszra illeszkedik. Toljuk el a $KLMN$ téglalapot az AC-vel párhuzamosan úgy, hogy M' a BC szakaszra kerül. Így kapjuk a $K'L'M'N'$ téglalapot. Mutassuk meg, hogy CL' és AB metszéspontját az AM és CB metszéspontjával összekötő egyenes merőleges az AB egyenesre.*
(*4 pont*)



Megoldás. A $KLMN$ téglalapból A középpontú középpontos hasonlósággal kapjuk a $K''L''M''N''$ téglalapot, amelynek minden csúcsa illeszkedik az ABC háromszög oldalaira. Tudjuk, hogy $K'L'M'N' \cong KLMN$ és $KLMN \sim K''L''M''N''$, ezért $K'L'M'N' \sim K''L''M''N''$, a hasonlóság középpontja pedig $N'N''$ és $M'M''$ metszéspontja, ami a C csúcs (a téglalapok megfelelő oldalai továbbra is párhuzamosak, hiszen állásukat sem a középpontos hasonlóság, sem az eltolás nem változtatta meg). Így L' illeszkedik $L''C$ egyenesre, M'' illeszkedik AM egyenesre, amiből következik, hogy $M''L'' \perp AB$, mivel ezek a $K''L''M''N''$ téglalap szomszédos oldalegyenesei.

Börcsök József (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 12. o.t.)

155 dolgozat érkezett. 4 pontos 125, 3 pontos 4, 2 pontos 10, 1 pontos 4, 0 pontos 8. Nem versenyszerű 4 dolgozat.

B. 3402. *Két iskola diákjai egy teszten a következő eredményt érték el:*
Az első iskolába járó diákok átlaga 74 *pont, ebből a fiúké* 71*, a lányoké pedig* 76 *pont.*
A másik iskolába járó diákok átlaga 84 *pont, ebből a fiúké* 81*, a lányoké pedig* 90 *pont.*
Ha a két iskolában a fiúk átlaga összesen 79 *pont volt, mennyi volt a lányoké?*
(*3 pont*)

Megoldás. Legyen az első iskolába járó fiúk száma f_1, a lányoké l_1; a második iskolába járó fiúk száma f_2, a lányoké l_2. Mivel az első iskolába járó diákok átlaga 74 pont volt, így felírható a következő összefüggés:

$$\frac{71f_1+76l_1}{f_1+l_1}=74. \tag{1}$$

Hasonlóan:

(2) $\dfrac{81f_2+90l_2}{f_2+l_2}=84,$ (3) $\dfrac{71f_1+81f_2}{f_1+f_2}=79.$

Az (1)-es egyenlet átrendezésével azt kapjuk, hogy

$$l_1=\frac{3}{2}f_1. \tag{4}$$

A (2)-es egyenletet átrendezve $f_2=2l_2$, a (3)-as egyenletből pedig $f_2=4f_1$, és így $2l_2=$ $=4f_1$, azaz

$$l_2=2f_1. \tag{5}$$

Felhasználva a (4)-es és az (5)-ös egyenletet, a két iskolába járó lányok pontszámainak átlaga:

$$\frac{76l_1+90l_2}{l_1+l_2}=\frac{76\cdot\frac{3}{2}f_1+90\cdot 2f_1}{\frac{3}{2}f_1+2f_1}=\frac{294}{3{,}5}=84.$$

Kucsera Péter (Békéscsaba, Belvárosi Ált. Isk. és Gimn., 11. o.t.)

492 dolgozat érkezett. 3 pontos 378, 2 pontos 72, 1 pontos 23, 0 pontos 7. Nem versenyszerű 12 dolgozat.

B. 3407. *Arnold, Bendegúz, Cézár, Dorottya, Egon és Ferdinánd szerepjátékhoz készülődik. Még nem döntötték el, melyikük legyen a kalandmester. (Ebben a játékban egyikük a kalandmester, a többiek alkotják a csapatot.) A kalandmester személyéről sorsolással kívánnak dönteni, ehhez a játékban használt* 10 *oldalú „dobókockával” dobnak a következőképpen:*

Előre meghatározott sorrendben mindenki egyszer dob a kockával. Az lesz a kalandmester, aki először 1*-est, vagy* 2*-est dob. Ha a kör végére nincs meg a kalandmester, akkor újra kezdik ugyanebben a sorrendben a dobásokat mindaddig, amíg valaki* 1*-est vagy* 2*-est nem dob.*

Dorottya még sohasem vezetett ebben a társaságban játékot, és most nagyon szeretne. A fiúk udvariasak és megengedik neki, hogy megválassza azt, hogy hányadiknak dob. Te mit javasolnál Dorottyának?

