Léteznek-e transzcendens számok?

A legmegszokattabb számok az egész számok és a törtek. Ezeket együttesen *racionális számoknak* nevezzük. Tanulmányaink során a legelső nem racionális szám, amellyel találkozunk, a π, a kör kerületének és átmérőjének aránya. Az is megtörténik, hogy a tanórán közlik, hogy a π nemcsak irracionális, hanem *transzcendens.* Természetesen ennek bizonyítása nem szerepel, de jószerivel az sem válik világossá, mik azok a transzcendens számok. Az is előfordul, hogy megemlítik, az e (a természetes logaritmus alapszáma) ugyancsak transzcendens.

Minden bizonnyal $\sqrt{2}$ az első olyan szám, amelyről be is bizonyítják, hogy irracionális, vagyis nem állítható elő két egész szám hányadosaként. Általában is igaz, hogy a „gyökös kifejezések” irracionálisak. Ezek a gyökös kifejezések azért annyiból egyszerűek, hogy valamilyen egész együtthatós polinomjuk 0-t ad. Ha például nézzük az $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ számot, akkor erre $\alpha^4-10\alpha^2+1=0$ adódik.

Az olyan számokat, amelyek gyökei egy – nem triviális – egész együtthatós polinomnak, algebrai számoknak nevezzük. (Triviális az a polinom, amelynek minden együtthatója 0. E polinomnak minden szám gyöke.) Ne gondoljuk azt, hogy algebrai szám ugyanazt jelenti, mint gyökös kifejezés. Például az x^5-4x+2 polinom gyökei definíció szerint algebrai számok, de egyiküket sem lehet kifejezni az egész számokból a négy alapművelet és gyökvonások segítségével. De térjünk vissza a transzcendens számokhoz.

Transzcendenseknek azokat a számokat nevezik, amelyek nem algebraiak.

Egy transzcendens számot nehéz „elképzelni”. Pedig „nagyon sokan vannak”. Ha egy tizedestört számjegyeit egymás után véletlenszerűen határozzuk meg, akkor biztosan transzcendens számot kapunk a végén. Csak persze nincs „vége”. A π vagy az e transzcendenciájának bizonyítása komoly segédeszközöket igényel. Egyébként a π transzcendeciájából következik, hogy egy egységnyi oldalú négyzettel azonos területű kör nem szerkeszthető körző és vonalzó „szabályos” felhasználásával.

A továbbiakban meg fogjuk mutatni, hogy viszonylag egyszerűen beláthatjuk bizonyos számokról, hogy azok transzcendensek. Sőt, mi több, olyan számokat adunk meg, amelyeket egész könnyen le lehet írni (mármint a szám jegyeit szolgáló eljárást). Sokan próbálkoztak a π jegyeinek egymásutáni meghatározásával; az egyik ilyen próbálkozó személyéről nevezték el Ludolf-féle számnak. Természetesen a próbálkozásokat mindig „elölről” kell kezdeni. Nem lehet az első – mondjuk – ötmillió jegy figyelembe vétele nélkül megadni az ötmillióegyediket. De hasonló igaz a $\sqrt{2}$ jegyeinek a meghatározására is.

Azon számok, az úgynevezett *Liouville*-számok esetében, amelyeket itt fogunk megadni, bármelyik jegyet meg lehet mondani anélkül, hogy ehhez a többi jegyre szükség volna. E számok megkonstruálásánál (pontosabban a transzcendencia bizonyításánál) a racionális számokkal való *approximációra* van szükség. Egy α valós számot törttel approximálni (közelíteni) azt jelenti, hogy a számhoz közel találunk egy törtet. Tulajdonképpen

KöMaL – 2001/4 MAT0104 cianmagentayellowblack2002. június 19. – 8:51 (1. lap)

ennél többről van szó, egyre közelebb levő törtet kell találni. Példaképpen szerepeljen itt a következő eljárás:

„Ha x közel van a $\sqrt{a}$-hoz, akkor $\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{a}{x}\right)$ sokkal közelebb van". Az $a=2$ esetben $\sqrt{2}\approx 1{,}41421356\ldots$. Ha a $\sqrt{2}\approx\dfrac{3}{2}$ közelítést vesszük, akkor az egymásutáni értékek: $\dfrac{17}{12}, \dfrac{577}{408}, \dfrac{665857}{470832}, \ldots$ stb. Az ezekre adódó tizedestörtek: 1,5; 1,41667...; 1,414216...; 1,41421356237... stb. Láthatjuk, hogy itt minden lépésben nagyjából megduplázódik a helyes jegyek száma. Ez annak a következménye, hogy a „közelítő" $\dfrac{p}{q}$ tört $\sqrt{2}$-től való eltérése kisebb, mint $\dfrac{1}{q^2}$. Bizonyítható, hogy ez a jelenség lépésről lépésre öröklődik. Ezt tekinthetjük „jó közelítésnek".

Érdekes jelenség, hogy a racionális számokat nem lehet racionális számokkal jól közelíteni (persze nincs is rá szükség), míg az irracionális számokat lehet. Ez a megfigyelés a kiindulása a transzcendens számok konstruálásának (illetve transzcendenciájuk bizonyításának). Megjegyezzük azonban, hogy a transzcendencia bizonyításához „a jó közelíthetőség" tételéhez nincs szükség.

Tétel. *Az α valós számhoz pontosan akkor található végtelen sok olyan (különböző) $\dfrac{p}{q}$ tört, amelyre $\left|\alpha-\dfrac{p}{q}\right|<\dfrac{1}{q^2}$, ha α irracionális.*

Bizonyítás. Mindenek előtt megjegyezzük, hogy akármilyen q esetén az ilyen nevezőjű törtek közül legfeljebb kettő közelítheti meg α-t jobban, mint $\dfrac{1}{q}$, egyik „balról", másik „jobbról". Ha adott egy N természetes szám, akkor – hasonlóképpen – legfeljebb $2N$ darab olyan N-nél kisebb nevezőjű tört van, amely a nevező reciprokánál közelebb van α-hoz.

Legyen most először $\alpha=\dfrac{a}{b}$ racionális szám. Ha $\left|\dfrac{a}{b}-\dfrac{p}{q}\right|\le\dfrac{1}{q^2}$, akkor ebből $|aq-bp|\le\dfrac{b}{q}$ következik. A $q>b$ esetben tehát $|aq-bp|<1$; ami csak úgy lehet, hogy $aq=bp$ (vagyis $\dfrac{p}{q}=\dfrac{a}{b}$), hiszen -1 és 1 között 0 az egyetlen egész szám. Az előzetes megjegyzés szerint b-nél nem nagyobb nevezőjű jól közelítő tört véges sok van, b-nél nagyobb nevezőjű pedig egy, így a jól közelítő törtek száma véges.

Legyen most α egy irracionális szám. Itt is egy előzetes megjegyzéssel kezdjük. Tekintsünk egy N természetes számot, és nézzük a 0α, 1α, 2α, ..., $(N-1)\alpha$, $N\alpha$ számok törtrészét. Példaként álljon itt az $\alpha=\sqrt{2}$ és $N=5$ eset:

$\{0\sqrt{2}\}$	$\{1\sqrt{2}\}$	$\{2\sqrt{2}\}$	$\{3\sqrt{2}\}$	$\{4\sqrt{2}\}$	$\{5\sqrt{2}\}$
0	0,4142...	0,8284...	0,2426...	0,6568...	0,0710...

A számokat rakjuk nagyság szerint sorba:

$$0;\quad 0{,}0710;\quad 0{,}2426;\quad 0{,}4142;\quad 0{,}6568;\quad 0{,}8284.$$

Látható, hogy a sorban két olyan lépés is van, amikor az ugrás kisebb, mint $0{,}2=\frac{1}{5}$. Egy ilyen „kis ugrás” minden irracionális számnál fellép. Rakjuk sorba nagyság szerint a

$$\{0\alpha\},\ \{1\alpha\},\ \{2\alpha\},\ \ldots,\ \{(N-1)\alpha\},\ \{N\alpha\}$$

számokat. Ez $N+1$ darab szám, amelyek mind a $[0,1)$ intervallumba esnek, és az elsőt kivéve egyikük sem racionális, hiszen α sem az. Osszuk most fel a $[0,1]$ intervallumot a 0, $\frac{1}{N}$, $\frac{2}{N}$, $\ldots$, $\frac{N-1}{N}$, $\frac{N}{N}$ osztópontokkal $\frac{1}{N}$ hosszúságú részintervallumokra. Ezeknek az intervallumoknak a száma N. A skatulya-elv szerint tehát van olyan intervallum, amelybe a fenti $N+1$ szám közül kettő is jut. Van tehát olyan nemnegatív $k,\ell\le N$, amelyre $\{k\alpha\}<\{\ell\alpha\}$ (egyenlők nem lehetnek, mert α irracionális), továbbá $\{\ell\alpha\}-\{k\alpha\}<\frac{1}{N}$ (α irracionalitása miatt itt sem lehet egyenlőség). A törtrészekre vonatkozó elemi összefüggések alapján ebből $0<\{(k-\ell)\alpha\}<\frac{1}{N}$ következik. Legyen $q=k-\ell$. $0\le k,\ell\le N$ miatt $|q|\le N$. A kapott $\{q\alpha\}<\frac{1}{N}$ összefüggés a következőt jelenti:

Vannak olyan pozitív $q\le N$ és p egész számok, amelyekre $|q\alpha-p|<\frac{1}{N}$.

Az is feltehető, hogy p és q relatív prímek. Hiszen, ha pu és qu megfelelnek, azaz, ha $|qu\alpha-pu|<\frac{1}{N}$, akkor u-val osztva azt kapjuk, hogy $|q\alpha-p|<\frac{1}{Nu}<\frac{1}{N}$; és persze $q\le qu<N$.

Ebből már azonnal következik az, hogy $\frac{p}{q}$ jól közelíti α-t. Valóban, felhasználva a $0<q\le N$ összefüggést, azt kapjuk, hogy

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{Nq}\le\frac{1}{q^2}.$$

Még azt kell belátni, hogy végtelen sok ilyen tört van. Ez azt jelenti, hogy akármennyi megfelelő törtet veszünk is, mindig található ezektől különböző jól közelítő tört.

Tegyük fel, hogy $\frac{p_1}{q_1}$, $\ldots$, $\frac{p_n}{q_n}$ megfelelő közelítő törtek, vagyis a $|q_i\alpha-p_i|=\varepsilon_i$ pozitív számokra $\varepsilon_i<\frac{1}{q_i}$ $(i=1,\ldots,n)$, továbbá p_i és q_i bármely i esetén relatív prímek. Mivel az ε_i számok pozitívak, ezért van olyan N természetes szám, amely nagyobb, mint ezek bármelyikének a reciproka, vagyis bármely i esetén $\frac{1}{N}<|q_i\alpha-p_i|$. A fenti eljárást erre az N-re végezve a kapott p és q számokkal $|q\alpha-p|<\frac{1}{N}<|q_i\alpha-p_i|$ adódik. Ez az egyenlőtlenség nyilván akkor is fennáll, ha p és q legnagyobb közös osztójával egyszerűsítünk. Így $\frac{p}{q}$ nem egyezhet meg a már figyelembe vett törtek egyikével sem, tehát újabb törtet kaptunk.

Ezekután bebizonyítjuk *Liouville*-nek azt a tételét, amelyik azt mondja ki, hogy az algebrai számok nem közelíthetők nagyon jól racionális számokkal.

Tétel. *Ha α gyöke egy egész együtthatós n-edfokú polinomnak, akkor csak véges sok olyan $\frac{p}{q}$ tört létezik, amelyre $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{n+1}}$.*

Bizonyítás. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a bizonyításhoz valójában nincs szükség az előző tételre. Az is világos, hogy ez a tétel az $n=1$ esetben pontosan azt adja, hogy a racionális számok nem approximálhatóak jól.

Mint az előző tételben is láttuk, ha a pozitív q kisebb egy előre megadott N számnál, akkor legfeljebb véges sok törtre lehet $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q}$.

Tegyük fel, hogy α gyöke az egész együtthatós $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ polinomnak, ahol $a_n \neq 0$. Az $f(x)$ polinomnak legfeljebb n gyöke lehet, ezért csak véges sok racionális gyöke van (0 darab is véges sok!). A fenti N számot megválaszthatjuk úgy, hogy az itt szóbajövő törtek nevezőjénél is nagyobb legyen.

Most további törteket fogunk kizárni. Ha $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq 1$, akkor a megkivánt egyenlőtlenség nem állhat fenn, ezért feltehető, hogy $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < 1$. Ebből azonnal következik, hogy $\alpha - 1 < \frac{p}{q} < \alpha + 1$, vagyis $\left|\frac{p}{q}\right| < |\alpha| + 1$.

Tekintsünk most egy $\frac{p}{q}$ törtet, ami nem gyöke az $f(x)$ polinomnak. Ez azt jelenti, hogy

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + \dots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 \neq 0. \tag{1}$$

A tagokat közös nevezőre hozva és összeadva egy olyan törtet kapunk, amely nem 0, a számlálója egész szám és a nevezője q^n. Ez pedig azt jelenti, hogy e tört abszolút értéke legalább $\frac{1}{q^n}$, tehát

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq \frac{1}{q^n}. \tag{2}$$

Tudjuk viszont, hogy $f(\alpha) = 0$. Ezért $f\left(\frac{p}{q}\right) - f(\alpha) = f\left(\frac{p}{q}\right)$ következtében

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right) - f(\alpha)\right| \geq \frac{1}{q^n}. \tag{3}$$

(3) bal oldalát átalakítva olyan összeghez jutunk, amelynek tagjai $a_i\left(\left(\frac{p}{q}\right)^i-\alpha^i\right)$ alakúak. Minden egyes ilyen tagból kiemelhető $\left(\frac{p}{q}\right)-\alpha$. Ezért a bal oldalon kiemelhető ez a tényező és egy olyan $F\left(\frac{p}{q},\alpha\right)$ polinom marad, amelynek az együtthatói az $f(x)$ együtthatóiból készíthetők el. Ezek után megvizsgáljuk (3) bal oldalának az abszolút értékét, amire

$$\left|F\left(\frac{p}{q},\alpha\right)\right|\cdot\left|\left(\frac{p}{q}\right)-\alpha\right|\geq\frac{1}{q^n} \tag{4}$$

adódik. Most a bal oldal első tényezőjét növelni fogjuk. Ez a tényező

$$\beta_i=a_i\left[\sum_{j=0}^{i-1}\left(\frac{p}{q}\right)^j\alpha^{i-1-j}\right] \tag{5}$$

alakú tagok összege. Felhasználjuk azt, hogy az összeg abszolút értéke legfeljebb akkora, mint a tagok abszolút értékének az összege és a szorzat abszolút értéke megegyezik a tényezők abszolút értékének a szorzatával. A szóbanforgó tényező tehát legfeljebb $|\beta_0|+\cdots+|\beta_n|$. Most egy-egy β_i értékét fogjuk felülről becsülni. Legyen A az a_i-k abszolút értékének a maximuma. $\left|\frac{p}{q}\right|\leq|\alpha|+1$ és a triviális $|\alpha|\leq|\alpha|+1$ alapján (5)-ben $|\beta_i|\leq A\cdot i\cdot(|\alpha|+1)^{i-1}$ adódik. Mivel $|\alpha|+1\geq 1$, ezért tovább növelünk, ha mindegyik $(|\alpha|+1)^{i-1}$ helyébe $(|\alpha|+1)^n$-t írunk. A vizsgált tényezőben összesen $n+(n-1)+\cdots+1<n^2$ tag van, ezért a vizsgált tényező legfeljebb

$$K=n^2\cdot A\cdot(|\alpha|+1)^n. \tag{6}$$

Ez a K szám nem függ (a „megmaradt") $\frac{p}{q}$ törtektől, csak az előre magadott $f(x)$ polinomtól és az α számtól. Azt kaptuk tehát, hogy vannak olyan K, N számok, hogy ha $q>N$, akkor

$$K\cdot\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geq\frac{1}{q^n}.$$

Ha mármost az M számot úgy választjuk, hogy $M>K$ és M nagyobb a fentebb választott N számnál is; továbbá olyan q-t választunk, amelyre $q>M$, akkor a legutóbbi egyenlőtlenségből

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geq\frac{1}{q^{n+1}} \tag{7}$$

adódik. Eszerint csak véges sok olyan tört létezik, amelyikre (7) nem teljesül.

Az előbbi tétel segítségével előállíthatunk végtelen sok transzcendens számot, az úgynevezett *Liouville* számokat.

