A 2000/2001. tanévi matematika pontverseny állása a februárig feldolgozott feladatok alapján

A nehezebb feladatok

Szeptembertől decemberig, feladatonként egy helyes megoldással elérhető: 60 pont.

1. *Csóka Endre* 10. o.t. 56 pont; **2.** *Kunszenti-Kovács Dávid* 10. o.t. 51 pont; **3–4.** *Csikvári Péter* 11. o.t., *Harangi Viktor* 11. o.t. 49 pont; **5.** *Gerencsér Balázs* 11. o.t. 42 pont; **6.** *Varjú Péter* 12. o.t. 38 pont; **7.** *Vörös László* 12. o.t. 37 pont; **8.** *Kovács Erika Renáta* 11. o.t. 32 pont; **9.** *Ambrus Gergely* 12. o.t. 28 pont; **10.** *Vígh Viktor* 12. o.t. 26 pont; **11.** *Kiss-Tóth Christian* 8. o.t. 25 pont; **12.** *Balogh 541 János* 11. o.t. 24 pont; **13.** *Koch Dénes* 12. o.t. 23 pont; **14–15.** *Horváth Illés* 11. o.t., *Vajda Péter* 12. o.t. 21 pont; **16–17.** *Csernenszky András* 11. o.t., *Rácz Béla András* 9. o.t. 18 pont; **18–20.** *Hablicsek Márton* 9. o.t., *Jankó András* 10. o.t., *Pach Péter Pál* 9. o.t. 15 pont; **21.** *Nagy 444 Zoltán* 10. o.t. 12 pont; **22.** *Bartha Ferenc* 10. o.t. 11 pont; **23–25.** *Garab Ábel* 10. o.t., *Szalai Attila* 10. o.t., *Szalay Zsófia* 11. o.t. 10 pont; **26–27.** *Balka Richárd* 12. o.t., *Béky Bence* 11. o.t. 9 pont; **28–30.** *Farkas Viktor* 11. o.t., *Fűrész Gábor* 11. o.t., *Kórus Péter* 9. o.t. 8 pont; **31.** *Kocsis Albert Tihamér* 9. o.t. 7 pont; **32–34.** *Juhász Máté Lehel* 9. o.t., *Kőrizs András* 11. o.t., *Lajkó Miklós* 10. o.t. 6 pont.

Kevesebb pontja van 104 versenyzőnek.

B feladatok

A szeptember–októberi összesítés után, a maximális elérhető pontszám: 54 pont.

Általános iskolások

1. *Kiss-Tóth Christian* 8. o.t. 53 pont; **2.** *Eckert Bernadett* 8. o.t. 42 pont; **3–4.** *Birkner Tamás* 8. o.t., *Paulin Roland* 7. o.t. 38 pont; **5.** *Hartmann Zoltán* 8. o.t. 37 pont; **6.** *Szabó Teodóra* 8. o.t. 24 pont; **7.** *Knipl Diána* 8. o.t. 23 pont; **8–9.** *Kovács 111 Péter* 7. o.t., *Tassy Gergely* 8. o.t. 12 pont; **10.** *Torma Róbert* 8. o.t. 9 pont.

Kevesebb pontja van 18 versenyzőnek.

9. osztályosok

1. *Hablicsek Márton* 48 pont; **2.** *Horváth 424 Márton* 47 pont; **3–5.** *Paulin Dániel*, *Puskás Anna*, *Rácz Béla András* 44 pont; **6–8.** *Hubai Tamás*, *Maga Péter*, *Pach Péter Pál* 42 pont; **9–11.** *Kocsis Albert Tihamér*, *Kórus Péter*, *Németh Adrián* 39 pont; **12.** *Pál Ágnes* 37 pont; **13.** *Egri Attila* 36 pont; **14.** *Tóth 143 Anett* 35 pont; **15.** *Kovács 435 Levente* 34 pont; **16–17.** *Bauer Péter*, *Konfár András* 33 pont; **18.** *Mátis Gábor* 29 pont; **19–20.** *Fehér Balázs*, *Szabó 175 Botond* 28 pont; **21.** *Papp Zoltán* 27 pont; **22–24.** *Darabos Judit*, *Hangya Miklós*, *Kovács Dóra Judit* 26 pont; **25.** *Pongrácz András* 25 pont; **26–28.** *Genczler Kata*, *Kovács 666 Gábor*, *Nyeste Szabolcs* 24 pont; **29–30.** *Berki Tímea*, *Juhász Máté Lehel* 23 pont; **31–33.** *Kocsis Tibor*, *Kovács Adrián*, *Rakyta Péter* 22 pont; **34–38.** *Halbrucker Tamás*, *Hegyháti Máté*, *Matyuska Ferenc*, *Simon Zsolt*, *Varga 771 Nóra* 21 pont; **39–44.** *Bánfi László*, *Elter Csaba*, *Ferencz Emőke*, *Kajtár Máté*, *Klausz Balázs*, *Szilágyi Péter* 20 pont; **45.** *Klobb Maja* 19 pont; **46–49.** *Gáti Beatrix*, *Kiss 666 Balázs*, *Terjéki Péter*, *Timkó Helga* 17 pont; **50–56.** *Dányádi Zsolt*, *Fehér Gábor*, *Hudáky Zsuzsanna*, *Kelemen Ferenc*, *Kutasi Dávid*, *Mukli Péter*, *Vörös András* 16 pont; **57–61.** *Deák Péter*, *Fejes Lívia*, *Majoros Vera*, *Szűcs Norbert*, *Zsigmond Anna* 15 pont; **62–69.** *Fekete László*, *Lamm Anita*, *Molnár 428 Katalin*, *Nikházy Orsolya*, *Sándor Ágnes*, *Sebestyén Péter*, *Seress Bence*, *Töttős László* 14 pont; **70–75.** *Balogh Rita*, *Breitenstein Csaba*, *Flach Viktória*, *Papp Gábor*, *Sebestyén Krisztián*, *Tóth András* 13 pont; **76–84.** *Bán Zoltán*, *Bori Kata*, *Caimacan Dávid*, *Édes János*, *Kiss 666 Gergely*, *Nagy Ildikó*, *Osgyán Balázs*, *Tárnok Gábor*, *Vaskó Renáta* 12 pont; **85–89.** *Csonka Gábor*, *Dobler Zsófia*, *Holler Péter*, *Kardos Tibor*, *Tasi Eszter* 11 pont; **90–94.** *Bagócsi Szilvia*, *Barcza Krisztina*, *György András*, *Sarusi Annamária*, *Vona Péter* 10 pont.

Kevesebb pontja van 150 versenyzőnek.

10. osztályosok

1–4. *Komjáthy Júlia*, *Nagy 444 Zoltán*, *Sparing Dániel*, *Szekeres Balázs* 46 pont; **5–6.** *Bartha Ferenc*, *Malakuczi Viktor* 45 pont; **7.** *Bóka Gergely* 44 pont; **8–9.** *Bérczi Kristóf*, *Bergmann Gábor* 42 pont; **10–12.** *Jankó András*, *Jelitai Kálmán*, *Szűcs Mónika* 41 pont; **13.** *Blastik Márta* 40 pont; **14.** *Fehér Ádám* 39 pont; **15–17.** *Belső Róbert*, *Szücs Tamás*, *Torma Ákos* 38 pont; **18.** *Prekopcsák Zoltán* 37 pont; **19–21.** *Backhausz Ágnes*, *Simon Balázs*, *Tábor Áron* 36 pont; **22–23.** *Boros Balázs*, *Szalai Attila* 35 pont; **24.** *Rácz Judit* 34 pont; **25–27.** *Herczegh Attila*, *Koltai Péter*, *Lang Péter* 33 pont; **28.** *Sipőcz Brigitta* 32 pont; **29.** *Markó Roland* 31 pont; **30–33.** *Kalcsú Áron*, *Márton Sándor*, *Nagy 625 Tibor*, *Rácz Éva* 30 pont; **34–38.** *Gábor Sámuel*, *Molnár 999 László*, *Ruppert László*, *Sevecsek Zsuzsanna*, *Szilágyi Zoltán* 29 pont; **39–43.** *Antal 627 Áron*, *Kiss Demeter*, *Nagy 666 Károly*, *Sándor Nóra*, *Török Dávid* 28 pont; **44–46.** *Balogh Ágnes*, *Buti Tamás*, *Honti Edit Anna* 27 pont; **47–49.** *Herr Annamária*, *Pongrácz Eszter*, *Sipos Gábor* 26 pont; **50–52.** *Garab Ábel*, *Molnár 712 Ágnes*, *Pusztai Erika* 25 pont; **53–57.** *Balaton Attila*, *Besenyei Balázs*, *Borbély Attila*, *Rendes Gábor*, *Salát Máté* 24 pont; **58–60.** *Pálvölgyi Dénes*, *Surján Veronika*, *Ureczky Dóra* 23 pont; **61–62.** *Bárkai János*, *Tukacs Lívia* 22 pont; **63.** *Tölgyesi Csaba* 21 pont; **64–69.** *Balogh 947 László*, *Balogh 126 Zoltán*, *Gyöngyösi Győző*, *Kósa Fruzsina*, *Kovács 494 Andrea*, *Szalay Gergely* 20 pont; **70–72.** *Geleji János*, *Kiss Zsuzsanna*, *Módos András* 19 pont; **73–78.** *Bisztray Márta*, *Fliszár Vilmos*, *Glowinsky Janka*, *Lajkó Miklós*, *Simon Zsolt*, *Varga Noémi* 18 pont; **79–81.** *Lakatos Kristóf*, *László Anna Fruzsina*, *Töreki 123 Péter* 17 pont; **82–84.** *Makray Bálint*, *Nyul Balázs*, *Sepler Gábor* 16 pont; **85–92.** *Baráth Géza*, *Durham Patrick*, *Maróti László*, *Mihók Péter*, *Pusztai János*, *Reiss Tibor*, *Szücs András*, *Vági Andrea* 15 pont; **93–101.** *Aibester Dóra*, *Barsi Mária*, *Bori Eszter*, *Csekő Anna*, *Horváth 997 Eszter*, *Komáromy Dávid*, *Márton Noémi Petra*, *Tamás Katalin*, *Virág Éva* 14 pont; **102–107.** *Bakonyi Ákos*, *Bálint Márton*, *Csoma Péter*, *Koncsek Sándor*, *Mándy Péter*, *Szabó László* 13 pont; **108–113.** *Bicskei Norbert*, *Blága Szabolcs*, *Borgátai Diána*, *Hajnalka Zsolt*, *Hanzséros Eszter*, *Pintér Balázs* 12 pont; **114–119.** *Drüszler Anikó*,

KöMaL – 2001/3 MAT0103 cianmagentayellowblack2002. június 19. – 8:51 (2. lap)

Dunai Ágnes, *Kalocsai Ákos*, *Köber Csaba*, *Magyar Róbert*, *Sipos Kinga* 11 pont; **120–125.** *Blaskó János*, *Hajdú Huba*, *Hegedűs Viktor*, *Madocsai Rita*, *Szöllősi Ádám*, *Varga 635 Pál* 10 pont.

Kevesebb pontja van 116 versenyzőnek.

11. osztályosok

1. *Somogyi Dávid* 54 pont; **2–5.** *Balogh 541 János*, *Hargitai Gábor*, *Jesch Dávid*, *Tóth 370 Ágnes* 49 pont; **6–8.** *Kőrizs András*, *Pallos Péter*, *Tran Thanh Long* 48 pont; **9–10.** *Béky Bence*, *Marton József* 47 pont; **11–13.** *Boros Vazul*, *Horváth Illés*, *Nagy 469 Ambrus* 46 pont; **14–17.** *Fűrész Gábor*, *Hamar Gergő*, *Soproni Péter*, *Szalay Zsófia* 44 pont; **18–20.** *Kucsara Péter*, *Takács Gergő*, *Zavarkó Gábor* 43 pont; **21–22.** *Sásdy Gabriella*, *Ta Vinh Thong* 42 pont; **23.** *Dömötör Csilla* 41 pont; **24.** *Reiss Attila* 40 pont; **25.** *Csáky Attila* 39 pont; **26–27.** *Baur Eszter*, *Farkas Viktor* 35 pont; **28.** *Dénes Ferenc* 34 pont; **29–32.** *Antal Ágnes*, *Farkas Máté*, *Koreck Ferenc*, *Váradi Vajk* 33 pont; **33–36.** *Boróczki Lajos*, *Csötönyi Nóra*, *Raikovich Tamás*, *Siroki László* 32 pont; **37–39.** *Csordás Hunor*, *Kevei Péter*, *Kovács 721 Péter* 31 pont; **40–43.** *Iván Szilárd*, *Kádas Attila*, *Major Gergely*, *Zakar István* 30 pont; **44.** *Szebenyi Zoltán* 29 pont; **45–46.** *Ábel Dániel*, *Zsurkó Mátyás* 28 pont; **47.** *Kerékfy Péter* 27 pont; **48.** *Szente Dávid* 25 pont; **49–50.** *Balog Gergely*, *Madár Ivett* 24 pont; **51–54.** *Czeininger Zoltán*, *Seleljo Erzsébet*, *Tímár Gábor*, *Vadai Zsolt* 23 pont; **55–58.** *Bertus-Barcza Tímea*, *Horváth Szabolcs*, *Tolvaj Nóra*, *Zsbán Ambrus* 22 pont; **59–61.** *Lestyán Gyula*, *Szabó 127 Andrea*, *Zséger Ádám* 21 pont; **62–66.** *Devecsery Ágnes*, *Róna Péter*, *Szabó 406 Tamás*, *Varga Viktória*, *Zámbó Virág* 20 pont; **67–70.** *Sipos Szabó Eszter*, *Siska Ádám*, *Tóth János*, *Tóth Rudolf* 19 pont; **71–77.** *Bálint Vilmos*, *Beke Krisztina*, *Danyi Antal*, *Pernek Ákos*, *Sára Péter*, *Szirmay Márta*, *Varga Péter* 18 pont; **78–83.** *Berta Balázs*, *Kádár Cecília*, *Kecskés Éva*, *Keszi-Petik János*, *Kiss Gergely Péter*, *Sándorfi Erika* 17 pont; **84–90.** *Bede Viktória*, *Farkas 327 Dóra*, *Farkas Melinda*, *Iberpaker Péter*, *Kőrösi Attila*, *Martinovic Boris*, *Nagy 701 Mária* 16 pont; **91–99.** *Barta 679 Zsolt*, *Kertész Zsuzsanna*, *Klacso János*, *Kriesch Tamás*, *Márton Eszter*, *Mult Attila*, *Spanczér Ilona*, *Szintai Judit*, *Tardos Attila* 15 pont; **100–101.** *Buza Krisztián Antal*, *Varga Gábor* 14 pont; **102–106.** *Asztalos Márk*, *Fási Erika*, *Gyökeres Ágnes*, *Kókai Zsuzsanna Luca*, *Makk Péter* 13 pont; **107–112.** *Alvarez Olga*, *Asztalos Gyula*, *Balogh 225 Gabriella*, *Csányi Attila*, *Porcs-Makkay Ákos*, *Völgyi Krisztina* 12 pont; **113–120.** *Bartha 321 Ágnes*, *Bein Márton*, *Morvai Krisztina*, *Potsa Péter*, *Sáfár Orsolya*, *Somlai Ágnes*, *Vajk Tamás*, *Varga 846 Petra* 11 pont; **121–123.** *Avramucz György*, *Hetesi Péter*, *Vígh Róbert* 10 pont.