(*3 pont*) Javasolta: *Pogány Gyula*, Szolnok

I. megoldás. Annak a valószínűsége, hogy az első dobás 1-es vagy 2-es lesz, $P_1=$ $=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$. Annak a valószínűsége, hogy az első nem az, de a második igen, $P_2=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $P_3=\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{5},\ \ldots,\ P_k=\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{5}$.

Annak a valószínűsége tehát, hogy az elsőnek dobó játékos lesz a kalandmester,

$$p_1=\sum_{i=0}^{\infty}P_{6i+1}=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{6i}\cdot\frac{1}{5}.$$

Hasonlóan,

$$p_2=\sum_{i=0}^{\infty}P_{6i+2}=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{6i+1}\cdot\frac{1}{5}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{6i}\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{5}p_1<p_1,$$

$$p_3=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{6i+2}\cdot\frac{1}{5}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{6i+1}\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{5}p_2<p_2,$$

és ungyanígy kapjuk, hogy $p_3>p_4>p_5>p_6$. Így azt javasolnám Dorottyának, hogy elsőnek dobjon.

Szalay Zsófia (Budapest, Szent István Gimn., 11. o.t.)

Megjegyzés. A szóban forgó valószínűségek pontosan kiszámíthatóak:

$$p_1=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{6i}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\left(1+\left(\frac{4}{5}\right)^6+\left(\left(\frac{4}{5}\right)^6\right)^2+\ldots\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^6}=\frac{5^5}{5^6-4^6}=\frac{3125}{11\,529},$$

és így tovább. Az összegük – ellenőrzésképpen – valóban 1:

$$p_1+p_2+\ldots+p_6=\left(1+\frac{4}{5}+\ldots+\left(\frac{4}{5}\right)^5\right)\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^6}=\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^6-1}{\frac{4}{5}-1}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^6}=1.$$

II. megoldás. Vizsgáljuk meg annak az esélyét, hogy a k-adik dobásnál dől el a sorsolás, ekkor dobnak először 1-et vagy 2-t: a már látottak szerint $P_k=\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{5}$, a P_k valószínűségek tehát szigorúan monoton csökkennek:

$$\underbrace{P_1>P_2>P_3>P_4>P_5>P_6}_{\text{1. kör}}>\underbrace{P_7>P_8>\ldots}_{\text{2. kör}}\quad\ldots$$

Látható, hogy minden körben az először dobó játékosnak van a legnagyobb esélye a kalandmesterségre. Tehát ha Dorottya kalandmester szeretne lenni, dobjon elsőnek.

Lang Péter (Győr, Révai M. Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzés. Sokan írták azt, hogy mivel $P_1>P_2>\ldots$, azért n növekedtével egyre kisebb az esélye, hogy valaki 1-et vagy 2-t dobjon. Tehát $k=1$-re a legnagyobb ez az esély, ezért Dorottya dobjon elsőnek. Ez a fenti megoldás egy hiányos változata.

286 dolgozat érkezett. 3 pontos 231, 2 pontos 27, 1 pontos 17, 0 pontos 11 dolgozat.

B. 3408. *Egy szabályos* $2n$ *oldalú sokszög minden csúcsára egy-egy egész számot írunk úgy, hogy a szomszédos csúcsokra írt számok különbsége* 1*. Nevezzük hegyszámnak azokat a számokat, amelyek nagyobbak mindkét szomszédjuknál és völgyszámnak azokat, amelyek kisebbek mindkét szomszédjuknál. Bizonyítsuk be, hogy a hegyszámok összegéből a völgyszámok összegét levonva* n*-et kapunk.*

(*5 pont*) Javasolta: *Hraskó András,* Budapest

Megoldás. Járjuk körbe a sokszöget valamelyik irányban, mindig a szomszédos csúcspontra lépve, amíg visszajutunk a kiindulási pontra. Ha 1-gyel kisebb számra léptünk, egyet léptünk „lefelé", ha 1-gyel nagyobb számra, akkor pedig „felfelé".