Tétel. Tetszőleges $m > 1$ természetes számra létezik az

$$(*) \qquad \alpha_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{n!}}$$

végtelen összeg, amely transzcendens számot állít elő.

Bizonyítás. Azt kellene mindenekelőtt bizonyítani, hogy a fenti „végtelen összeg" értelmesen definiálható. Ez nem okozna túl nagy nehézséget, de könnyen értelmezhető az $m = 10$ esetben. Azért választjuk ezt az esetet, mert számrendszerünk alapszáma 10. Hasonló eljárás alkalmazható minden más m esetében, ha az m alapú számrendszerben dolgozunk.

Legyen tehát $\alpha = \alpha_{10}$. A $(*)$ felírás most egy végtelen tizedestörtet szolgáltat. Ebben a tizedestörtben az i-edik helyen 1 áll, ha alkalmas n természetes számra $i = n!$ (0 <u>nem</u> természetes szám), a többi helyen pedig 0 áll. A kapott szám tehát

$$\alpha = 0{,}110001000000000000000000100\ldots$$

alakú. Most tetszőleges $k > 2$ egész számra értelmezzük a $\dfrac{p_k}{q_k} = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{m^{n!}}$ „közelítő" törteket. Ha közös nevezőre hozunk és úgy adunk össze, akkor $q_k = 10^{k!}$ adódik, míg p_k utolsó számjegye 1 lesz. Ezért a fenti tört már egyszerűsíthetetlen alak.

Nézzük ezután a $\gamma_k = \alpha - \dfrac{p_k}{q_k}$ különbséget. Ez egy olyan tizedestört, amelyben az első 0-tól különböző jegy a $(k+1)!$-adik helyen szerepel és a további jegyek között szerepel a 0 is. Ezért biztosan kisebb annál a racionális számnál, amelyben eggyel előbb szerepel 1, és minden más helyen 0 áll:

$$\gamma_k < \frac{1}{10^{(k+1)!-1}}.$$

Mivel $(k+1)! - 1 = k \cdot k! + (k! - 1) < k \cdot k!$, ezért $\gamma_k < \dfrac{1}{(q_k)^k}$.

Legyen most n rögzített és tekintsük az összes $k > n + 1$ számot. Ezekre

$$\alpha - \frac{p_k}{q_k} = \gamma_k < \frac{1}{(q_k)^k} \le \frac{1}{(q_k)^{n+1}}$$

teljesül. Ezek a törtek mind különbözőek, mert rövidíthetetlen alakban vannak megadva, és ezek különböznek. Eszerint α bármely n-re végtelen sokszor „jól közelíthető", tehát egyetlen n-re sem lehet gyöke egy nem azonosan 0 egész együtthatós polinomnak; α tehát transzcendens.

Fried Ervin

William Lowell PUTNAM Matematikaverseny
2000. december 2.

Az Egyesült Államokban és Kanadában 1938 óta évente megrendezett főiskolai verseny feladatai a következők voltak:

A1. Legyen A pozitív valós szám. Melyek a $\sum_{j=0}^{\infty} x_j^2$ összegek lehetséges értékei, ha tudjuk, hogy $x_0, x_1, x_2, \ldots$ olyan valós számok, amelyekre $\sum_{j=0}^{\infty} x_j = A$ teljesül?

A2. Igazolja, hogy végtelen sok olyan n egész létezik, amelyre n, $n+1$ és $n+2$ egyaránt felírható két négyzetszám összegeként.

(Például: $0=0^2+0^2$, $1=0^2+1^2$ és $2=1^2+1^2$.)

A3. A $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ húrnyolcszög csúcspontjai az adott sorrendben következnek egymás után a kör kerületén. Tudjuk, hogy a $P_1P_3P_5P_7$ négyszög négyzet, amelynek a területe 5 területegység, a $P_2P_4P_6P_8$ négyszög pedig téglalap, amelynek a területe 4 területegység. Legfeljebb mekkora lehet a nyolcszög területe?

A4. Igazolja, hogy a

$$\lim_{B\to\infty} \int_0^B \sin(x)\sin(x^2)dx$$

improprius integrálnak létezik határértéke.

A5. Három különböző, egész koordinátájú pont egy $r>0$ sugarú kör kerületén helyezkedik el. Igazolja, hogy közülük két pontot kiválasztva, azok távolsága legalább $r^{1/3}$.

A6. Legyen $f(x)$ egész együtthatós polinom, $a_0, a_1, \ldots$ pedig olyan egész elemű sorozat, amelyre $a_0=0$ és $a_{n+1}=f(a_n)$, ha $n\ge 0$. Igazolja, hogy ha van olyan pozitív egész m, amelyre $a_m=0$, akkor vagy $a_1=0$, vagy $a_2=0$.

B1. Legyenek a_j, b_j és c_j olyan egész számok ($1\le j\le N$), hogy bármely j esetén a_j, b_j és c_j közül legalább az egyik páratlan. Mutassuk meg, hogy ekkor léteznek olyan r, s és t egész számok, hogy $ra_j+sb_j+tc_j$ páratlan legalább $\frac{4N}{7}$ esetben a j ($1\le j\le N$) értékei közül.

B2. Mutassuk meg, hogy $\frac{(m,n)}{n}\binom{n}{m}$ minden $n\ge m\ge 1$ esetén egész, ahol $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ és (n,m) az m és n legnagyobb közös osztója.

B3. Legyen

$$f(t)=\sum_{j=1}^{N} a_j \sin(2\pi j t),$$

ahol mindegyik a_j valós, és $a_N\neq 0$. Jelölje $\dfrac{d^k f}{dt^k}$ az f k-adik deriváltját, N_k a $\dfrac{d^k f}{dt^k}$ gyökeinek számát (multiplicitással), Mutassuk meg, hogy

$$N_0 \le N_1 \le N_2 \le \ldots \qquad \text{és} \qquad \lim_{k\to\infty} N_k = 2N.$$

B4. Legyen $f(x)$ olyan folytonos függvény, amelyre minden x esetén teljesül, hogy $f(2x^2-1)=2xf(x)$. Bizonyítsuk be, hogy $f(x)=0$, ha $-1\le x\le 1$.

B5. Legyen S_0 pozitív egészekből álló véges halmaz. A következőképpen definiáljuk az S_1, S_2, $\ldots$ halmazokat: Egy a egész szám pontosan akkor eleme S_{n+1}-nek, ha a és $a-1$ közül pontosan az egyik benne van S_n-ben. Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan N egész szám van, amelyre $S_n=S_0\cup\{N+a : a\in S_0\}$.

B6. Legyen B olyan halmaz, amely több, mint $\dfrac{2^{n+1}}{n}$ különböző $(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1)$ koordinátájú pontot tartalmaz az n-dimenziós térben ($n\ge 3$). Mutassuk meg, hogy van 3 különböző B-beli pont, amelyek egy egyenlő oldalú háromszög csúcsai.

Izsák Imre Gyula komplex természettudományi verseny

A zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnáziumban 2000. október 20-án ismét megrendezték a matematika, fizika és számítástechnika tárgyak komplex természettudományos versenyét.

Az összesített verseny eredménye:

1. helyezett: **Wéber Zoltán,** Tata, Eötvös József Gimn.;
2. helyezett: **Babos Attila,** Budapest, Radnóti M. Gimn.;
3. helyezett: **Balogh János,** Kaposvár, Táncsics M. Gimn.

Különdíjak:

Matematika: **Fehér Gergely,** Debrecen, Fazekas M. Gimn.;

Fizika: **Szalai Bence,** Veszprém, Lovassy L. Gimn.;

Számítástechnika: **Borosán Péter,** Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn.

A versenyről részletes információ található a `www.zmgzeg.sulinet.hu/izsak.html` címen.

A verseny feladatai

Matematika

1. Jelöljük az $ABCD$ paralelogramma B csúcsán áthaladó, AD-re merőleges, valamint a D csúcsán áthaladó, AB-re merőleges egyenesek metszéspontját M-mel. Igazoljuk, hogy $MC \geq BD$.

2. Egy sorozat elemeire teljesül, hogy $a_1 = 2$, és $n \geq 2$ esetén $a_n = 3a_{n-1} + 2n - 3$. Határozzuk meg a sorozat első n elemének az összegét n függvényeként.

3. Az a valós paraméter mely értékeire lesz az

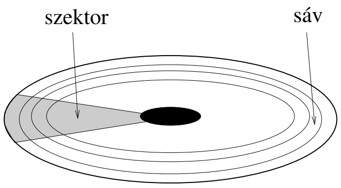
$$x^2 - 2ax + 7a = 0$$

egyenletnek két különböző egész gyöke?

4. Adott a síkon $2n$ darab pont úgy, hogy semelyik három sem illeszkedik egy egyenesre. A pontok közül tetszőlegesen válasszunk ki n-et, és színezzük ezeket pirosra, a többit kékre. Bizonyítsuk be, hogy bármely színezés esetén megadható a síkon olyan egyenes, amelynek mindkét oldalán van adott pont, és mindkét oldalára teljesül, hogy ott a piros és kék pontok száma megegyezik.

Fizika

1. Számítógépeken használatos kis méretű mágneslemezt mutat az *ábra*. A formázás 80 koncentrikus sávot és 18 szektort alakít ki a lemezen. A sávok írási sűrűsége 135 TPI (sáv per inch, 1 inch $\approx$ 2,54 cm). Egy-egy sáv és szektor metszeteként előálló blokkok mindegyikében 512 byte tárolható. A lemez fordulatszáma az olvasóban 360 rpm (1 rpm = 1/perc).



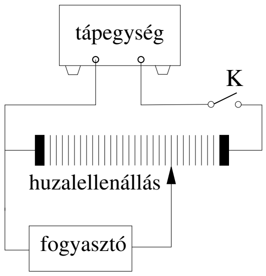
a) Mekkora a lemez kapacitása?

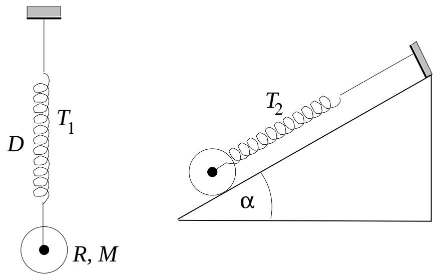
b) Becsülje meg az adatátvitel sebességét kbit/s-ban.

c) Becsülje meg, hogy a mai merevlemezeknél megvalósítható 20 Gbit/(inch)^2 adatsűrűség hányszor nagyobb a kislemez adatsűrűségénél.

2. 5 V-os, 6 A terhelhetőségű tápegységre kapcsolt feszültségosztó után 10 V-os 100 W-os fogyasztót kötünk. A feszültségosztó huzalellenállás 5 Ω-os, maximum 5 A terhelhetőségű.

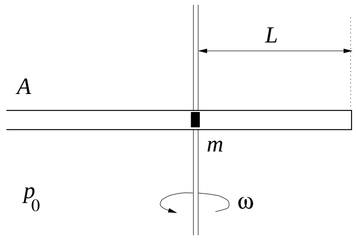
Vizsgálja meg (az osztó csúszkaállásának függvényében), hogy mi történik, ha a K kapcsolót zárjuk.





3. R sugarú, M tömegű, közepén tengelyezett hengert D direkciós állandójú rugóra akasztva a rezgésidőre T_1 értéket kapunk. A hengert α hajlásszögű lejtőre helyezve és kitérítve a rezgésidő T_2. (A henger a lejtőn nem csúszik meg.) Adja meg a T_2/T_1 arányt.

4. Igen hosszú, A keresztmetszetű, vízszintes, egyik végén zárt, sima falú csőben egy kis méretű, m tömegű dugattyú mozoghat. A csövet vízszintes síkban, a zárt végétől L távolságra ω szögsebességgel megforgatjuk. Az m tömeg kezdetben a forgástengelyen található. A külső légnyomás nagysága p_0.



a) A dugattyúnak hol lehetnek egyensúlyi helyzetei?

b) Diszkutálja a megoldást.

Számítástechnika

1. *Árnyékos területek*

Egy látképet egyenes szakaszok sorozatával adtunk meg. A látkép felett a függőleges iránnyal az óramutató járása szerint α szöget bezárva, végtelen távolságban van a Nap.

- Add meg, hogy a Nap megvilágítja-e a teljes látképet.
- Ha nem, akkor add meg a megvilágítás irányából az első olyan szakasz sorszámát, amelyet a Nap nem világít meg.
- Add meg az összes olyan szakasz sorszámát, amelyek teljesen árnyékban vannak, illetve amelyeknek valamely részét a Nap nem világítja meg.

Bemenet: `TAJKEP.BE`

1. sor: M $(2 \le M \le 1000)$, α $(-90 < \alpha < 90)$: egész számok szóközzel elválasztva, a látkép töréspontjainak száma, beleértve az első és az utolsó pontot is, valamint a napsugár merőlegessel bezárt szöge.

2. … $(M+1)$. sor: X_i H_i: két egész szám, egy szóközzel elválasztva: az i-edik töréspont H_i magasságban, az X_i vízszintes pozíción van, $1 \le i \le M$; ($1 \le i \le M-1$ esetén teljesül: $X_{i+1} > X_i$); egy egyenes szakaszt két egymás utáni pont ad meg.

Kimenet: `TAJKEP.KI és a képernyő`

1. sor: IGEN, ha a teljes látkép meg van világítva, NEM, ha nem.

2. sor: Az első olyan szakasz sorszáma, amely teljes egészében árnyékban van.

3. sor: Az összes olyan szakasz sorszáma növekvő sorrendben, amelyek teljes egészében árnyékban vannak.

4. sor: Az összes olyan szakasz sorszáma növekvő sorrendben, amelyek részben meg vannak világítva, részben pedig árnyékban vannak.

2. *Hatványok*

Készíts programot, amely két adott természetes szám ($2 \le A \le 2000$, $2 \le B \le 2000$) esetén megadja növekvő sorrendben, hogy az összes i természetes számra A^i milyen maradékot ad B-vel osztva.

Példa: `Bemenet:` `Kimenet:`

```
3, 7                    1, 2, 3, 4, 5, 6
```

Ebben az esetben $3^0 \bmod 7 = 1$, $3^2 \bmod 7 = 2$, $3^1 \bmod 7 = 3$, $3^4 \bmod 7 = 4$, $3^5 \bmod 7 = 5$, illetve $3^3 \bmod 7 = 6$; más maradék pedig semmilyen kitevőre nem jöhet ki.

```
2, 7                    1, 2, 4
```

Ebben az esetben $2^0 \bmod 7 = 1$, $2^1 \bmod 7 = 2$, $2^2 \bmod 7 = 4$, más maradék pedig semmilyen kitevőre nem jöhet ki.

IX. Székely Mikó Matematikaverseny

20001. február 17.

Az évente megrendezett rangos erdélyi verseny feladataiból az alábbiakban közlünk néhányat.

IX. osztály

1. Igazoljuk, hogy az

$$ax^2 + 2\sqrt{3}bcx + bc(a+b+c) = 0,$$

$$bx^2 + 2\sqrt{3}cax + ca(a+b+c) = 0,$$

és

$$cx^2 + 2\sqrt{3}abx + ab(a+b+c) = 0$$

egyenletek közül legalább az egyiknek van valós gyöke, ha a, b és c nullától különböző valós számok.

Bencze Mihály, Brassó

2. Legyenek G_1, G_2, G_3, E_1, E_2, E_3 rendre az $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ háromszögek súlypontjai. Bizonyítsuk be, hogy a $G_1G_2G_3$ és az $E_1E_2E_3$ háromszögek súlypontja egybeesik.

Longávez Lajos, Nagybánya

3. *a)* Bizonyítsuk be, hogy $2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$ osztható 25-tel bármely $n \in \mathbf{N}$ esetén.

b) Határozzuk meg azokat az a természetes számokat, amelyekre bármely $n \in \mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$ esetén $(a-1) \cdot (a+1)^n + a(n-1) + 1$ osztható k-val, ahol $k \ge 1$ egy rögzített természetes szám.

Dáné Károly és *Kosztolányi József*

4. Egy táblára felírtuk a természetes számokat 1-től $(4n-1)$-ig. Egy lépésben a táblán levő számok közül letörlünk kettőt, és helyettük a különbségük abszolút értékét írjuk. Bizonyítsuk be, hogy $4n-2$ lépés után egy páros szám marad a táblán.