Kevesebb pontja van 136 versenyzőnek.

12. osztályosok

1–2. *Ambrus Gergely*, *Deli Lajos* 52 pont; **3.** *Babos Attila* 50 pont; **4.** *Nagy Tamás* 47 pont; **5–7.** *Andrássy Zoltán*, *Boros M. Mátyás*, *Zalán Péter* 46 pont; **8–10.** *Lovrics Anna*, *Pacz Bence Tamás*, *Pogátsa Attila* 45 pont; **11–12.** *Balka Richárd*, *Lovrics Klára* 44 pont; **13.** *Vajda Péter* 41 pont; **14–16.** *Eördegh Péter*, *Kármán Péter*, *Kisfügedi Viktória* 38 pont; **17–18.** *Bakó Dániel*, *Várkonyi Dániel* 37 pont; **19.** *Bicskei László* 36 pont; **20.** *Siklósi Dávid* 35 pont; **21–22.** *Börcsök József*, *Fodor Gyula* 34 pont; **23–24.** *Legány Csaba*, *Takács József* 33 pont; **25–27.** *Dőrr Zsuzsanna*, *Imrefi*

József, *Székelyhidi Tamás* 32 pont; **28–29.** *Árvay Eszter*, *Tóth Szilveszter* 31 pont; **30–32.** *Fenyvesi Zsuzsanna*, *Soós 740 Károly*, *Szekeres 761 András* 30 pont; **33.** *Nagy 139 Gergely* 29 pont; **34–36.** *Fehér Gergely*, *Fekete 110 Árpád*, *Kozma László* 28 pont; **37–39.** *Győző Miklós*, *Király Attila*, *Vizer Tibor* 26 pont; **40.** *Simon 812 Győző* 25 pont; **41.** *Tokodi Tünde* 24 pont; **42–43.** *Bohák András*, *Nagy 729 Dávid* 23 pont; **44.** *Körtvélyessy Csaba* 22 pont; **45.** *Rakamazi Richárd* 21 pont; **46–47.** *Medgyesi László*, *Veres Péter* 19 pont; **48.** *Horváth Dénes* 18 pont; **49–51.** *Baka Nóra*, *Gyurcsek András*, *Kolozsváry Georgina* 16 pont; **52.** *Horváth Szilárd* 15 pont; **53–56.** *Ádám Zoltán*, *Király Ferenc*, *Szabó Géza*, *Tóth 666 Balázs* 14 pont; **57–59.** *Stépán József*, *Vonnák Dzsamila*, *Wéber Zoltán* 13 pont; **60–63.** *Béhm A. Diana*, *Enyedi Gábor*, *Horváth 713 György*, *Sofró Csaba* 12 pont; **64–68.** *Darabos Andrea*, *Hegyi Márta*, *Kádár 181 Csaba*, *Lajtha Balázs*, *Roszol László* 11 pont; **69–71.** *Feró Dalma*, *Harcz Ádám*, *Varga Zoltán* 10 pont.

Kevesebb pontja van 70 versenyzőnek.

C gyakorlatok

A szeptember–októberi, valamint a C. 601., C. 602., C. 603., C. 604. gyakorlatok összesítése után, a maximális elérhető pontszám: 70 pont.

Legfeljebb 10. osztályosok

1. *Birkner Tamás* 8. o.t. 70 pont; **2–4.** *Bérces Péter* 10. o.t., *Nagy 359 Gábor* 10. o.t., *Nyul Balázs* 10. o.t. 69 pont; **5–6.** *Fehér Ádám* 10. o.t., *Sándor Nóra* 10. o.t. 68 pont; **7.** *Ruppert László* 10. o.t. 66 pont; **8.** *Nikházy Orsolya* 9. o.t. 65 pont; **9.** *Szilágyi Zoltán* 10. o.t. 64 pont; **10–11.** *Lakatos Szilvia* 10. o.t., *Vincze Nándor* 10. o.t. 63 pont; **12–13.** *Révész Dániel* 10. o.t., *Sipka Bálint* 9. o.t. 62 pont; **14–15.** *Rácz Miklós* 8. o.t., *Simon 111 Attila* 10. o.t. 61 pont; **16.** *Vaskó Renáta* 9. o.t. 60 pont; **17–21.** *Besenyei Balázs* 10. o.t., *Hajdú Huba* 10. o.t., *Rückert Péter* 10. o.t., *Sándor Ágnes* 9. o.t., *Wettl Márta* 10. o.t. 59 pont; **22–29.** *Balogh Viktor* 10. o.t., *Bartolits Dániel* 9. o.t., *Karches Tamás* 10. o.t., *Komáromi István* 8. o.t., *Medvey Ádám* 9. o.t., *Nándori Péter* 9. o.t., *Oltványi Gábor* 9. o.t., *Szabó 318 Dávid* 9. o.t. 58 pont; **30–33.** *Sali András* 8. o.t., *Sevecsek Zsuzsanna* 10. o.t., *Simon Balázs* 10. o.t., *Szilágyi Péter* 9. o.t. 57 pont; **34–38.** *Lang Péter* 10. o.t., *Penha Felizardo Renáta* 10. o.t., *Salát Máté* 10. o.t., *Szabó 175 Botond* 9. o.t., *Szalontay Lukács* 9. o.t. 56 pont; **39–45.** *Baráth Géza* 10. o.t., *Békefi Edina* 9. o.t., *Gyenese Péter* 10. o.t., *Kordás Tímea Beáta* 9. o.t., *Mándy Péter* 10. o.t., *Oláh Zsolt* 9. o.t., *Tollner Dávid* 10. o.t. 55 pont; **46.** *Világi Dávid* 10. o.t. 54 pont; **47–48.** *Kiss Attila* 9. o.t., *Pinczehelyi Tamás* 10. o.t. 53 pont; **49.** *Csapó Tamás* 10. o.t. 52 pont; **50–53.** *Horváth 164 András* 9. o.t., *Márton Zsuzsanna* 10. o.t., *Matyuska Ferenc* 9. o.t., *Metzing András* 10. o.t. 51 pont; **54–56.** *Borbás Péter* 9. o.t., *Gál András* 10. o.t., *Kincses Lilla* 9. o.t. 50 pont; **57–64.** *Balán Gábor* 10. o.t., *Elter Csaba* 9. o.t., *Herczeg Lynda* 10. o.t., *Homoki Kata* 9. o.t., *Regős Gábor* 8. o.t., *Rendes Gábor* 10. o.t., *Szrnka Éva* 10. o.t., *Varga Márta* 10. o.t. 49 pont; **65–70.** *Kórus Péter* 9. o.t., *Márton Szabolcs* 10. o.t., *Nemeskéri Tamás* 10. o.t., *Papp Gábor* 9. o.t., *Sipos Kinga* 10. o.t., *Tölgyesi Csaba* 10. o.t. 48 pont; **71–78.** *Bokor Mihály* 10. o.t., *Fehér Borbála* 10. o.t., *Katona András* 9. o.t., *Mukli Péter* 9. o.t., *Szabó 954 Balázs* 9. o.t., *Szabó Kinga* 10. o.t., *Tar Orsolya* 10. o.t., *Vass Márton* 8. o.t. 47 pont; **79–84.** *Baku György* 8. o.t., *Németh 864 Márk* 9. o.t., *Raikovich Márton* 8. o.t., *Szücs András* 10. o.t., *Szűcs Mónika* 10. o.t., *Török Sándor Miklós* 10. o.t. 46 pont; **85–92.** *Csekő Anna* 10. o.t., *Fülöp Anita* 10. o.t., *Horváth 713 Brigitta* 8. o.t., *Krivosija Zoltán* 10. o.t., *Pohankovics András* 10. o.t., *Sántha Katalin* 10. o.t., *Sipőcz Éva* 10. o.t., *Szabó 910 Tamás* 8. o.t. 45 pont; **93–94.** *Szabó-Bálint Zoltán* 10. o.t., *Vehovszky Balázs* 10. o.t. 44 pont; **95–100.** *Kövecses Dóra* 10. o.t., *Padányi Balázs* 9. o.t., *Simon Péter* 9. o.t., *Sipőcz Eszter* 9. o.t., *Törzsök Gyula* 10. o.t., *Varga 666 Bálint* 9. o.t. 43 pont; **101–108.** *Borsódi Éva* 10. o.t., *Grósz Krisztina* 10. o.t., *Horváth 169 Viktória* 9. o.t., *Komáromy Dávid* 10. o.t., *Korai Szabolcs* 10. o.t., *Kulcsár Katalin* 10. o.t., *Nagy Ildikó* 9. o.t., *Németh Bálint* 10. o.t. 42 pont; **109–113.** *Füle Orsolya* 10. o.t., *Márton Noémi Petra* 10. o.t., *Sáfár Simon* 9. o.t., *Szabó 989 Zoltán* 10. o.t., *Varga Réka* 10. o.t. 41 pont; **114–121.** *Bartakovics Zoltán* 10. o.t., *Beringer Dorottya* 8. o.t., *Caimacan Dávid* 9. o.t., *Dombai Balázs* 10. o.t., *Hotzi Bernadette* 7. o.t., *Nemes Katalin* 9. o.t., *Rátkai András* 8. o.t., *Török Zoltán Bálint* 9. o.t. 40 pont; **122–129.** *Bényász Ákos* 9. o.t., *Hegyi Gábor* 9. o.t., *Kárpáti Péter* 9. o.t., *Kis 761 László* 10. o.t., *Lux András* 9. o.t., *Molnár 999 László* 10. o.t., *Tuska Gábor* 9. o.t., *Virág Éva* 10. o.t. 39 pont; **130–141.** *Antal László* 9. o.t., *Bánfi László* 9. o.t., *Fehér Gábor* 10. o.t., *Ferenci Tamás* 9. o.t., *Kormos Attila* 10. o.t., *Kutasi Dávid* 9. o.t., *Márk Ágnes* 10. o.t., *Megyesi Balázs* 9. o.t., *Nagy 813 Dorottya* 9. o.t., *Szalay Gergely* 10. o.t., *Tasi Eszter* 9. o.t., *Wyszoczky Gábor* 9. o.t. 38 pont; **142–151.** *Benyó Edina* 9. o.t., *Bíró Zoltán* 10. o.t., *Dőry Zsófia* 8. o.t., *Illés Balázs* 9. o.t., *Karlik Zsuzsanna* 10. o.t., *Kocsis Szilveszter* 8. o.t., *Lengyel Tímea* 9. o.t., *Rauscher Anna* 10. o.t., *Reiss Tibor* 10. o.t., *Szirom Zoltán* 10. o.t. 37 pont; **152–157.** *Baráth Gellért* 10. o.t., *Gőbölös Márton* 10. o.t., *Hudáky Zsuzsanna* 9. o.t., *Lapusnyik Dávid* 9. o.t., *Lengyel Krisztina* 10. o.t., *Ozsváth Berta* 10. o.t. 36 pont; **158–172.** *Borgátai Diána* 10. o.t., *Breitenstein Csaba* 9. o.t., *Csige Tamás* 9. o.t., *Fehér Zoltán* 9. o.t., *Geiger Adél* 9. o.t., *Kiss-Dózsai Ákos* 9. o.t., *Komáromy Dániel* 10. o.t., *Magony Krisztina* 9. o.t., *Magyar Attila* 9. o.t., *Sarkadi Csaba* 9. o.t., *Szabó 905 Gergely* 9. o.t., *Szádvári Gábor* 8. o.t., *Szakács Júlia* 9. o.t., *Wacha András Ferenc* 10. o.t., *Zsigmond Anna* 9. o.t. 35 pont; **173–180.** *Boros Gergő* 8. o.t., *Darányi Dóra* 9. o.t., *Gradsack Ákos* 8. o.t., *Király Csaba* 8. o.t., *Kovács 227 Dávid* 9. o.t., *Mátis Gábor* 9. o.t., *Micskó Anna* 9. o.t., *Vakulya Gergely* 10. o.t. 34 pont; **181–191.** *Balogh 213 József* 10. o.t., *Bárkai János* 10. o.t., *Béky Zsófia* 9. o.t., *Kovács 727 Tamás* 9. o.t., *Kriván Eszter* 9. o.t., *Mayer 17 Péter* 9. o.t., *Német Balázs* 9. o.t., *Németh Bertalan* 8. o.t., *Sipos Gábor* 10. o.t., *Sümegi Edina* 9. o.t., *Szőke Edina* 9. o.t. 33 pont; **192–200.** *Fancsali Dániel* 10. o.t., *Gonda Bence* 9. o.t., *Hóbor Fruzsina* 10. o.t., *Horváth Zsolt* 8. o.t., *Makó Imre* 9. o.t., *Salgó László* 9. o.t., *Sápi Csilla* 10. o.t., *Strobl Hajnalka* 10. o.t., *Szabó 598 Nóra* 9. o.t. 32 pont; **201–211.** *Bednay Dezső* 9. o.t., *Belles Gellért* 10. o.t., *Boros Benedek* 9. o.t., *Csizmadia Péter* 9. o.t., *Fábián Máté* 9. o.t., *Fülöp 387 István* 10. o.t., *Gábor István* 10. o.t., *Oroszi Gyöngyi* 9. o.t., *Szűr Árpád* 10. o.t., *Vajda István* 10. o.t., *Vörös Gergő* 10. o.t. 31 pont; **212–220.** *Blasko Ján* 10. o.t., *Gáspár Orsolya* 10. o.t., *György András* 9. o.t., *Koncsek Sándor* 10. o.t., *Lakatos Péter* 9. o.t., *Márton Gergely* 9. o.t., *Ollár Mariann* 9. o.t., *Peskó Gergely* 9. o.t., *Petrás Attila* 10. o.t. 30 pont; **221–227.** *Ásványi Vera* 8. o.t., *Forreiter Andrea* 10. o.t., *Kovács Attila* 10. o.t., *Pluhár Gabriella* 10. o.t., *Sziklási Béla* 9. o.t., *Tassy Gergely* 8. o.t., *Udvari Balázs* 7. o.t. 29 pont; **228–240.** *Baranyi Bernadett* 9. o.t., *Dombi Nóra* 10. o.t., *Fazakas Bálint* 10. o.t., *Kovács 630 Gergely* 9. o.t., *Kováts Bence* 10. o.t., *Lechner Ádám* 9. o.t., *Makovi Kinga Réka* 9. o.t., *Novák Zsófia* 9. o.t., *Pászthy Edina* 10. o.t., *Rácz Gergely* 9. o.t., *Salamon 999 Dániel* 9. o.t., *Sarusi Annamária* 9. o.t., *Urbán Andrea* 10. o.t. 28 pont.

