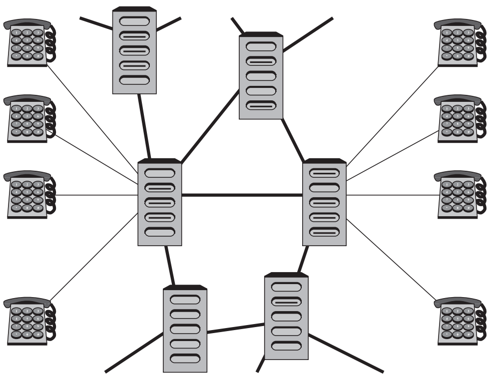
Önhasonlóság az Interneten*

2000. júniusában az **ERICSSON** *cég kutatási szervezete és az* **ELTE TTK** *együttműködési szerződést írt alá; közös kutatási program megvalósítására létrehozták a Kommunikációs Hálózatok Laboratóriumát. A programban a „komplex rendszerek” kutatásával foglalkozó oktatók, PhD ösztöndíjasok és egyetemi hallgatók vesznek részt. Az alábbi cikk – amely a tavalyi Téli Ifjúsági Ankéton tartott előadás kibővített változata – ennek a kutatásnak egy érdekes ágáról számol be.*

1. Bevezetés

Az Internet születését 1969-re, az amerikai ARPANET (ADVANCED RESEARCH PROJECTS AGENCY NET) megalakítására szokták datálni. Az ARPANET egy számítógépes hálózatot jelentett, amelyet azért hoztak létre, hogy az ARPA programban résztvevő, egyre népesebb kutatócsapat meg tudjon osztozni a rendelkezésre álló, ám korlátozott számú számítógépen. Pár éven belül aztán a hálózatot megnyitották az egyetemek és a nagyközönség számára is, amivel megkezdődött a mai Internet rohamos terjeszkedése.



1. ábra. Egy vezetékes telefonhálózat sematikus váza. A készülékek a telefonközponthoz kapcsolódnak, amelyek egymás között irányítják a hívásokat a hívott félhez

Az Internet első pillantásra teljesen megegyezik egy klasszikus telefonhálózattal (*1. ábra*), csupán a telefonkészülékeket kell képzeletben számítógépekre cserélni. Egészen 1989-ig valóban ez az elképzelés uralkodott a mérnökök és kutatók között, ekkor azonban olyan mérési eredmények láttak napvilágot, amelyek azt mutatták, hogy a két rendszer működése között alapvető különbség van.

A következőkben röviden bemutatunk egy telefonhálózatok leírására alkalmas modellt. Ezután vázlatosan ismertetjük az Internet adatforgalmát szabályozó egyik lefontosabb algoritmust, a TCP-t. Megadunk néhány mennyiséget, amelyek az adatforgalom statisztikus tulajdonságait jellemzik, és megmutatjuk, hogy miben térnek el ezek a tulajdonságok az Internetnél és a klasszikus telefonhálózatoknál. Végül ismertetünk egy elképzelést arról, hogy milyen mélyebb oka lehet az Internet klasszikustól eltérő viselkedésének.

2. A telefonhálózat egy modellje

Képzeljünk el egy telefonközpontot, ahova a település N lakójától egymástól függetlenül és véletlenszerűen futnak be a hívások. Tegyük fel, hogy a telefonközpont m hívást tud fogadni egyszerre, és ha minden vonal foglalt, akkor a telefonálónak várakoznia kell. Feltesszük, hogy a várakozók egy sorban állnak, ugyanúgy, mint például a nézők a mozipénztáraknál[1].

Osszuk fel az időt nagyon rövid Δt intervallumokra. Tegyük fel, hogy a Δt időintervallum alatt p valószínűséggel kezdeményez valaki új hívást, függetlenül attól, hogy mikor telefonált utoljára, és q valószínűséggel teszi le valaki a kagylót, függetlenül attól, hogy mióta telefonált. A telefontársaság részéről egy lehetséges kérdés az, hogy hány hívás fogadására alkalmas központot telepítsen az adott városba. Kézenfekvő válasz lenne, hogy N-et, ez azonban igen gazdaságtalan volna, mivel nagyon kicsi annak a valószínűsége, hogy egyszerre mind az N lakó telefonálni akar. Pontosítva tehát a kérdést: hány hívás fogadására legyen alkalmas a központ, ha azt akarjuk, hogy ε valószínűsége legyen csak[2], hogy valakinek várakoznia kell, mert nem kap vonalat egy adott Δt időintervallumban.

Egy nagyon hasonló problémát már 1917-ben megoldott *A. K. Erlang (1878–1929)* dán matematikus. A megoldást *Erlang-formulának* nevezik a távközlésben. (A mozipénztáraknál nem nevezik Erlang-formulának a megoldást, pedig ugyanez érvényes ott is.)

A feladatot a következőképpen lehet megoldani. Jellemezzük a rendszert azzal az n természetes számmal, amely megadja, hogy hányan akarnak éppen telefonálni egy adott Δt időintervallumban. Ha n lakó akar telefonálni, akkor azt mondjuk, hogy a *rendszer az n-edik állapotban van.* Feltettük, hogy Δt igen kicsi, ezért csak a következő három eseménynek van számottevő valószínűsége (*2. ábra*):

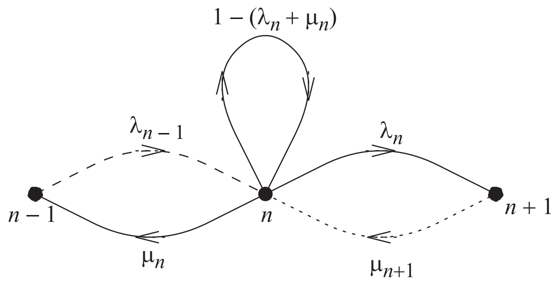
1. Újabb telefonáló érkezik, azaz átlépünk az $(n+1)$-es állapotba. Ennek a valószínűsége $\lambda_n \Delta t \equiv p(N-n)\Delta t$, mivel $(N-n)$ lakó veheti fel a telefont.
2. Valaki leteszi a kagylót, vagyis átlépünk az $(n-1)$-es állapotba. Ennel a valószínűsége $\mu_n \Delta t \equiv qn\Delta t$, mivel n ember telefonált éppen.
3. Nem történik semmi, maradunk az n-edik állapotban. Ennek a valószínűsége $1-(\lambda_n+\mu_n)\Delta t \equiv 1-\big(p(N-n)+qn\big)\Delta t$, mivel valamelyik eset biztosan bekövetkezik, ám egyszerre mindig csak az egyik.

Jelöljük P_n^*-nel annak a valószínűségét, hogy a rendszer hosszú idő elteltével az n-edik állapotban tartózkodik. Megmutatható, hogy ez a rendszer olyan, hogy a kezdőfeltételtől[3] függetlenül P_n^* hosszú idő múlva egy meghatározott értéket vesz fel. Az is

[1] Feltesszük, hogy a mozipénztárnál senki sem tolakszik előre, azaz aki előbb érkezett, az előbb is kerül sorra.

[2] ε valamilyen előre (mondjuk a szerződésben) meghatározott nagyon kicsi szám.

[3] Akárhányan is telefonáltak a kezdőpillanatban.



2. ábra. Az n-edik állapothoz tartozó átmeneti valószínűségek (folytonos vonal).

belátható, hogy teljesül a következő egyenlet:

$$\lambda_{n-1}P^*_{n-1}=\mu_n P^*_n, \tag{1}$$

amelyet a *részletes egyensúly elvének* is neveznek, és szemléletesen azt fejezi ki, hogy átlagosan ugyanannyiszor lép a rendszer az $(n-1)$-edik állapotból az n-edikbe, mint az n-edikből az $(n-1)$-edikbe. Az (1) egyenlet egymás utáni alkalmazásával könnyen kapjuk, hogy

$$P^*_n=\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\dots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\dots\mu_1}P^*_0. \tag{2}$$

Mivel a rendszer biztosan valamelyik állapotban tartózkodik, ezért

$$\sum_{k=0}^{N}P^*_k=1. \tag{3}$$

Az előző két egyenletből, valamint λ_n és μ_n definíciójából végül az kapjuk, hogy

$$P^*_n=\binom{N}{n}\left(1+\frac{p}{q}\right)^{-N}\left(\frac{p}{q}\right)^n. \tag{4}$$

Ennek segítségével már válaszolhatunk a felvetett problémára. Tegyük fel, hogy m telefonálót tud kiszolgálni a központ. Annak a valószínűsége, hogy valaki nem tud telefonálni:

$$1-\sum_{k=0}^{m}P^*_k. \tag{5}$$

Válasszuk tehát m-et először 0-nak, és növeljük m-et addig, amíg a fenti kifejezés értéke kisebb nem lesz ε-nál. Ahol megállunk, az lesz a keresett m.