Bege Antal, Kolozsvár

X. osztály

1. *a)* Bizonyítsuk be, hogy ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ pozitív valós számok szorzata 1, akkor $(a_1+b_1)\cdot(a_2+b_2)\cdot\ldots\cdot(a_n+b_n)\ge 2^n$.

b) Adott az $a>1$ valós szám. Határozzuk meg az $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ 1-nél nagyobb valós számokat, amelyekre

$$\begin{cases} \log_a x_1+\log_{x_2} a=4,\\ \log_a x_2+\log_{x_3} a=1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \ldots\\ \log_a x_{99}+\log_{x_{100}} a=4,\\ \log_a x_{100}+\log_{x_1} a=1. \end{cases}$$

Bege Antal, Kolozsvár

2. *a)* Határozzuk meg azokat a z_1, z_2 komplex számokat, amelyekre egyszerre teljesülnek a következő feltételek:

(1) $|z_1|=|z_2|\neq 0$;

(2) $z_1+\dfrac{1}{z_2}$ és $z_2+\dfrac{1}{z_1}$ valós számok.

b) Adott az $A=\{z\in\mathbf{C}\ \big|\ |z|=1\}$ és a $B=\{z\in\mathbf{C}\ \big|\ |z|\le 2^n\}$ halmaz, ahol n 1-nél nagyobb rögzített természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy

$$B=\{z_1+z_2+\ldots+z_{2^n}\ \big|\ z_1,z_2,\ldots,z_{2^n}\in A\}.$$

Bíró Béla és *Bencze Mihály*

3. Jelölje R, illetve r a hegyesszögű háromszög köré, illetve a háromszögbe írt kör sugarát, d_a, d_b, d_c pedig a körülírt kör középpontjának a háromszög oldalaitól mért távolságát. Bizonyítsuk be, hogy

a) $d_a+d_b+d_c=R+r$.

b) $\dfrac{a^2}{d_a}+\dfrac{b^2}{d_b}+\dfrac{c^2}{d_c}\ge\dfrac{4s^2}{R+r}$, ahol s a háromszög félkerülete.

4. Egy táblára felírtuk a páratlan természetes számokat 1-től $4n$-ig. Egy lépésben a táblán levő számok közül letörlünk egy a és egy b számot, és helyettük vagy az $a-3b$, vagy a $b-3a$ különbséget írjuk. Elérhető-e, hogy néhány lépés után a táblán szereplő összes szám 0 legyen?

Bege Antal, Kolozsvár

XI. vagy XII. osztály

1. *a)* Az (a_n) $n\ge 1$ sorozatot így értelmezzük:

$$a_1=1,\qquad a_2=2\qquad \text{és}\qquad a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n,\quad \text{bármely } n\in\mathbf{N},\ n\ge 1 \text{ esetén.}$$

Határozzuk meg a sorozat általános tagjának képletét n függvényében.

b) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségrendszert:

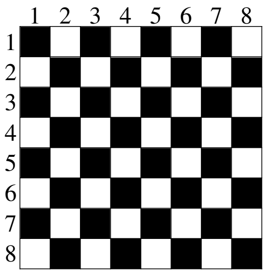
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 0, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 2x_{n-1} - 3x_n + x_1 \geq 0, \\ 2x_n - 3x_1 + x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. Elhelyezhető-e a térben 11 pont úgy, hogy az általuk meghatározott egyenesek száma 53 legyen? És 54?

Dáné Károly és *Száva Róbert*

3. Egy sakktábla minden mezőjéhez hozzárendelünk két számot, az első szám azt mutatja, hogy az illető mező a tábla hányadik sorában van, míg a második azt, hogy hányadik oszlopában. Elhelyeztünk nyolc bástyát a táblán úgy, hogy ne legyen köztük kettő, amely üti egymást. Az egyes bástyákat tartalmazó mezőkhöz rendelt számokat összeszoroztuk, majd az így kapott nyolc szorzatot összeadtuk, és eredményül 120-at kaptunk. Ezután a bástyákat levettük a tábláról. Meg lehet-e határozni azokat a mezőket, amelyeken a bástyák álltak? Hány megoldás van?

Dávid Géza, Székelyudvarhely



Mérőlap felvételire készülőknek IV.

1. Egy paralelogramma átlóinak hossza 13 és 20 egység, egy oldalának hossza 10,5 egység. Számítsa ki a paralelogramma területét és kerületét.

2. Oldja meg az $\lg(x+9)+\lg 4 = 2 - \frac{1}{2}\lg(x-1)^2$ egyenletet a valós számok halmazán.

3. Egy háromszög csúcspontjai $A(-2;0)$, $B(2;0)$, $C(0;5)$. Mi azon P pontok halmaza a síkban, amelyekre

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 30?$$

4. Az (a_n) mértani sorozatra $7(a_2+a_3)+2(a_1+a_4)=0$ és $S_5=22$. Számítsa ki a sorozat első tagját és hányadosát.

5. Számítsa ki $\sin x$ pontos értékét, ha $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -4$.

6. Tekintsük az $x \mapsto (p-1)x^2 + 2(p+2)x + p - 2$ függvényt, ahol $x \in \mathbf{R}$ és p valós paraméter. Határozza meg a p értékét úgy, hogy a függvény legnagyobb helyettesítési értéke (-6) legyen! Mely x helyen veszi fel ekkor a függvény ezt a legnagyobb értéket?

7. Az $x^2+px+q=0$ egyenlet egyik gyöke 4, a másik gyök kétszerese egyenlő az egyenlet diszkriminánsával. Számítsa ki p és q értékét.

8. Az y tengellyel párhuzamos tengelyű parabola érinti az x tengelyt, és átmegy az $A(3;2)$ ponton. Az A pontban a parabolához húzott érintő egy normálvektora $\mathbf{n}(4;1)$. Írja fel a parabola egyenletét.

Rábai Imre

A márciusi szakköri feladatok megoldásvázlatai, eredményei

1. A koszinusztétel és a háromszög területképletének alkalmazásával

$$2ab\cos\gamma=a^2+b^2-c^2 \qquad \text{és} \qquad 2ab\sin\gamma=4T.$$

Emeljük négyzetre az egyenleteket, majd adjuk őket össze:

$$4a^2b^2=16T^2+(a^2+b^2-c^2)^2,$$

ebből következik az első állítás. Innen

$$16T^2=(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2),$$
$$16T^2=(a+b-c)(a+b+c)(c+a-b)(c-a+b).$$

Mivel $a+b+c=2s$, $-a+b+c=2(s-a)$, $a-b+c=2(s-b)$ és $a+b-c=2(s-c)$, azért valóban

$$T^2=s(s-a)(s-b)(s-c).$$

2. Az egyenletnek minden valós x-re van értelme. Emeljük köbre az egyenlet mindkét oldalát. Az így kapott egyenlet az adott egyenlettel ekvivalens, hiszen az $x\mapsto x^3$, $x\in\mathbf{R}$ függvény nyilván szigorúan monoton. Alkalmazzuk az

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

azonosságot, rendezzük az egyenletet, végezzünk ekvivalens átalakításokat:

$$\begin{aligned}
x+(2x-3)+3\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{2x-3}\cdot\sqrt[3]{12(x-1)}&=12(x-1),\\
3\sqrt[3]{2x^2-3x}\cdot\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{x-1}&=9(x-1),\\
12(2x^2-3x)(x-1)-27(x-1)^3&=0,\\
(x-1)(8x^2-12x-9(x-1)^2)&=0,\\
(x-1)(-x^2+6x-9)&=0.
\end{aligned}$$

Az egyenlet megoldásai: $x_1=1$, $x_2=3$.

3. Alkalmazzuk az $\log_u v = \dfrac{1}{\log_v u}$ $(u>0,\ u\neq 1,\ v>0,\ v\neq 1)$ és az $\log_u v_1 + \log_u v_2 = \log_u v_1 v_2$ $(u>0,\ u\neq 1,\ v_1>0,\ v_2>0)$ azonosságokat:

$$\log_a x\cdot\log_b x + \log_b x\cdot\log_c x + \log_c x\cdot\log_a x = \frac{\log_x c + \log_x a + \log_x b}{\log_x a\cdot\log_x b\cdot\log_x c} =$$
$$= \log_a x\cdot\log_b x\cdot\log_c x\cdot\log_x abc.$$

4. $x^2-x+1>0$, $x^2+x+1>0$ és $4x^2+3>0$ minden valós x-re ($x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$, $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$), és $4x^2+3>x^2-x+1$ minden valós x-re, hiszen $3x^2+x+2=3\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{23}{12}$; hasonlóan $4x^2+3>x^2+x+1$ minden valós x-re. A három adott kifejezésnek tehát minden valós x-re van értelme, és közülük $\sqrt{4x^2+3}$ a legnagyobb.

A háromszög akkor létezik, ha teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenség feltételei, azaz ha

$$\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}>\sqrt{4x^2+3}.$$

Mivel mindkét oldal pozitív, azért ez az egyenlőtlenség ekvivalens a következő, négyzetre emeléssel kapott egyenlőtlenségekkel:

$$2x^2+2+2\sqrt{(x^2+1)^2-x^2}>4x^2+3,$$
$$2\sqrt{x^4+x^2+1}>2x^2+1,$$
$$4x^2+4x^2+4>4x^4+4x^2+1.$$

Mivel ez utóbbi minden valós x-re teljesül, azért a háromszögek minden valós x esetén léteznek. E háromszögek területe független x-től, hiszen

$$16T^2=4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2,$$
$$16T^2=4(x^2-x+1)(x^2+x+1)-(2x^2+2-4x^2-3),$$
$$16T^2=4(x^4+x^2+1)-(4x^4+4x^2+1),$$

azaz $16T^2=3,\qquad T=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ területegység.

Rábai Imre

Matematika gyakorlatok megoldása

C. 595. *Melyek azok a háromjegyű számok, amelyek egyenlők a számjegyeik faktoriálisainak összegével?*

I. megoldás. A háromjegyű szám számjegyei 0 és 9 közé esnek, a százasok helyén nem állhat 0. Írjuk fel az első néhány szám faktoriálisát:

$$0!=1,^{*} \quad 1!=1, \quad 2!=2, \quad 3!=6, \quad 4!=24, \quad 5!=120, \quad 6!=720, \quad 7!>1000.$$

$7!>1000$ miatt 7, 8, 9 nem szerepelhet a számjegyek között.

$6!=720$ miatt 6-os sem lehet köztük, mert akkor a százasok helyén legalább 7 kellene álljon, amit kizártunk.

Ha nem lenne 5-ös a számjegyek között, akkor az előbbiek szerint a három számjegy összege legfeljebb $3\cdot 24=72$ lehet, ami nem háromjegyű.

Három 5-ösből nem állhat a szám, mert $555\neq 5!+5!+5!=360$.

Ha két 5-ös szerepelne a jegyek között, akkor a faktoriálisok összege legalább 241, legfeljebb 264, tehát a harmadik számjegy a százasok helyén álló 2-es kellene legyen, de $255\neq 2!+5!+5!=242$.

Ha pedig egyetlen 5-ös szerepel a jegyek között, akkor a százasok helyén 1-es áll ($120+24+24<200$ miatt). A számjegyek faktoriálisainak összege $120+1+1=122$ és $120+1+24=145$ közé esik. Így csak a 125, a 135 és a 145 jöhet szóba. Ezeket megvizsgálva kapjuk, hogy a feladatnak egyetlen megoldása van, a 145 $(=1+24+120)$.

II. megoldás. Ha az $A=100a+10b+c$ egy háromjegyű szám, akkor jelölje az $a!+b!+c!$ számot $f(A)$, az a, b, c jegyek maximumát pedig M. Ekkor nyilván $100\leq A\leq 999$, másrészt

$$M!\leq f(A)\leq 3M!.$$

Így ha $A=f(A)$, akkor $100\leq 3M!$ és $M!<1000$, azaz

$$4!<\frac{100}{3}\leq M!<1000,$$
$$4!<M!<7!$$

és ezért $5\leq M\leq 6$.

Ha $M=6$, akkor $A\geq 6!=720$, tehát az A első jegye nagyobb, mint 6, erről pedig az imént láttuk, hogy nem lehetséges. Így az A jegyeinek a maximuma 5. Ekkor nyilván

$$100a\leq A\leq a!+2\cdot 5!=a!+240,$$

ez pedig biztosan nem teljesül, ha $2<a\leq 5$.

Ha $a\leq 2$, akkor $a!=a$, a feltétel pedig

$$100a+10b+c=a!+b!+c!, \tag{$*$}$$

ahol $\max(b,c)=5$.

Ha b és c minimuma m, akkor $m\leq 5$, és $(*)$ most így írható:

$$99a+10b+c=5!+m!.$$

* megállapodás szerint

Ha $a=2$, akkor innen $2\cdot 99\le 120+m!$, ahonnan $m!>4!$, azaz $m=5$. Ekkor $A=255\ne f(A)=2!+2\cdot 5!=242$.

Ha $a=1$, akkor $A=100+10b+c=1+120+m!$, és így

$$5!>100>10b+c=21+m!>m!,$$

tehát $m\le 4$. Ez azt jelenti, hogy

$$10b+c\le 21+4!=45, \tag{2}$$

azaz $b\le 4$. Mivel $\max(b,c)=5>b$, innen $c=5$ és $b=m\le 4$. Most (2)-ből

$$10b+5=21+b! \qquad \text{és így} \qquad 10b-b!=16.$$

A még szóbajövő $b=1, 2, 3, 4$ értékekre ez egy esetben teljesül, akkor, ha $b=4$. Így egyetlen olyan háromjegyű A szám van, amelyre $A=f(A)$, ez pedg a $145=1!+4!+5!$.

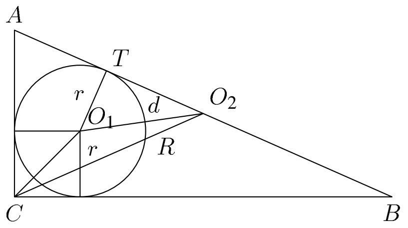
650 dolgozat érkezett. 5 pontos 275, 4 pontos 201, 3 pontos 111, 2 pontos 36, 1 pontos 15, 0 pontos 12.

C. 597. *Bizonyítsuk be, hogy egy derékszögű háromszögben a beírt és körülírt kör középpontjának távolsága a körülírt kör sugarának legalább a* $(\sqrt{2}-1)$*-szerese.*

Megoldás. Az ABC derékszögű háromszögben (a derékszög C-nél van) jelölje a beírt kör középpontját O_1, sugarát r. Az A körül írt kör középpontja, amely egyben az AB oldal felezőpontja, O_2. Az O_1-ből az AB-re bocsátott merőleges talppontja T.

A CO_1O_2 háromszögben $O_1O_2=d$, $CO_2=R$ és $CO_1=r\sqrt{2}$. A háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$R\le d+2\sqrt{2}. \tag{1}$$



A O_1O_2T derékszögű háromszögből $d\ge r$ (egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög). Ezt (1)-be helyettesítve

$$R\ge d+d\sqrt{2}=d\cdot(1+\sqrt{2}),$$

ahonnan

$$d\ge \frac{R}{\sqrt{2}+1}=R\cdot(\sqrt{2}-1).$$

Ezzel igazoltuk az állítást.

269 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 80, 4 pontot 2, 3 pontot 8, 2 pontot 128, 1 pontot 15, 0 pontot 14 beküldő. Nem versenyszerű 22 dolgozat.

C. 598. *Van-e* 2000 *olyan pozitív egész szám, hogy egyikük sem osztható semelyik másikkal, de bármelyikük négyzete osztható az összes többi számmal?*

Javasolta: *Ábrány Miklós,* Ukrajna

Tekintsük például a következő 2000 egész számot:

$$2^{2000}\cdot 3^{3999},\qquad 2^{2001}\cdot 3^{3998},\qquad 2^{2002}\cdot 3^{3997},\qquad \ldots,\qquad 2^{3999}\cdot 3^{2001}.$$

Ezek közül egyik sem osztója semelyik másiknak, de bármelyik négyzete osztható a számok legkisebb közös többszörösével, ami $2^{3999}\cdot 3^{3999}$.

308 dolgozat érkezett. 5 pontos 197, 4 pontos 24, 3 pontos 5, 2 pontos 7, 1 pontos 6, 0 pontos 65. Nem versenyszerű 4 dolgozat.