Kevesebb pontja van 599 versenyzőnek.

11–12. osztályosok

1–2. *Deli Lajos* 12. o.t., *Erdei Zsuzsa* 11. o.t. 70 pont; **3–4.** *Kármán Péter* 12. o.t., *Szekeres 761 András* 12. o.t. 68 pont; **5.** *Kisfügedi Viktória* 12. o.t. 67 pont; **6.** *Szintai*

Balázs 12. o.t. 66 pont; **7–8.** *Árvay Eszter* 12. o.t., *Csáky Attila* 11. o.t. 64 pont; **9–11.** *Horváth Bertalan* 12. o.t., *Takács Gergő* 11. o.t., *Végh Anita* 12. o.t. 63 pont; **12.** *Farkas 327 Dóra* 11. o.t. 61 pont; **13–15.** *Germán Tibor* 12. o.t., *Papp Gábor* 11. o.t., *Rischák Rózsa* 11. o.t. 60 pont; **16–19.** *Ásványi Katalin* 11. o.t., *Avramucz György* 11. o.t., *Baur Eszter* 11. o.t., *Péics Berkes Lóránt* 12. o.t. 58 pont; **20–21.** *Horváth 274 Ágnes* 11. o.t., *Kolláth Endre* 12. o.t. 57 pont; **22–25.** *Kádár Cecília* 11. o.t., *Raffai Péter* 12. o.t., *Reményi Zsolt* 12. o.t., *Steiner Attila* 12. o.t. 56 pont; **26–28.** *Kőszegi Katalin Adrienn* 12. o.t., *Lelovics András* 11. o.t., *Medgyesi László* 12. o.t. 55 pont; **29–32.** *Béhm A. Diana* 12. o.t., *Legány Csaba* 12. o.t., *Monostori Eszter* 12. o.t., *Wéner Balázs* 12. o.t. 53 pont; **33.** *Dörnyei Renáta* 11. o.t. 52 pont; **34–36.** *Pál Zsófia* 11. o.t., *Soós 740 Károly* 12. o.t., *Székelyhidi Zsolt* 11. o.t. 51 pont; **37–39.** *Nagy Judit* 11. o.t., *Szirmay Márta* 11. o.t., *Taksonyi Rita* 11. o.t. 50 pont; **40.** *Németh 13 Andrea* 11. o.t. 49 pont; **41.** *Tóth Georgina Zsófia* 11. o.t. 48 pont; **42–45.** *Dömötör Piroska* 12. o.t., *Fenyvesi Zsuzsanna* 12. o.t., *Rév Tamás* 12. o.t., *Sásdy Gabriella* 11. o.t. 47 pont; **46.** *Gaál Zsófia* 11. o.t. 46 pont; **47.** *Varga 123 Áron* 11. o.t. 45 pont; **48–52.** *Bács Boglárka* 11. o.t., *Baski Attila* 12. o.t., *Flaskár Anett* 11. o.t., *Nagy 666 Péter* 12. o.t., *Pajna Gabriella* 11. o.t. 44 pont; **53–54.** *Burai Csilla* 11. o.t., *Klein Gábor* 12. o.t. 43 pont; **55–59.** *Domonkos Brigitta* 12. o.t., *Hernádi Zsuzsanna* 11. o.t., *Körmendi Gyöngyi* 11. o.t., *Lajtai Péter* 11. o.t., *Varga 846 Petra* 11. o.t. 42 pont; **60.** *Poór Gergő* 11. o.t. 41 pont; **61–62.** *Jáger Viktor* 11. o.t., *Jónás Ivett* 11. o.t. 40 pont; **63–69.** *Bartha 321 Ágnes* 11. o.t., *Csicsai Roland* 11. o.t., *Dzsubák Edina* 11. o.t., *Markó Péter* 11. o.t., *Saly Miklós* 12. o.t., *Szanyi Gyöngyvér* 11. o.t., *Tóth 613 Marcella* 12. o.t. 39 pont; **70–75.** *Fodor 666 Zsuzsa* 11. o.t., *Karácsonyi József Sándor* 12. o.t., *Paál Csaba* 12. o.t., *Papp András* 12. o.t., *Szabó 314 Zsolt* 11. o.t., *Szintai Judit* 11. o.t. 38 pont; **76–78.** *Fekete Zsolt* 12. o.t., *Hegedűs Ferenc* 11. o.t., *Nagy 281 Dávid* 12. o.t. 37 pont; **79–83.** *Agócs Angéla* 11. o.t., *Berényi Amarilla* 11. o.t., *Janó Edit* 12. o.t., *Ugra Dániel* 11. o.t., *Varga 466 Zoltán* 12. o.t. 36 pont; **84–87.** *Balázs Krisztina* 11. o.t., *Mitcsenkov Attila* 12. o.t., *Sándor 027 Attila* 12. o.t., *Sánta János* 11. o.t. 35 pont; **88–89.** *Juhász Gábor* 11. o.t., *Nagy Gábor* 11. o.t. 34 pont; **90–91.** *András Anikó* 12. o.t., *Nieder Szabolcs* 12. o.t. 33 pont; **92–97.** *Buthi Irma* 11. o.t., *Havran Zsolt* 11. o.t., *Nyolczas Viktor* 11. o.t., *Olgyay Margit* 11. o.t., *Turai Péter* 11. o.t., *Völgyi Krisztina* 11. o.t. 32 pont; **98–101.** *Juhász Sándor* 11. o.t., *Martinovic Boris* 11. o.t., *Széles Ildikó* 12. o.t., *Zsédely Dóra* 12. o.t. 31 pont; **102–105.** *Czirják István* 12. o.t., *Kamondi Krisztina* 12. o.t., *Márk Judit* 11. o.t., *Vasas Éva Zsuzsanna* 11. o.t. 30 pont; **106.** *Béla Szilvia* 11. o.t. 29 pont; **107–114.** *Babics Balázs* 12. o.t., *Bóta Gergely* 11. o.t., *Cseke Péter* 11. o.t., *Farkas Viktor* 11. o.t., *Hajdú János* 11. o.t., *Ódor Balázs* 11. o.t., *Szalay Cecília* 12. o.t., *Temesi Tamás* 12. o.t. 28 pont; **115–119.** *Fitos Tamás* 12. o.t., *Gyócsi Péter* 11. o.t., *Korcsmáros Tamás* 11. o.t., *Rakamazi Richárd* 12. o.t., *Szilágyi Örs* 11. o.t. 27 pont; **120–125.** *Bényász László* 11. o.t., *Berki Ádám* 11. o.t., *Czira Edina* 11. o.t., *Görbicz Gergely* 12. o.t., *Kaszás Marietta* 11. o.t., *Németh Zsófia* 12. o.t. 26 pont; **126–128.** *Bessenyei András* 12. o.t., *Fehér Ádám* 12. o.t., *Ratatics Péter* 12. o.t. 25 pont; **129–140.** *Aczél Anna* 11. o.t., *Csirmaz Viktor* 11. o.t., *Fábián Lóránt* 12. o.t., *Feró Dalma* 12. o.t., *Fodor Kinga* 11. o.t., *Hochrein Gábor* 11. o.t., *Papp Katalin* 11. o.t., *Pécsi Péter* 11. o.t., *Petka Szilvia* 11. o.t., *Ranga Annamária* 11. o.t., *Takács András* 11. o.t., *Vörös Anita* 11. o.t. 24 pont; **141–147.** *Antolik László* 11. o.t., *Guta Balázs* 11. o.t., *Izsák Andrea* 11. o.t., *Kismődi Péter* 12. o.t., *Lehoczki Csaba* 11. o.t., *Nagy 701 Mária* 11. o.t., *Pataki Gergely* 12. o.t. 23 pont; **148–153.** *Pszota Zsolt* 11. o.t., *Somlai Henrietta* 12. o.t., *Szabó 131 Edina* 11. o.t., *Szücs István* 11. o.t., *Tóth 834 Éva* 12. o.t., *Weidlich Dávid* 11. o.t. 22 pont.

Kevesebb pontja van 221 versenyzőnek.

Számelmélet az x^2+dy^2 alakú számok körében

III. rész

Általános megoldás

Általánosan fogunk keresni egy szükséges és elégséges feltételt a cikkben vizsgált kérdésre; milyen pozitív egész d-kre igaz, hogy ha két x^2+dy^2 alakú szám hányadosa egész, akkor a hányados is felírható ilyen alakban.[1] Az eddigi bizonyítások kevesebbet használtak fel, mint az általános megoldás, és nyújtottak valamiféle képet arról is, hogy mely számok írhatók fel x^2+dy^2 alakban. Most máshonnan fogjuk a problémát megközelíteni.

Már tudjuk, hogy a d-nek négyzetmentesnek kell lennie. Vizsgáljunk egy tetszőleges négyzetmentes d-t. Legyen az x^2+dy^2 alakú számok halmaza az A halmaz, ekkor azt kell megvizsgálnunk, hogy teljesül-e minden a és x pozitív egész számra, hogy

(8) $\qquad ax\in A \quad$ és $\quad a\in A$-ból következik, hogy $\quad x\in A.$

Nyilván minden négyzetszám eleme A-nak ($a^2=a^2+d\cdot 0^2$), így ha egy d-re az állítás igaz, akkor

(9) $\qquad a^2x\in A$-ból következik, hogy $\quad x\in A$

kell, hogy legyen. Ez azonban nemcsak szükséges, hanem elégséges is, ugyanis mivel két A-beli szám szorzata is A-beli, azért

$$ax\in A \quad \text{és} \quad a\in A\text{-ból következik, hogy} \quad a^2x\in A,$$

így a (8) helyett elég a (9)-et vizsgálni. Tehát azt kell megvizsgálnunk, hogy milyen d-kre lehet az A halmazban négyzetszámmal osztani. Nyilván elég a p^2-tel való osztást vizsgálni.

Definiáljuk a P halmazt a következőképpen: Legyen P azon p prímek halmaza, amelyekre a $-d\equiv x^2 \pmod{p^2}$ kongurenciának nincs megoldása. Vizsgáljuk a P elemeit.

Legyen a P egy tetszőleges eleme p, és vizsgáljunk egy p^2-tel osztható x^2+dy^2 számot. Ha $(y,p)=1$ lenne, akkor lenne olyan k egész szám, amelyre $yk\equiv 1 \pmod{p^2}$. Ekkor a $p^2\mid x^2+dy^2$ miatt

$$p^2\mid (xk)^2+d(yk)^2\equiv (xk)^2+d \pmod{p^2},$$

azaz

$$-d\equiv (xk)^2 \pmod{p^2}$$

[1] A cikk első két részében néhány lehetséges d értéket vizsgáltunk. (KöMaL 2000/9. szám, 513–517. oldal és KöMaL 2001/2. szám 77–82. oldal)

lenne. De tudjuk, hogy $p \in P$, így ez nem lehetséges. Tehát $(y,p) \neq 1$, azaz $p \mid y$. Ekkor a $p^2 \mid x^2+dy^2$ miatt $p^2 \mid x^2$, azaz $p \mid x$. Tehát a p^2-tel osztható x^2+dy^2 számban az x és az y is osztható p-vel, helyükre a p-ed részüket írva az x^2+dy^2 szám p^2-ed részét kapjuk x^2+dy^2 alakban, így valóban a p^2-ed része is eleme A-nak. Tehát a $p \in P$ prímekkel mindig lehet osztani (tetszőleges d esetén).

Most vizsgáljuk a $p \notin P$ prímeket. Bebizonyítjuk, hogy akkor és csak akkor teljesül ezekre a p-kre a (9), ha a p^2 felírható x^2+dy^2 alakba, ahol $y \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Először bebizonyítjuk, hogy ez a feltétel *elégséges*, tehát $p^2=x^2+dy^2$ esetén, ahol $y \not\equiv 0 \pmod{p}$: $p^2 \mid a^2+db^2$-ből következik, hogy $\dfrac{a^2+db^2}{p^2} \in A$. Vizsgáljuk az $\dfrac{a^2+db^2}{p^2}$ számot. Ha $p \mid b$, akkor a fentiekhez hasonló módon $p \mid a$, így valóban $\dfrac{a^2+db^2}{p^2} \in A$. Ha viszont $p \nmid b$, akkor, mivel a d négyzetmentes, azért $p^2 \nmid db^2$, így a $p^2 \mid a^2+db^2$ miatt $p^2 \nmid a^2$, azaz $p \nmid a$. Tehát az $\dfrac{a^2+db^2}{p^2}$ törtet kell vizsgálnunk, ahol $p \nmid a$, $p \nmid b$ és $p^2=x^2+$ $+dy^2$, ahol $p \nmid y$.

Az 1. Tételben x^2+dy^2 alakú prímszámmal osztottunk, most x^2+dy^2 alakú p^2 számmal kell osztanunk. Vizsgáljuk tehát az 1. Tételnél leírt bizonyítást p helyett p^2-re.

A bizonyítás addig működik, hogy $p^2 \mid ay+bx$-et vagy $p^2 \mid ay-bx$-et kell bizonyítani. Az $ay+bx$ és az $ay-bx$ számok összege $2ay$, és tudjuk, hogy $p \nmid a$, $p \nmid y$, így a $p=2$ esetet kivéve biztos, hogy nem osztható mindkét szám p-vel. Ezért elég a $p^2 \mid (ay+bx)(ay-bx)$-et bizonyítani. Ezután az 1. Tételnél leírt bizonyítás alkalmazható. Ha pedig $p=2$, akkor $p^2=4=x^2+dy^2$, ahol $p \nmid y$, így csak $d=3$, $x=y=1$ lehet. Azt már bebizonyítottuk, hogy $d=3$ esetén lehet osztani 4-gyel.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy elégséges feltétel az, hogy minden $p \notin P$-re a p^2 felírható x^2+dy^2 alakba, ahol $y \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Még azt kell bebizonyítani, hogy ez a feltétel *szükséges*, tehát ahhoz, hogy a (9) teljesüljön, szükséges, hogy minden $p \notin P$-re $p^2=x^2+dy^2$ legyen, ahol $y \not\equiv 0 \pmod{p}$. Ezt teljes indukcióval fogjuk bebizonyítani. Először megmutatjuk, hogy a $p=2$ esetben igaz.