1. feladat. *Igazoljuk a* (4) *kifejezés helyességét!*

2. feladat. *Póbáljuk meg megadni az Erlang által eredetileg levezetett formulát! A feladat csupán abban különbözik a fent bemutatott esettől, hogy a telefonálók száma tetszőleges.*

3. Az Internet egy modellje

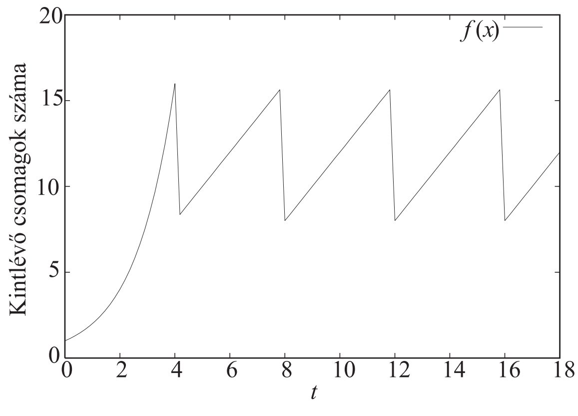
Egészen 1989-ig azt gondolták, hogy az említett Erlang-formula alkalmazható az Internet esetében is. 1989 augusztusában azonban a Bellcore helyi Ethernet hálózatán olyan mérési eredményeket kaptak, amelyek ellentmondtak a klasszikus modellek jóslatainak. Ennek bemutatása előtt tekintsük át, hogyan lehet egy számítógépes hálózat működését elképzelni.

Egy TCP nevű program a továbbítandó adatokat először kis csomagokra bontja, amelyek fejlécébe (mint egy postai levelezőlapra) beírja a küldő és a feladó címét, a feladás időpontját, és még néhány további adatot, majd sorban elküldi a csomagokat. Ha egy csomag sikeresen megérkezett, akkor a címzett visszaküld egy nyugtát a csomagról. Ha a TCP egy adott idő múlva még mindig nem kapott nyugtát egy csomagról, akkor azt a csomagot ismét elküldi.

Az Interneten levő csomagok központokon *(routereken)* keresztül haladnak a címzett számítógép felé. A router a beérkező csomagokat egymás után, egyesével továbbítja a megfelelő irányba. Ha egyszerre több csomag érkezik, akkor a csomagoknak az érkezés sorrendjében sorba kell állniuk. A router tárolókapacitása azonban véges, és így amelyik csomag már nem fér be a sorba, azt kénytelen eldobni. Ez a csomagvesztés jelzi a TCP számára, hogy túllépte a rendelkezésre álló kapacitást *(sávszélességet).*

Optimálisan akkor működik a TCP, ha éppen a rendelkezésre álló sávszélességet használja fel. A TCP által a hálózatból lefoglalt kapacitást a kiküldött adatmennyiség, valamint a küldés és az érkezés időkülönbségének hányadosa adja meg. Az optimális sávszélesség azonban minden pillanatban változhat, hiszen nem tudni, hogy egy adott időpillanatban hány másik TCP próbálja meg ugyanazt a vonalat használni.

A TCP ezért dinamikusan megpróbálja meghatározni a rá jutó kapacitást. Számos TCP verzió létezik, és ezek főként az optimalizációs algoritmusban térnek el egymástól. A TCP Reno verziója például – erősen leegyszerűsítve – először exponenciálisan növeli a hálózatba kiküldött csomagok számát, majd az első csomagvesztés után megfelezi a csomagküldés sebességét; ezután már csak lineárisan növeli a sebességet, majd csomagvesztés után ismét felez (*3. ábra*).



3. ábra. A TCP (Reno) csomagküldési algoritmusának sematikus váza

A klasszikus telefonhálózat és az Internet működését összehasonlítva látható, hogy míg a telefonhálózat esetén minden telefonáló csak egy előre meghatározott sávszélességet használ, addig a számítógépes hálózatokban a TCP a maximális rendelkezésére álló kapacitást megpróbálja kihasználni. A másik jelentős különbség a két hálózat között, hogy míg egy telefonvonal az egész beszélgetés alatt biztosított a két fél között, addig két számítógép között az adatok kis csomagokban, szakaszosan érkeznek.

4. Korrelációk

Az említett különbségekből még nem feltétlenül következne, hogy a két rendszert nem lehet ugyanazzal a modellel leírni. A mozipénztár előtti sor és a telefonhálózatban kialakuló sor is különbözik, mégis nagyon jól leírja mindkettőt az Erlang-formula. Lássuk tehát, hogy hogyan lehet mennyiségileg vizsgálni a két hálózat közötti különbséget.

Legyen $\{X_i; i \in \mathbf{N}\}$ egy véletlen sorozat, például X_i legyen a telefonálók, vagy az Internetben levő csomagok száma az i-edik Δt időintervallumban. Definiáljuk a következő, úgynevezett *korrelációs függvényt*:

$$c(k) = \big\langle (X_i - \langle X_i \rangle)(X_{i+k} - \langle X_i \rangle) \big\rangle \tag{6}$$

ahol $\langle\ \rangle$ az i szerinti átlagolást jelenti. Például X_i-re:

$$\langle X_i \rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} X_i. \tag{7}$$

A $c(k)$ korrelációs függvény szemléletesen azt mutatja meg, hogy mennyire emlékszik a rendszer egy adott pillanatban a k időintervallummal korábbi eseményre. Ha $c(k) = 0$ akkor a két esemény között nincs korreláció.

A „klasszikus" telefonhálózatok modellezése során azt tapasztalták, hogy a korrelációs függvény nagyon nagy k-ra exponenciálisan csökken, azaz

$$c(k) \sim a^{|k|}, \quad \text{ha} \quad k \to \infty, \quad 0 < a < 1. \tag{8}$$

Az exponenciális függvény nagyon gyorsan csökken, s emiatt a rendszerre *jellemző egy karakterisztikus idő*, ami alatt gyakorlatilag teljesen elveszti a memóriáját. Ezzel szemben a korábban említett Bellcore-féle mérés során azt találták, hogy az Internet forgalom esetén a korrelációs függvény sokkal lassabban, csupán hatványfüggvény szerint csökken:

$$c(k) \sim |k|^{-\beta}, \quad \text{ha} \quad k \to \infty, \tag{9}$$

ahol $0 < \beta < 1$. Fontos a kitevő értéke is, ugyanis β ilyen értékei mellett a korrelációs függvény összege végtelen:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} c(k) = \infty. \tag{10}$$

Ezt úgy lehet értelmezni, hogy a rendszer tetszőlegesen hosszú idő után sem veszti el a memóriáját, *nincs* olyan *karakterisztikus ideje*, ami például a klasszikus telefonhálózatokra jellemző.

5. Fluktuációk

A korrelációs függvény viselkedéséből egy másik fontos tulajdonságot is levezethetünk. Osszuk az X_i sorozatot m méretű, nem átfedő blokkokba, és tekintsük azt az új $\{X_j^{(m)}; j \in \mathbf{N}\}$ sorozatot, ami ezeknek az új blokkoknak az átlagából áll:

$$X_j^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{i=jm}^{(j+1)m-1} X_i. \tag{11}$$

$$\underbrace{X_0\, X_1\, \ldots\, X_{m-1}}_{X_0^{(m)}}\; \underbrace{X_m\, X_{m+1}\, \ldots\, X_{2m-1}}_{X_1^{(m)}}\; \ldots$$

Ez egyenértékű azzal, mintha időegységünket eredetileg Δt helyett $m\Delta t$-nek választottuk volna.