Hegyszámról indulva addig megyünk lefelé, amíg völgyszámra nem érünk, ezután addig megyünk felfelé, amíg hegyszámra érünk, eszerint a hegy- és a völgyszámok felváltva következnek, és így ugyanannyi hegyszám van, mint völgyszám.

Legyenek a körbejárás sorrendjében a hegyszámok rendre h_1, h_2, $\ldots$, h_k; a völgyszámok $v_1, v_2, \ldots, v_k$ $(1 \le k \le n)$. A hegy-, illetve völgyszámok összegének különbsége:

$$D=(h_1+h_2+\ldots+h_k)-(v_1+v_2+\ldots+v_k),$$

azaz

$$D=(h_1-v_1)+(h_2-v_2)+\ldots+(h_k-v_k). \tag{1}$$

(1)-ben (h_i-v_i) az i-edik lefelé vezető útszakasz, D pedig a teljes lefelé menő út.

A sokszöget h_1-től h_1-ig körbejárva ugyanannyit megyük fel, mint le, összesen $2n$ lépésből n-et lépünk felfelé, vagyis $D=n$.

Birkner Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.)

165 dolgozat érkezett. 5 pontos 65, 4 pontos 48, 3 pontos 17, 2 pontos 13, 1 pontos 3, 0 pontos 17. Nem versenyszerű 2 dolgozat.

B. 3409. *Tükrözzük az* $y=x^2$ *parabolát az* $(1;1)$ *pontra. Mi a tükörkép egyenlete?* (*3 pont*)

I. megoldás. A tükrözés nem változtatja meg a parabola tengelyének állását, a tükörkép-parabola csúcspontja pedig az $y=x^2$ csúcspontjának, az origónak a tükörképe, koordinátái így $(2;2)$.

A tükörkép-parabola egyenlete azért

$$y=a(x-2)^2+2$$

alakban írható. Felhasználva, hogy az $(1;1)$ ponton a tükörkép-parabola is átmegy, az a paraméter értéke is meghatározható:

$$1=a(1-2)^2+2, \qquad \text{ahonnan} \qquad a=-1.$$

A tükörkép egyenlete így $y=-x^2+4x-2$.

Megjegyzés. A megoldásban felhasználtuk a parabola geometriáját, pontosabban azt, ahogyan a parabolát jellemző alkotórészek (tengelyek, csúcspont) megjelennek az alakzat egyenletében. Az alábbi megoldásban kizárólag azt az információt használjuk fel, amit egy görbe egyenlete tartalmaz.

II. megoldás. A $P(x;y)$ pont nyilván akkor és csak akkor van rajta a tükörkép-parabolán, ha az $(1;1)$ pontra való $P'(x';y')$ tükörképe rajta van az eredeti, $y=x^2$ egyenletű parabolán.

A $P(x;y)$ tükörképe az $(1;1)$ pontra a $P'(2-x;2-y)$ pont, ez akkor és csak akkor illeszkedik az $y=x^2$ egyenletű görbére, ha koordinátáit az egyenletbe helyettesítve egyenlőséget kapunk:

$$2-y=(2-x)^2. \tag{1}$$

Azt kaptuk, hogy $P(x;y)$ pontosan akkor illeszkedik a tükörkép-parabolára, ha koordinátáira fennáll (1), ami eszerint nem más, mint a tükörkép egyenlete. Átalakítva

$$y=2-(2-x)^2=-x^2+4x-2$$

adódik.

Megjegyzés. A második megoldás módszere jóval általánosabb körülmények között is alkalmazható. Ha egy M alakzat egyenlete $E(x;y)=0$ és az M alakzat képe a Φ transzformáció során $\Phi(M)$, akkor a $\Phi(M)$ alakzat egyenlete $E\left(\Phi_x^{-1}(x;y);\Phi_y^{-1}(x;y)\right)=0$, ahol $\left(\Phi_x^{-1}(x;y);\Phi_y^{-1}(x;y)\right)$ a $P(x;y)$ pont képe a Φ transzformáció Φ^{-1} *inverzének* alkalmazása során. Ez annak a nyilvánvaló állításnak a következménye, hogy a P pont akkor és csak akkor illeszkedik a $\Phi(M)$ alakzatra, ha a $\Phi^{-1}(P)$ pont illeszkedik az M alakzatra.