Már megmutattuk, hogy a d-nek, illetve $d>3$ esetén a $(d+1)$-nek is négyzetmentesnek kell lennie. Így $d \not\equiv 0 \pmod{4}$, és $d>3$ esetén $d \not\equiv 3 \pmod{4}$. De $d \equiv 1$ vagy $d \equiv 2$ esetén $p=2 \in P$ (mert a -1 és a -2 négyzetes nemmaradék mod 4), így már csak a $d=3$ eset van hátra. Ekkor valóban $p^2=x^2+dy^2$, ahol $y \not\equiv \pmod{2}$, mivel $p^2=4=1^2+3\cdot 1^2$.

Tegyük fel, hogy a p-nél kisebb prímekre már bebizonyítottuk az állítást, és vizsgáljuk p-re. Két lehetőség van aszerint, hogy

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)^2+d<p^2 \qquad \text{vagy} \tag{10}$$

$$(11) \qquad \left(\frac{p-1}{2}\right)^2+d \geq p^2.$$

Mielőtt rátérnénk ennek a két esetnek a vizsgálatára, bizonyítsuk be az alábbi tételt.

4. Tétel. *Ha van egy a^2+db^2 alakú négyzetszámunk, amely osztható p^2-tel, és a p^2-en kívül csak $q^2=x_1^2+dy_2^2$ alakú prímnégyzet osztói vannak, akkor $p^2=x^2+dy^2$, ahol $p\nmid y$.*

Bizonyítás. Nyilván elég azt bizonyítani, hogy az

$$\frac{a^2+db^2}{q^2}=\frac{a^2+db^2}{x_1^2+dy_2^2}$$

tört z^2+dv^2 alakba írható úgy, hogy $p\nmid v$ legyen. Ekkor ugyanis a q^2 osztókkal rendre leoszthatunk, végül a p^2-et fogjuk megkapni x^2+dy^2 alakban, ahol $p\nmid y$.

Az elégségesség bizonyításakor már láttuk, hogy az $\dfrac{a^2+db^2}{x_1^2+dy_1^2}$ tört z^2+dv^2 alakba írható, ahol

$$v=\frac{ay_1\pm bx_1}{x_1^2+dy_1^2}.$$

Ahhoz, hogy $p\nmid v$ legyen, így elég a

$$p\nmid (ay_1+bx_1)(ay_1-bx_1)$$

tulajdonságot megmutatnunk. Valóban,

$$(ay_1+bx_1)(ay_1-bx_1)=(a^2+db^2)y_1^2-(x_1^2+dy_1^2)b^2=(a^2+db^2)y_1^2-q^2b^2,$$

ahol $p\mid a^2+db^2$, $p\nmid b$, és $p\nmid q$ (mert a q prímszám, és $p\neq q$).

Most vizsgáljuk azokat a p prímeket, amelyekre $\left(\dfrac{p-1}{2}\right)^2+d<p^2$ teljesül. Ekkor, mint ahogy azt már sokszor láttuk, van olyan p-vel osztható x^2+dy^2 alakú szám, amelyben $p\nmid y$, és a p-n kívül csak p-nél kisebb prímosztói vannak. Legyen $x^2+dy^2=pk$. Ekkor:

$$p^2k^2=(x^2+dy^2)(x^2+dy^2)=(x^2-dy^2)^2+d(2xy)^2.$$

Legyen tehát $x^2-dy^2=a$ és $2xy=b$, ekkor $p^2k^2=a^2+db^2$, és az a^2+db^2-nek a p^2-en kívül csak p^2-nél kisebb prímnégyzet-osztói vannak, amelyekre teljesül az indukciós feltevésünk. Így a 4. Tétel alapján csak azt kell bebizonyítani, hogy $p\nmid b$, azaz $p\nmid 2xy$.

Valóban, $p\nmid 2$ (mert $p>2$), és azt is tudjuk, hogy $p\nmid y$, így csak a $p\nmid x$-et kell vizsgálnunk. Mivel $p\nmid d$ (ellenkező esetben $p\in P$ lenne) és $p\mid x^2+dy^2$, így a $p\nmid dy^2$ miatt valóban $p\nmid x$ kell, hogy legyen.

Most pedig vizsgáljuk azokat a p prímeket, amelyekre $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2+d\geq p^2$ teljesül. Mivel $p\notin P$, azért létezik olyan x, amelyre $p^2\mid x^2+d$. Ekkor nyilván létezik olyan x, amelyre $|x|=\frac{p^2-1}{2}$, és $p^2\mid x^2+d$. Tehát van egy olyan x^2+dy^2 alakú számunk, amely legfeljebb $\left(\frac{p^2-1}{2}\right)^2+d$, osztható p^2-tel, és $p\nmid y$ (mivel $y=1$). Bebizonyítjuk, hogy

$$\left(\frac{p^2-1}{2}\right)^2+d<p^2d. \tag{12}$$

Tegyük fel, hogy ez nem igaz, tehát $\left(\frac{p^2-1}{2}\right)^2+d\geq p^2d$. Ebből:

$$\left(\frac{p^2-1}{2}\right)^2\geq (p^2-1)d,$$

$$\frac{p^2-1}{4}\geq d.$$

Ugyanakkor tudjuk, hogy teljesül a (11), azaz

$$d\geq p^2-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

Ezekből:

$$\frac{p^2-1}{4}\geq p^2-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

Ebből rendezés után:

$$0\geq\frac{p^2+p}{2},$$

ami nyilván ellentmondás. Tehát valóban teljesül a (12).

Így van egy olyan $x^2+dy^2=x^2+d\cdot 1^2$ alakú számunk, amely osztható p^2-tel, $p\nmid y$, és kisebb p^2d-nél. Mivel $p^2\in A$, ezért a p^2-ed része is A eleme kell legyen. De kisebb p^2d-nél, így a p^2-ed része kisebb d-nél, tehát csak akkor lehet x^2+dy^2 alakú szám, ha négyzetszám.

Tehát van egy olyan $x^2+dy^2=x^2+d\cdot 1^2$ alakú négyzetszámunk, amely osztható p^2-tel, $p\nmid y$ és kisebb p^2d-nél. Ha kisebb p^4-nél is, akkor csak p^2-nél kisebb prímnégyzet-osztói vannak, amelyekre teljesül az indukciós feltevésünk, így ekkor a 4. Tétel alapján készen vagyunk. Ezért elég azt az esetet vizsgálni, amikor az x^2+dy^2 legalább p^4.

Most legyen egy olyan $x^2+dy^2=x^2+d\cdot 1^2$ alakú négyzetszámunk, amely osztható p^2-tel, $p\nmid y$, kisebb p^2d-nél és legalább p^4. Ekkor nyilván $p^4<p^2d$, azaz $p^2<d$. Ezen

kívül $p^2 \mid x^2+d$ esetén $p^2 \mid (p^2-x)^2+d$. Bebizonyítjuk, hogy ez a $(p^2-x)^2+d$ szám is kisebb p^2d-nél.

Tegyük fel, hogy ez nem igaz, azaz

$$(p^2-x)^2+d \ge p^2d.$$

Ebből:

$$\begin{aligned}(p^2-1)^2 &\ge p^2d\\ (p^2-1)^2 &\ge (p^2-1)d\\ p^2-1 &\ge d\\ p^2 &> d,\end{aligned}$$

viszont tudjuk, hogy $p^2<d$. Így valóban a $(p^2-x)^2+d$ szám is kisebb p^2d-nél. Ekkor az x^2+d-hez hasonlóan a $(p^2-x)^2+d$ is négyzetszám.

De a p^2 páratlan, így az x és a p^2-x különböző maradékot ad 2-vel osztva, tehát az x^2 és a $(p^2-x)^2$ közül az egyik 0-t, a másik 1-et ad 4-gyel osztva maradékul. Az x^2+d és a $(p^2-x)^2+d$ is négyzetszám, és egy négyzetszám csak 0-t vagy 1-et adhat 4-gyel osztva maradékul, így csak $d \equiv 0 \pmod 4$ lehet. Azt pedig már beláttuk, hogy a d négyzetmentes kell legyen, így ez nem lehetséges.

Következmények: Bebizonyítottuk, hogy szükséges és elégséges feltétel az, hogy minden $p \notin P$-re $p^2=x^2+dy^2$ legyen, ahol $p \nmid y$. A bizonyításból az is kitűnt, hogy elég azokat a $p \notin P$ prímeket vizsgálni, amelyekre teljesül (11), ha ezekre az állításunk teljesül, akkor teljesül a többi $p \notin P$ prímre is. És ez minden d-re csak véges sok eset.

Vizsgáljuk a (11) egyenlőtlenséget. Átalakítva:

$$d \ge p^2-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2=\frac{3p^2+2p-1}{4}>\frac{p^2}{4}.$$

Így $4d>p^2$. Ugyanakkor $p^2=x^2+dy^2$, így csak $2>y$ lehet, azaz $y=0$ vagy $y=1$. De azt is tudjuk, hogy $p \nmid y$, így csak $y=1$ lehet. Ekkor $p^2=x^2+dy^2=x^2+d$, vagyis a p^2-d négyzetszám.

Összefoglalva: szükséges és elégséges feltétel, hogy minden p prímre, amelyre $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2+d \ge p^2$ és $p \notin P$, a p^2-d egy négyzetszám legyen.

Megjegyzés. Ez egy nagyon erős feltétel; minél nagyobb a d, annál erősebb. A 95 milliónál kisebb d számok, amelyek kielégítik ezt a feltételt:

1, 2, 3, 5, 6, 10, 13, 21, 22, 30, 33, 37, 42, 57, 58, 70, 78, 85, 93, 102, 105, 130, 133, 165, 177, 190, 210, 253, 273, 330, 345, 357, 385, 462, 1365.

Kárpáti Attila számítógépes programja alapján 95 millióig több ilyen szám nincs.

Csörnyei Marianna

Pontok és nézőpontok

– megjegyzések egy Kürschák feladathoz

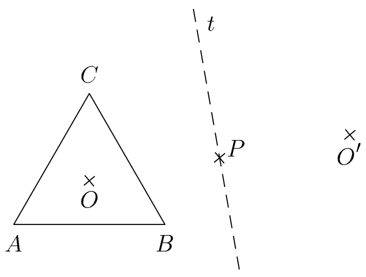
Amikor felpillantottam és megláttam, hogy a Föld felemelkedik e fölé a csupasz és sivár holdi horizont fölé, a Föld volt az egyetlen színes dolog az űrben, és nagyon törékenynek tűnt, nagyon finomnak. Szinte azonnal arra gondoltam, hogy eljöttünk egészen a Holdig, és mégis a legfontosabb dolog, amit látunk, a saját bolygónk, a Föld.

Bill Anders, az Apollo 8 expedíció asztronautája
(National Geographic Channel: Holdraszállás)

A legutóbbi Kürschák verseny második feladata így szólt:

Legyen ABC szabályostól különböző háromszög, P pedig a síknak a háromszög csúcsaitól különböző pontja. Jelöljék A_P, B_P és C_P rendre az AP, BP és CP egyeneseknek az ABC háromszög köré írt körrel vett második metszéspontjait. Mutassuk meg, hogy a síknak pontosan két olyan P és Q pontja van, hogy az $A_PB_PC_P$ és $A_QB_QC_Q$ háromszögek szabályosak, továbbá, hogy a PQ egyenes áthalad az ABC háromszög köré írt kör középpontján.

Kirándulunk egyet a hiperbolikus síkon, hogy meglássuk, ennek a feladatnak a mélyén az alábbi egyszerű tény áll:



1. ábra

Ha adott az ABC szabályos háromszög és az O' pont, akkor van egy olyan középpontos tükrözés is és egy olyan tengelyes tükrözés is, amelynek alkalmazásával az ABC háromszög olyan helyzetbe hozható, hogy középpontja O' legyen. Ebben az esetben a középpontos tükrözés P centrumát az O' ponttal összekötő egyenes merőleges a tengelyes tükrözés t tengelyére (1. ábra).

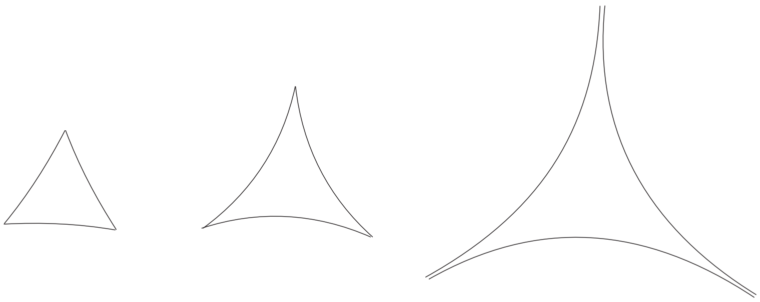
Ennek az állításnak a bizonyítása nagyon könnyű, nem lehetne kitűzni komoly versenyen. Megvan viszont az a tulajdonsága, hogy *abszolút*, azaz igazsága nem függ a párhuzamossági axiómától. Alább kiderül, hogy a Kürschák feladat nem más, mint az utóbbi állítás a hiperbolikus síkon, illetve annak egyik térképén.

Az édesapja könyvéhez írt mellékletben,[1] a *Tér abszolút és igaz tudományában* *Bolyai János* többek között számba vette azokat a tételeket, amelyek a párhuzamossági axiómától függetlenek, a *maradék* axiómákból már következnek. Ugyanakkor megalkotta „új világának”, a párhuzamossági axióma tagadására épülő *hiperbolikus geometriának* az

[1] Latinul: appendix, később ez a szó lett Bolyai János művének közkeletű megnevezése.

elméletét. A hiperbolikus geometriában bármely egyeneshez, bármely rá nem illeszkedő ponton át több párhuzamos is húzható. Kiderült, hogy amennyiben az euklideszi geometria axiómarendszere ellentmondásmentes, annyiban az ő új geometriája is az. Tehát ha az euklideszi geometria létezik – legalábbis a matematikai absztrakció szintjén – akkor a hiperbolikus geometria is.

Az általa, és tőle függetlenül *Gauss* és *Lobacsevszkij* által felfedezett hiperbolikus geometriában sok furcsaság van. Az egyik legalapvetőbb (a párhuzamossági axióma tagadásával ekvivalens), hogy a háromszög szögeinek összege nem 180°, hanem annál kisebb. Az egyenlő oldalú háromszög szögei sem 60°-osak, hanem annál kisebbek. Nem mondható konkrét érték, hogy mekkorák, bármely 60°-nál kisebb α szöghöz található ilyen szögű egyenlő oldalú háromszög. Az $\alpha=0$ határesetben ez az egyenlő oldalú háromszög elfajul, három „elpattanó” (egymást tetszőlegesen megközelítő, de el nem érő) párhuzamos egyenesből áll (*2. ábra*).