A korrelációs függvény mellett vezessünk be egy másik mennyiséget is, ami azt mutatja meg, hogy az $X_i^{(m)}$ mennyiség mennyire ingadozik az átlagértéke körül:

$$\sigma(m)^2 = \left\langle (X_i^{(m)} - \langle X^{(m)} \rangle)^2 \right\rangle. \tag{12}$$

Ezt a mennyiséget *szórásnégyzetnek* nevezik, és – mint a definíciókból látható – megegyezik $c^{(m)}(0)$-lal. A definíciók felhasználásával, és rövid számolás után kifejezhetjük $\sigma(m)^2$-et az eredeti véletlen sorozat korrelációs függvényével:

$$\sigma(m)^2 = \frac{1}{m} c(0) + 2\frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^{m-1} (m-k)c(k). \tag{13}$$

Eredményünket megvizsgálva az adódik, hogy ha $c(k)$ exponenciálisan, vagy $\beta \geq 1$ kitevőjű hatványfüggvény szerint csökken, akkor nagy m esetén az első tag fog dominálni, ezért $\sigma(m)^2 \sim m^{-1}$. Ha viszont $c(k) \sim |k|^{-\beta}$, és $0 < \beta < 1$, akkor a második tag dominál, és $\sigma(m)^2 \sim m^{-\beta}$, azaz az időskála növelésével a szórásnégyzet sokkal lassabban fog csökkenni, mint azt a klasszikus modell jósolja.

3. feladat. *Igazoljuk a* (13) *kifejezés helyességét!*

6. Önhasonlóság

Az eddigiekből sejthető, hogy a rendszert igazából egyetlen paraméter, a β kitevő jellemzi. Az ezen alapuló modellek is hamar megszülettek. Az alapötlet az időegység újraválasztásán alapul, amit például úgy lehet elvégezni, mint azt az előző fejezetben bemutattuk.

A természetben, a mindennapi életben máshol is gyakran előfordulnak olyan objektumok, amelyek különböző mérettartományokban – bizonyos értelemben – hasonlítanak egymásra. Ezeket az objektumokat általában *fraktáloknak* szokták nevezni.

Véletlen folyamatok, mint például az Internet forgalom esetében, kissé bonyolultabb a helyzet, ugyanis maga az X_i sorozat – véletlen folyamatról lévén szó – nem lehet önhasonló, statisztikus tulajdonságai – mint például a korrelációs függvénye – azonban már lehet az. Belátható például, hogy a blokkosítással kapott $X_j^{(m)}$ sorozat korrelációs függvénye szintén $|k|^{-\beta}$ szerint változik.

Az önhasonlóságot sokféleképpen lehet definiálni. Az egyik lehetséges definíció például, hogy X_i önhasonló, ha minden m-re

$$X_i \stackrel{d}{=} m^{-H} \sum_{k=im}^{(i+1)m-1} X_k, \tag{14}$$

ahol $\stackrel{d}{=}$ azt jelöli, hogy a jobb- és a baloldal minden statisztikus tulajdonsága megegyezik.

Az Internet vázlatosan ismertetett modelljében azt tapasztaljuk, hogy különböző mennyiségek hatványfüggvény szerint változnak. A modellt tanulmányozók egyik fontos célkitűzése az, hogy kapcsolatot találjanak az egyes hatványfüggvények kitevői között, és meghatározzák a független paraméterek számát. Belátható például, hogy $H=1-\beta/2$, azaz a két paraméter nem független egymástól.

7. Eloszlások

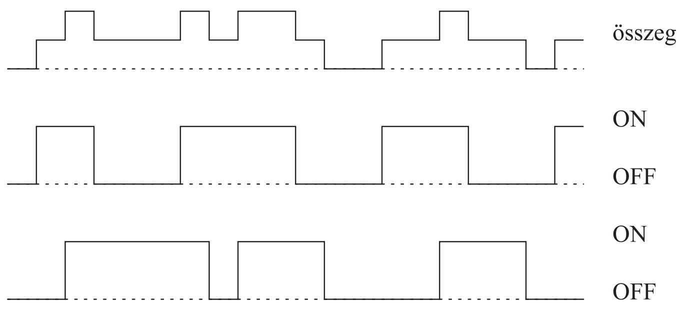
Arra vonatkozóan, hogy mi okozza a fent bemutatott önhasonlóságot többféle magyarázat született. Az egyik legelfogadottabb elmélet szerint a számítógépen található fájlok méretében, illetve a felhasználók viselkedésében kell keresni az okot.

Legyen $f(x)\Delta x$ annak a valószínűsége, hogy egy szamítógépen egy véletlenszerűen kiválasztott fájl mérete az $[x,x+\Delta x[$ intervallumba esik. Az $f(x)$ függvényt *eloszlásfüggvénynek* hívják. Mérések azt mutatják, hogy $f(x)\sim x^{-\alpha}$, azaz a fájlméretek eloszlása szintén hatványfüggvény szerint csökken. A fentiek analógiájára definiálhatjuk azt az eloszlásfüggvényt, ami megadja, hogy a felhasználó (a program, az alkalmazás) milyen valószínűséggel várakozik t ideig. A mérések szerint ez is hatványszerű viselkedést követ.

Mindez egy tételen keresztül kapcsolódik az önhasonlóság forgalmához. A tétel úgynevezett ON/OFF folyamatokról szól. Az ON/OFF folyamat olyan forgalmat jelent, amikor a forgalmat generáló forrásnak mindössze két állapota lehetséges: bekapcsolt (ON) vagy kikapcsolt (OFF). A bekapcsolt és kikapcsolt állapotok váltakozva követik egymást, és az egyes állapotokban véletlenszerű ideig tartózkodik a rendszer.

A tétel szerint, ha olyan ON/OFF folyamatokat összegzünk (*4. ábra*), amelyekben az ON vagy az OFF állapotban tartózkodás valószínűségeloszlása hatványszerű viselkedést mutat, akkor az eredő forgalom önhasonló lesz.

Az Internet forgalmát tehát e szerint a modell szerint sok-sok párhuzamos, egymástól független ON/OFF folyamat összegeként lehet elképzelni, ahol az ON vagy az OFF folyamat eloszlása hatványfüggvényt követ. A kutatók többségének véleménye szerint ezek az ON állapotok az Internet felhasználói által indított fájl-letöltéseknek feleltethetők meg, az OFF állapotok pedig az ezek közötti szüneteknek. Hozzá kell tennünk, hogy



4. ábra. Két ON/OFF folyamat, és normált összegük

nemrégiben olyan eredmények is születtek, amelyek azt mutatják, hogy a TCP önmagában, hatványszerű fájl-eloszlás nélkül is képes önhasonló forgalmat generálni.

Irodalom

[1] Eötvös Loránd Tudományegyetem Fizikus Diákkör: *Bevezetés a véletlen folyamatok elméletébe és alkalmazásába*, Eötvös Loránd Fizikai Társulat, 1979.

[2] M. E. Crovella and A. Bestavros: *Self-Similarity in World Wide web Traffic: Evidence and Possible Causes*, IEEE/ACM Transactions on Networking, 1997.

[3] Murad S. Taqqu, Walter Willinger and Robert Sherman: *Proof of a Fundamental Result in Self-Similar Traffic Modeling*, Computer Communication Review, 27, 1997.

Fekete Attila

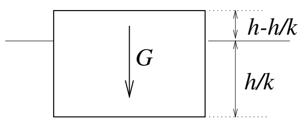
ELTE Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék
és Kommunikációs Hálózatok Laboratóriuma
e-mail: `fekete@ector.elte.hu`

Fizika gyakorlatok és feladatok megoldása

P. 3275. *Milyen mélyre kell lenyomni egy úszó fahasábot a vízben, hogy az eközben végzett munka megegyezzék a hasáb vízből történő kiemeléséhez minimálisan szükséges munkával? A fa sűrűsége a víz sűrűségének k-ad része. Vizsgáljuk meg a $k \le 2$ esetet külön is!*

(*4 pont*) *Öveges József fizikaverseny országos döntője,* Tata

Megoldás. Jelöljük a fahasáb levegőben mérhető súlyát G-vel, magasságát pedig h-val. Amikor a fahasáb úszik, h/k mélyen merül a vízbe, ebben a helyzetben lesz egyenlő a víz felhajtóereje a hasábra ható nehézségi erővel (*1. ábra*).