501 dolgozat érkezett. 3 pontos 207, 2 pontos 107, 1 pontos 173, 0 pontos 14.

B. 3413. *A tavaly még professzionálisnak nevezett magyar labdarúgó bajnokság egy csoportjában az idén* 8 *csapat szerepel. Minden meccs egyik résztvevője otthon, a másik idegenben játszik. Egy idényben, amikor minden csapat minden másikkal pontosan egyszer játszik, egy csapat sorsolását igazságosnak nevezzük, ha felváltva játszik otthon és idegenben. Lehet-e olyan sorsolást készíteni, amelyben mind a* 8 *csapat sorsolása igazságos?*

(*4 pont*)

A megoldók kétféleképpen értelmezték a feladatot. Az egyik értelmezés (lásd I. megoldás) feltételezi, hogy minden csapat játszik minden fordulóban, a másik értelmezés (lásd II. megoldás) pedig nem feltételezi. Mindkét értelmezést elfogadtuk. (Egyébként a valódi bajnokságokat az első értelmezés szerint szokták rendezni.)

I. megoldás. Az első értelmezés szerint $\frac{\binom{8}{2}}{\frac{8}{2}}=7$ fordulót rendeznek. Osszuk a csapatokat két csoportba aszerint, hogy páros vagy páratlan héten játszanak otthon. Álljon az $A=\{1,2,3,4\}$ csoport abból a négy csapatból, akik páros héten játszanak otthon, a $B=\{5,6,7,8\}$ csoport pedig a maradék négy csapatból, akik páratlan héten játszanak otthon. Négy forduló után elfogynak az A–B párosítások, és így az ötödik fordulóban két A-beli csoport kénytelen egymással játszani, így az egyik számára elvész az igazságosság. Eszerint nem lehet a feltételeknek megfelelő sorsolást készíteni.

II. megoldás. A második értelmezés esetén rendezhetnek több mint 7 fordulót, és ilyenkor lehet igazságos sorsolást készíteni. Egy ilyen látható a táblázatban, amelyben mindig az első helyen álló csapat játszik otthon.

1. forduló	2. forduló	3. forduló	4. forduló	5. forduló	6. forduló	7. forduló	8. forduló
1–2	3–1	1–4	5–1	1–6	7–1	1–8	8–2
6–5	5–7	2–3	4–2	2–5	6–2	2–7	7–3
7–4	4–8	7–6	6–8	3–4	5–3	3–6	6–4
8–3		8–5		8–7		4–5	

Kovács Andrea (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t.)

336 dolgozat érkezett. 4 pontos 300, 3 pontos 7, 2 pontos 11, 1 pontos 8, 0 pontos 10.

B. 3415. *A p paraméter mely értékeire van az*

$$x+1=\sqrt{px}$$

egyenletnek pontosan egy valós gyöke?

(*4 pont*)

Megoldás. Ha $p=0$, akkor az egyenlet minden valós számra értelmes, és ekkor egyetlen megoldása van, $x=-1$.

Ha $p>0$, akkor az egyenlet értelmezési tartománya a nemnegatív valós számok halmaza és a négyzetre emelt egyenlet ezen a halmazon ekvivalens az eredetivel.

Ha $p<0$, akkor az egyenlet értelmezési tartománya a nem pozitív valós számok halmaza és a négyzetre emelt egyenlet a $[-1;0]$ halmazon ekvivalens az eredetivel.

Ha most az egyenletet négyzetre emeljük, akkor rendezés után az

$$x^2+(2-p)x+1=0 \tag{1}$$

másodfokú egyenletet kapjuk.

A p paraméternek azoknak az értékeit kell megkeresnünk, amelyekre az (1) egyenletnek egy gyöke van, és ez az eredeti egyenletnek is gyöke, **vagy pedig** az (1) egyenletnek két gyöke van, és ezek közül pontosan az egyik gyöke az eredeti egyenletnek.

Az (1) egyenlet diszkriminánsa, $D(p)=(2-p)^2-4=p(p-4)$, ez nulla, ha $p=0$ (ezt az esetet már vizsgáltuk), vagy pedig ha $p=4$. Ekkor az (1) egyenlet egyetlen valós gyöke $x=1$, ami az eredeti egyenletnek is megoldása.