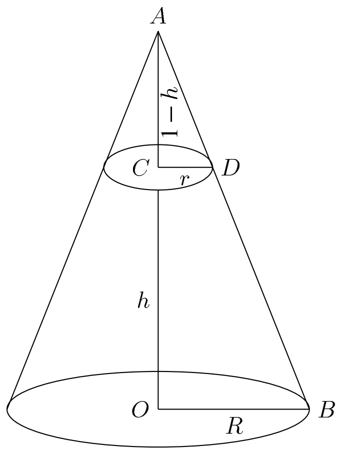
C. 599. *Egy egyenes kúp alapkörének sugara R, magassága egységnyi. A kúpot az alapsíkjától h távolságra elmetsszük az alapjával párhuzamos síkkal. A levágott kúpot tükrözzük a metsző síkra, majd a csonkakúpból a közös részt eltávolítjuk. Mekkora az így kapott test térfogata?*

Megoldás. Tudjuk, hogy a nagy kúp térfogata:

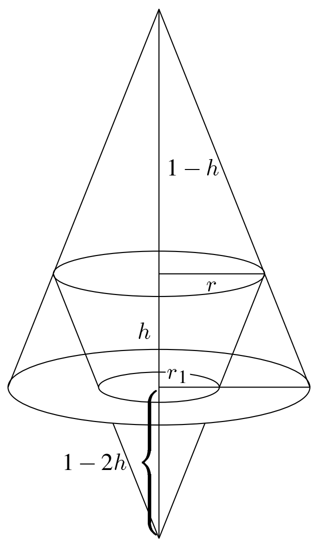
$$V_1=\frac{R^2\pi}{3}.$$

A kúp csúcsa legyen A, az alapkör középpontja O, $OB=R$ és $CD=r$ (*ábra*). A kis kúp magassága $1-h$, és abból, hogy az OAB háromszög hasonló a CAD háromszöghöz, kapjuk, hogy $\dfrac{r}{R}=1-h$, ahonnan $r=R(1-h)$. A kis kúp térfogata:

$$V_2=\frac{[R(1-h)]^2\pi(1-h)}{3}=\frac{R^2\pi}{3}(1-h)^3.$$



1. ábra



2. ábra

Ha $h \geq \frac{1}{2}$, akkor a kis kúp tükörképe teljes egészében a nagy kúp belsejében van. Ekkor a maradék test térfogata:

$$V_1 - 2V_2 = \frac{R^2\pi}{3} - 2\frac{R^2\pi}{3}(1-h)^3.$$

Ha viszont $h < \frac{1}{2}$, akkor a kilógó kis kúp magassága $1-2h$, sugara $r_1 = r\left(\frac{1-2h}{1-h}\right)$, térfogata:

$$V_3 = \frac{r^2\left(\frac{1-2h}{1-h}\right)^2(1-2h)\pi}{3} = \frac{R^2(1-h)^2\left(\frac{1-2h}{1-h}\right)^2(1-2h)\pi}{3} = \frac{R^2\pi}{3}(1-2h)^3.$$

Így a maradék test térfogata most

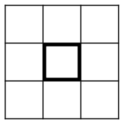
$$V_1 - V_2 - (V_2 - V_3) = V_1 - 2V_2 + V_3 = \frac{R^2\pi}{3}\left[1 - 2(1-h)^3 + (1-2h)^3\right] = 2R^3\pi h^2(1-h).$$

Bartalits Dániel (Budapest, Móricz Zs. Gimn., 9. o.t.)

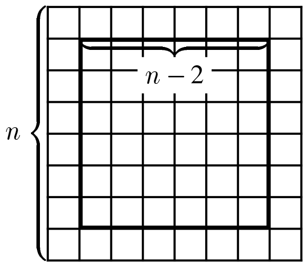
443 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 125, 4 pontot 46, 3 pontot 50, 2 pontot 101, 1 pontot 82, 0 pontot 31 versenyző. Nem versenyszerű 8 dolgozat.

C. 602. *Legkevesebb hány egységkockából lehet összerakni egy nagy kockát úgy, hogy belül legyen a kis kockáknak több, mint a fele?*

Megoldás. Ahhoz, hogy a nagy kocka belsejében legyen kis kocka, legalább $3 \times 3 \times 3 = 27$ kockát kell összerakni. Ez egyben a legkisebb lehetőség. Vizsgáljuk meg, hogyan változik a belső kockák száma, ha növeljük a nagy kocka oldalait. Készítsük el ehhez a következő táblázatot.



1. ábra



2. ábra

Összes kocka	Külső kockák száma	Belső kockák száma
$3 \times 3 \times 3 = 27$	26	1
$4 \times 4 \times 4 = 64$	56	8
$5 \times 5 \times 5 = 125$	98	27
$6 \times 6 \times 6 = 216$	152	64
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

A *2. ábráról* látható, hogy egy $n \times n \times n$-es kocka esetén a belső kockák száma $(n-2) \times (n-2) \times (n-2)$, hiszen minden réteg esetén a szélső sorokat el kell hagyni, ezek fogják elfedni a belül lévő kockákat. A belül lévő kockák száma tehát $(n-2)^3$. Kérdés, mikor lesz $(n-2)^3 > \frac{1}{2}n^3$.

Rendezve az egyenlőtlenséget:

$$n-2>n\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$n>\frac{2}{1-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}=\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1}\approx 9{,}69.$$

Mivel n egész, legalább 10 kell, hogy legyen, vagyis a $10\times 10\times 10=1000$ kis kockából összerakott nagy kocka esetén a belső kockák száma $8\times 8\times 8=512$, s ez valóban nagyobb az 1000 felénél.

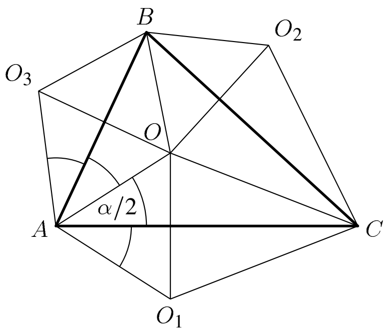
527 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 381, 4 pontot 91, 3 pontot 10, 2 pontot 6, 1 pontot 5, 0 pontot 29 versenyző. Nem versenyszerű 5 dolgozat.

C. 604. *Az ABC háromszög beírt körének középpontja O, területe pedig t. Mutassuk meg, hogy*

$$2t=AO^2\sin\alpha+BO^2\sin\beta+CO^2\sin\gamma.$$

Javasolta: *Mihalovics Sándor,* Esztergom

Megoldás. Tükrözzük az O középpontot a háromszög oldalaira: az AC oldalra való tükörképe O_1, BC-re O_2 és AB-re O_3.



Mivel AO felezi az α szöget (a beírt kör középpontja a szögfelezők metszéspontja), ebből és az AC-re való tengelyes tükrözésből következik, hogy $OAO_1\sphericalangle=\alpha$; $AO=AO_1$, az AOO_1 háromszög területe $\dfrac{OA^2\sin\alpha}{2}$.

Az AB oldalra való tükrözés miatt pedig $OAO_3=\alpha$, s mivel az AOO_1 háromszög egybevágó az AOO_3 háromszöggel, területük is megegyezik.

Hasonlóképpen az OCO_1 és az OCO_2 háromszögek is egybevágók és a területük $\dfrac{OC^2\sin\gamma}{2}$, valamint az OBO_2 és OBO_3 háromszögek is egybevágók és a területük $\dfrac{OB^2\sin\beta}{2}$.

E hat darab háromszög területe az ABC háromszög kétszeres területével egyenlő, azaz

$$2t=OA^2\sin\alpha+OB^2\sin\beta+OC^2\sin\gamma,$$

s ezt akartuk bizonyítani.

Kincses Lilla (Csongrád, Batsányi J. Gimn., 9. o.t.)

207 dolgozat érkezett. 5 pontos 197, 4 pontos 5, 1 pontos 2, 0 pontos 1. Nem versenyszerű 2 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása

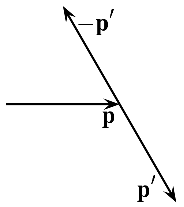
B. 3387. *Egy nem nulla* $\mathbf{p}$ *vektornak és a* 2α *szögű elforgatottjának az összege egyenlő a* $\mathbf{p}$ *vektor* α *szögű elforgatottjával. Mekkora az* α *szög?*
(*3 pont*)

I. megoldás. Ha $\mathbf{p}$ α és 2α szögű elforgatottját $\mathbf{p}'$-vel, illetve $\mathbf{p}''$-vel jelöljük, akkor a feltétel szerint $\mathbf{p}+\mathbf{p}''=\mathbf{p}'$, azaz

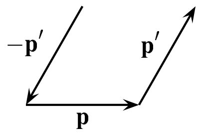
$$\mathbf{p}-\mathbf{p}'+\mathbf{p}''=\mathbf{0}.$$

A három vektor, $\mathbf{p}$, $-\mathbf{p}'$ és $\mathbf{p}''$ abszolút értéke egyenlő és nem 0, így ha összegük $\mathbf{0}$, akkor egymáshoz fűzve őket, három egyenlő szakaszból álló zárt töröttvonalat kapunk, ami azt jelenti, hogy a háromtagú zárt vektorlánc egy szabályos háromszöget alkot.

Ez kétféleképpen lehetséges: ha pozitív körüljárás szerint a $\mathbf{p}$ vektort a $-\mathbf{p}'$ követi a láncban (*1. ábra*), illetve ha $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}''$ és $-\mathbf{p}'$ a sorrend (*2. ábra*).



1. ábra



2. ábra

Az első esetben a $\mathbf{p}'$ vektor a $\mathbf{p}$ vektor -60°-os elforgatottja, a másodikban pedig, a fordított sorrend miatt, a $\mathbf{p}'$ vektor a $\mathbf{p}$ 60°-os elforgatottja.

Az α szög tehát vagy $-60^\circ+n\cdot 360^\circ$, vagy pedig $60^\circ+k\cdot 360^\circ$, ahol n és k egész számok.

Megjegyzés. Látható, hogy az α szögre pontosan akkor teljesül a feladat feltétele, ha $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$.

II. megoldás. Ha tetszőleges φ szög és $\mathbf{p}$ vektor esetén $\varphi(\mathbf{p})$ jelöli a $\mathbf{p}$ vektor φ szögű elforgatottját, akkor a feltétel szerint

$$\mathbf{p}+2\alpha(\mathbf{p})=\alpha(\mathbf{p}). \tag{1}$$

Forgassuk most el az (1)-ben szereplő vektorokat α szöggel. Mivel vektorok összege tagonként forgatható, azért

$$\alpha(\mathbf{p}+2\alpha(\mathbf{p}))=\alpha(\mathbf{p})+\alpha(2\alpha(\mathbf{p}))=\alpha(\alpha(\mathbf{p})).$$

Elforgatott vektort továbbforgatva az eredő elforgatás szöge az elforgatások szögének összege, ezért $\alpha(2\alpha(\mathbf{p}))=3\alpha(\mathbf{p})$ és $\alpha(\alpha(\mathbf{p}))=2\alpha(\mathbf{p})$. Így

$$\alpha(\mathbf{p})+3\alpha(\mathbf{p})=2\alpha(\mathbf{p}). \tag{2}$$

(1) és (2) összegét tekintve

$$\mathbf{p}+\alpha(\mathbf{p})+2\alpha(\mathbf{p})+3\alpha(\mathbf{p})=\alpha(\mathbf{p})+2\alpha(\mathbf{p}),$$

azaz

$$\mathbf{p}+3\alpha(\mathbf{p})=\mathbf{0},$$

ha (1) teljesül, akkor a $\mathbf{p}$ vektor 3α szögű elforgatottja a $\mathbf{p}$ vektor ellentettje, a 3α-val való forgatás $180°$-kal forgatja el a $\mathbf{p}$ vektort.

Így $3\alpha=180°+k\cdot 360°$, ahonnan $\alpha_1=60°$, $\alpha_2=180°$ és $\alpha_3=300°$. Mivel (1) és (2) összegét használtuk, a talált értékek nem feltétlenül megoldásai az eredeti feladatnak; valóban, $\alpha_2=180°$ láthatóan nem megoldás, ilyenkor $\mathbf{p}+360°(\mathbf{p})=2\mathbf{p}$, ami nem egyenlő $180°(\mathbf{p})=-\mathbf{p}$-vel, ha $\mathbf{p}\neq\mathbf{0}$.

A másik két érték, $\alpha_1=60°$ és $\alpha_2=300°$ láthatóan megoldások (*3. ábra*).

Megjegyzések. 1. A fenti megoldásban a $2\alpha(\mathbf{p})$ jelölés némi óvatosságot igényel: helyesebb volna $(2\alpha)\mathbf{p}$-nek írni, hiszen az nem az $\alpha(\mathbf{p})$ vektor kétszerese, hanem a 2α szöggel elforgatott $\mathbf{p}$ vektor.

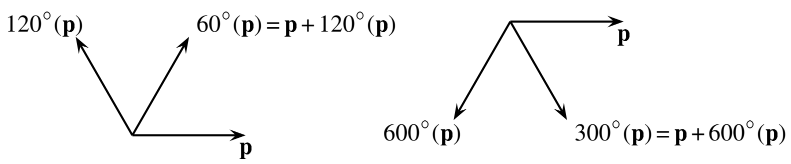
2. A feladat jelentése és a megoldás algebrai jellege a komplex számsíkon könnyen megmutatható. Ha az α szögű elforgatást az egységnyi abszolút értékű, α argumentumú a számmal való szorzásként hajtjuk végre, akkor a feltétel szerint a $p\neq 0$ komplex számra

$$p+a^2p=ap,$$

ahonnan p-vel osztva az

$$a^2-a+1=0 \tag{3}$$

másodfokú egyenletet kapjuk, amit $(a+1)$-gyel szorozva az $a^3+1=0$ egyenlet adódik. Ennek komplex gyökei, a komplex harmadik egységgyökök ellentettjei a (3) egyenlet megoldásai: $a_1=\cos 60°+i\sin 60°$ és $a_2=\cos(-60°)+i\sin(-60°)$. Innen is az $\alpha_1=60°$, $\alpha_2=-60°$ adódik megoldásul, utóbbi természetesen ugyanaz, mint a $300°$-os forgatás.



3. ábra

3. Ha tetszőleges forgásszögek is szóba jöhetnek – a feladat szövegében nincs megszorítás a szögekre –, akkor természetesen végtelen sok megoldás adódik: $\alpha_k=60°+k\cdot 360°$, illetve $\alpha_n=$ $=-60°+n\cdot 360°$, ahol k és n tetszőleges egész számok.

652 dolgozat érkezett. 3 pontos 155, 2 pontos 405, 1 pontos 43, 0 pontos 14. Nem versenyszerű 35.

B. 3389. *Legyen* $H_n = \left\{\sqrt{2 \pm \sqrt{2 \ldots \pm \sqrt{2}}}\right\}$, *ahol a gyökjelek száma* n. *Hány valós eleme van az* $\bigcup_{n=1}^{2000} H_n$ *halmaznak?*

(*4 pont*)

I. megoldás. Az n-re vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk, hogy ha $1 \le i \le j \le n$, akkor a H_i és a H_j halmazok elemei 2-nél kisebb pozitív valós számok és nincs köztük egyenlő.

Ha $n = 1$, akkor ez nyilvánvaló. Legyen most $n > 1$ és tegyük fel, hogy az állítás igaz az n-nél kisebb sorszámú halmazokra. A H_n halmaz az $x_n = \sqrt{2 \pm x_{n-1}}$ alakú számokból áll, ahol $x_{n-1} \in H_{n-1}$. Az indukciós föltevés szerint $0 < 2 - x_{n-1} < 2 + x_{n-1} < 4$, és így a H_n elemei is 2-nél kisebb pozitív számok. Meg kell még mutatnunk, hogy a H_n elemei között nincsenek egymással vagy pedig egy kisebb sorszámú H-beli elemmel egyenlő számok.

Tegyük fel, hogy ez nem igaz, vagyis hogy létezik olyan $1 \le i \le n$, hogy $x_i = x_n$ valamilyen $x_i \in H_i$ és $x_n \in H_n$ esetén. (Két H_n-beli szám egyenlősége úgy értendő, hogy különböző előjelsorozatok kiértékelésével kapjuk ugyanazt az értéket.)

Ha $i = 1$, akkor $H_1 = \{\sqrt{2}\}$ miatt indirekt feltevésünk a

$$\sqrt{2} = \sqrt{2 \pm x_{n-1}}$$

egyenlőséget jelentené, ami nem lehetséges, mert az indukciós feltevés szerint $x_{n-1} \neq 0$.