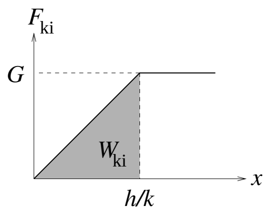


1. ábra

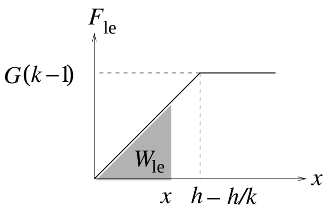
Amikor a hasábot lassan kiemeljük a vízből, x elmozduláshoz tartozó F_{ki} emelőerő a *2. ábrán* látható módon változik. A hasáb teljes kiemeléséhez legalább a besötétített területnek megfelelő

$$W_{\mathrm{ki}}=\frac{Gh}{2k}$$

munka szükséges. (Ha a mozgatást nem nagyon lassan végezzük, akkor a fahasáb mozgási energiáját is fedeznünk kell, továbbá a kifröccsenő vízcseppek miatt még ennél is több munkát kell végeznünk.)



2. ábra



3. ábra

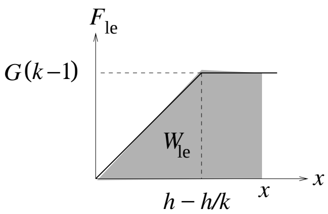
Ha a fahasábot x távolságnyit lenyomjuk, akkor a hasáb egyensúlyban tartásához a *3. ábrán* látható F_{le} erőt kell kifejtenünk. Amennyiben $x<h-h/k$ (vagyis a hasáb teteje még nem merül a víz alá), a besötétített területnek megfelelő

$$W_{\mathrm{le}}=\frac{1}{2}x\cdot\frac{G(k-1)}{h-h/k}\,x=\frac{Gkx^2}{2h}$$

munkát végezzük. Ez a munka akkor egyezik meg W_{ki}-vel, ha $x=h/k$, ilyen elmozdulás után a hasáb feneke $H=2h/k$ mélyen van a víz alatt. Az el nem merülés $H<h$ feltétele akkor teljesül (tehát a megoldás fenti alakja akkor érvényes), ha $k>2$.

Amennyiben $k\le 2$, a hasábot teljes egészében, sőt, még annál is tovább a víz alá nyomjuk. A végzett munka a *4. ábrán* bejelölt terület:

$$W_{\mathrm{le}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)h\cdot G\,(k-1)+\left(x-h+\frac{h}{k}\right)\cdot G\,(k-1),$$



4. ábra

és ez akkor egyezik meg W_{ki}-vel, ha

$$x=\frac{k^2-2k+2}{2k(k-1)}\,h.$$

Ilyenkor a hasáb fenéklapja

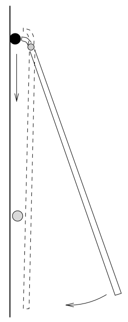
$$H=x+\frac{h}{k}=\frac{k}{2(k-1)}\,h$$

mélyen van a víz alatt.

Siska Ádám (Budapest, Berzsenyi D. Gimn. 10. o.t.) dolgozata alapján

215 dolgozat érkezett. Helyes 45 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 39, hiányos (1–2 pont) 96, hibás 19, nem versenyszerű 16 dolgozat.

P. 3279. *A nehézségi gyorsulás mérésére használt egyik eszköz az* ábrán *látható ún. Whiting-féle deszkás inga. Igazoljuk, hogy a deszka forgástengelyétől a deszkával egyszerre indított, szabadon eső golyó becsapódása a deszka hosszának mindig ugyanannyiad részénél történik, függetlenül a deszka hosszától! Mekkora ez az arány?*



(*4 pont*) Közli: *Nagy Tibor,* Szolnok

Megoldás. Az l hosszúságú, m tömegű deszkát tekinthetjük fizikai ingának, melynek T lengésideje

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{mgs}}=2\pi\sqrt{\frac{ml^2/3}{mgl/2}}=2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}.$$

Ha a golyó a deszka nekicsapódásáig h utat tesz meg, ehhez a szabadesés út–idő képlete szerint $t=\sqrt{2h/g}$ időre van szüksége. Ez az idő az inga lengésidejének egynegyede:

$$\sqrt{\frac{2h}{g}}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2l}{3g}},$$

ahonnan a keresett arány: $\frac{h}{l}=\frac{1}{12}\pi^2\approx 0{,}82$.

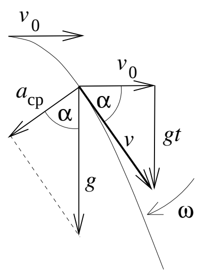
Sedivi Márk (Keszthely, Vajda J. Gimn., 11. o.t.)

191 dolgozat érkezett. Helyes 140 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 23, hibás 19, nem versenyszerű 3 dolgozat.

P. 3287. *Mekkora szögsebességgel forog a v_0 kezdősebességgel vízszintesen eldobott kő sebességvektora az idő függvényében?*

(*5 pont*) *Rácz György,* Mezőkövesd

I. megoldás. A kő vízszintes irányú sebessége a mozgás során mindvégig v_0, függőleges sebessége pedig t idő alatt gt-re nő, a kő sebességének nagysága tehát $\sqrt{v_0^2+g^2t^2}$.



Ha a kő sebességvektora ω szögsebességgel forog, akkor a centripetális gyorsulás $a_{cp}=v\omega$. Másrészt viszont a kő függőlegesen lefele mutató, g nagyságú gyorsulásvektorának **v**-re merőleges vetülete ugyancsak a centripetális gyorsulást kell adja:

$$g\cos\alpha=g\frac{v_0}{v}=v\omega,$$

ahonnan a keresett szögsebesség

$$\omega=\frac{gv_0}{v^2}=\frac{gv_0}{v_0^2+g^2t^2}.$$

Kosztin Béla (Szolnok, Verseghy F. Gimn., 10. o.t.)

II. megoldás. A kő sebességvektora t idejű mozgás után

$$\varphi(t)=\mathrm{arctg}\,\frac{gt}{v_0}$$

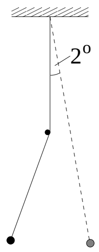
szöget zár be a vízszintessel. Ennek a függvénynek a deriváltja megadja a **v** vektor forgási szögsebességét:

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt}=\left(1+\left(\frac{gt}{v_0}\right)^2\right)^{-1}\cdot\frac{g}{v_0}=\frac{gv_0}{v_0^2+g^2t^2}.$$

Fekete Veronika (Nyíregyháza, Eötvös J. Gyak. Gimn., 11. o.t.)

Megjegyzés. A feladatban kiszámított szögsebesség, vagyis a *sebességvektor* forgásának szögsebessége nem tévesztendő össze a kőnek valamely pontra (pl. az eldobás helyére) vonatkoztatott szögsebességével; ez utóbbi a *helyvektor* szögének változási üteme.

191 dolgozat érkezett. Helyes 107 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 13, hiányos (1–3 pont) 47, hibás 21, nem versenyszerű 3 dolgozat.



P. 3294. *Egy fonálinga lengés közben egy szögbe ütközik, amikor áthalad a függőleges egyensúlyi helyzeten. A szög éppen a fonál felénél helyezkedik el. Hány százalékkal rövidebb idő alatt tér vissza ilyenkor az inga az eredeti, 2°-kal kitérített helyzetébe, mint ha nem lenne ott a szög?*

(*3 pont*) Közli: *Bordy Csongor,* Bonyhád, Petőfi S. Evangélikus Gimn.

Megoldás. Az ℓ hosszúságú fonálinga lengésideje

$$T_\ell=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

ennyi idő alatt érne vissza eredeti helyzetébe, ha nem lenne ott a szög. (A 2°-os kezdeti kitérés elegendően kicsi ahhoz, hogy az inga lengésidejét a fenti képletből számolhassuk.)

Az $\ell/2$ hosszúságú inga lengésideje

$$T_{\ell/2}=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{2g}}.$$

A szög miatt egy fél periódusnyit T_ℓ, egy felet pedig $T_\ell/2$-nek megfelelően leng az inga, az új lengésidő tehát

$$T=\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}+\pi\sqrt{\frac{\ell}{2g}}.$$

A két lengésidő különbsége:

$$\Delta T=T_\ell-T=\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

melynek az eredeti lengésidőhöz viszonyított aránya

$$\frac{\Delta T}{T_\ell} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}146.$$

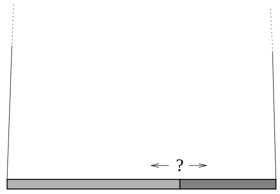
Az inga tehát 14,6 %-kal rövidebb idő alatt tér vissza, ha útjába a megadott helyre szöget teszünk.