$D(p)>0$ pontosan akkor teljesül, ha $p>4$ vagy $p<0$. Ha $p>4$, akkor az (1) egyenlet két valós gyökére

$$x_1+x_2=p-2>0 \qquad \text{és} \qquad x_1x_2=1>0,$$

a két gyök összege is és szorzata is pozitív, és így maguk a gyökök is pozitívak. Ebben az esetben van az eredeti egyenletnek is két különböző valós gyöke.

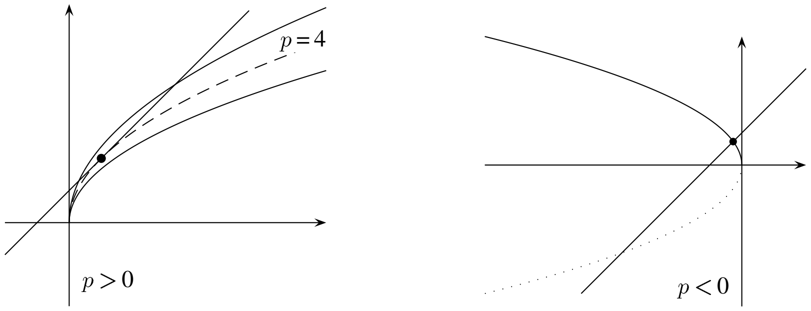
Ha $p<0$, akkor a gyökök összege negatív, szorzatuk továbbra is pozitív, most az (1) egyenlet mindkét gyöke negatív, így mindkettő eleme az eredeti egyenlet értelmezési tartományának. Mivel a szorzat értéke 1 és a gyökök különbözők, egyikük abszolút értéke 1-nél nagyobb, másikuké pedig 1-nél kisebb. Előbbi az eredeti egyenletnek is gyöke, hiszen -1 és 0 közé esik, az utóbbi viszont nem, hiszen kisebb -1-nél. Ebben az esetben az eredeti egyenletnek pontosan egy valós gyöke van.

Összefoglalva: az egyenletnek pontosan akkor van egy megoldása, ha $p=4$ vagy $p\le 0$.

Megjegyzések. 1. A statisztikákból látható, hogy a nagy számú beküldött dolgozatnak körülbelül a háromnegyede alapvetően hibás. A feladat nem a négyzetre emelt egyenlet diszkriminánsának a 0 voltát firtatta; aki mechanikusan közelítette meg a kérdést, legfeljebb 1 pontot kapott. Felhívjuk versenyzőink és tanáraik figyelmét a dolgozatok tanulságára: még akkor is kiábrándító a kép, ha a sablonos kérdés csapdája belejátszott a sablonos – és rossz – megoldásba.

2. Az (1) egyenlet gyökeinek a vizsgálata természetesen a megoldóképletből nyert formulák elemzésével is elvégezhető.

3. Világossá válik a feladat eredménye, és a csapda is elkerülhető, ha a méltatlanul elhanyagolt *grafikus módszert* alkalmazzuk.



Az *ábrákon* mindenféle számolás nélkül látható, hogy a $p>0$ esetben a parabolaívnek pontosan akkor van egy közös pontja az egyenessel, ha érinti: a megoldások számát tekintve tehát ekvivalens a két egyenlet, akkor kapunk egy gyököt, ha nulla a diszkrimináns.

Ha viszont $p<0$, akkor a parabolaív és az egyenes pontosan egy pontban metszik egymást, minden negatív p megoldás.

481 dolgozat érkezett. 4 pontos 57, 3 pontos 33, 2 pontos 21, 1 pontos 213, 0 pontos 138 dolgozat. Nem versenyszerű 19.

B. 3420. *Keressünk olyan $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ nem konstans függvényt, amelynek grafikonja 3-szoros nagyítással kapható a függvény négyzetének grafikonjából.*

(*5 pont*) Javasolta: *Lóczi Lajos*, Budapest

Megoldás. Olyan (nem konstans) f függvényt adunk meg, amelyre $f(3x)=3\cdot f^2(x)$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy f grafikonja origó középpontú 3-szoros nagyítással kapható az f^2 grafikonjából.

I. Példa. Legyen h tetszőleges olyan $[0,1)\to\mathbf{R}$ függvény, amelynek az értékkészlete $\left\{0,\dfrac{1}{3}\right\}$, és legyen

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3} \quad \text{vagy } 0, & \text{ha } x=0,\\ h(\{\log_3|x|\}), & \text{ha } x\neq 0.\end{cases}$$

($\{t\}$ a t szám törtrészét jelöli.) Ekkor $f(3x)=f(x)$ és $f^2(x)=\dfrac{1}{3}f(x)$, ezért f megfelelő.