2. ábra

Bolyai és Lobacsevszkij eredményeinek ellenére az új geometria létjogosultságát kevesen ismerték el. Kicsit ahhoz volt hasonlatos a helyzet, ahogy a Föld gömb alakja elfogadottá vált. Ezt néhányan már az Ókorban fölfogták, sokakat csak a világ körüli utazások, az ezek nyomán (és korábban!) készült térképek, atlaszok, földgömbök győztek meg. Az 1970-es években aztán, amikor amerikai asztronauták a holdutazások során fényképeket készítettek a Földről, ezek az emberek milliói számára tették érzékelhetővé: egy golyóbison élünk.

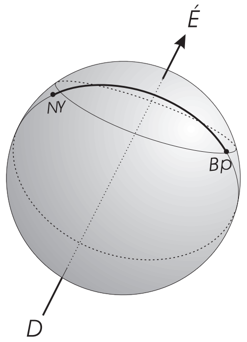
Gauss Bolyaitól és Lobacsevszkijtől függetlenül fedezte fel a hiperbolikus geometriát, de eredményeit nem tette közzé. Sokat foglalkozott a felületek elméletével, és ennek alapján néhányan úgy vélik, szeretett volna egy olyan térbeli felületet találni, amelynek geometriája hiperbolikus. Ez azt jelenti, hogy ha egyenesnek azokat a felületen haladó vonalakat nevezzük, amelyek bármely két pontjukat a legrövidebb – felületi – úton kötik össze, szöget pedig a csúcsa köré rajzolt piciny felületi kör ívével mérünk, akkor e fogalmakra az összes axióma teljesül, kivéve a párhuzamosságit, amelynek hiperbolikus változata lenne érvényes: minden ponton át, minden rá nem illeszkedő egyeneshez *több* azt nem metsző egyenes volna húzható. Gauss nem talált ilyen felületet, [2] és talán úgy

[2] Később *David Hilbert* bizonyította, hogy a térben ilyen felület nincs is. A négy dimenziós euklideszi térben viszont van, és a relativitáselmélet alapját képező Lorentz-féle geometria bizonyos síkmetszetei is hiperbolikusak.

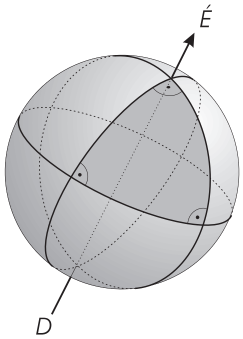
gondolta, hogy a nem megjeleníthető új geometriával még a tudományos közvélemény elé is reménytelen állnia.

A XIX. század második felében azután születtek olyan modellek, amelyek a hiperbolikus geometriát szemléltetik. Nevezhetjük őket a hiperbolikus geometria térképeinek is. A XX. századi fizika mikro- és kozmikus méretű tereiben, a matematika új területein pedig hemzsegnek a nem kézzelfogható, absztrakt, mégis alkalmazott geometriák, melyekhez Bolyai János munkája úttörő módon járult hozzá.

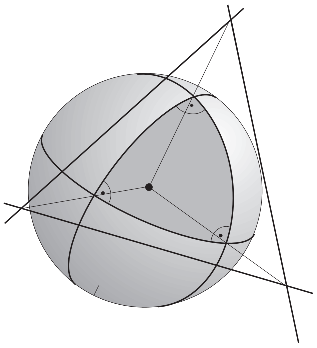
Hogy jobban megértsük, miről is van szó, vessünk újabb pillantást a gömbre. A gömb két pontja között úgy kapjuk a felületen haladó legrövidebb vonalat, ha a két ponton és a gömb középpontján át síkot fektetünk és megrajzoljuk e sík és a gömb metszésvonalának – az úgynevezett *gömbi főkörnek* – a két pont közötti rövidebbik ívét (*3.a) ábra*). A fővárosunkból New Yorkba repülő naiv utazó meglepődve tapasztalja, hogy a nálunk délebbre található amerikai város felé haladva a gép északnyugatnak veszi az irányt, és London, sőt Írország fölött is elrepül. Ezt a látszólagos kitérőt a főkör okozza, amely nem a szélességen, hanem messze fölötte, északra halad, arra a legrövidebb az út.



3.a) ábra



3.b) ábra



3.c) ábra

A gömbről nehéz térképet készíteni, mert bármit próbálunk, valamiképp mindig torzítani fog. Gondoljunk például két egymással 90°-os szöget bezáró hosszúsági kör és az egyenlítő határolta háromszögek egyikére. Ez egy olyan egyenlő oldalú háromszög, amelynek mindegyik szöge 90°-os. A síkban ezt bajos lenne hűen ábrázolni (*3.b) ábra*).

Ha megelégszünk annyival, hogy a gömbi egyenesek, azaz a főkörök térképi megfelelői a sík egyeneseire illeszkedjenek, akkor már készíthetünk elfogadható térképet. Ha a gömb középpontjából a gömb egy részét kivetítjük egy tetszőleges síkra, ilyen térképet kapunk (*3.c) ábra*). Ez a térkép nem ábrázolja az egész gömböt, de ilyen típusú lapokból a teljes gömböt ábrázoló atlaszt állíthatunk össze. Ezt kézbevéve azonban nagyon nehéz eligazodnunk: a térképen leolvasott távolság és szög valóságos (gömbi) távolsággá és szöggé való átszámításához fáradságos módszereket kell kidolgozni.

Készíthetünk olyan térképet is, amely a gömbi szögeket ábrázolja hűen. Ekkor viszont a főkörök képe nem lesz egyenes és továbbra is gondot okoz a térképen kijelölt két pont gömbi távolságának meghatározása, sőt a két pontot összekötő legrövidebb vonal megrajzolása is.

Hiperbolikus geometriával rendelkező felületet nem tudunk úgy a polcon tartani, mint például egy földgömböt. Vannak viszont az említett gömbi térképekhez hasonló tulajdonságú modelljei. A *Cayley–Klein modellben* az egyenesek a 2-dimenziós hiperbolikus világ egyeneseinek felelnek meg, míg a *Poincaré-féle körmodellnek* az a legfőbb erénye, hogy szögtartó. A hiperbolikus sík pontjait mindkét modellben egy körlap belső pontjai ábrázolják. A térképen kijelölt két pont hiperbolikus távolságának és a hiperbolikus szögek[3] kiszámítási módját itt nem közöljük, de az érdeklődő olvasó utánanézhet a részleteknek a cikk végén említett több könyvben is. Ezekben annak bizonyítása is megtalálható, hogy a modellek világa teljesíti mindegyik euklideszi axiómát, csak a párhuzamosságit nem. Alább csak a hiperbolikus egyenesek fogalmára és azok merőlegességének kérdésére térünk ki.

A Cayley–Klein modellben az alapkör húrjainak az alapkör belsejében fekvő részei felelnek meg a hiperbolikus egyeneseknek. A Poincaré-féle körmodellben az alapkörre merőleges köröknek[4] az alapkör belsejébe eső ívei lesznek a hiperbolikus egyenesek (*4. ábra*). Mindkét esetben olyan a hiperbolikus távolság értelmezése, hogy a modell széléhez közeledve egységnyi térképi távolság egyre nagyobb hiperbolikus távolságnak felel meg, a modell határoló körvonala már a „végtelen távolba vesző” pontoknak, az elképzelt hiperbolikus világhoz már nem tartozó pontoknak felel meg.

Cayley és Klein modellje *Poincaré modellje*

4. ábra

A fenti ábrákon látható, hogy a megadott értelmezésben a modell M pontján át több olyan egyenes is van, amely a modell m egyenesét nem metszi, tehát a modellek hiperbolikus világot térképeznek. A nem metsző egyenesek között van két szélső helyzetű, „elpattanó”, amelyek a „végtelenben érik el” az m egyenest.

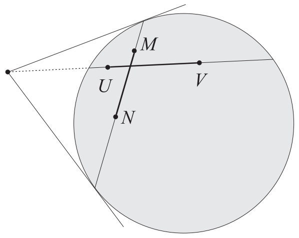
A Poincaré-féle körmodell szögtartó, ezért a merőlegesség „szemmel” leolvasható. Megjegyezzük, hogy az egyenesre való tengelyes tükrözésnek az egyenest reprezentáló körre való inverzió felel meg, ilymódon a Kürschák feladatra a KöMaL előző számában adott első két bizonyítás ezzel a modellel hozható kapcsolatba. Ennek végiggondolását az olvasóra bízzuk és alább a feladatot a Cayley–Klein modell segítségével hozzuk a hiperbolikus geometriával összefüggésbe.

---

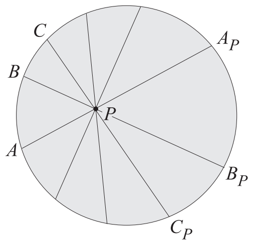
[3] A Poincaré modellben ez nem probléma: a térképen látható szög megegyezik a hiperbolikus szöggel.

[4] Két kör szögén a metszéspontjukban húzott érintőik szögét értjük.

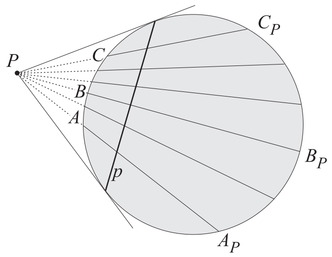
A Cayley–Klein modellben két egyenes akkor merőleges egymásra, ha bármelyikük pólusa[5] illeszkedik a másik meghosszabbítására. Egyszerűbben fogalmazva: az MN, UV egyenesek akkor merőlegesek egymásra, ha az MN euklideszi egyenes és az alapkör metszéspontjában az alapkörhöz húzott érintők metszéspontja (ami esetleg a végtelenben van) illeszkedik az UV euklideszi egyenesre[6] (*5. ábra*). Egy adott egyenesre merőleges egyenesek halmaza – ilyen egyenes végtelen sok van – nem más, mint az egyenes pólusán áthaladó egyenesek serege (illetve azok alapkörbe eső része).



5. ábra



6. ábra



7. ábra

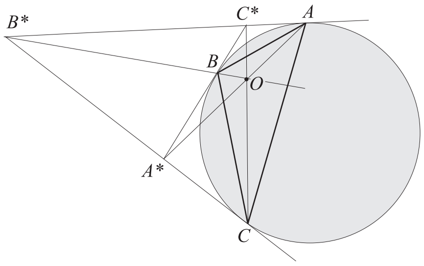
Ezek alapján még nem tudjuk, hogyan kell tükrözni egy pontot a modell egy adott pontjára vagy egy adott egyenesére, de a „végtelen távoli” pontokon nyomon követhetjük a tükrözés hatását. A modell P pontjára való középpontos tükrözésnél ugyanis a P-n áthaladó egyenesek önmagukra képződnek, miközben két „végtelen távoli” pontjuk kicserélődik (*6. ábra*). A p egyenesre való tükrözésnél pedig a p-re merőleges egyenesek képződnek magukra úgy, hogy „végtelen távoli” pontjaik felcserélődnek (*7. ábra*). *Tehát a tükrözések hatása a modell határvonalán épp a Kürschák feladatban leírt transzformáció.* Ha P külső pont, akkor egy tengelyes tükrözésről, ha P belső, akkor egy középpontos tükrözésről, illetve ezeknek a „végtelen távoli” pontokon vizsgált hatásáról van szó.

A feladatban szereplő ABC, $A_PB_PC_P$, $A_QB_QC_Q$ euklideszi háromszögek a modellben „aszimptotikus” háromszögeket reprezentálnak, olyan egyeneshármasokat, amelyek bármely két tagja elpattanó. Az ilyen háromszögek egymással mind egybevágóak és mind szabályosak is: van három szimmetriatengelyük, amelyek egy pontban, az aszimptotikus háromszög középpontjában metszik egymást. Ez Bolyai módszerével, absztraktan, csak az axiómákat használva is igazolható, de most csak modellünkben, az euklideszi geometria segítségével világítunk rá.

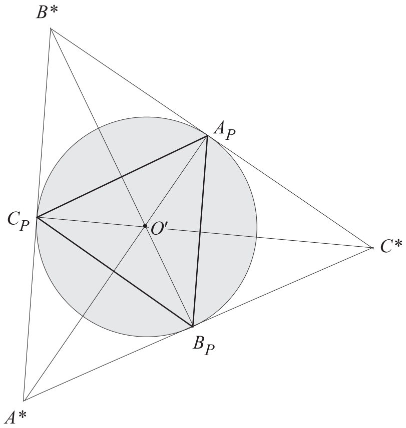
Az aszimptotikus háromszögnek szimmetriatengelye bármelyik végtelen távoli csúcsából a szemköztes oldalra állított merőleges egyenes. Az erre vonatkozó tengelyes tükrözés ugyanis az adott csúcsot „helyben hagyja”, a másik kettőt kicseréli. Ilymódon a háromszög középpontjának létezését az euklideszi geometria egy nevezetes tétele mondja ki: az $A^*B^*C^*$ háromszög beírt, illetve hozzáírt körének A, B, C érintési pontjait

[5] Lásd pl. *Kiss György:* A körre vonatkozó polaritás, KöMaL, 1998/8. szám, 450. o.

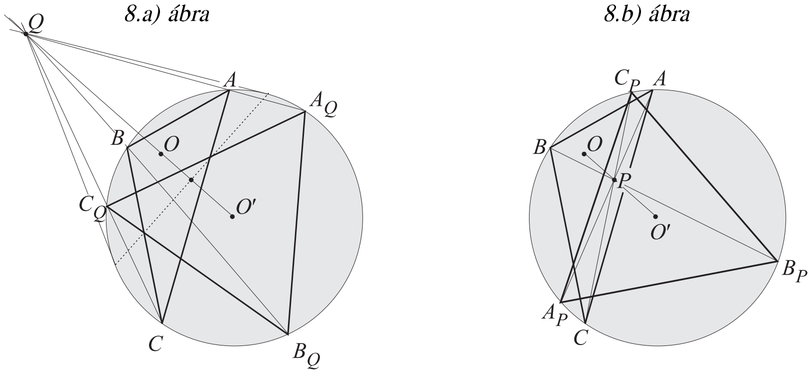
[6] Nem nyilvánvaló matematikai összefüggés, hogy ez a kapcsolat szimmetrikus: merőlegesség esetén az UV euklideszi egyenes és az alapkör metszéspontjában az alapkörhöz húzott érintők metszéspontja az MN egyenesen lesz.



8.a) ábra



8.b) ábra



9. ábra

a csúcsokkal összekötő AA^*, BB^*, CC^* egyenesek egy ponton mennek át[7] (*8.a), b) ábrák*).