Ha $1 < i$, akkor $x_i = \sqrt{2 \pm x_{i-1}}$ és $x_n = \sqrt{2 \pm x_{n-1}}$, ahol $x_{i-1} \in H_{i-1}$. Négyzetre emelés után $|x_{i-1}| = |x_{n-1}|$ következik, ami azt jelenti, hogy $x_{i-1} = x_{n-1}$, hiszen ezek a számok pozitívak. Ezek a számok az indukciós feltevés szerint biztosan nem egyenlők, ha $i < n$, hiszen ekkor x_{i-1} és x_{n-1} különböző H halmazból valók, és így különbözők. Az egyetlen lehetőség, hogy két különböző módon kiszámolt H_n-beli szám, x'_n és x''_n egyenlő, de ekkor a fentiek szerint ez csak úgy lehetséges, ha közös H_{n-1}-beli „ősük" van:

$$x'_n = \sqrt{2 + x_{n-1}} \qquad \text{és} \qquad x''_n = \sqrt{2 - x_{n-1}}.$$

Mivel $x_{n-1} \neq 0$, ez az egyenlőség sem lehetséges.

A H_i halmaznak tehát 2^{i-1} eleme van, és mivel a H_n $(1 \le n \le 2000)$ halmazok elemei között nincsenek egyenlők, az

$$\bigcup_{n=1}^{2000} H_n$$

halmaznak $\sum_{n=1}^{2000} 2^{n-1} = 2^{2000} - 1$ eleme van.

II. megoldás. Az alábbi – talán bonyolultabb – megoldásban érdekes előállítását adjuk a H_n halmaz elemeinek, amiből következik majd, hogy nincsenek köztük egyenlő számok.

Legyenek az a_i számok egymástól függetlenül ± 1-gyel egyenlők. Ha még a H_n halmaz elemeinek az ellentettjét is elkészítjük, akkor az $a_1\sqrt{2+a_2\sqrt{2+\ldots+a_n\sqrt{2}}}$ alakú számokat kapjuk.

Ha R_n jelöli az $r_n=a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{4}+\ldots+\frac{a_1a_2\ldots a_n}{2^{n-1}}$ alakú számok halmazát, akkor az n-re vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk, hogy

$$(*)\qquad a_1\sqrt{2+a_2\sqrt{2+\ldots+a_n\sqrt{2}}}=2\sin r_n\cdot\frac{\pi}{4}.$$

Mivel $-2<r_n<2$, azért $-\frac{\pi}{2}<r_n\cdot\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$. Ezen az intervallumon a szinuszfüggvény kölcsönösen egyértelmű (szigorúan monoton növő), ezért a H_i halmazok vizsgálata a fenti jellemzés szerint a megfelelő R_i halmazok vizsgálatára vezethető vissza: az R_i halmazok elemei a $\pm 1\pm\frac{1}{2}\pm\ldots\pm\frac{1}{2^{i-1}}$ alakú számok, az pedig könnyen látható, hogy az R_i halmaznak 2^i darab eleme van, és az R_i halmazok diszjunktak.

Következik a $(*)$ azonosság bizonyítása.

Ha $n=1$, akkor $r_1=a_1$, és azt kell megmutatnunk, hogy

$$a_1\sqrt{2}=2\sin a_1\frac{\pi}{4}.$$

Mivel a szinuszfüggvény páratlan, $\sin a_1\cdot x=a_1\cdot\sin x$, tehát a jobb oldalon $a_1 2\sin\frac{\pi}{4}=$ $=a_1 2\frac{\sqrt{2}}{2}$ áll, $(*)$ tehát igaz, ha $n=1$. Legyen most $n>1$. Ekkor, amint az könnyen ellenőrizhető, $r_n=a_1\left(1+\frac{r_{n-1}}{2}\right)$, ahol $r_{n-1}\in R_{n-1}$.

Így $2\sin r_n\cdot\frac{\pi}{4}=2\sin a_1\left(1+\frac{r_{n-1}}{2}\right)\frac{\pi}{4}=2a_1\sin\left(1+\frac{r_{n-1}}{2}\right)\frac{\pi}{4}$. Ismeretes, hogy $\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$, amit most $2\sin\alpha=a_1\sqrt{2-2\cos 2\alpha}$ alakba írhatunk ($a_1=\pm 1$). Most $\alpha=\left(1+\frac{r_{n-1}}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{4}$, így

$$2\sin r_n\cdot\frac{\pi}{4}=a_1\sqrt{2-2\cos\left(\frac{r_{n-1}}{2}+1\right)\cdot\frac{\pi}{2}}.$$

Mivel $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$, azért

$$2\sin r_n\frac{\pi}{4}=a_1\sqrt{2+2\sin\frac{r_{n-1}}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}=a_1\sqrt{2+2\sin r_{n-1}\cdot\frac{\pi}{4}}.$$

A négyzetgyök alatt az indukciós feltevés szerint

$$2+a_2\sqrt{2+a_3\sqrt{2+\ldots+a_n\sqrt{2}}}$$

áll, így $(*)$ bizonyítását befejeztük.

Pallos Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t.) megoldása alapján

Megjegyzés. Ha bevezetjük a $p_1(x)=x^2-2$ és a $p_n(x)=p_{n-1}^2(x)-2=p_1(p_{n-1}(x))$ polinomokat, akkor könnyen látható, hogy a H_n halmaz elemei és azok ellentettjei a 2^n-edfokú $p_n(x)$ polinom gyökei. Ezek a polinomok szoros kapcsolatban vannak az ún. *Csebisev*-polinomokkal. Ismeretes, hogy adott n természetes számra $\cos nx$ felírható $\cos x$ n-edfokú polinomjaként: $\cos 0x=1=T_0(x)$, $\cos 1x=\cos x$ miatt $T_1(x)=x$, $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ miatt $T_2(x)=2x^2-1$ és általában, az n-edfokú T_n Csebisev-polinomra

$$\cos nx=T_n(\cos x).$$

A fenti $p_1(x)$ polinom éppen $2T_2\left(\frac{x}{2}\right)$, és nyomban adódik, hogy a 2^n-edfokú $p_n(x)$ polinom nem más, mint $\frac{1}{2}T_{2^n}(2x)$. Ez viszont azt jelenti, hogy

$$p_n(2\cos x)=2\cdot\cos 2^n x. \tag{1}$$

Ennek az összefüggésnek az alapján fel tudunk írni trigonometrikus alakban 2^n darab számot, amelyek valamennyien gyökei a $p_n(x)$ polinomnak. Így viszont a polinom minden gyökét felsoroljuk, hiszen a $p_n(x)$ polinom foka éppen 2^n. Erre azért van jogos reményünk, mert tudjuk, hogy a H_n halmaz elemei és azok ellentettjei a $p_n(x)$ polinom gyökei, ezek a számok pedig, mint láttuk, -2 és 2 közé esnek, és így $2\cos x$ alakba írhatók.

Így x-nek azokat az értékeit keressük, amelyekre $2\cos 2^n x=0$; ha x_i egy ilyen szám, akkor $2\cos x_i$ a $p_n(x)$ polinom gyöke.

$\cos 2^n x=0$ pontosan akkor, ha $2^n x=k\frac{\pi}{2}$, ahol k páratlan egész szám, így $p_n(x)$-nek gyökei a

$$2\cos k\cdot\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

alakú számok, ahol k páratlan. Ha $1\le k<2^{n+1}$, akkor $0<k\frac{\pi}{2^{n+1}}<\pi$, így mivel a koszinuszfüggvény a $[0;\pi]$ intervallumon szigorúan monoton fogyó, a felsorolt 2^n darab szám között nincsenek egyenlők, megkaptuk a $p_n(x)$ polinom gyökeit. E 2^n darab szám fele pozitív, azok, amelyekre $k<2^n$, ami azonnal megmutatja, hogy a H_n halmaznak 2^{n-1} darab eleme van.

Végül az, hogy a H_n és a H_m halmazok diszjunktak, közvetlenül adódik ezeknek a számoknak a fenti trigonometrikus alakjából. Ha $n\neq m$, k és l páratlanok, akkor a $\frac{k\pi}{2^{n+1}}$ és az $\frac{l\pi}{2^{m+1}}$ argumentumoknak mind az összege, mind pedig a különbsége $\frac{p}{q}\pi$ alakú, ahol q 2-hatvány, p pedig páratlan. Mivel két szám koszinusza pontosan akkor egyenlő, ha a számoknak vagy az összege, vagy pedig a különbsége π páros többszöröse, így most valóban nem teljesülhet egyenlőség.

234 dolgozat érkezett. 4 pontos 72, 3 pontos 29, 2 pontos 77, 1 pontos 48, 0 pontos 6. Nem versenyszerű 2.

B. 3392. *Adott* 25 *edény, űrtartalmuk rendre* $1, 2, \ldots, 25$ *liter. Hányféleképpen választható ki közülük tíz úgy, hogy bármely két kiválasztott edény felhasználásával kimérhető legyen* 1 *liter víz? (Korlátlan mennyiségű víz áll rendelkezésre, és egyik edényből a másikba is lehet töltögetni.)*

(*4 pont*) Javasolta: *Kozma László,* Székelyudvarhely

Megoldás. A feladat jól látható módon két, egymástól majdnem független részből áll. Először megmutatjuk, hogy ha a és b pozitív egészek, akkor az a liter űrtartalmú A és a b liter űrtartalmú B edényekkel pontosan akkor mérhető ki 1 liter víz, ha a és b legnagyobb közös osztója 1. Ezek után a kérdés az, hogy az $1, 2, \ldots, 25$ számok közül hányféleképpen választható ki tíz úgy, hogy közülük bármely kettő relatív prím legyen.

i) Ha egy adott helyzetben az A edényben a_1, a B edényben pedig b_1 liter víz van, akkor a következő lépésben az egyes edényeket kiüríthetjük vagy színültig tölthetjük, ezen kívül bármelyik edény tartalmát elkezdhetjük átönteni a másikba, amíg az meg nem telik vagy az előbbi ki nem ürül. Bármely lépés után tehát legalább az egyik edény üres vagy tele van.

Egy liter víz kimérése ilyen körülmények között azt jelenti, hogy a fenti lépések véges sorozata után az egyik edényben 1 liter víz van. (A másik színültig van, vagy üres, ennek nincs jelentősége.)

Az $(a,b)=1$ feltétel nyilván szükséges, hiszen ha d az a és b számok egy közös osztója, akkor a kezdetben üres edényekben lévő víz mennyisége nyilván osztható d-vel, és ez a tulajdonság megmarad a fenti lépések bármelyikének a végrehajtása után is.

Másrészt, ha $(a,b)=1$, akkor kimérhető 1 liter víz. Ha $(a,b)=1$ és $a=b=1$, akkor az állítás semmitmondó, így föltehető, hogy például $b>1$. A bizonyítás most már egy közismert aritmetikai állításon múlik:

Ha $(a,b)=1$ és $b>1$, akkor az

$$ax \equiv 1 \pmod b$$

kongruenciának van megoldása,[1] léteznek az $1 \le k < b$ és $0 \le q < a$ egészek, amelyekkel

$$k \cdot a = q \cdot b + 1.$$

Ezek szerint ha az A edényt k-szor megtöltjük, és az összesen $k \cdot a$ liter vízből a B edénnyel q alkalommal összesen $q \cdot b$ liter vizet eltávolítunk, akkor az A edényben éppen 1 liter víz marad.

Az eljárás során időről időre – összesen k-szor – b liternél kevesebb víz marad az A edényben, utoljára éppen 1 liter. Az utolsó alkalom kivételével ezt a maradványt – az $a, 2a, \ldots, (k-1)a$ mennyiségek b-vel való osztásakor fellépő maradékot – átöntjük a B edénybe, és az A edényt színültig töltve folytatjuk az eljárást.

---

[1] Ha ugyanis $(a,b)=1$, akkor a-nak két többszöröse, t_1a és t_2a akkor és csak akkor adja ugyanazt a maradékot b-vel osztva, ha $b \mid at_1 - at_2 = a(t_1-t_2)$, vagyis $(a,b)=1$ miatt $b \mid t_1 - t_2$. Ezért, ha a-nak vesszük a b-vel osztva különböző maradékot adó $1, 2, \ldots, b$-szeres többszöröseit, akkor ezek is mind különböző maradékot adnak b-vel osztva. Emiatt minden maradék pontosan egyszer fordul elő, lesz tehát köztük *egy* többszörös, amely 1 maradékot ad: $ka = qb + 1$.

KöMaL – 2001/4 MAT0104 cianmagentayellowblack2002. június 19. – 8:51 (26. lap)

Megjegyzések. 1. A fenti eljárás nyilván szimmetrikus, a, $b>1$ esetben a $by\equiv 1 \pmod{a}$ kongruencia megoldásából kiindulva is kimérhető az 1 liter víz.

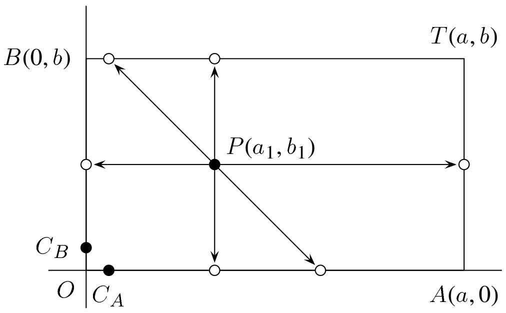
2. Mivel az adott feltételek esetén az

$$ax\equiv b_1 \pmod{b}$$

kongruencia is megoldható tetszőleges $0\le b_1<b$ esetén, azért tetszőleges egész $1\le c\le a+b$ esetén c liter víz is kimérhető a két edénnyel.

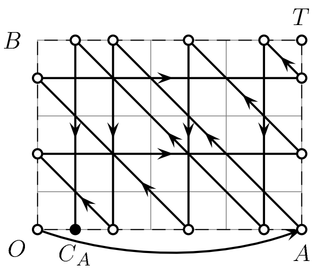
3. A megoldásból kiderül, hogy tetszőleges pozitív egész a, b számokra pontosan akkor mérhető ki c liter víz, ha $c\le a+b$ és c osztható az a és b legnagyobb közös osztójával, innen pedig teljes indukcióval egyszerűen adódik, hogy ugyanez kettőnél több edényre is igaz.

4. Érdekes geometriai szemléltetése adható a fenti bizonyításnak és magának a felhasznált tételnek is. Ha az edényekben $0\le a_1\le a$, illetve $0\le b_1\le b$ liter víz van, akkor a rendszer állapota a $P(a_1,b_1)$ ponttal, maga az eljárás pedig ennek a pontnak a pályájával ábrázolható (*1. ábra*). A folyamat során a P pont az $OATB$ téglalap pontja, az ábra egy átmeneti állapotot mutat, amikor valamelyik edény tartalma változik. A vízszintes és a függőleges elmozdulások a megfelelő edények kiürítését, illetve feltöltését mutatják, az „átlós” irányú elmozdulás pedig azt jelenti, hogy az egyik edény tartalmát átöntjük a másikba. A P pont az origóból indul, útja során a megengedett irányok valamelyike mentén a téglalap határáig mozog, majd tovább folytatja útját.

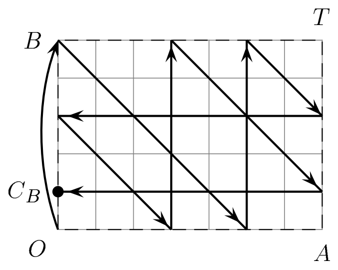


1. ábra

A valóságosan elérhető állapotok így az $AOTB$ téglalap kerületének egész koordinátájú pontjai közül kerülnek ki, az állítás pedig azt jelenti, hogy $(a,b)=1$ esetén van olyan pálya, amelyik áthalad a $C_A(1,0)$ vagy a $C_B(0,1)$ ponton. A *2. ábra* az $a=7$, $b=5$ esetben mutatja a megoldást.



2. ábra



3. ábra

Ha úgy tetszik, az ábrán látható „biliárd” magát a

$$7x\equiv 1 \pmod{5}$$

kongruenciát „oldja” meg. Az x értéke a TA, a q értéke pedig a TB falon történő „visszaverődések” száma. Most $x=3$ és $q=4$, és valóban: $7\cdot 3=4\cdot 5+1$. A P pont összesen $7+5$ „visszaverődés” után érkezik a $C_A(1,0)$ pontba, ami 13 átöntést jelent. A *3. ábra* a szimmetrikus

$$5y\equiv 1 \pmod{7}$$

kongruencia megoldását mutatja a „biliárdasztalon”; ekkor $y=3$ és $q=2$, most 8 visszaverődés után 9 átöntéssel érkezünk meg a $C_B(0,1)$ pontba.