Pallos Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) és
Rácz Béla András (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.)

II. Példa. Tetszőleges $a>0$ számra tekintsük az $f(x)=\frac{1}{3}a^{|x|^{\log_3 2}}$ függvényt. Erre

$$f(3x)=\frac{1}{3}a^{|3x|^{\log_3 2}}=\frac{1}{3}a^{3^{\log_3 2}\cdot|x|^{\log_3 2}}=\frac{1}{3}a^{2|x|^{\log_3 2}}=\frac{1}{3}\left(a^{|x|^{\log_3 2}}\right)^2=\frac{1}{3}(3f(x))^2=3f^2(x).$$

Puskás Anna (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.)

87 dolgozat érkezett. 5 pontos 31, 4 pontos 7, 3 pontos 6, 2 pontos 3, 1 pontos 5, 0 pontos 35.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (630–634.)

C. 630. Egy négyjegyű szám első két számjegyének összege egyenlő az utolsó két számjegy összegével. Az első és az utolsó számjegy összege a harmadik számjegyet adja. A második és negyedik számjegy összege az első és a harmadik összegének kétszerese. Melyik ez a négyjegyű szám?

C. 631. Az $y=|x-1|+|x+1|$ függvény grafikonja és az $y=c$ egyenletű egyenes által közrezárt síkidom területe 30. Mekkora a c állandó értéke?

C. 632. A 3, 15, 24, 48, ... sorozat a 3 azon többszöröseiből áll, amelyek 1-gyel kisebbek egy négyzetszámnál. Mennyi a maradék, ha a sorozat 2001-edik tagját elosztjuk 1000-rel?

Javasolta: *Magyar Zsolt,* Budapest

C. 633. Egy tetraéder lapjainak területe egyenlő, továbbá a háromszög lapok beírható köreinek sugarai is egyenlőek. Mutassuk meg, hogy a tetraéder lapjai egybevágóak.

C. 634. Csonkakúp alakú, felfelé szélesedő 1 literes háztartási mérőedényen a $1/2$ liter jele az edény magasságának $2/3$ részénél található. Mekkora az alapkör és a fedőkör átmérőjének aránya?

Beküldési határidő: 2001. június 15.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest, Pf. 47. 1255

Nyári matektábor!

Idén is megrendezzük a *Matektábort*, Abádszalók és Pusztafalu után most Simán és Telkibányán. A délelőtti szakmai foglalkozásokat kiegészítik a délutáni játékosabb programok, mint például a „tortúra” és a „logikai kaland”. Ezentúl a zempléni környezet kiváló lehetőséget biztosít a kikapcsolódásra, kirándulásra is. Az 5–6. osztályosokat *Telkibányára* várjuk *2001. július 23-tól július 29-ig* (140 diákot), a középiskolásokat *Simára 2001. augusztus 13-tól augusztus 19-ig* (100 diákot), a 7–8. osztályosokat pedig mindkét táborban szívesen látjuk. A részvételi díj 15 000 Ft, részletekben is befizethető.

Jelentkezni *május 31-ig* lehet Lakatos Tibornál a debreceni Fazekas Mihály Gimnáziumban (Debrecen, Hatvan u. 44., tel.: (52) 418-875) További információk: `http://math.at.extra.hu`, e-mail: `tabor@mailbox.hu`, tel.: (30) 996-6647.

Horváth Gábor, Kis Gábor, Végh László

A B pontversenyben kitűzött feladatok (3462–3471.)