Horváth Eszter (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., 9. o.t.)

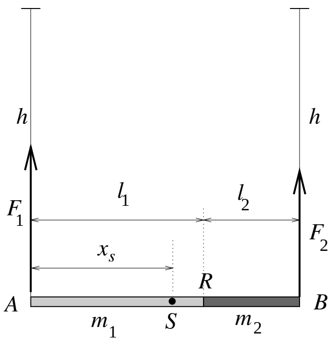
343 dolgozat érkezett. Helyes 309 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 21, hibás 13 dolgozat.

P. 3304. *Két egyenlő keresztmetszetű, de különböző hosszúságú és anyagi minőségű fémrudat összeragasztunk, majd az így kapott rudat a végeihez kötött két hosszú függőleges fonállal felfüggesztjük. Merre mozdul el a két rúd érintkezési helye, ha a hőmérséklet emelkedik?*

(*5 pont*) Közli: *Varga István,* Békéscsaba



Megoldás. Jelöljük a rudak eredeti hosszát l_i-vel, a tömegüket m_i-vel, lineáris hőtágulási együtthatójukat pedig α_i-vel (ahol $i=1$ a bal oldali, $i=2$ pedig a jobb oldali rudra utal).



1. ábra

A hőmérséklet ΔT nagyságú növekedtével az egyes fémrudak hossza $l_i\alpha_i\Delta T$ értékkel növekszik, a teljes hosszváltozás tehát

(1) $$\Delta L = \Delta l_1 + \Delta l_2 = (l_1\alpha_1 + l_1\alpha_1\Delta T.$$

Ha ismernénk a rúd valamelyik pontjának, például az S tömegközéppontnak az elmozdulását, akkor már bármely más pontjának, így a ragasztás R helyének elmozdulását is meg tudnánk határozni.

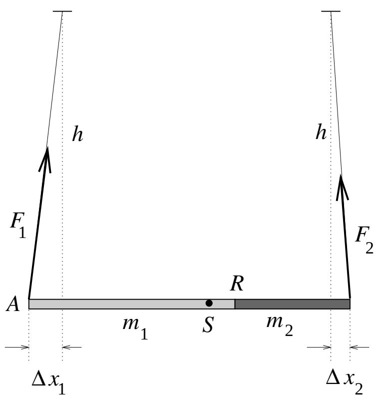
A rudakra kezdetben csak függőleges erők hatnak, s ha a fonalak h hossza sokkal nagyobb, mint a rudaké, akkor a kicsit kitágult rudakra ható erők is majdnem pontosan függőleges irányúak. Ebből – naívan – arra következtethetünk, hogy a rendszer tömegközéppontja nem mozdul el. Ez azonban – mint az alábbiakból kiderül – *hibás* következtetés!

A fonalakat (hacsak a tömegközéppont nem esik éppen véletlenül a felezőpontra) különböző nagyságú erők feszítik. Nagyságuk az *1. ábrán* látható A és B pontokra felírt forgatónyomatékok egyensúlyából határozhatjuk meg:

(2) $$F_1 = \frac{m_1(l_2 + \frac{1}{2}l_1) + m_2\frac{1}{2}l_2}{l_1 + l_2}\,g, \qquad F_2 = \frac{m_2(l_1 + \frac{1}{2}l_2) + m_1\frac{1}{2}l_1}{l_1 + l_2}\,g.$$

Az új (a rudak felmelegítése után kialakuló) egyensúlyi helyzetben a fonalak alsó vége valamekkora Δx_1 és Δx_2 távolsággal eltér az eredeti helyzettől (*2. ábra*), emiatt a fonalakban ható erőknek lesz vízszintes összetevője is. Mivel más vízszintes irányú erő nem hat, fenn kell álljon, hogy

$$F_1 \cdot \frac{\Delta x_1}{h} - F_2 \cdot \frac{\Delta x_2}{h} = 0. \tag{3}$$



2. ábra

(Felhasználtuk, hogy a fonalak iránya csak kicsit tér el a függőlegestől, emiatt a fonálerők nagyságának változását, valamint a rúdnak a vízszintestől való eltérését nem kell figyelembe vennünk.) A (3) egyenlet

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{F_2}{F_1} \tag{4}$$

alakba is írható, s ez jól mutatja, hogy az összeragasztott rúd végeinek elmozdulása h nagyságától függetlenül – tehát tetszőlegesen hosszú fonalak esetén is – mindig ugyanolyan arányban osztozik a teljes

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta L \tag{5}$$

hossznövekményen. A (2), (4) és (5) egyenletekből kiszámíthatjuk a rúd bal oldali A végpontjának elmozdulását:

$$\Delta x_1 = \frac{m_2(l_1 + \frac{1}{2}l_2) + m_1\frac{1}{2}l_1}{(m_1+m_2)(l_1+l_2)}\,(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)\cdot\Delta T, \tag{6}$$

majd ebből és a bal oldali rúd hosszának megváltozásából az R pont elmozdulását (a jobb fele mutató irányt véve pozitívnak):

$$\Delta x_R = l_1\alpha_1\Delta T - x_1 = \frac{(m_1l_1+m_2l_2)(\alpha_1l_1-\alpha_2l_2)+2l_1l_2(m_1\alpha_1-m_2\alpha_2)}{2(m_1+m_2)(l_1+l_2)}\Delta T.$$

Ennek a kifejezésnek az előjele dönti el, hogy merrefelé mozdul el a két rúd érintkezési helye. Ha

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > \frac{l_2}{l_1}\cdot\frac{m_1l_1+m_2l_2+2m_2l_1}{m_1l_1+m_2l_2+2m_1l_2},$$

akkor az R pont jobbra mozdul el, ellenkező esetben pedig balra.

Buti András (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) dolgozatának felhasználásával

Megjegyzés. Bár a feladat nem kérdezte, érdemes kiszámítani a tömegközéppont elmozdulását is. Kezdetben a tömegközéppont a bal oldali rúdvégtől

$$x_s = \frac{m_2(l_1+\frac{1}{2}l_2)+m_1\frac{1}{2}l_1}{m_1+m_2}$$

távol van, ennek a mennyiségnek a megváltozása a hőtágulás hatására:

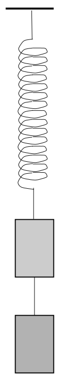
$$\Delta x_s = \frac{m_2(\alpha_1l_1+\frac{1}{2}\alpha_2l_2)+m_1\frac{1}{2}\alpha_1l_1}{m_1+m_2}.$$

A tömegközéppont elmozdulása jobb felé:

$$\Delta x_s - \Delta x_1 = \frac{l_1 l_2}{2(l_1 + l_2)} (\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T.$$

Látható, hogy a tömegközéppont mindig a kisebb hőtágulási együtthatójú fémrúd irányába tolódik el, ha viszont a két anyag hőtágulás szempontjából egyformán viselkedik, akkor s tömegközéppont – a méret- és tömegarányoktól függetlenül – az eredeti helyén marad.

80 dolgozat érkezett. Helyes 14 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1–3 pont) 45, hibás 19 dolgozat.



P. 3309. *Egy állványon függő csavarrugóra egymás alá két, fonállal összekötött testet erősítünk az ábrán látható módon. Ha a fonál elszakad, a rugón maradó test rezgőmozgásba jön. Ha a két testet felcseréljük és ezután szakad el a fonál, a rugón maradó test ismét rezegni kezd. A két rezgésidő különbsége* 0,3 *másodperc.*

Mekkora a két esetben a rezgésidő, ha együtt ugyanezen a rugón 1,5 *másodperc periódusidővel rezegnek a testek?*

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

Megoldás. Legyen T_1 és T_2 a két keresett rezgésidő, a különbségük $\Delta T = T_1 - T_2$, végül T az együtt mozgó testek rezgésideje.