Mindkét ábrán ellenőrizhető, hogy ha tovább folytatjuk a megkezdett pályát, akkor az útvonal az $OATB$ téglalap kerületének valamennyi egész koordinátájú pontján áthaladva záródik az O pontban, szemléltetve ezzel a 2. megjegyzésben mondottakat.

ii) Térjünk rá ezek után a feladat kérdésének megválaszolására. Vegyük észre először, hogy tíznél több szám nem választható ki az 1, 2, ..., 25 számok közül úgy, hogy közülük bármely kettő relatív prím legyen. A fenti számhalmazban ugyanis 9 prímszám található: 2 (4), 3 (2), 5 (2), 7 (1), 11 (1), 13 (1), 17 (1), 19 (1), 23 (1). A számok mögött zárójelben az a legnagyobb kitevő áll, amellyel a szóbanforgó prím a számhalmazban előfordul. Ha két szám relatív prím, akkor a prímtényezőik között nem lehet közös, így a tíz szám prímtényezőinek a halmazához a fenti 9-elemű halmaznak kell 10 darab, páronként közös elem nélküli részhalmazát kijelölnünk. Ez pedig csak úgy lehetséges, ha egyikük az üres halmaz – az 1 tehát a kiválasztott számok között van – a további 9 pedig a 9 darab egyelemű részhalmaz. A feltételeknek megfelelő 10-elemű halmazok tehát az

$$\{1,\ 2^a,\ 3^b,\ 5^c,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23\}$$

alakú halmazok, ahol $1\le a\le 4$, $1\le b\le 2$ és $1\le c\le 2$. Ez összesen $4\cdot 2\cdot 2=16$ lehetőség, ennyiféleképpen választható ki 10 darab az első 25 pozitív egész közül úgy, hogy közülük bármely kettőnek 1 legyen a legnagyobb közös osztója.

293 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 43, 3 pontot 90, 2 pontot 64, 1 pontot 33, 0 pontot 46 versenyző. Nem versenyszerű 17 dolgozat.

B. 3395. *Szerkesszük meg az $A_1A_2A_3A_4A_5$ ötszöget, ha adott az A_i pontnak az A_{i+1} pontra vonatkozó tükörképe ($i=1, \ldots, 5$, $A_6:=A_1$).*
(*3 pont*)

Megoldás. Jelöljük B_i-vel az A_i pontnak az A_{i+1} pontra vonatkozó tükörképét.

Ha egy, a feladat feltételeinek eleget tevő *ábrán* egy tetszőleges O pontból helyvektorokat indítunk az A_iB_i pontokhoz és mindegyiket a megfelelő kisbetűvel jelöljük, akkor a tükrözések miatt felírhatjuk a következő egyenlőségeket:

$$\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1=2\mathbf{a}_2,$$

$$\mathbf{a}_2+\mathbf{b}_2=2\mathbf{a}_3,$$

$$\mathbf{a}_3+\mathbf{b}_3=2\mathbf{a}_4,$$

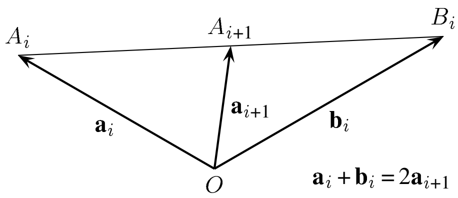
$$\mathbf{a}_4+\mathbf{b}_4=2\mathbf{a}_5,$$

$$\mathbf{a}_5+\mathbf{b}_5=2\mathbf{a}_1.$$

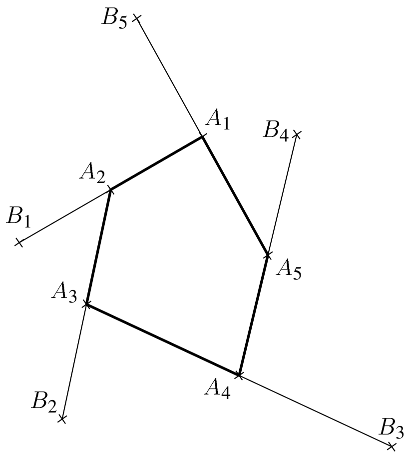
Szorozzuk meg a második egyenlőséget 2-vel, a harmadikat 4-gyel, a negyediket 8-cal, az ötödiket pedig 16-tal, majd adjuk össze az öt egyenlőséget, és rendezzük a kapott összefüggést. Így

$$(1)\qquad 31\mathbf{a}_1=\mathbf{b}_1+2\mathbf{b}_2+4\mathbf{b}_3+8\mathbf{b}_4+16\mathbf{b}_5$$

adódik, az $\mathbf{a}_1$ vektor tehát (a párhuzamos szelők tétele felhasználásával) megszerkeszthető.



1. ábra



2. ábra

Ezt felhasználva, a szerkesztés menete: a $\mathbf{b}_i$ vektorok ismeretében (1)-et felhasználva megszerkesztjük az $\mathbf{a}_1$ vektort. Ezt O-ból felmérve megkapjuk az A_1 pontot. Ezután sorban megszerkesztjük az A_iB_i szakaszok felezőpontját, ezek lesznek az A_{i+1} pontok ($i=1$, 2, 3, 4). Az így szerkesztett $A_1A_2A_3A_4A_5$ ötszög nyilván eleget tesz a feladat feltételeinek.

A feladatnak mindig egy megoldása van, azonban a kapott ötszög lehet hurkolt vagy elfajuló is.

87 dolgozat érkezett. 3 pontos Ábel Dániel, Backhausz Ágnes, Bicskei László, Blastik Márta, Hamar Gergő, Hargitai Gábor, Jesch Dávid, Király Ferenc, Koltai Péter, Koreck Ferenc, Kovács Levente, Pach Péter Pál, Pacz Bence Tamás, Pogátsa Attila, Rácz Béla András, Rácz Éva és Szekeres Balázs megoldása. 2 pontos 44, 1 pontos 18, 0 pontos 8.

B. 3396. *Oldjuk meg az $xy+yz+zx-xyz=2$ egyenletet, ha x, y és z pozitív egész számok.*

(*4 pont*)

Megoldás. Vezessük be az egyelőre meghatározatlan t paraméterrel az $u=x-t$, $v=y-t$, $v=z-t$ új ismeretleneket. Ezekkel az ismeretlenekkel az átrendezett $xyz-{}$ $-xy-yz-zx+2=0$ egyenlet

$$uvw+(t-1)(uv+vw+wu)+(t^2-2t)(u+v+w)+t^3-3t^2+2=0$$

alakba írható. Mivel $t^3-3t^2+2=(t-1)(t^2-2t-2)$, látható, hogy $t=1$ választással a négy tag közül kettő lesz nulla, és az

$$uvw-u-v-w=0 \tag{1}$$

egyenlethez jutunk, ahol u, v és w nemnegatív egészek. Ezt fogjuk megoldani.

Ha u, v és w valamelyike nulla, akkor (1) szerint az összegük is az, és így az $u=$ $=v=w=0$ megoldást kapjuk. Föltehető ezért, hogy mindhárom érték legalább 1.

(1) bal oldala tovább alakítható:

$$(uv-1)(w-1)+(u-1)(v-1)-2=0. \tag{2}$$

Ha mindhárom érték legalább 2, akkor $uv\ge 4$, és így $(uv-1)(w-1)\ge 3$, amihez a nemnegatív $(u-1)(v-1)$-et adva nem kaphatunk 2-t. Így u, v és w között van 2-nél kisebb, és mivel mindhárom érték legalább 1, egyikük – például w – pontosan 1. Ekkor (2) így alakul:

$$(u-1)(v-1)=2. \tag{3}$$

A tényezők értéke nemnegatív, így a szorzat pontosan akkor 2, ha az egyik tényező 1, a másik pedig 2. Az $\{u,v\}$ halmaz tehát a $\{2,3\}$ halmazzal egyenlő, így a szimmetrikus (1) nemnegatív megoldásai a $\{0,0,0\}$ és az $\{1,2,3\}$ számhármasok. Az eredeti egyenlet megoldásaira tehát vagy $\{x,y,z\}=\{1,1,1\}$, vagy pedig $\{x,y,z\}=\{2,3,4\}$.

Az egyenletnek így 7 megoldása van a pozitív egészek körében, $x_1=y_1=z_1=1$, illetve a 2, 3, 4 számhármas hatféle permutációjaként adódó megoldások.

344 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 125, 3 pontot 80, 2 pontot 56, 1 pontot 61, 0 pontot 21 beküldő. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

Megjegyzések. 1. A fentiekhez hasonló számolgatással könnyen ellenőrizhető, hogy az x, y, z számhármas pontosan akkor megoldása az eredeti egyenletnek, ha az $x_1=2-x$, $y_1=2-y$, $z_1=2-z$ számhármas is megoldás. Mivel pedig az egyenletnek jól látható módon nincsen negatív egészekből álló megoldása (ekkor xy, yz, zx és $-xyz$ mindegyike legalább 1), így az egyenletnek olyan megoldása sem lehet, ahol mindhárom érték nagyobb 2-nél.

Az egyenletet kielégítő pozitív számhármasok között tehát szerepelnie kell 3-nál kisebb értéknek is. Ha egy pozitív megoldásnak eleme a 2, például $x=2$, akkor $x_1=0$, $y_1=2-y$ és $z_1=2-z$ is megoldás, ami azt jelenti, hogy $y_1z_1=2$. Innen vagy $\{y_1,z_1\}=\{1,2\}$ és így $\{y,z\}=\{-1,0\}$, ami nem pozitív megoldás, vagy pedig $\{y_1,z_1\}=\{-1,-2\}$ és így $\{y,z\}=\{3,4\}$; megkaptuk a $\{2,3,4\}$ számhármast.

Azokat a pozitív megoldásokat nem találtuk még meg, amelyek elemei között nem szerepel a 2. Az ilyen megoldások legkisebb eleme az 1. Ha például $x=1\le y$, z, akkor az egyenlet az

$$y+z=2$$

alakot ölti, ez pedig a pozitív egész y és z értékekre csak úgy teljesülhet, ha $y=z=1$.

2. Az egyenletből pl. y kifejezhető mint az x változó paraméteres (a paraméter z) racionális törtfüggvénye:

$$y=\frac{zx-2}{(z-1)x-z}. \tag{4}$$

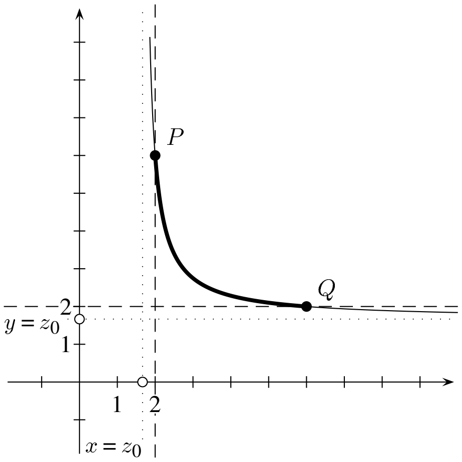
Ha az 1. megjegyzésben látottak szerint elintézzük azt az esetet, amikor valamelyik ismeretlen értéke 1, akkor a (3) függvényt abban az esetben kell vizsgálni, amikor x, y és $z\ge 2$, és mivel $x=y=z=2$ nem megoldás, az is föltehető, hogy $z>2$.

A függvény grafikonján keressünk tehát rácspontokat az $x\ge 2$; $y\ge 2$ feltételnek eleget tevő síknegyedben, amennyiben az egész értékű z paraméter értéke nagyobb 2-nél.

A függvény grafikonja szimmetrikus az $y=x$ egyenesre, és az *ábrán* látható. A hiperbola aszimptotái az $x=z_0$ és az $y=z_0$ egyenesek, ahol $z_0=\dfrac{z}{z-1}$. Mivel $z>2$, azért $1<z_0<2$.

Ha $x=2$, akkor $y=\dfrac{2z-2}{z-2}>2$, így a függvény grafikonján csak a PQ íven találhatunk rácspontot.

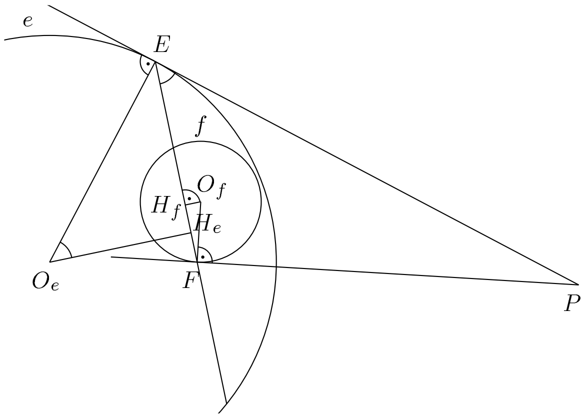
Az olvasóra bízzuk annak ellenőrzését, hogy ha $z>4$, akkor a PQ íven sincsen rácspont, ha $z=3$ vagy 4, akkor pedig az első esetben csak a $(2,4)$ – és a szimmetrikus $(4,2)$ –, a másodikban pedig csak a $(2,3)$ és a szimmetrikus $(3,2)$ rácspont esik a PQ ívre.



B. 3399. *Adott a síkon két kör, e és f, rajtuk kívül pedig a P pont. A P-ből egy-egy érintőt húzunk a két körhöz, ezek érintési pontja E és F. Bizonyítsuk be, hogy azoknak a szakaszoknak az aránya, amelyeket a két kör metsz ki az EF egyenesből, nem függ attól, hogy melyik két érintőt rajzoltuk meg.*

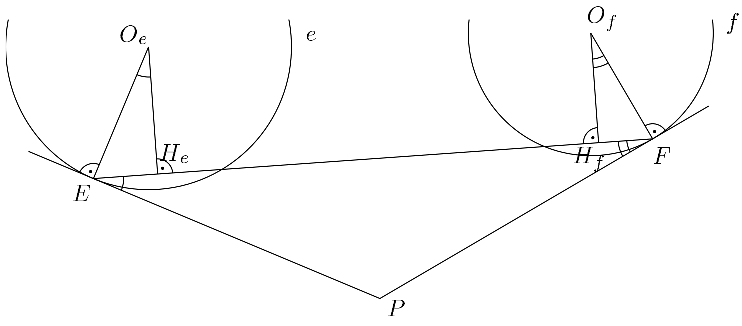
(*5 pont*)

Megoldás. Megmutatjuk, hogy ha P nincs rajta a két kör egyik közös érintőjén sem, akkor a két kör által az EF egyenesből kimetszett szakaszok aránya megegyezik a PE/PF arány egy konstansszorosával. Ez az arány valóban nem függ attól, hogy melyik érintőket rajzoltuk meg, mert egy külső pontból egy körhöz húzott két érintő hossza egyenlő.



1.a) ábra

Jelöljük az e, illetve f körök középpontját O_e, illetve O_f-fel; az EF egyenesből a körök által kimetszett szakaszok felezőpontját pedig H_e, illetve H_f-fel. Tudjuk, hogy a



1.b) ábra

kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, valamint azt is, hogy a két húr felezőmerőlegese átmegy a kör középpontján. Ezért az $EO_eH_e\sphericalangle$ és a $PEF\sphericalangle$, illetve az $FO_fH_f\sphericalangle$ és a $PFE\sphericalangle$ szögpárok merőleges szárúak. Ezek a szögek tehát egyenlőek vagy 180°-ra egészítik ki egymást (*1.a) és b) ábra*). Mindkét esetben igaz, hogy

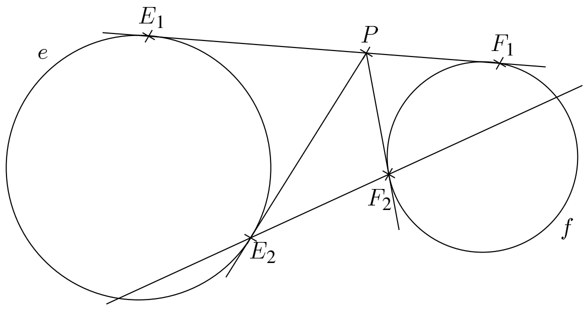
$$\sin EO_eH_e\sphericalangle=\sin PEF\sphericalangle \qquad \text{és} \qquad \sin FO_fH_f\sphericalangle=\sin PFE\sphericalangle.$$

Ha az e kör sugara r_e, az f köré pedig r_f, akkor $EH_e=r_e\sin EO_eH_e\sphericalangle$ és $FH_f=$ $=r_f\sin FO_fH_f\sphericalangle$. A PEF háromszögben a szinusztétel szerint $\dfrac{PE}{PF}=\dfrac{\sin PFE\sphericalangle}{\sin PEF\sphericalangle}$, tehát a két kör által az EF egyenesből kimetszett szakaszok aránya:

$$\frac{2\cdot FH_f}{2\cdot EH_e}=\frac{r_f\cdot\sin FO_fH_f\sphericalangle}{r_e\cdot\sin EO_eH_e\sphericalangle}=\frac{r_f}{r_e}\cdot\frac{\sin PFE\sphericalangle}{\sin PEF\sphericalangle}=\frac{r_f}{r_e}\cdot\frac{PE}{PF}.$$

Ez pedig éppen a bizonyítandó állítás.