B. 3462. Milyen n-ekre érhető el, hogy a $\pm1\pm2\pm\ldots\pm n$ alakú összegek között szerepeljen a 100?
(*3 pont*)

B. 3463. Egy félkör alakú szivaccsal, amelynek átmérője 20 cm, végigtöröljük egy szoba padlójának egy sarkát úgy, hogy az átmérő két végpontja folyamatosan érinti a szoba derékszöget bezáró két falát. Mekkora területet töröl fel eközben a szivacs?
(*3 pont*)

B. 3464. Hány olyan n-jegyű szám van, amelyben a számjegyek összege $9n-8$?
(*4 pont*)

B. 3465. Az egységoldalú $ABCD$ négyzet AB oldalán lévő E és az F pontokra $AE=\frac{1}{n}$ és $BF=\frac{1}{m}$, ahol m és n pozitív egész számok. A B pontból kiinduló, AB-vel 30°-os szöget bezáró egyenes érinti az EF, mint átmérő fölé, a négyzet belsejébe rajzolt félkört. Határozzuk meg az m és n értékét. Van-e a kapott számpárok között olyan, amely mellett a félkör érinti az AC átlót is?
(*3 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint,* Eger

B. 3466. Határozzuk meg az $ABCD$ négyzet síkjában azon pontok mértani helyét, amelyekre $\sin APB\sphericalangle=\sin DPC\sphericalangle$.
(*4 pont*)

B. 3467. Keressük meg az $x(1+x)(3-x)$ kifejezés maximumát a pozitív számok körében a differenciálszámítás alkalmazása nélkül.*
(*4 pont*)

B. 3468. Egy konvex tízszög semelyik három átlója sem megy át egy ponton, és egy, a sokszög belsejében lévő P pont egyik átlón sincs rajta. Mutassuk meg, hogy a sokszög csúcsai közül legalább 28-féleképpen választható ki négy úgy, hogy az általuk meghatározott négyszög tartalmazza P-t.
(*5 pont*)

B. 3469. Határozzuk meg mindazokat a folytonos f függvényeket, amelyekre $f\big(f(x)\big)=x+f(x)$ minden x valós számra.
(*5 pont*) *Gillis–Turán matematikaverseny,* 2001

* A feladat megoldása előtt ajánljuk Csete Lajos 267. oldalon kezdődő cikkének elolvasását.

B. 3470. Írjuk föl annak az egyenesnek az egyenletét, amely az $y=3x^4-4x^3$ egyenletű görbét két különböző pontban érinti.

(*4 pont*)

B. 3471. Egy hangya mászkál az $x^2+y^2+xy=6$ egyenletű görbe által határolt területen. Útvonala a koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenes szakaszokból áll. A hangya a görbe tetszőleges pontjából kiindulva addig megy egyenesen a görbe belsejében, amíg újra eléri a görbe határát. Ekkor 90°-kal elfordul és folytatja útját a görbe belsejében. A hangya csak akkor áll meg, ha olyan határponthoz ér, amelyben már járt, vagy ha nem tudja útját a fenti szabálynak megfelelően folytatni. Bizonyítsuk be, hogy függetlenül a kiindulási ponttól a hangya előbb-utóbb megáll.

(*5 pont*) *Gillis–Turán matematikaverseny,* 2000

❄

Beküldési határidő: 2001. június 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (266–268.)

A. 266. Az A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 pontok egy körön helyezkednek el. Tetszőleges $0<t<1$ valós számra legyen $C_i(t)$ és $D_i(t)$ az A_iB_i szakaszt $t:(1-t)$ arányban osztó pont ($i=1, 2, 3$). Legyen $e(t)$ a $C_1(t)C_2(t)C_3(t)$ és $D_1(t)D_2(t)D_3(t)$ háromszögek körülírt köreinek hatványvonala (ha létezik).

Igazoljuk, hogy az $e(t)$ egyenesek vagy párhuzamosak, vagy egy ponton mennek át.

Dőtsch András, Szeged

A. 267. Legyen m, n pozitív egész és $0\le x\le 1$. Igazoljuk, hogy

$$(1-x^n)^m+\left(1-(1-x)^m\right)^n\ge 1.$$

Vojtech Jarnik emlékverseny, Ostrava, 2000

A. 268. Egy szabályos $2n$-szög n csúcsát pirosra, a többi csúcsát kékre színeztük. Nagyság szerint sorbarendezzük az összes piros pontpár távolságát, és nagyság szerint sorbarendezzük az összes kék pontpár távolságát is. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott két, $\binom{n}{2}$ hosszúságú számsorozat ugyanaz.