A rezgésidő $T = 2\pi\sqrt{m/D}$ általános képletét felhasználva közvetlenül adódik, hogy

$$T^2 = T_1^2 + T_2^2.$$

T_2-t az ismert ΔT-vel és $T_!$-gyel kifejezve és a fenti egyenletbe helyettesítve T_1-re egy másodfokú egyenletet kapunk, melynek megoldásából

$$T_1 = \frac{\sqrt{2T^2 - (\Delta T)^2} + \Delta T}{2},$$

a megadott számadatokkal: $T_1 = 1{,}2$ s, illetve $T_2 = 0{,}9$ s.

Több megoldás alapján

234 dolgozat érkezett. Helyes 171 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 17, hiányos (1–2 pont) 28, hibás 4, nem versenyszerű 14 dolgozat.

P. 3322. *Egy elektromosan töltött kicsiny gyöngyszem vízszintes síkban súrlódásmentesen mozoghat egy kör alakú szigetelő huzalon. A kör középpontjában vízszintes tengelyű, rögzített helyzetű elektromos dipól található. Kezdetben a gyöngyszem a dipól tengelyére merőleges helyzetben áll.*

a) *Mekkora erővel nyomja mozgása során a gyöngyszem a huzalt?*

b) *Hol áll meg a gyöngyszem az elengedése után először?*

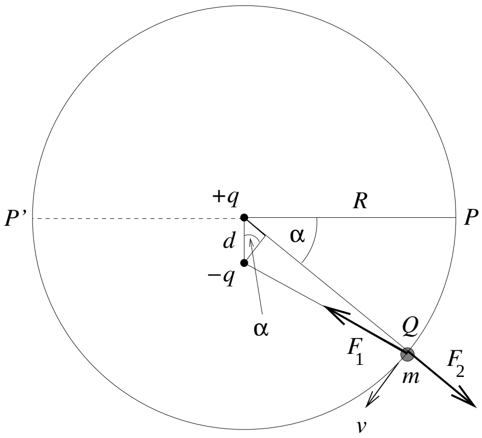
c) *Milyen pályán mozogna a gyöngyszem a vízszintes síkban, ha nem lenne felfűzve a huzalra?*

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Budapest

Megoldás. Helyettesítsük az elektromos dipólt egymástól d távolságra levő $+q$ és $-q$ töltésű pontszerű testekkel, és használjuk a (szándékosan eltúlzott méretarányú) *ábrán* látható jelöléseket. A dipól erősségére a $p=q\cdot d$ szorzat jellemző. A továbbiakban fel fogjuk használni, hogy $d\ll R$.

Az energiamegmaradás tétele segítségével számítsuk először ki, hogy mekkora a P pontból kezdősebesség nélkül induló Q töltésű gyöngyszem sebessége az α szöggel jellemezhető helyen. A gyöngyszem elektrosztatikus potenciális energiájának megváltozása abból származik, hogy a $-q$ töltéstől mért távolsága $d\sin\alpha$ értékkel lecsökken, emiatt

$$\frac{1}{2}mv^2\approx -kqQ\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R-d\sin\alpha}\right)\approx\frac{kqQ\,d\sin\alpha}{R^2}=\frac{kQp\,\sin\alpha}{R^2},$$



ahonnan

$$v=\sqrt{\frac{2kQp}{mR^2}\,\sin\alpha}. \tag{1}$$

Ennek ismeretében a b) kérdésre már tudunk válaszolni: a gyöngyszem először egy félkör megtétele után a P' pontban ($\alpha=180°$-nál) fog megállni, majd visszafordulva – súrlódás és egyéb energiaveszteség hiányában – periodikus mozgást végez P és P' között.

Határozzuk meg ezek után a gyöngyszemre ható elektrosztatikus erőket, majd ezekből és a Newton II. törvényéből számítsuk ki a körpályán maradáshoz szükséges (a huzal által sugár irányban kifejtett) N kényszererőt. A dipól alkotórészei majdnem pontosan ellentétes (sugár irányú) erőket fejtenek ki, melyek eredője:

$$F=F_1-F_2\approx kqQ\left(\frac{1}{(R-d\sin\alpha)^2}-\frac{1}{R^2}\right)\approx\frac{kqQ\,2d\sin\alpha}{R^3}=\frac{2kQp\,\sin\alpha}{R^3}. \tag{2}$$

Ez az erő a dipólus felé mutat (hiszen a vonzóerőt kifejtő $-q$ közelebb van a gyöngyszemhez, mint a taszító $+q$ töltés), így a v sebességű, tehát sugár irányban v^2/R gyorsulású gyöngyszem mozgásegyenlete:

$$m\frac{v^2}{R}=\frac{2kQp\,\sin\alpha}{R^3}+N.$$

A sebesség nagyságát megadó (1)-et (3)-ba helyettesítve a kényszererőre a meglepő $N=0$ adódik.

A gyöngyszemre tehát sugár irányban (az elektrosztatikus erőkön kívül) nem hat erő, így a gyöngyszem sem fejt ki a huzalra ilyen irányú erőt. (Teremészetesen a gyöngyszem súlyából származó függőleges erőnek jelen kell lennie.) Ha a huzalt eltávolítjuk (de a gyöngyszem függőleges elmozdulását megakadályozzuk), a mozgás ugyanúgy zajlik le, mint a huzalra fűzött gyöngy esetében.

Több dolgozat alapján

Megjegyzés. Az (1) képletből leolvasható, hogy a gyöngyszem mozgása éppen olyan, mint egy vízszintes helyzetből indított matematikai ingáé alkalmasan választott erősségű homogén gravitációs mezőben.

18 dolgozat érkezett. Helyes Börzsönyi Ádám, Gáspár Merse Előd, Hegedűs Ákos, Jung János, Lábó Eszter, Lábó Melinda, Lipcsei Gábor, Mics Zoltán, Nagy Ádám, Pozsgay Balázs és Reischig Péter megoldása. Hiányos (1–3 pont) 3, hibás 2, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 3327. *Űrsétát végző űrhajóstól eltávolodik űrhajója. Két könnyű, egyforma rugós puskája van, melyekkel két ugyanakkora tömegű lövedéket tud kilőni. Mikor tesz szert nagyobb sebességre, ha azonos irányban egyszerre lövi ki a két lövedéket, vagy ha egymás után? (Legyen például egy lövedék tömege az űrhajós és a két puska tömegének huszad része.)*

(*5 pont*) Közli: *Chikán Éva,* Budapest

Megoldás. Ha a kezdetben nyugvó m_1 és m_2 tömegű testeket E energia felhasználásával szétlökjük, az energia- és a lendületmegmaradás törvénye szerint a kialakuló sebességek

$$v_1=\sqrt{\frac{2Em_2}{m_1(m_1+m_2)}}\quad \text{és}\quad v_2=\sqrt{\frac{2Em_1}{m_2(m_1+m_2)}}.$$

Ennek megfelelően az űrhajós

$$v=\sqrt{\frac{8Em}{M(2m+M)}}$$

sebességre tesz szert, ha egyszerre süti el a két puskát, míg

$$u=\sqrt{\frac{2Em}{(M+m)(2m+M)}}+\sqrt{\frac{2Em}{M(m+M)}}$$

lesz a sebessége, ha egymás után. (Itt E az egy puska elsütésekor felszabaduló energia, az m egy lövedék tömege, M pedig a két puska és az űrhajós együttes tömege.)

$$\frac{u}{v}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{M}{(M+m)}}+\sqrt{\frac{(M+2m)}{(m+M)}}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-\varepsilon}+\sqrt{1+\varepsilon}\right),$$

ahol $\varepsilon=m/(m+M)$. Ez az arány mindig kisebb 1-nél, hiszen a négyzete

$$\left(\frac{u}{v}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\sqrt{1-\varepsilon}+\sqrt{1+\varepsilon}\right)^2=\frac{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2}<1,$$

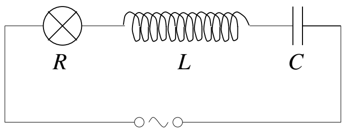
(adatainkkal pl. u/v=0,9997). Az űrhajós tehát akkor tesz szert nagyobb sebességre, ha egyszerre lövi ki a két lövedéket.

Több dolgozat alapján

Megjegyzés. Energetikailag ugyan kedvezőtlen, ha egymás után lövi ki az űrhajós a lövedékeket, de „irányítástechnikailag” ennek a megoldásnak is van előnye: ha az első lövés után nem pontosan a kívánt irányba mozdul el, a második lövéssel még javíthat a helyzetén, és visszakerülhet az űrhajóra.