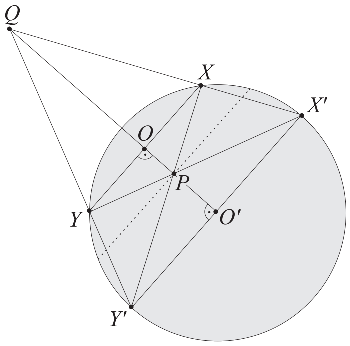
Ebből az is azonnal látható, hogy az ABC aszimptotikus háromszög akkor látszik szabályos euklideszi háromszögnek, ha hiperbolikus középpontja a modellkör középpontja. Tehát a Kürschák feladat a Cayley–Klein féle hiperbolikus térképen azt jelenti, hogy az ABC (aszimptotikus) szabályos háromszöget középpontos tükrözéssel és tengelyes tükrözéssel is áttranszformálhatjuk úgy, hogy szimmetriaközéppontja a modellkör középpontjába kerüljön.

A tükrözési középpontnak természetesen az ABC szimmetriaközéppontját a modell középpontjával összekötő szakaszra – nevezetesen annak hiperbolikus felezőpontjára – kell esnie. A tükrözési tengelynek pedig hiperbolikus értelemben merőlegesnek kell lennie erre az egyenesre, tehát pólusának rá kell esnie (*9. ábra*). Készen is vagyunk: hiperbolikus terepgyakorlatunkon rátaláltunk a Kürschák feladat „természetes élőhelyére”.

A P és Q pontokat a következő módon szerkeszthetjük meg: Az OO' szakasz végpontjaiban állitott euklideszi (és egyben hiperbolikus) merőlegessel megrajzoljuk az $XYX'Y'$ húrtrapézt. Az $X'Y$ és XY', illetve az XX' és YY' egyenesek metszéspontja lesz P, illetve Q (*10. ábra*).

[7] Ez a tétel a 3. bizonyításban is említett Pascal tétel egy speciális esetének is tekinthető.

Manapság, ha az embernek kedve támad hiperbolikus űrutazásra, azt is megteheti. A minnesotai egyetem Geometria Központjának fantasztikus filmjét, a „Not Knot”-ot nézve a dodekaéderekkel kiparkettázott hiperbolikus térben repülhetünk miközben a szokatlan geometria mellett a csomóelmélettel is ismerkedhetünk. Az íróasztal mellett a megértés belső útjára invitálnak *Reiman István*, valamint *Kálmán Attila* tanár urak könyvei, amelyek segítségével alaposabban megismerkedhetünk a hiperbolikus síkkal és a Cayley–Klein modellel is. *I. M. Jaglom* könyvében a hiperbolikus geometriát a relativitáselmélettel hozza kapcsolatban, míg *Dávid Lajos* a Bolyaiak történetével ismerkedtet meg. De a leghitelesebb forrás maga Bolyai János, akinek alapvető művét *Kárteszi Ferenc* látta el jegyzetekkel, és tette a jelenkor olvasójának számára is hozzáférhetővé. *David Hilbert* a téma másik mestere, *S. Cohn–Vossennel* közösen írt munkájában szemléletes bevezetőt kapunk többek között a felületek elméletébe, a különböző geometriákba és a Poincaré-féle modellbe is. *Lénárt István* különös játékkal ajándékozta meg a világot: rajzgömbjével mindenki maga fedezheti fel a gömb geometriáját.



10. ábra

Ajánlott olvasmányok és webhelyek

Bolyai János: Appendix (A tér tudomány) Kárteszi Ferenc gondozásában, Akadémia Kiadó, Budapest, 1973

Dávid Lajos: A két Bolyai élete és munkássága, Gondolat, Budapest, 1970

Hilbert D., Cohn-Vossen S.: Szemléletes geometria, Gondolat, 1982

Jaglom I. M.: Galilei relativitási elve és egy nemeuklideszi geometria, Gondolat, Budapest, 1985

Kálmán Attila: Nemeuklideszi geometriák elemei, Ifjú matematikusok könyvtára 1., Tankönyvkiadó, Budapest, 1989

Lénárt István: Nem-euklideszi kalandok a rajzgömbön, Múzsák Kiadó Kft. Érdeklődés a gömbről: h12572len@ella.hu

Reiman István: Geometria és határterületei, Szalay Kiadó, 2000

`http://www.geom.umn.edu/graphics/pix/Video_Productions/Not_Knot/`
`http://www.csc.fi/math_topics/Movies/HG.html`
`http://mathworld.wolfram.com/PoincareHyperbolicDisk.html`
`http://www.geom.umn.edu/docs/forum/hype/model.html`

Hiperbolikus geometriai szerkesztőprogramok:
`http://mcs.open.ac.uk/tcl2/nonE/nonE.html`
`http://math.rice.edu/ joel/NonEuclid/`
`http://www.geom.umn.edu/docs/mpeg_play.html`

A szerző hálával tartozik *Surányi Lászlónak* egy előadásáért és a hiperbolikus geometriával kapcsolatos diszkussziójáért.

Hraskó András

Feladatok felvételi előkészítő szakkörre III.

Firbáss Oszkár igazgató úr (Szeged, Baross Gábor Gimnázium) emlékére

1. Igazolja, hogy minden háromszögben

$$16T^2 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2,$$

ahol a, b, c a háromszög oldalai, T pedig a háromszög területe.

Hogyan kaphatjuk ebből az állításból a Heron-képletet? ($T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, ahol $2s = a + b + c$.)

2. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}$$

egyenletet!

3. Igazolja a következő azonosságot:

$$\log_a x \cdot \log_b x + \log_b x \cdot \log_c x + \log_c x \cdot \log_a x = \log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x \cdot \log_x abc.$$

(a, b, c és x 1-től különböző pozitív valós számok.)

4. Igazolja, hogy minden valós x-re léteznek azok a háromszögek, amelyek oldalai

$$a = \sqrt{x^2 - x + 1}, \qquad b = \sqrt{x^2 + x + 1}, \qquad c = \sqrt{4x^2 + 3}.$$

Igazolja, hogy minden ilyen háromszög területe egyenlő, és a terület független x-től. (Felhasználhatja az 1. feladat állítását.)

Rábai Imre

Megoldásvázlatok, eredmények a III. mérőlap (2001/2. sz.) feladataihoz

1. Legyen a C vetülete az AB *egyenesen* T. A szerkesztés vizsgálata vagy az *előjeles* szakasszal való számolás is mutatja, hogy két megfelelő háromszög létezik. Mivel

$$BT^2 = 5^2 - 4^2 = 3^2 \qquad \text{és} \qquad AT^2 = 5{,}8^2 - 4^2 = 4{,}2^2,$$

azért $AB = 4{,}2 + 3 = 7{,}2$ egység vagy $AB = 4{,}2 - 3 = 1{,}2$ egység. A háromszög területe így $t_1 = 14{,}4$ vagy $t_2 = 2{,}4$ területegység.

2. Vonjuk ki az első egyenletből a másodikat, majd rendezzük az így kapott egyenletet 0-ra és alakítsunk szorzattá:

$$x^2 - y^2 = 2(y - x), \qquad (x - y)(x + y + 2) = 0.$$

Ha $x=y$, akkor $x^2-2x-8=0$, az egyenletrendszer megoldásai ekkor $x_1=4$, $y_1=4$ vagy $x_2=-2$, $y_2=-2$.

Ha $x+y+2=0$, akkor $x^2+2x-4=0$, a megoldások: $x_3=-1+\sqrt{5}$, $y_3=-1-\sqrt{5}$ vagy $x_4=-1-\sqrt{5}$, $y_4=-1+\sqrt{5}$.

3. Az A ponton át a CD szögfelezővel párhuzamosan húzott egyenes a BC egyenest olyan E pontban metszi, amelyre $CE=AC=5$ (Miért?). Az AEB és a CDB háromszögek hasonlóságából

$$\frac{EA}{\frac{60\sqrt{2}}{17}}=\frac{17}{12}, \qquad EA=5\sqrt{2}.$$

Az ECA háromszög tehát derékszögű, így az ABC háromszög C csúcsánál fekvő szöge 90°.

$$AB^2=5^2+12^2=13^2, \qquad AB=13 \text{ egység.}$$

4. *a)* $4x-x^2\geq 0$ kell, hogy teljesüljön, azaz $0\leq x\leq 4$. Ha $6-2x<0$, azaz $x>3$, akkor a $3<x\leq 4$ számok megoldások. Ha $6-2x\geq 0$, $x\leq 3$, akkor a négyzetre emeléssel kapott

$$4x-x^2>36-24x+4x^2, \qquad 5x^2-28x+36<0, \qquad 2<x<3{,}6$$

egyenlőtlenség a megengedett halmazon az eredetivel ekvivalens, így a $2<x\leq 3$ számok is megoldások. Az egyenlőtlenség megoldása tehát $2<x\leq 4$.

b) Az $x^2-63>0$ és a $\log_{18}(x^2-63)>0$ egyenlőtlenségeknek kell teljesülni. Az $x\mapsto \log_{18}x$ függvény szigorúan monoton növekedő, az $x\mapsto \log_{\frac{3}{4}}x$ szigorúan monoton csökkenő, ezért

$$0<\log_{18}(x^2-63)\leq 1, \qquad 1<x^2-63\leq 18,$$

azaz $64<x^2\leq 81$, $8<|x|\leq 9$.

Az egyenlőtlenség megoldásai: $-9\leq x<-8$ vagy $8<x\leq 9$.

5. A feladatot vektorok segítségével oldjuk meg. (Más módon is megoldható. Hogyan?) A feltételeknek pontosan egy téglalap felel meg. Legyen az AB oldal felezőpontja E, a DC felezőpontja F. Ekkor $\overrightarrow{FE}=(9;-3)$. Mivel az $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{FC}$ vektorok merőlegesek az $\overrightarrow{FE}$ vektorra, és

$$|\overrightarrow{EA}|=|\overrightarrow{EB}|=|\overrightarrow{FD}|=|\overrightarrow{FC}|=\frac{1}{6}|\overrightarrow{FE}|, \qquad \text{azért}$$

$$\overrightarrow{EA}=\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)=\overrightarrow{FD} \qquad \text{és} \qquad \overrightarrow{EB}=\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)=\overrightarrow{FC}.$$

Jelölje O az origót

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EA}=\left(\frac{7}{2};-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)=(4;0), \qquad A(4;0);$$

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EB}=\left(\frac{7}{2};-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)=(3;-3), \qquad B(3;-3);$$

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=(4;0)+(-9;3)=(-5;3), \qquad D(-5;3);$$

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=(3;-3)+(-9;3)=(-6;0), \qquad C(-6;0).$$

A téglalap csúcspontjai: $A(4;0)$, $B(3;-3)$, $C(-6;0)$, $D(-5;3)$.

6. A feltételi egyenletből

$$a(b-1)=2b+33, \qquad a=\frac{2b-2+35}{b-1}, \qquad (b\neq 1),$$

$a=2+\dfrac{35}{b-1}$, így $b-1$ osztója 35-nek, tehát $b=2$, $a=37$ vagy $b=6$, $a=9$ vagy $b=8$, $a=7$ vagy $b=36$, $a=3$.

Mivel a és b osztható 3-mal, valamint a háromszög-egyenlőtlenségnek is teljesülnie kell, azért a következő négy megoldást kapjuk: $a=9$, $b=6$, $c=6$ vagy $a=9$, $b=6$, $c=9$ vagy $a=9$, $b=6$, $c=12$ vagy $a=3$, $b=36$, $c=36$.

7. A feltételekből $p^2-4q\geq 0$, $x_1+x_2=p$, $x_1x_2=q$, $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=p^2-2q$, tehát $p^2-2q=4$, azaz $2p-2q=2p-(p^2-4)=5-(p-1)^2$ és $p^2-2(p^2-4)\geq 0$, $p^2\leq 8$, $-2\sqrt{2}\leq p\leq 2\sqrt{2}$.

Az $5-(p-1)^2$ értékkészletét keressük, ha $-2\sqrt{2}\leq p\leq 2\sqrt{2}$.

Ekkor

$$-1-2\sqrt{2}\leq p-1\leq -1+2\sqrt{2},$$
$$0\leq (p-1)^2\leq (-1-2\sqrt{2})^2,$$
$$-(9+4\sqrt{2})\leq -(p-1)^2\leq 0,$$
$$5-(9+4\sqrt{2})\leq 5-(p-1)^2\leq 5,$$

ezért

$$-4-4\sqrt{2}\leq 2p-2q\leq 5.$$

8. Az egyenletnek $x=2p$ és $x=-2p$ nem lehet megoldása. Legyen tehát $x\neq 2p$, $x\neq -2p$. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát (x^2-2p^2)-tel, majd rendezzünk. Ekkor

$$(5p+3)x=14p^2.$$

Ha $5p+3=0$, $p=-\dfrac{3}{5}$, akkor az egyenletnek nincs megoldása. Ha $p\neq -\dfrac{3}{5}$, akkor $x_0=\dfrac{14p^2}{5p+3}$ a megoldás, de $x_0\neq 2p$ és $x_0\neq -2p$. $\dfrac{14p^2}{5p+3}\neq 2p$, $p\neq 0$, $p\neq\dfrac{3}{2}$ és $\dfrac{14p^2}{5p+3}=-2p$, $p\neq 0$, $p\neq -\dfrac{1}{4}$.

Összefoglalva: ha $p\neq -\dfrac{3}{5}$, $p\neq 0$, $p\neq\dfrac{3}{2}$, $p\neq -\dfrac{1}{4}$, akkor az egyenletnek egyetlen megoldása van: $x_0=\dfrac{14p^2}{5p+3}$, ha $p=-\dfrac{3}{5}$ vagy $p=0$ vagy $p=\dfrac{3}{2}$ vagy $p=-\dfrac{1}{4}$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.

Rábai Imre

Matematika hírek Brassóból

Az OCTOGON Matematikai Magazin nyolcadik évfolyama zárult le a 2000. évben. Az angol nyelven megjelenő szaklap évente két számmal jelentkezik. A neves matematikusokból álló szerkesztőbizottság a legutóbb megjelent számban 69(!) cikket közöl főképpen a számelmélet, a kombinatorika és az analízis témaköréből. A cikkek között szerepel néhány, a lapban korábban felvetett nyitott probléma megoldása. Az olvasó számos további feladaton gondolkodhat és teheti próbára tudását.

A folyóirat iránt érdeklődők írjanak a főszerkesztő címére:
Bencze Mihály, Str. Harmanului 6. RO-2212 Sacele, Jud. Brasov, Romania.

❄

A brassói Áprily Lajos Középiskola lelkes diákjai és erdélyi tanárok alkotják a tavaly indult „Erdélyi Matematikai Lapok” szerkesztőbizottságát. A kis füzetekben matematikatörténeti cikkek, diákírások és 5–10. osztályosoknak évfolyamonként külön beküldhető feladatok találhatók (Pár éve a miskolci Földes Gimnázium diákjai készítettek hasonló matematika újságot.)