Ha az e és f köröknek van közös érintője, és P rajta van ezek egyikén, akkor az állítás nem igaz. A *2. ábrán* látható, hogy ebben az esetben van olyan helyzete az EF egyenesnek, amelyből a két kör nem metsz ki húrokat, s olyan is, amelyből kimetsz.



2. ábra

66 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Balogh 541 János, Deli Lajos, Komjáthy Júlia, Legány Csaba, Lovrics Anna, Somogyi Dávid, Soproni Péter, Szekeres Balázs, Szűcs Mónika és Takács József. 4 pontos 51, 3 pontos 1, 0 pontos 4 dolgozat.

B. 3403. *Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c valós számokra* $\dfrac{1}{a+b+c}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ *teljesül, akkor* $\dfrac{1}{a^5+b^5+c^5}=\dfrac{1}{a^5}+\dfrac{1}{b^5}+\dfrac{1}{c^5}$.

(*3 pont*) Javasolta: *Székelyhidi Tamás,* Ercsi

I. megoldás. Végezzük el az alábbi ekvivalens átalakításokat a feladat kiinduló azonosságán:

$$\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},$$

ahol $a+b+c\neq 0$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$.

$$abc=(a+b+c)(ab+ac+bc)=a^2b+a^2c+abc+ab^2+abc+b^2c+abc+ac^2+bc^2$$

$$0=(a^2b+a^2c)+(abc+ac^2)+(ab^2+abc)+(b^2c+bc^2)=$$

$$=(b+c)(a^2+ac+ab+bc)=(b+c)(a+c)(a+b).$$

Egy szorzat csak akkor lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, így vagy $b=-c$, vagy $a=-c$, vagy $a=-b$. Tegyük fel, hogy például $b=-c$. Ekkor viszont bármilyen n pozitív szám esetén $b^{2n+1}=-c^{2n+1}$ és $\frac{1}{b^{2n+1}}=-\frac{1}{c^{2n+1}}$, így

$$\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}=\frac{1}{a^{2n+1}}=\frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}.$$

Hasonlóan bizonyíthatunk $a=-c$ vagy $a=-b$ esetén is. $n=2$-re kapjuk a feladat állítását.

II. megoldás. Az I. megoldás szerint írjuk át a kiinduló feltételt

$$(*)\qquad abc=(a+b+c)(ab+ac+bc)$$

alakba!

Tekintsünk most egy harmadfokú egyenletet, amelynek a, b és c a gyökei:

$$(x-a)(x-b)(x-c)=0$$

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0$$

Használjuk fel $(*)$-ot:

$$x^2[x-(a+b+c)]+(ab+ac+bc)[x-(a+b+c)]=0$$

$$[x-(a+b+c)][x^2-(ab+ac+bc)]=0.$$

Tehát a harmadfokú egyenlet egyik gyöke $a+b+c$. Ebből az következik, hogy vagy $a=$ $=a+b+c$, vagy $b=a+b+c$, vagy $c=a+b+c$. A bizonyítást az I. megoldáshoz hasonlóan fejezhetjük be.

Pusztai Erika (Budapest, Batthyány Lajos Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján

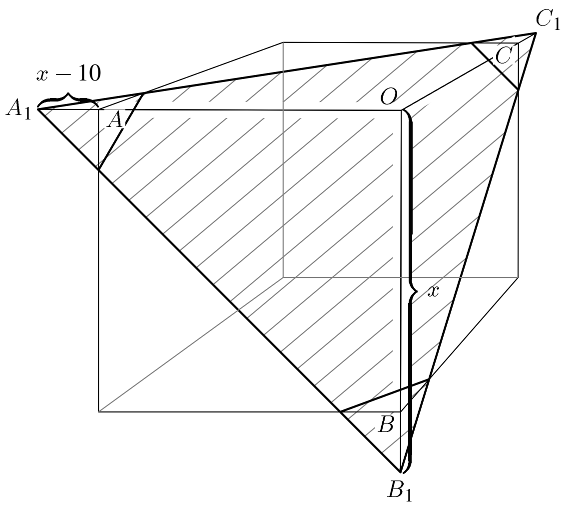
160 dolgozat érkezett. 3 pontos 103, 2 pontos 24, 1 pontos 10, 0 pontos 12. Nem versenyszerű 11 dolgozat.

B. 3404. *Egy* 10 *egység élű kocka egyik csúcsából kiinduló három élének végpontja* A, B *és* C. *Az* ABC *síkkal párhuzamos* S_1 *és* S_2 *síkok a kockát három részre osztják, amelyek térfogatának aránya* $251:248:251$. *Mekkora a két sík távolsága?*

(*5 pont*)

Megoldás. Jelöljük az A, B, C csúcsok közös szomszédját O-val. Az $OABC$ tetraéder térfogata $\frac{1}{6} \cdot OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1000}{6} < \frac{251}{251+248+251} \cdot 1000$, ezért az $\mathcal{S}_1$ sík O-tól távolabb van, mint az ABC sík. Messe az $\mathcal{S}_1$ az O-ból induló kockaéleket rendre az A_1, B_1, C_1 pontokban. Az $OA_1B_1C_1$ tetraéder O-ból induló élei egyenlő hosszúak. Legyen $AA_1 = BB_1 = CC_1 = x$. Ekkor az $\mathcal{S}_1$ által a kockából levágott rész térfogatát – azaz az $OA_1B_1C_1$ tetraéder és a kocka közös részének térfogatát – megkapjuk, ha az $OA_1B_1C_1$ tetraéder térfogatából levonjuk az A, B és C csúcsoknál a kocka lapjai által a nagy tetraéderből levágott három kis tetraéder térfogatát (*1. ábra*). E kis tetraéderek A-ban, B-ben, illetve C-ben találkozó élei páronként merőlegesek egymásra, hosszuk pedig $x-10$, ezért az $\mathcal{S}_1$ által a kockából levágott rész térfogata:

$$\frac{1}{6}x^3 - 3 \cdot \frac{1}{6}(x-10)^3.$$



1. ábra

A feltétel szerint ez a kocka térfogatának $\frac{251}{750}$ része, tehát

$$\frac{1}{6}x^3 - 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot (x-10)^3 = \frac{251}{750} \cdot 1000.$$

Ezt az egyenletet rendezve kapjuk, hogy

$$x^3 - 45x^2 + 450x - 496 = 0.$$

A harmadfokú egyenleteknek is van – a másodfokúakhoz hasonlóan – általános megoldóképlete. Ezt az egyenletet azonban annak ismerete nélkül is megoldhatjuk. Ha az egyenletnek van egész gyöke, akkor az osztja a 496-ot, az egyenlet konstans tagját. $496 = 2^4 \cdot 31$, az osztókat megvizsgálva kapjuk, hogy $x = 31$ gyöke az egyenletnek. Ezután az egyenlet bal oldala szorzattá alakítható:

$$x^3 - 45x^2 + 450x - 496 = (x-31)(x^2 - 14x + 16).$$

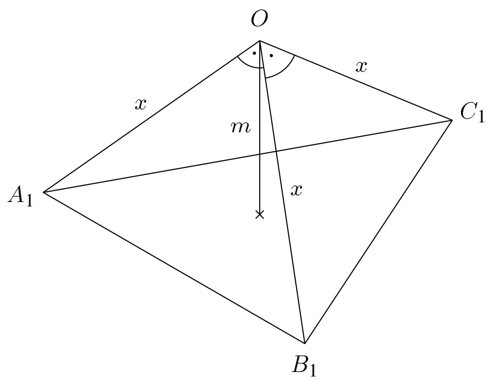
Tehát az egyenlet gyökei: $x_1 = 31$, $x_{2,3} = 7 \pm \sqrt{33}$.

Mivel az $\mathcal{S}_1$ sík O-tól távolabb van, mint az ABC sík, de közelebb van O-hoz, mint a kocka O-val átellenes csúcsához, azért $10 < x < \dfrac{10\sqrt{3}}{2}$. Ezeknek a feltételeknek csak az $x = 7 + \sqrt{33}$ megoldás felel meg. A kocka középpontos szimmetriája miatt az $\mathcal{S}_2$ sík is ugyanakkora szakaszokat vág le a kocka O-val átellenes csúcsából kiinduló élekből. A két sík távolságát megkapjuk, ha a kocka testátlójának hosszából levonjuk az $OA_1B_1C_1$ tetraéder O-hoz tartozó magasságának kétszeresét.

Az $A_1B_1C_1$ szabályos háromszög oldala $x \cdot \sqrt{2}$, ezért a háromszög területe $\dfrac{x^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{4}$. Ha az O-hoz tartozó magasságot m-mel jelöljük, akkor a tetraéder térfogatát kétféleképpen felírva kapjuk, hogy

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 \cdot 2\sqrt{3}}{4} \cdot m = \frac{1}{6} \cdot x^3,$$

tehát $m = \dfrac{x}{\sqrt{3}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3} + \sqrt{11}$.



2. ábra

Vagyis az $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ síkok távolsága

$$10\sqrt{3} - 2m = \frac{16\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{11} \approx 2{,}6044 \text{ egység.}$$

Horváth Illés (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

80 dolgozat érkezett. 5 pontos 46, 4 pontos 14, 3 pontos 6, 2 pontos 2, 0 pontos 12.

B. 3405. *Van öt golyónk. Kilenc mérést hajthatunk végre egy egykarú mérlegen, amelyen egyszerre egy vagy két golyó súlyát mérhetjük meg. Megtörténhet azonban, hogy a kilenc mérés egyikének az eredményét tévesen jegyezzük föl. Megtudhatjuk-e ennek ellenére mind az 5 golyó súlyát?*

(*4 pont*) Javasolta: *Surányi László,* Budapest

Megoldás. A golyók (ismeretlen) súlyát jelöljük rendre A, B, C, D, E-vel. Végezzük el a következő 9 mérést:

$$A = m_1, \qquad B = m_2, \qquad C = m_3,$$
$$A + D = m_4, \qquad A + E = m_5, \qquad B + D = m_6,$$
$$B + E = m_7, \qquad C + D = m_8, \qquad C + E = m_9.$$

Az $m_1, \dots, m_9$ mérési eredmények kiértékelése:

1. eset: $m_4 - m_5 = m_6 - m_7 = m_8 - m_9$; ekkor $m_4, \dots, m_9$ mindegyike helyes eredmény. Az m_1, m_2, m_3 vizsgálatára hasonlítsuk össze $m_1 - m_2$ és $m_4 - m_6$ értékét; ha egyenlőek, akkor csak m_3 értéke lehet (esetleg) hibás. Hasonlóan, ha $m_2 - m_3 = m_6 - m_8$, akkor legfeljebb az m_1 hibás, és ugyanígy $m_1 - m_3 = m_4 - m_8$ jelenti azt, hogy m_2-n kívül minden további mérésben megbízhatunk. Tehát ebből a három összehasonlításból (illetve az abból levont következtetéssel) D és E értéke meghatározható, abból pedig A, B és C értéke is.

2. eset: Az esetleges hiba a 4., …, 9. mérések valamelyikében van; ekkor m_1, m_2, m_3 értéke pontos, így A, B és C ismert. A D és E értékét ezután a 4., …, 9. mérések közül a helyesnek bizonyultak segítségével kaphatjuk meg. Hogy melyek ezek, azt abból láthatjuk, hogy $m_4 - m_5$, $m_6 - m_7$ és $m_8 - m_9$ közül melyik kettő egyenlő egymással. (Ha például $m_4 - m_5 = m_8 - m_9$, akkor m_4, m_5, m_8, m_9 helyes, tehát például $D = m_4 - A$, $E = m_5 - A$.)

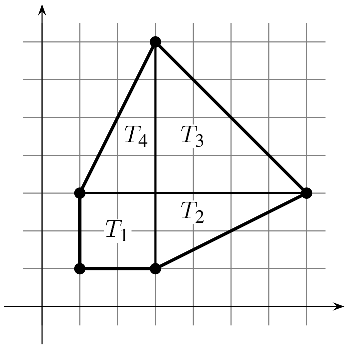
Fekete Árpád (Kiskunfélegyháza, Móra F. Gimn., 12. o.t.)

248 dolgozat érkezett. 4 pontos 155, 3 pontos 8, 2 pontos 5, 1 pontos 13, 0 pontos 57. Nem versenyszerű 10.

B. 3406. *Egy sokszög csúcsainak halmaza olyan (x, y) koordinátájú pontokból áll, amelyekre x és y pozitív egészek, továbbá $x \mid 2y+1$ és $y \mid 2x+1$. Mekkora lehet legfeljebb a sokszög területe?*

(*4 pont*) Javasolta: *Mihalovics Sándor,* Esztergom

Megoldás. Először azokat az (x, y) párokat határozzuk meg, amelyekre a feltételek mellett még $x \le y$ is teljesül. Ekkor $2x+1 \le 2y+1$, tehát az $y \mid 2x+1$ feltételből következik, hogy $2x+1 = y$, vagy $2x+1 = 2y$, vagy $y = 1$. Ha $y = 2x+1$, akkor $x \mid 2y+1 = 4x+3$, azaz $x \mid 3$, tehát $x = 1$ vagy $x = 3$. A $2y = 2x+1$ egyenlőség nem teljesülhet, mert a bal oldalon páros, a jobb oldalon pedig páratlan szám áll. Végül, ha $y = 1$, akkor $x \le y$ miatt $x = 1$. Tehát az $x \le y$ feltételnek is eleget tevő pont összesen három van: (1, 3), (3, 7) és (1, 1). Ugyanígy kapjuk, hogy az $x > y$ feltételnek is eleget tevő pont kettő van: (3, 1) és (7, 3).



Az öt pont által meghatározott sokszögek közül az *ábrán* látható konvex ötszög területe a legnagyobb. Könnyen kiszámolható, hogy ennek területe 20 területegység:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 2 \cdot 2 + \frac{2 \cdot 4}{2} + \frac{4 \cdot 4}{2} + \frac{2 \cdot 4}{2} = 20.$$

Tran Thanh Long (Fazekas M. Főv. Gimn., 11. o.t.)