Vojtech Jarnik emlékverseny, Ostrava, 2000

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS

(Volume 51. No. 5. May 2001)

New exercises for practice – competition C (see page 296): **C. 630.** In a 4-digit number, the sum of the first two digits is equal to that of the last two digits. The sum of the first and last digits is equal to the third digit. Finally, the sum of the second and fourth digits is twice the sum of the other two digits. Which number has all these properties? **C. 631.** Determine the value of c so that the area enclosed by the graphs $y=|x-1|+|x+1|$ and $y=c$ is 30. **C. 632.** The sequence 3, 15, 24, 48, ... contains those multiples of 3, in increasing order, which are 1 less than a perfect square. Determine the remainder when the 2001st term of the sequence is divided by 1000. (Proposed by *Zs. Magyar,* Budapest) **C. 633.** Each face of a tetrahedron has the same area, moreover, they all have equal inradii. Prove that the faces are all congruent. **C. 634.** A 1 litre measure is in the shape of a frustum of a cone. Half a litre can be measured at the $2/3$ of the altitude of the frustum. Find the ratio of the diameters of the bases.

New exercises – competition B (see page 297): **B. 3462.** Determine those positive integers n for which 100 can be expressed in the form $\pm 1 \pm 2 \pm \ldots \pm n$. (*3 points*) **B. 3463.** The diameter of a half disc shaped sponge is 20 cm. A corner of a room is wiped with the sponge so that the two extremal points of its diameter touch the two perpendicular walls all the time. Determine the area one can wipe this way. (*3 points*) **B. 3464.** A number has n digits which add up to $9n-8$. How many such n-digit numbers are there? (*4 points*) **B. 3465.** Let m, n be positive integers, and set the points E and F on side AB of a unit square $ABCD$ such that $AE=1/n$ and $BF=1/m$. Determine m and n such that the line through B that forms an angle of 30° with AB touches the semicircle drawn inside the square with diameter EF. Is it possible that AC touches the semicircle at the same time? (*3 points*) (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **B. 3466.** In the plane a square $ABCD$ is given. Determine the locus of those points P for which $\sin(\angle APB)=\sin(\angle DPC)$. (*4 points*) **B. 3467.** Find the maximum of the function $x(1+x)(3-x)$ on the set of positive numbers, without using calculus. (*4 points*) **B. 3468.** No three diagonals of a convex 10-gon intersect at the same point. A point P is given inside the polygon such that P is not incident to any diagonal of the polygon. Prove that there are at least 28 ways to select 4 vertices of the polygon such that P is inside the quadrilateral determined by these points. (*5 points*) **B. 3469.** Find those continuous functions f, for which $f(f(x))=f(x)+x$ for every real number x. (*5 points*) (*Gillis–Turán Mathematics Competition, 2001*) **B. 3470.** Find an equation for the line that touches the curve $y=3x^4-4x^3$ at two different points. (*4 points*) **B. 3471.** An ant is walking inside the region bounded by the curve whose equation is $x^2+y^2+xy=6$. Its path is formed by straight segments parallel to the coordinate axes. It starts at an arbitrary point on the curve and takes off inside the region. When reaching the boundary, it turns by 90° and continues its walk inside the region. When arriving at a point on the boundary which it has already visited, or where it cannot continue its walk according to the given rule, the ant stops. Prove that, sooner or later, and regardless of the starting point, the ant will stop. (*5 points*) (*Gillis–Turán Mathematics Competition, 2000*)

New problems – competition A (see page 298): **A. 266.** Points A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 lie on a circle. Let, for any $0<t<1$ and $i=1, 2, 3$, $C_i(t)$ and $D_i(t)$ denote the two points that divide the segment A_iB_i in the ratio $t:(1-t)$. Let $e(t)$ denote the radical axis of the circumcircles of triangles $C_1(t)C_2(t)C_3(t)$ and $D_1(t)D_2(t)D_3(t)$ (if it exists). Prove that the lines $e(t)$ are either parallel or concurrent. (*A. Dőtsch,* Szeged) **A. 267.** Let m, n be positive integers and let $0\le x\le 1$. Prove that $(1-x^n)^m+\left(1-(1-x)^m\right)^n\ge 1$. (*10th Vojtech Jarnik Mathematical Competition,* Ostrava, 2000) **A. 268.** Let us choose arbitrarily n vertices of a regular $2n$-gon and colour them red. The remaining vertices are coloured blue. We arrange all red-red distances into a nondecreasing sequence and do the same with blue-blue distances. Prove that the two sequences hence obtained are identical. (*10th Vojtech Jarnik Mathematical Competition,* Ostrava, 2000)