Kiss Norbert (Budapest, Szent István Gimn., 11. o.t.)

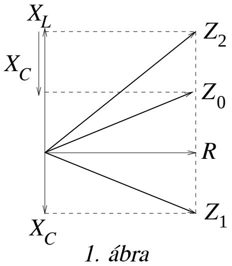
229 dolgozat érkezett. Helyes 39 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 7, hiányos (1–3 pont) 171, hibás 7, nem versenyszerű 5 dolgozat.



P. 3392. *Az* ábrán *látható soros RLC körben az izzó világít. Azt tapasztaljuk, hogy ha rövidre zárjuk a tekercset, nem változik meg az izzó fénykibocsátása. Hogyan változik az izzó fénykibocsátása, ha a kondenzátort zárjuk rövidre?*

(*4 pont*) Közli: *Nagy Márton,* Sopron

Megoldás. Az izzó fénykibocsátása a rajta átfolyó áram erősségétől függ, az áramot pedig (adott külső feszültség esetén) a soros kör impedanciája határozza meg.



1. ábra

Eredetileg az impedancia $Z_0=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}$, a tekercs rövidre zárása után pedig $Z_1=\sqrt{R^2+X_C^2}$. Ez a két mennyiség akkor egyezik meg, ha

$$(X_L-X_C)^2=X_C^2,$$

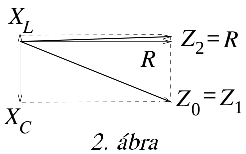
azaz

$$|X_L-X_C|=X_C.$$

Ez az egyenlőség $X_L=0$ vagy $X_L=2X_C$ esetén teljesül. Reális tekercset és valódi váltófeszültséget feltételezve $X_L\neq 0$, így csak az megoldás marad, hogy az induktív ellenállás kétszer nagyobb, mint a kapacitív ellenállás (*1. ábra*).

Ha a kondenzátort zárjuk rövidre, a kör impedanciája $Z_2=\sqrt{R^2+X_L^2}$ lesz. Az ábráról leolvashatjuk, hogy $Z_2>Z_0$, vagyis a kör impedanciája megnő, az áramerősség – és ezzel együtt az izzó fénykibocsátása – pedig lecsökken.

Romhányi Judit (Szolnok, Verseghy F. Gimn. 12. o.t.) és
Séfer Richárd (Siófok, Perczel M. Gimn. 10. o.t.) dolgozata alapján



2. ábra

Megjegyzés. A tekercs rövidre zárásakor az áramerősség változatlanságának feltételéből adódó egyenletnek formálisan $X_L=L\omega=0$ is megoldása. Ennek a megoldásnak is tulajdonítható fizikai jelentés: a tekercs induktív ellenállása igen kicsi (a mérési hibahatáron belül nulla). Ennek pl. az lehet az oka, hogy a tekercs L induktivitása kicsi, vagy az, hogy a váltóáram frekvenciája nagyon kicsi (esetleg mindkettő teljesül). Ilyen körülmények között (*2. ábra*) a tekercs rövidre zárása nyilván nem okoz észrevehető változást az áramerősségben. Ha viszont az alacsony frekcencián nagy ellenállást képviselő kondenzátort zárjuk, az számottevően csökkenti az impedanciát, növeli az áramerősséget, az izzó tehát ebben az esetben fényesebben világít.

Bárkai János (Budapest, Berzsenyi D. Gimn. 10. o.t.)

87 dolgozat érkezett. Helyes 64 megoldás. Hiányos (1–3 pont) 10, hibás 8, nem versenyszerű 5 dolgozat.

P. 3402. *Ugyanakkora erő hat-e két áramjárta vezető, illetve egy árammal átjárt vezető és egy vele párhuzamos elektronsugár között, ha a többi adat megegyezik?*

(*4 pont*) Közli: *Kovács Gyula,* Gyömrő

Megoldás. Egy áramjárta vezetőnek és egy elektronsugárnak ugyanolyan a mágneses tere, feltéve, hogy az áramerősségek megegyeznek. Emiatt az elektronsugár és a vele párhuzamos áramjárta vezető, illetve a két áramjárta vezető között ható *mágneses* erő ($F = BIl$) ugyanakkora.

A két eset között azonban mégis van különbség, hiszen az áramjárta vezető elektromos szempontból semleges, az elektronsugárnak viszont van elektromos töltése. Ez az elektromos töltés a fém vezetőben elektromos megosztást hoz létre (a vezetőnek az elektronsugárhoz közelebbi fele kicsit pozitív, a távolabbi pedig kicsit negatív lesz), és az így kialakuló elektromos dipólus az elektronsugárra *elektromos vonzóerőt* fejt ki.

Az eredő erő tehát a két elrendezésben különböző lesz, azonos áramirányok esetén a mágneses és az elektromos kölcsönhatásból származó erők összeadódnak, ellentétes áramirányoknál pedig kivonódnak egymásból.

Horváth György (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) és
Tál Balázs (Veszprém, Lovassy L. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Egy elektronsugár és a tőle d távolságban levő, R sugarú, semleges vezeték között ható erő nagyságrendileg $(R/d)^2$-szer gyengébb, mint ugyanilyen távol haladó két egyforma elektronsugár közötti elektrosztatikus Coulomb-erő. Ha $d \gg R$, akkor ez az arányszám igen kicsiny. Másrészt viszont két párhuzamos elektronsugár közötti elektrosztatikus taszítóerőhöz képest a mágneses kölcsönhatásból származó vonzóerő $(v/c)^2$-szer kisebb, ahol v a részecskék sebessége, c pedig a fénysebesség. Ez (általában) ugyancsak egy kicsiny szám, emiatt a feladat megoldásában szereplő mágneses erőhöz képest az elektromos megosztásból származó erő (reális adatok mellett) akár összemérhető nagyságúak is lehetnek.

2. Felvetődhet az a gondolat is, hogy a gravitációs kölcsönhatás miatt tapasztalunk a két esetben különböző erőhatást. Ez elvben helyes (egy vezeték tömege sokkal nagyobb, mint a benne található elektronok össztömege); a gravitációs erők és az elektromos (illetve mágneses) erők közötti sok-sok nagyságrendnyi különbség miatt azonban a gravitáció az elektromágneses hatások mellett minden reális esetben elhanyagolható.

(G. P.)

15 dolgozat érkezett. Helyes Tál Balázs és Horváth György megoldása. Hiányos (1 pont) 11, hibás 2 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 224. Csepegtetéssel vagy más módszerrel határozzuk meg, hogy a kölnivíz (illetve a húsvéti locsolásra használt bármilyen illatszer) felületi feszültsége hány százaléka a víz felületi feszültségének!

(*6 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 3426. Két egymás melletti pályán közlekedő vonat egyike 90 km-t tesz meg óránként, a másik 10 métert másodpercenként. Az egyik vonatban ülő utas azt észleli, hogy a másik vonat 8 másodperc alatt halad el mellette. Mekkora a másik vonat hossza?

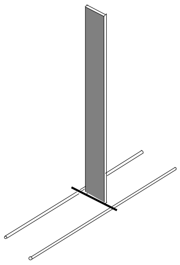
(*3 pont*) *Jedlik Ányos verseny,* Nyíregyháza

P. 3427. Egy utasszállító repülőgép a kifutópályáról 180 km/h sebességgel emelkedik fel, és egyenes vonalú pályán egyenletesen gyorsulva 40 másodperc alatt 2000 méter magasságra jut, miközben sebessége 540 km/h-ra növekszik.

a) Emelkedés közben mekkora és milyen irányú a repülőgép gyorsulása?

b) Emelkedéskor az utastér padlóján lévő bőrönd nem csúszik meg. Legalább mekkora a tapadási súrlódási együttható? (Tételezzük fel, hogy a padló síkja párhuzamos a sebességgel!)

(*4 pont*) *Párkányi László verseny,* Pécs



P. 3428. Vékony, m tömegű pálca egyik végéhez merőlegesen kis tengelyt erősítettünk. A tengely az *ábrán* látható vízszintes sínpáron súrlódásmentesen csúszhat. Labilis egyensúlyi helyzetéből a pálca valamerre eldől.

a) Lesz-e a sínpárra ható nyonóerő valamikor nulla?

b) Elválik-e dőlés közben a pálca tengelye a síntől?

c) Mekkora a nyomóerő a $0°$-os, $90°$-os és $180°$-os elfordulás pillanatában?