Dr. Zsidó László matematikus szavait idézve a lapból: Egy ilyen kihívás „jó alkalom arra, hogy a diákok ne csak olvasóként és feladatmegoldóként éljék át a matematikát, hanem szerkesztőként és szerzőként is.”

Matematika gyakorlatok megoldása

C. 592. *Mennyi az ötjegyű palindrom számok átlaga? (Egy egész szám palindrom, ha visszafelé olvasva önmagát kapjuk.)*

Megoldás. Egy ötjegyű palindrom szám $abcba$ alakú, ahol $a\neq 0$. Az első számjegy kilencféle lehet, s ez megegyezik az utolsó számjeggyel. A második és az azzal megegyező negyedik számjegy tízféle. A középső számjegy ugyancsak tízféle lehet. Összesen tehát $9\cdot 10\cdot 10=900$ ötjegyű palindrom szám van. Az egyes helyeken megengedett számjegyek mindegyike ugyanannyiszor áll azon a helyen, az átlag meghatározásakor ezért számolhatunk úgy, hogy mindegyik helyiértéken az ott előforduló számjegyek átlaga áll.

A tízezresek és egyesen helyén előforduló számjegyek az 1, 2, 3, …, 9; átlaguk $\dfrac{1+2+\ldots+9}{9}=5$, míg a tovabbi három helyiértéken álló számjegyek átlaga $\dfrac{0+1+\ldots+9}{10}=4{,}5$.

Az ötjegyű palindrom számok átlaga így

$$5\cdot 10^4+4{,}5\cdot 10^3+4{,}5\cdot 10^2+4{,}5\cdot 10+5=55\ 000.$$

826 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 359, 4 pontot 90, 3 pontot 227, 2 pontot 87, 1 pontot 36, 0 pontot 20 beküldő. Nem versenyszerű 7 dolgozat.

C. 593. *Péter a bélyeggyűjteményéből az* 1, 2, 3, ..., 37 *forintos bélyegek mindegyikéből kivett egy-egy darabot. Szeretné ezeket úgy csoportosítani, hogy mindegyik csoportban ugyanannyi legyen a bélyegek névértékének összege. Hányféleképpen teheti ezt meg?*

Megoldás. Az összes bélyeg névértékének összege $S=\dfrac{37\cdot(1+37)}{2}=19\cdot 37=703.$

Ez az összeg két prímszám szorzata, ami azt jelenti, hogy Péter rakhatja az összes bélyeget 1 csoportba, s ekkor a névértékek összege 703. 703 csoportba nyilván nem lehet a 37 darab bélyeget rakni, és 37 csoportba sem, a csupa különböző névérték miatt.

A másik lehetőség, hogy 19 csoportba rakja a bélyegeket úgy, hogy mindegyik csoportban 37 legyen a névértékek összege. Ennek során a 37 forintos bélyeg csak egymagában állhat, a 36-os csak az 1-gyel egészíthető ki 37-et adó összeggé. Ezután a 35 már csak a fennmaradó legkisebbel, a 2 forintossal kerülhet egy (kéttagú) csoportba, ezért a 34-nek már csak a 3 jut, és így tovább. Tehát az egyetlen valódi csoportosítás:

$$\{37\},\quad \{36,1\},\quad \{35,2\},\quad \{34,3\},\quad \ldots,\quad \{19,18\}.$$

Összesen így kétféleképpen végezhető el a kívánt csoportosítás.

787 dolgozat érkezett. 5 pontos 215, 4 pontos 271, 3 pontos 175, 2 pontos 57, 1 pontos 50, 0 pontos 13, nem versenyszerű 6.

Matematika feladatok megoldása

B. 3382. *Bizonyítsuk be, hogy ha* 17 *különböző pozitív prímszám négyzetének összege négyzetszám, akkor közülük a két legnagyobb négyzetének a különbsége osztható a legkisebbel.*

(*3 pont*) Javasolta: *Gyurcsek András,* Veszprém

Megoldás. A feladat szeptemberben közölt szövegéből véletlenül kimaradt, hogy a 17 pozitív prímszám mind különböző legyen. Ha ezt nem tesszük fel, akkor nem igaz az állítás. A most következő vizsgálódásból kiderül, milyen esetben igaz, és mikor nem, hogy ha 17 pozitív prímszám négyzetének összege négyzetszám, akkor a két legnagyobb négyzetének különbsége osztható a legkisebbel.

Ismeretes – és könnyen ellenőrizhető – az alábbi állítás.

($*$) *A* 3*-mal nem osztható számok négyzete* 3*-mal osztva* 1*-et ad maradékul.*

Így, ha az adott prímek között nincsen 3-mal osztható – azaz nincs ott maga a 3 –, akkor 17 darab 3-mal 1 maradékot adó szám összegeként nem kaphatunk négyzetszámot.

Számaink között tehát ott van a 3, és így e prímek legkisebbike a 2 vagy a 3. A feladat állítása most már azon múlik, hogy a két legnagyobb prím négyzetének a különbsége osztható-e 2-vel, illetve 3-mal.

Az előbbi csak akkor nem teljesül, ha a két legnagyobb prím egyike páros – azaz 2 –, a másik pedig páratlan. Láttuk, hogy a 17 prím között szerepel a 3 is, így az állítás csak abban az esetben nem teljesül, ha a 17 szám közül 16 darab 2-vel egyenlő, a 17-edik pedig 3. E számok négyzetösszege, $16\cdot 4+9=73$ viszont nem négyzetszám, így ekkor a feltétel nem teljesül. A feladat állítása tehát minden további megszorítás nélkül igaz, ha az adott prímek legkisebbike a 2.

Hasonló jellegű feltételt kapunk abban az esetben is, ha a legkisebb előforduló prím a 3. A $(*)$ állítás miatt két szám négyzetének a különbsége akkor nem osztható 3-mal, ha két szám közül pontosan az egyik osztható 3-mal. Ez azt jelenti, hogy amennyiben a legkisebb prím a 3, akkor csak azt az esetet kell megvizsgálnunk, amikor a két legnagyobb prím egyike szintén 3-mal egyenlő; így persze a további 14 értéke is 3.

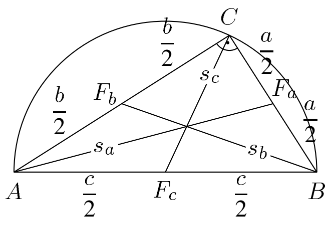
Ekkor $p_1=p_2=\ldots=p_{16}=3<p_{17}$. A feltétel most azt jelenti, hogy $16\cdot 3^2+p_{17}^2=$ $=12^2+p_{17}^2=m^2$ valamilyen pozitív m egészre. Rendezés után $p_{17}^2=m^2-12^2=$ $=(m-12)\cdot(m+12)$ adódik, és itt a tényezők nyilván pozitívak. Egy prímszám négyzete csak úgy írható két különböző pozitív szám szorzataként, ha a tényezők közül a kisebbik értéke 1. (A nagyobbik természetesen p_{17}^2.) Ez pedig lehetséges, hiszen ha $m=13$, akkor valóban egy prímszám, az 5 négyzetét kapjuk. A talált – és a fentiek szerint az egyetlen – ellenpélda: $p_1=p_2=\ldots=p_{16}=3$ és $p_{17}=5$, e tizenhét prímszám négyzetösszege 144, és a két legnagyobb négyzetének különbsége, 16, nem osztható 3-mal, a legkisebbik előforduló prímszámmal.

A feladat állítása minden olyan kiegészítő feltétel esetén igaz lesz, amelyik a talált ellenpéldát kizárja. Ilyen feltétel nyilván sok adható, egy viszonylag természetesen hangzó megszorítás, ha föltesszük, hogy a 17 prím között nincsenek egyenlők.

354 dolgozat érkezett. 3 pontos 293, 2 pontos 22, 1 pontos 26, 0 pontos 11, nem versenyszerű 2.

B. 3383. *Derékszögű háromszögben s_a és s_b a befogókhoz, s_c pedig az átfogóhoz tartozó súlyvonal. Határozzuk meg az $\dfrac{s_a+s_b}{s_c}$ kifejezés maximumát.*

(*3 pont*) Javasolta: *Besenyei Ádám,* Tatabánya



Megoldás. Az *ábra* jelölései alapján az ABC derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele szerint $c^2=a^2+b^2$. Alkalmazzuk Pitagorasz tételét az AF_aC és a BF_BC derékszögű háromszögekre:

$$s_a^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2 \qquad \text{és} \qquad s_b^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+a^2.$$

Thalész tétele miatt $s_c = \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}$, így

$$\frac{s_a+s_b}{s_c} = \frac{\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+a^2}}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}} = \sqrt{\frac{a^2+4b^2}{a^2+b^2}} + \sqrt{\frac{4a^2+b^2}{a^2+b^2}} \le 2\cdot\sqrt{\frac{\frac{a^2+4b^2}{a^2+b^2}+\frac{4a^2+b^2}{a^2+b^2}}{2}},$$

alkalmazva a számtani és a négyzetes közép közötti összefüggést a pozitív $\sqrt{\frac{a^2+4b^2}{a^2+b^2}}$ és $\sqrt{\frac{4a^2+b^2}{a^2+b^2}}$ számokra. Oszthatunk $a^2+b^2>0$-val, így

$$\frac{s_a+s_b}{s_c} \le 2\cdot\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{10}.$$

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $a^2+4b^2=4a^2+b^2$, azaz esetünkben, ha a derékszögű háromszög egyenlő szárú, $a=b$. Tehát a kifejezés maximuma $\sqrt{10}$.

Varga Noémi (Budapest, Szent István Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzés. Gyakori hibák:

1. Az alkalmazott tételeket többen a megoldás leírásakor még csak meg sem említették.
2. Néhányan nem a maximumot, csak a maximum helyét adták meg.
3. Akik a szélsőértékfeladatot differenciálszámítással akarták megoldani, sokszor csak azt állapították meg, hogy a kifejezés (első) deriváltja 0, ez azonban még nem biztosítja, hogy ezen a helyen szélsőérték van!

407 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 326, 2 pontot 92, 1 pontot 61, 0 pontot 25 versenyző. Nem versenyszerű 3 dolgozat.

B. 3384. *Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, $c>0$, akkor:*

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ac+a^2} \ge \frac{a+b+c}{3}.$$

(*3 pont*) Javasolta: *Ábrány Miklós*, Beregszász

Megoldás. Tekintsük a következő azonosságot:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} = a - \frac{a^2b+b^2a}{a^2+ab+b^2} = a - \frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}.$$

$\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} \le \frac{a+b}{3}$ mindig fennáll, mivel a, $b>0$ és $a^2+ab+b^2 \ge 3ab$, hiszen

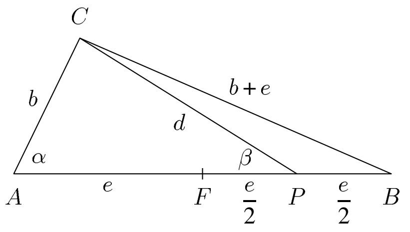
$$(a^2+ab+b^2)-3ab = a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2 \ge 0.$$

Tehát a betűk ciklikus cseréjével:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ac+a^2}=$$
$$=a+b+c-\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}-\frac{bc(b+c)}{b^2+bc+c^2}-\frac{ac(a+c)}{c^2+ac+a^2}\geq$$
$$\geq a+b+c-\frac{a+b}{3}-\frac{b+c}{3}-\frac{a+c}{3}=\frac{a+b+c}{3}.$$

109 dolgozat érkezett, 3 pontos 22, 2 pontos 17, 1 pontos 36, 0 pontos 33. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

B. 3385. *Az ABC háromszögben $BC=AC+\frac{1}{2}AB$, P az AB oldal B-hez közelebb eső negyedelőpontja. Bizonyítsuk be, hogy $PAC\sphericalangle=2CPA\sphericalangle$.*
(*4 pont*)



1. ábra

Megoldás. Legyen $AC=b$, $CP=d$, $\frac{1}{2}AB=e$, ekkor $BC=b+e$, legyen továbbbá $PAC\sphericalangle=\alpha$ és $CPA\sphericalangle=\beta$ (*1. ábra*). Be kell látnunk, hogy $\alpha=2\beta$.

Mivel $0^\circ<\alpha,\beta<180^\circ$ és a koszinuszfüggvény 0 és 180° között monoton csökkenő, így az eredetivel ekvivalens a $\cos\alpha=\cos 2\beta=2\cos^2\beta-1$ egyenlőség. Ezt fogjuk igazolni.

Írjuk fel a koszinusztételt az ABC háromszögben az α szögre, majd az ACP háromszögben az α, illetve β szögekre:

$$(1)\qquad (b+e)^2=b^2+(2e^2)-4be\cdot\cos\alpha$$

$$(2)\qquad d^2=b^2+\left(\frac{3}{2}e\right)^2-3be\cdot\cos\alpha$$

$$(3)\qquad b^2=d^2+\left(\frac{3}{2}e\right)^2-3de\cdot\cos\alpha$$

Fejezzük ki (1)-ből $\cos\alpha$-t: $\cos\alpha=\dfrac{3e-2b}{4b}$; helyettesítsük be (2)-be:

$$d^2=b^2+\frac{9}{4}e^2-3e\frac{3e-2b}{4}=b^2+\frac{3}{2}be,$$

ezt helyettesítsük (3)-ba, és fejezzük ki $\cos\beta$-t:

$$\cos\beta=\frac{b^2+\frac{3}{2}be+\frac{9}{4}e^2-b^2}{3de}=\frac{2b+3e}{4d}.$$

Lássuk be, hogy $\cos\alpha = 2cos^2\beta - 1$, azaz

$$\frac{3e-2b}{4b} = 2\left(\frac{2b+3e}{4d}\right)^2 - 1.$$

Mindkét oldalhoz 1-et hozzáadva:

$$\frac{3e+2b}{4b} = 2\frac{(2b+3e)^2}{8d^2} = \frac{(2b+3e)^2}{4(2b^2+3be)},$$

ami valóban azonosság.

Béky Bence (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.)

Megjegyzések. 1. A beküldők többsége hasonló módon, általában bonyolultabb számolással oldotta meg a feladatot. Azonban ha valaki szinusztételt használt, akkor önmagában nem volt elég a $\sin\alpha = \sin 2\beta$ egyenlőséget belátni, hiszen a $(0;\pi)$ intervallumon a szinuszfüggvény nem kölcsönösen egyértelmű.

2. Lényegesen egyszerűbb a megoldás, ha abból kiindulva, hogy $BC = b+e$, rajzolunk C körül egy b sugarú kört. Ha ez a kör az AB-t D-ben, CB-t pedig E-ben metszi, akkor a *2. ábra* jelöléseivel $CA = CD = CE = b$, $BE = e$.