157 dolgozat érkezett. 4 pontos 100, 3 pontos 16, 2 pontos 12, 1 pontos 12, 0 pontos 5. Nem versenyszerű 12,

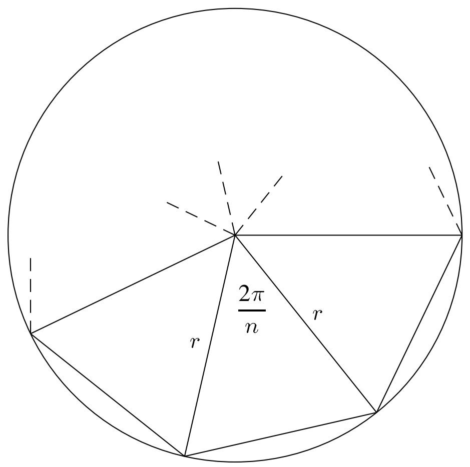
B. 3411. *Legalább hány oldalú az a szabályos sokszög, amely körülírt körének területét* 1 *ezreléknél kisebb hibával közelíti?*

(*4 pont*)

Megoldás. Legyen a sokszök köré írt kör sugara r, a sokszög oldalszáma pedig n. Ekkor a sokszög n darab olyan egyenlő szárú háromszögre bontható, amelyek szárszöge $\frac{2\pi}{n}$, szárainak hossza pedig r (*1. ábra*). Ezért a sokszög területe $T_n = n \cdot \frac{r^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$. Tudjuk, hogy a kör területe $T_k = r^2\pi$. A sokszög akkor közelíti körülírt körének területét 1 ezreléknél kisebb hibával, ha teljesül a

$$\frac{T_k - T_n}{T_k} < \frac{1}{1000}$$

egyenlőtlenség. A területképleteket beírva és rendezve kapjuk, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha



1. ábra

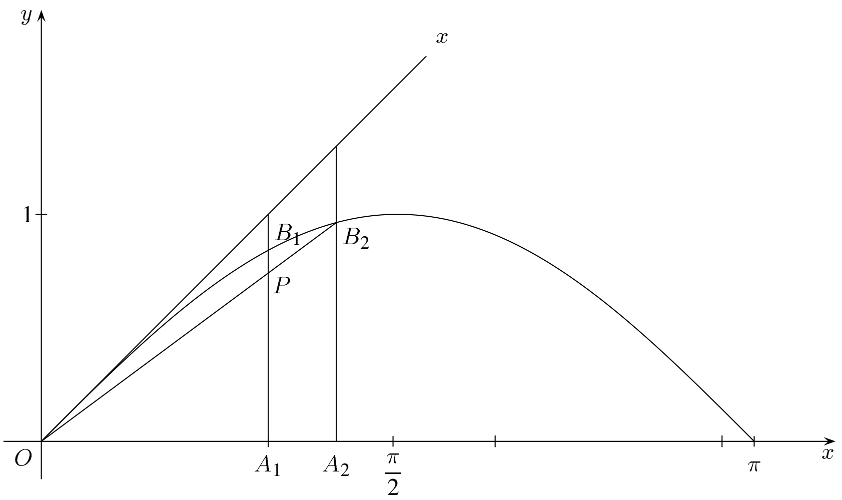
$$n \cdot \sin \frac{2\pi}{n} > \frac{999}{500}\pi \approx 6{,}276717. \tag{1}$$

Ha $n = 81$, akkor (1) nem teljesülhet, mert $81 \cdot \sin \frac{2\pi}{81} < 6{,}276887 < 6{,}2769 < \frac{999}{500} \cdot \pi$. Ha $n = 82$, akkor viszont teljesül (1), mert $\frac{999}{500} \cdot \pi < 6{,}277 < 82 \cdot \sin \frac{360^\circ}{82}$.

Az a szemléletesen nyilvánvaló tény, hogy az oldalszám növelésével a sokszög mind jobban közelíti a körülírt kör területét, vagyis a hiba csökken, most azzal egyenértékű, hogy az $n \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$ az n-nek szigorúan monoton növő függvénye. A következőkben ezt igazoljuk.

Megmutatjuk, hogy $n \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$ n-nek monoton növekvő függvénye, amiből következik, hogy (1) minden $n > 81$ egész számra teljesül.

Legyen $x = \frac{2\pi}{n}$. Elegendő azt belátnunk, hogy $\frac{\sin x}{x}$ monoton nő, ha x csökken ($0 < x < \frac{\pi}{2}$ esetén). A *2. ábrán* a $\sin x$ függvény grafikonjának egy darabja látható. Tudjuk, hogy $0 < x < \frac{\pi}{2}$ esetén $x > \sin x$, és a $\sin x$ grafikonja alulról nézve konvex. Ezért az



2. ábra

OB_2 egyenes az A_1B_1 szakaszt egy belső P pontban metszi. Tehát ha $x_1 < x_2$, akkor
$$\frac{\sin x_1}{x_1} = \frac{A_1B_1}{OA_1} > \frac{A_1P}{OA_1} = \frac{A_2B_2}{OA_2} = \frac{\sin x_2}{x_2},$$
amit bizonyítani akartunk.

Tehát a legalább 82 oldalú szabályos sokszögek 1 ezreléknél kisebb hibával közelítik körülírt körük területét.

Kiss-Tóth Christian (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Nem egészen magától értetődő, hogy hogyan keressük meg az $n=81$ értéket. Kalkulátorral és némi türelemmel viszonylag gyorsan eljuthatunk ehhez az értékhez, de némi háttérismeret birtokában gyorsabban találjuk meg a keresett küszöböt.

Ismeretes, hogy ha x valós szám, akkor annak a szögnek a szinusza, amelynek x az ívmértéke, az alábbi végtelen sor öszege:
$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \ldots$$
Erre persze most nincs igazán szükség, csak arra, hogy a váltakozó előjelű tagok hozzávételével felső, illetve alsó becslések (egyre finomodó) sorozatát nyerjük.

Minden pozitív x-re fennáll ezért a

$$(*) \qquad \sin x > x - \frac{x^3}{3!}$$

egyenlőtlenség, ahonnan $x > 0$-val osztva $\frac{\sin x}{x} > 1 - \frac{x^2}{6}$.

Ha most a vizsgált $n \cdot \sin\frac{2\pi}{n} > \frac{999}{500}\pi$ egyenlőtlenséget a
$$\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} > 0{,}999$$

alakba írjuk, akkor ez bizonyosan teljesül, ha

$$1-\frac{\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2}{6}>0{,}999,$$

ahonnan rendezés után

$$n>\frac{2\pi}{\sqrt{0{,}006}}\approx 81{,}12.$$

(1) tehát biztosan teljesül, ha $n\ge 82$, az pedig, hogy $n=81$-re nem teljesül, akár a kalkulátorral, akár pedig a $(*)$ egyenlőtlenség hibájának ismeretében – ez a hiba kisebb a következő tag, $\frac{x^5}{5!}$ abszolút értékénél – gyorsan eldönthető.

188 dolgozat érkezett. 4 pontos 49, 3 pontos 70, 2 pontos 33, 1 pontos 18, 0 pontos 16. Nem versenyszerű 2 dolgozat.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (625–629.)

C. 625. A McDonald's éttermekben 6-os, 9-es vagy 20-as csomagolásban rendelhetünk Chicken McNuggets-et. (Így például kérhetünk 21 darabot, mert $21=6+6+9$, de semmilyen módon nem kaphatunk 19 darabot.) Melyik az a legnagyobb darabszám, amit nem tudunk rendelni?

C. 626. Az 5 egység sugarú körlapot vágjuk szét két húrral három egyenlő területű részre. Milyen hosszúak ezek a húrok?

Javasolta: *Reményi Gusztáv,* Budapest

C. 627. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$a+b=c+d,$$
$$a^3+b^3=c^3+d^3.$$

Javasolta: *Ábrány Miklós,* Beregszász

C. 628. Egy tetraéder alakú kartondobozt felvágunk az egyik csúcsából induló három éle mentén, majd az „elváló” lapokat leterítjük a fenti csúccsal szemközti lap síkjába. Így egy 30 cm oldalú négyzetet kapunk. Mekkora a tetraéder térfogata?

C. 629. Igazoljuk, hogy ha tizenhárom egész szám összege osztható 6-tal, akkor a tizenhárom szám tizenharmadik hatványának összege is osztható 6-tal.

Javasolta: *Székelyhidi Tamás,* Ercsi

❄

Beküldési határidő: 2001. május 15.

Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest, Pf. 47. 1255

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (3452–3461.)

B. 3452. Két játékos egy 5×5-ös táblázat mezőibe felváltva jeleket ír; a kezdő játékos mindig egy `X` jelet, a második pedig mindig két `O` jelet. Az nyer, akinek először van öt jele egy sorban vagy egy oszlopban. Milyen stratégiát kövessen a második játékos, ha nyerni akar?

(*4 pont*) Javasolta: *Gyanta Nándor,* Budapest

B. 3453. Legyen az ABC háromszög súlypontja S, az AS szakasz felezőpontja H, az AB oldal felezőpontja Q. Messe a H-n keresztül BC-vel húzott párhuzamos az AB oldalt P-ben, a CQ egyenest R-ben. Mekkora a PQR és az APH háromszögek területének aránya?

(*3 pont*) Javasolta: *Káspári Tamás,* Paks

B. 3454. Van 27 darab 1 cm élű kockánk.

a) Ki lehet-e festeni ezek lapjait lilára, fehérre és sárgára úgy, hogy a készletből lila, fehér, valamint sárga felszínű $3 \times 3 \times 3$-as kockát is össze lehessen állítani?

b) Legalább hány lapot kell lilára festenünk ahhoz, hogy biztosan összerakható legyen az egységkockákból egy lila felszínű 3 cm élű kocka?

(*4 pont*)

B. 3455. Adjunk meg végtelen sok (m, n) számpárt úgy, hogy az m, n különböző egész számoknak ugyanazok legyenek a prímosztói, és az $m+1$, $n+1$ számoknak is ugyanazok legyenek a prímosztói.

(*5 pont*) Javasolta: *Gyanta Nándor,* Budapest

B. 3456. Egy tetraéder éleire pozitív egész számokat írunk. Egy lépésben a következő módon változtathatjuk meg az élekre írt számokat. Kiválasztunk egy csúcsot, és a belőle induló három élre írt számok helyébe a következőket írjuk: egy-egy élre a kiválasztott csúcsból induló másik két élre írt számok különbségét úgy, hogy az a és b számok különbségének felírásakor szabadon választhatunk $a-b$ és $b-a$ közül, a harmadik élre pedig a kiválasztott csúcsból induló másik két élre írt számok összegét. Előfordulhat-e, hogy néhány lépés után minden élen 0 áll?

(*3 pont*) Javasolta: *Mezei József,* Vác

KöMaL – 2001/4 MAT0104 cianmagentayellowblack2002. június 19. – 8:51 (40. lap)

B. 3457. Határozzuk meg azon p, q pozitív prímeket, amelyekre az $x^4+p^2x+q=0$ egyenletnek van többszörös gyöke.

(*4 pont*) Javasolta: *Besenyei Ádám,* Budapest

B. 3458. Adott a síkon n piros pont. Mutassuk meg, hogy elhelyezhető $2n$ kék pont úgy, hogy a piros pontok által meghatározott minden háromszög belsejében van legalább egy kék.

(*5 pont*)

B. 3459. Egy $ABCD$ paralelogramma A, B, C, D csúcsai köré a, b, c, d sugarú egymáson kívül elhelyezkedő köröket rajzolunk úgy, hogy $a+c=b+d$. Mutassuk meg, hogy a szemközti csúcsok köré rajzolt körök két-két közös külső érintője érintőnégyszöget határoz meg.

(*4 pont*)

B. 3460. Egy háromszögben a beírt körnek a γ szöggel szemközti oldalon lévő érintési pontja az oldalt x és y hosszú szakaszokra osztja. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög területe $xy\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{\gamma}{2}$.

(*4 pont*) Javasolta: *Besenyei Ádám,* Budapest

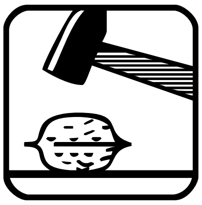
B. 3461. Legyenek $a>0$ és $c\neq 0$ adott egész számok. Bizonyítsuk be, hogy ha az $x^2-ay^2=c$ egyenletnek van legalább $4c^2+1$ különböző egész megoldása, akkor végtelen sok egész megoldása van.

(*5 pont*) Javasolta: *Fried Ervin,* Budapest

❄

Beküldési határidő: 2001. május 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (263–265.)



A. 263. Adott egy körön n piros és n kék ív úgy, hogy bármely piros ív metsz bármely kék ívet. Bizonyítsuk be, hogy van olyan pont a körön, amelyet legalább n színes ív fed le.

A. 264. A $(0,1)$ intervallum racionális elemeinek a p valós együtthatós polinom szerinti képe egy másik intervallum racionális elemeinek halmaza. Bizonyítsuk be, hogy p legfeljebb elsőfokú.

Fried Ervin, Budapest

A. 265. Definiáljuk az a_1, a_2, ... sorozatot a következő rekurzióval.

$$a_1=a_2=a_3=1; \qquad a_{n+1}=\frac{a_n^2+a_{n-1}^2}{a_{n-2}} \qquad (n=3,4,\ldots)$$

Igazoljuk, hogy a sorozat egész számokból áll.

❄

Beküldési határidő: 2001. május 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 51. No. 4. May 2001)

New exercises for practice – competition C (see page 231): **C. 625.** At McDonald's you can order Chicken McNuggets in boxes of 6, 9, and 20. What is the largest number of nuggets that you cannot get no matter what combination of the above boxes you order? **C. 626.** Two chords of a disc of radius 5 divide the disc into three parts of equal areas. How long are these chords? (Proposed by *G. Reményi,* Budapest) **C. 627.** Solve the following system of equations: $a+b=c+d$, $a^3+b^3=c^3+d^3$. (Proposed by *M. Ábrány* Beregszász) **C. 628.** A tetrahedron shaped cardboard box is 'cut open' along three edges starting at the same vertex and is developed in the plane where its four faces form a square with 30 cm long sides. Determine the volume of the tetrahedron. **C. 629.** Thirteen integers add up to a number divisible by 6. Prove that their thirteenth powers also add up to a multiple of 6. (Proposed by *T. Székelyhidi,* Ercsi)

New problems – competition B (see page 232): **B. 3452.** Two players alternately mark the fields of a 5×5 board. The one who moves first always writes one X sign, while the second player always writes two O signs. The one who first completes a row or a column of the board with her signs, wins the game. How can the second player win the game? (*4 points*) (Proposed by *N. Gyanta,* Budapest) **B. 3453.** In a triangle ABC whose centroid is denoted by S, points H and Q are the midpoints of segments AS and AB, respectively. The line parallel to BC through H intersects the segment AB at P and the line CQ at R. Find the ratio between the areas of triangles PQR and APH. (*3 points*) (Proposed by *T. Káspári,* Paks) **B. 3454.** We have 27 unit cubes. *a)* Is it possible to paint the faces of these small cubes with three colours: purple, white and yellow, in such a way that they can be arranged, in three different ways, three cubes, each of edge-length 3, whose whole surface is purple, white, and yellow, respectively? *b)* Find the smallest number

KöMaL – 2001/4 MAT0104 cianmagentayellowblack2002. június 19. – 8:51 (42. lap)

such that no matter how one paints this many faces of the small cubes with purple, it is possible to form a cube of edge-length 3 whose complete surface is purple. (*4 points*) **B. 3455.** Find infinitely many pairs of integers (m,n) such that the numbers m and n have the same prime divisors, and also $m+1$ and $n+1$ have identical prime factors. (*5 points*) (Proposed by *N. Gyanta,* Budapest) **B. 3456.** Each edge of a tetrahedron is labelled by a positive integer. We may change these numbers such that at each time we choose one vertex of the tetrahedron and replace the three numbers assigned to the edges starting at that vertex as follows: To each edge we write either the sum or the difference of the numbers written on the other two edges, writing the sum in one case and the difference in the other two cases. When we write the difference of the numbers a and b we may freely choose either $a-b$ or $b-a$. Is it possible to achieve, iterating this procedure a finite number of times, that 0 is written on every edge of the tetrahedron in the end? (*3 points*) (Proposed by *J. Mezei,* Vác) **B. 3457.** Determine those positive prime numbers p and q for which the equation $x^4+p^2x+q=0$ has a repeated root. (*4 points*) (Proposed by *Á. Besenyei,* Budapest) **B. 3458.** In the plane n red points are given. Prove that it is possible to place $2n$ blue points such that each triangle formed by the red points contains at least a blue one in its interior. (*5 points*) **B. 3459.** Circles of radii a, b, c, d that lie outside each other are drawn around the consecutive vertices A, B, C, D of a parallelogram such that $a+c=b+d$. Prove that the four lines obtained as common external tangents to opposite circles form a circumscribed quadrilateral. (*4 points*) **B. 3460.** In a triangle, the point where the incircle touches the side opposite to the angle γ divides the side into segments whose lengths are x and y. Prove that the area of the triangle is equal to $xy\cot\dfrac{\gamma}{2}$. (*4 points*) (Proposed by *Á. Besenyei,* Budapest) **B. 3461.** Let $a>0$ and $c\neq 0$ be integers. Prove that if the Diophantine equation $x^2-ay^2=c$ has at least $4c^2+1$ different solutions, then it has infinitely many solutions. (*5 points*) (Proposed by *E. Fried,* Budapest)

New advanced problems – competition A (see page 234): **A. 263.** On a circle there are n red and n blue arcs given in such a way that each red arc intersects each blue one. Prove that some point is contained by at least n of the given coloured arcs. (*Schweitzer Competition, 2000*) **A. 264.** The rational numbers in the interval (0,1) are mapped, by a polynomial p of real coefficients, onto the set of all rational numbers of an other interval. Prove that the degree of p is not greater than 1. (Proposed by *E. Fried,* Budapest) **A. 265.** A sequence a_1, a_2, $\dots$ is defined recursively as follows. Let $a_1=a_2=a_3=1$ and $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$ for $n\geq 3$. Prove that each term of the sequence is an integer.