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 3429. Egy pingpongozó úgy mozgatja fel-le az ütőt, hogy a labda mindig 40 cm magasra pattan fel az ütőről. Az ütközési szám 0,5. Mekkora az ütő sebessége, amikor megüti a labdát? (A labda tömege sokkal kisebb, mint az ütőé, és a légellenállás elhanyagolható.)

(*4 pont*) Közli: *Varga István,* Békéscsaba

P. 3430. A Pireneusokban 1969 óta működtetnek egy napkohót, melyben 63 darab 30 m^2-es tükör vetíti a napfényt egy kis helyre. Legalább mennyi energiát összpontosítottak a tükrök, ha 1 perc alatt 1 cm vastag, kezdetben 35 °C-os vaslapba 15 cm sugarú lyukat olvasztottak a napsugarak? Legalább mekkora a napkohó teljesítménye?

(*3 pont*) *„Keresd a megoldást!” verseny,* Szeged

P. 3431. Egy kádban $T_0 = 80$ °C-os víz van, a környezet $T^* = 20$ °C-os. A víz hőmérséklete az idő függvényében: $T(t) = T^* + (T_0 - T^*)e^{-\alpha t}$, ahol α a hűlésre jellemző állandó. Az első 5 percben a hőmérséklet 10 °C-kal csökken. Ezután mennyi idő múlva töltsünk a kádba még ugyanannyi 10 °C-os vizet, hogy a keverék hőmérséklete a leghamarabb érje el a 30 °C-ot?

(*5 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

P. 3432. Egy szabályos tetraéder csúcsaiban egyforma fémgömbök helyezkednek el. A gömbök nem érnek össze. Egyetlen (A) gömbre vitt 20 nC töltés azt ugyanakkora potenciálra tölti fel, mintha A-nak és egy másik gömbnek adnánk $15-15$ nC töltést. Mekkora egyenlő töltéseket kellene adnunk A-nak és két másiknak, és mekkorát mind a négy gömbnek, hogy az A gömb potenciálja mindig ugyanakkora legyen?

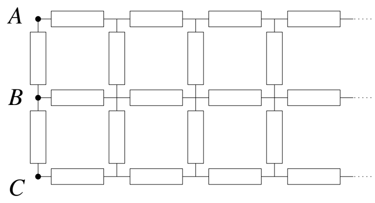
(*6 pont*) Közli: *Bihary Zsolt,* Irvine, California

P. 3433. Egy régi voltmérő az 1 V-os méréshatáron 0,7 V-nak, a 10 V-os méréshatáron 2,6 V-nak méri ugyanannak a telepnek a feszültségét. Mit mutat a voltmérő 100 V-os méréshatáron?

(*4 pont*) *Romániai feladat nyomán*

P. 3434. Határozzuk meg az *ábrán* látható, csupa 1 kΩ-os ellenállásból álló végtelen hálózat eredő ellenállását az A és C, illetve az A és B pontok között!

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Budapest



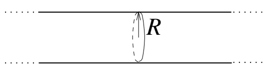
P. 3435. A hálózati váltófeszültségre egy 0,2 H induktivitású és 62,8 Ω ohmos ellenállású tekercset kapcsoltunk.

a) Mekkora kapacitású kondenzátor kapcsolható sorba a tekerccsel anélkül, hogy a hasznos teljesítmény megváltozna? Változik-e a teljesítménytényező értéke?

b) Javítható-e a teljesítménytényező azáltal, hogy a tekerccsel párhuzamosan egy kondenzátort kapcsolunk? Növelhető-e 1-re a teljesítménytényező?

(*4 pont*) *Vermes Miklós verseny,* Sopron

P. 3436. Nevenincs csillag egyik bolygója hosszú, henger alakú. A bolygó átlagsűrűsége ugyanakkora, mint a Földé, sugara is megegyezik a Föld sugarával, tengelyforgási ideje pedig éppen 1 nap.



a) Mekkora az első kozmikus sebesség ennél a bolygónál?

b) A bolygó felszíne felett milyen magasan keringenek az ottani távközlési szinkronműholdak?

c) Mekkora a második kozmikus sebesség ennél a bolygónál?

(*5 pont*) Közli: *Horányi Gábor,* Budapest

❄

A fizika feladatok megoldásai a következő címre küldendők:
Eötvös Loránd Fizikai Társulat, KöMaL feladatok
Budapest, Pf. 433. 1371
A beküldési határidő: **2001. május 11.**

Physics

M. 224. Determine, applying dripping or some other method, the proportion of the surface tension of eau de cologne to that of water.

P. 3426. One of two trains travelling on parallel tracks covers 90 km per hour, the other one 10 meters per second. A passenger travelling in one of the trains sees the other train pass by is 8 seconds. What is the length of the other train? **P. 3427.** An airliner takes off from the runway at a speed of 190 km/h, and reaches a height of 2000 m and a speed of 540 km/h in 40 seconds, following a straight trajectory with a uniform acceleration. a) During the rise, what are the magnitude and the direction of the acceleration of the plane? b) During the rise, the suitcase on the floor of the plane does not slip. What is the minimum coefficient of static friction required for this? (Assume that the plane of the floor is parallel to the velocity.) **P. 3428.** A small axle is fastened to one end of a thin staff of mass m, perpendicular to the staff. The axle can slide without friction on the horizontal track shown in the figure. The staff tumbles over to one side from its unstable equilibrium position. a) Will the force exerted onto the track ever be zero? b) Will the axle of the staff ever lose touch with the track? c) What is the force pressing the track when the staff has turned 0°, 90° and 180°? **P. 3429.** A table-tennis player moves his bat up and down in such a way that the ball always bounces to a height of 40 cm from the bat. The collision number is 0.5. What is the speed of the bat when hitting the ball? (The mass of the ball is much less than that of the bat and air resistance is also negligible.) **P. 3430.** A sun furnace has been at work in the Pyrenees since 1969, in which 63 mirrors of 30 m^2 each reflect the sunlight into a small area. How much energy do the mirrors at least concentrate if a hole with a diameter of 15 cm can be melted in 1 minute into a 1 cm thick iron plate with an initial temperature of 35 $^\circ$C? What is at least the power output of the sun furnace? **P. 3431.** There is some water at $T_0 = 80$ $^\circ$C in a tub, the temperature of the surroundings is $T^* = 20$ $^\circ$C. The temperature of the water as a function of time goes as follows: $T(t) = T^* + (T_0 - T^*)e^{-\alpha t}$, where α is a constant characteristic of the cooling. During the first 5 minutes, the temperature decreases by 10 $^\circ$C. How much later should the same amount of water of 10 $^\circ$C be poured again into the tub so that the mixture reaches the temperature of 30 $^\circ$C as soon as possible? **P. 3432.** Identical metal spheres are placed into the vertices of a regular tetrahedron. The spheres do not touch. When a single sphere (A) is given a charge of 20 nC it reaches the same potential as when A and another sphere are given 15 nC each. What equal charges should be given to A and to two other spheres, and what equal charges to all four spheres so that the potential of sphere A is always the same? **P. 3433.** An old voltmeter reads the voltage of a battery as 0.7 V at a measuring limit of 1 V, and as 2.6 V at a measuring limit of 10 V. What does the voltmeter read at a measuring limit of 100 V? **P. 3434.** Determine the resultant resistance of the infinite circuit made up of 1 $k\Omega$ resistors shown in the figure between points A and C, and between points A and B. **P. 3435.** A coil with an inductivity of 0.2 H and an ohmic resistance of 62.8 Ω is connected to the mains alternating voltage. a) What should the capacity of the capacitor connected in series with the coil be so that the active power does not change? b) Can the power factor be improved by connecting a capacitor parallel to the coil? Can the power factor be increased to 1? **P. 3436.** One of the planets of star Noname is long and cylindrical. The average density of the planet is identical to that of the Earth, its radius equals that of the Earth and the period of its revolution is exactly 1 day. a) What is the first cosmic speed for this planet? b) How high above the surface of the planet do the synchronous telecommunications satellites orbit? c) What is the second cosmic speed for this planet?

KöMaL – 2001/4 FIZ0104 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 20:48 (21. lap)