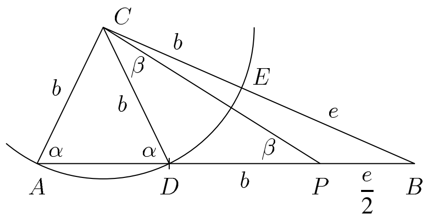
Írjuk fel a B pontnak a körre vonatkozó hatványát kétféleképpen:

$$BE(BE+2CE) = BD\cdot BA,$$

azaz

$$e(e+2b) = BD\cdot 2e,$$

ahonnan $BD = b + \frac{e}{2}$.



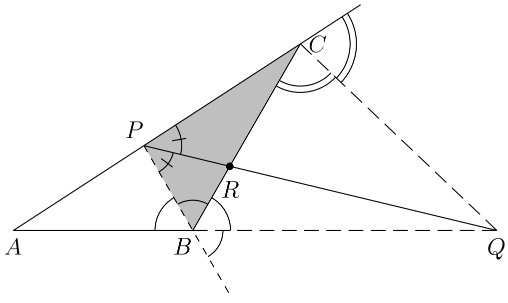
2. ábra

Mivel $PB = \frac{e}{2}$, így $DP = DB - PB = b$, tehát a DPC háromszög egyenlő szárú, $DCP\sphericalangle = \beta$. E háromszög D csúcsánál $CDA\sphericalangle = \alpha$ külső szög, így valóban $\alpha = 2\beta$.

127 dolgozat érkezett. 4 pontos 110, 3 pontos 7, 2 pontos 4, 1 pontos 4, 0 pontos 1, nem versenyszerű 1.

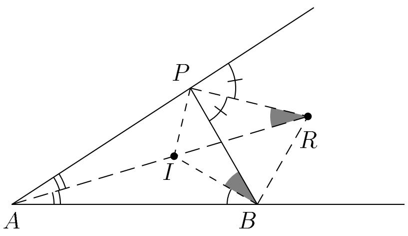
B. 3388. *Az ABC háromszög B csúcsánál* $120°$*-os szög van. Ennek szögfelezője P-ben metszi az AC oldalt. A C csúcsból induló külső szögfelező Q-ban metszi az AB oldal egyenesét, a PQ szakasz pedig R-ben metszi a BC oldalt. Mekkora a PRA szög?*
(*5 pont*) Javasolta: *Katz Sándor,* Bonyhád

Megoldás. A feltételből következik, hogy a B csúcsnál megjelölt szögek egyenlők, nagyságuk $60°$ (*1. ábra*). A BQ egyenes tehát felezi a BCP háromszög B-beli külső szögét. A Q pont így két külső szögfelező metszéspontjaként a BCP háromszög BC oldalát kívülről érintő hozzáírt körének a középpontja, ezért a PQ egyenes felezi a BPC szöget.



1. ábra

Ugyanez a PQ egyenes az ABP háromszögben külső szögfelező, a B-nél létrejövő 60°-os szögek miatt pedig a BC egyenes is felezi az ABP háromszög PBQ külső szögét. Az R pont tehát az ABP háromszög BP oldalát kívülről érintő hozzáírt körének a középpontja.



2. ábra

Tekintsük ezután az ABP háromszöget a beírt körének I középpontjával együtt (*2. ábra*). A keresett PRA szög nyilván egyenlő a PRI szöggel. A külső és belső szögfelezők B-, illetve P-beli merőlegessége miatt az $IBRP$ húrnégyszög, és így, mint az IP íven nyugvó kerületi szögek, $PRI\sphericalangle = BPI\sphericalangle$. Mivel a BI belső szögfelező, ez utóbbi szög egyenlő a feltétel szerint 60°-os $ABP\sphericalangle$ felével.
A keresett PRA szög nagysága ezért 30°.

Dömötör Csilla (Győr, Révai M. Gimn., 11. o.t.)
Lovrics Anna (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 12. o.t.) dolgozatai alapján

102 dolgozat érkezett. 5 pontos 84, 4 pontos 1, 3 pontos 2, 2 pontos 2, 1 pontos 7, 0 pontos 4. Nem versenyszerű 2 dolgozat.

B. 3390. *Egy tetraéder minden csúcsában egy-egy* 5, $\sqrt{41}$ *és* $\sqrt{34}$ *hosszúságú él találkozik. Milyen hosszúak a tetraéder szemközti éleinek felezőpontjait összekötő szakaszok?*

(*5 pont*)

Megoldás. Legyen a feltételnek megfelelő tetraéder $DEGH$. Legyen F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 és F_6 rendre a DH, DE, EG, GH, EH és DG élek felezőpontja. Az E csúcsban találkozó élek 5, $\sqrt{34}$ és $\sqrt{41}$ hosszúak, legyen pl. $ED=5$, $EH=\sqrt{41}$ és $EG=\sqrt{34}$. Ha $DG=5$ lenne, akkor a D csúcsból két darab 5 hosszúságú él lépne ki, és hasonlóan, ha $DG=\sqrt{34}$ lenne, akkor a G csúcsban találkozó élek közül lenne kettő $\sqrt{34}$; így $DG=\sqrt{41}$, és $DE=5$ és $DG=\sqrt{41}$, miatt $DH=\sqrt{34}$. Mivel $GE=\sqrt{34}$ és $GD=\sqrt{41}$, ezért $GH=5$.

Felhasználjuk, hogy egy tetszőleges háromszögben $s_a^2=\dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$, ahol a háromszög oldalai a, b és c, az a-hoz tartozó súlyvonal pedig s_a. (Ez az állítás lényegében a *Geometriai feladatok gyűjteménye* II. 289. feladatának következménye.)

F_1E a DEH háromszög súlyvonala, így $F_1E^2=\dfrac{2DE^2+2HE^2-DH^2}{4}=24{,}5$.

F_1G a DGH háromszög súlyvonala, így $F_1G^2=\dfrac{2DG^2+2GH^2-DH^2}{4}=24{,}5$.

F_1F_3 az EF_1G háromszög súlyvonala, így $F_1F_3^2=\dfrac{2F_1E^2+2F_1G^2-EG^2}{4}=16$, ezért $F_1F_3=4$.

Hasonlóan kapjuk a HEG háromszögben: $F_4E_2 = 31{,}25$, a DGH háromszögben: $F_4D_2 = 31{,}25$, a DF_4E háromszögben: $F_2F_4 = 5$, továbbá a DEH háromszögben: $F_5D_2 = 19{,}25$, a HGE háromszögben: $F_5G_2 = 19{,}25$, a DF_5G háromszögben $F_5F_6 = 3$.

A tetraéder szemközti éleinek felezőpontjait összekötő szakaszok hossza rendre 3, 4 és 5; mégpedig úgy, hogy a $\sqrt{41}$ hosszú élek felezőpontjait a 3, a $\sqrt{34}$ hosszú élek felezőpontjait a 4, az 5 hosszúságú élek felezőpontjait az 5 hosszú szakasz köti össze.

Szekeres Balázs (Szolnok, Verseghy Ferenc Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzés. Megmutatható, hogy a feladatban szereplő tetraéder bennfoglaló paralelepipedonja téglatest. Ha a téglatest éleinek hossza a, b, c, akkor Pitagorasz tétele szerint: $a^2+b^2=25$, $b^2+c^2=41$, $c^2+a^2=34$. Ebből az egyenletrendszerből: $a=3$, $b=4$, $c=5$. Ezek az élhosszak most éppen megegyeznek a tetraéder szemközti éleinek felezőpontjait összekötő szakaszok hosszával.

306 dolgozat érkezett. 5 pontos 106, 4 pontos 102, 3 pontos 48, 2 pontos 21, 1 pontos 10, 0 pontos 11. Nem versenyszerű 8.

B. 3391. *Amikor Bendegúz érvényes helyjegyével felszállt a* 78 *személyes vasúti kocsiba, döbbenten vette észre, hogy ott már minden hely foglalt. Az történt ugyanis, hogy Dömötör helyjegy nélkül szállt fel. A többi* 77 *utas pedig – köztük Elek – vásárolt ugyan helyjegyet, de nem feltétlenül ültek oda, ahová a helyjegyük szólt. Bendegúz felállítja azt, aki a helyét elfoglalta. Aki feláll, az most már szintén a saját helyére szeretne leülni, és így tovább. Mindez addig folytatódik, míg végül Dömötör leleplezõdik. Mennyi a valószínűsége annak, hogy Elek ülve nézheti végig az eseményeket?*

(*5 pont*)

Megoldás. Addig kövessük nyomon az eseményeket, amíg Dömötör és Elek közül valamelyiknek fel kell állnia. Megmutatjuk, hogy a 78! esetnek pontosan a felében fordul elő, hogy Eleknek (számára kedvezőtlen módon) ülőhelyet kell változtatnia. Ehhez a 78! ülési sorrendet párokba állítjuk úgy, hogy minden párban pontosan az egyik sorrend legyen Elekre nézve kedvező. A párosítás legyen a következő: egy tetszőleges sorrend párja legyen az, amelyet belőle Dömötör és Elek helycseréjével kapunk. Ez valóban párosítás, hiszen minden sorrend különbözik a párjától, és a párok tagjai kölcsönösen egymásra találnak, mivel Dömötör és Elek kétszeri helycseréje az eredeti sorrendet állítja vissza. Világos, hogy egy sorrend pontosan akkor kedvező Elek számára, ha a párja kedvezőtlen. Tehát $\dfrac{1}{2}$ annak a valószínűsége, hogy Elek ülve nézheti végig a Dömötör leleplezõdéshez vezető eseményeket.

Béky Bence (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.), *Dömötör Csilla* (Győr, Révai M. Gimn., 11. o.t.), *Horváth Illés* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.), *Várkonyi Dániel* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) dolgozatai alapján.

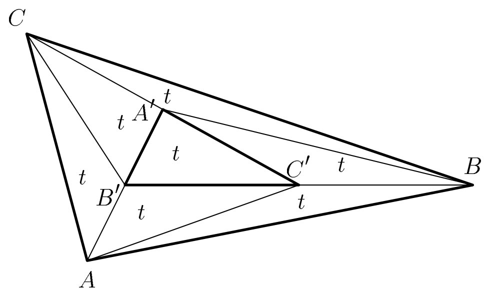
Megjegyzések. 1. A feladatot megoldók többsége arra jött rá, hogy a feladat szempontjából elég csak Dömötört, Eleket és a „többi utast" vizsgálni, és Dömötör és Elek helyzete szimmetrikus, felcserélhető.

2. Könnyen megsejthető a végeredmény, ha 79 utas helyett 3-ra, majd 4-re „az ujjainkon számoljuk ki" a keresett valószínűséget. Ezután teljes indukcióval beláthatjuk, hogy a végeredmény az utasok számától függetlenül $\dfrac{1}{2}$.

3. Sokan próbálkoztak az esetek leszámolásával: itt abból adódtak tévedések, hogy voltak akik helytelenül nem kizáró események valószínűségét adták össze.

160 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 62, 4 pontot 24, 3 pontot 21, 2 pontot 15, 1 pontot 12, 0 pontot 26 beküldő.

B. 3393. *Mekkora az ABC háromszög és az $A'B'C'$ háromszög területének aránya, ha az AA', BB', CC' szakaszok felezőpontjai rendre B', C', A'?*
(*3 pont*)



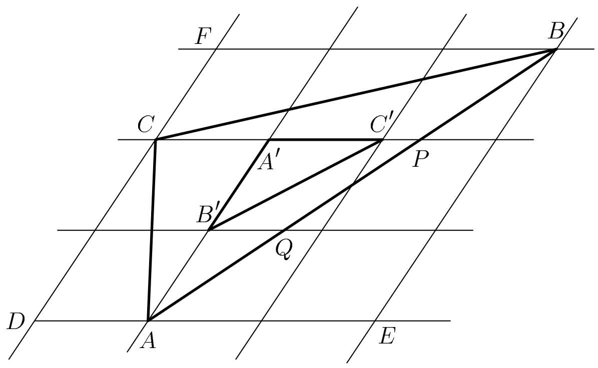
1. ábra

I. megoldás. Kössük össze a C és a B' pontokat. Mivel B' felezi AA'-t, azért CB' felezi az $AA'C$ háromszög területét, és mivel A' felezi CC'-t, azért $B'A'$ felezi a $CB'C'$ háromszög területét.

Az $AA'C$ háromszög területe így kétszer akkor, mint az $A'B'C'$ háromszögé, és hasonlóan kapjuk ugyanezt az $AB'B$ és a $CC'B$ háromszögekre.

Az ABC háromszög területe tehát $2+2+2+1=7$-szer akkora, mint az $A'B'C'$ háromszög területe.

II. megoldás. Belátjuk, hogy a CC' egyenes harmadolja az AB szakaszt. CC' a P-ben metszi az AB-t. B'-n keresztül húzzunk párhuzamost a CC'-vel. Ez az egyenes AB-t Q-ban metszi. A párhuzamos szelők tétele alapján, mivel $AB'=B'A'$, így $AQ=$ $=QP$. Ugyanígy, mivel $BC'=C'B'$, így $BP=PQ$. Vagyis $AQ=QP=PB$.



2. ábra

A B, C és C' pontokon keresztül húzzunk párhuzamost $A'B'$-vel. Ekkor az előbb bizonyítottak alapján ezeknek a párhuzamosoknak a távolságai egyenlőek. Hasonlóan, a B, B' és A pontokon keresztül $A'C'$-vel húzott párhuzamosok távolságai is egyenlőek.

Kaptunk 9 db egybevágó paralelogrammából álló nagy paralelogrammát, amely magában foglalja az ABC és $A'B'C'$ háromszögeket.

A nagy paralelogramma területéből levonva az EBA, BFC és CDA háromszögek területét, az ABC háromszög területét kapjuk (a kis paralelogramma területét tekintsük egységnyinek):

$$T_{ABC} = 9 - 3 - \frac{3}{2} - 1 = \frac{7}{2}, \qquad T_{A'B'C'} = \frac{1}{2}.$$

Vagyis a területek aránya $1:7$.

Borgátai Diána (Székesfehérvár, Tóparti Gimn. és Művészeti Szki., 10. o.t.)

460 dolgozat érkezett. 3 pontos 410, 2 pontos 34, 1 pontos 12, 0 pontos 3. Nem versenyszerű 1.

B. 3394. *Bizonyítsuk be, hogy pontosan akkor szerkeszthető a, b és c hosszúságú oldalakkal háromszög, ha az a, b, c pozitív valós számokra teljesül, hogy*

$$(a^2+b^2+c^2)^2 > 2(a^4+b^4+c^4).$$

(*3 pont*)

Megjegyzések. 1. A feladat megoldása megtalálható a KöMaL 2000/9. szám 540. oldalán; *Csete Lajos:* „Szimultán háromszög-egyenlőtlenségekről” c. cikkének ez volt a kiinduló állítása.

2. A feladatra beküldött megoldások közül a legegyszerűbb az volt, amikor az

$$(a^2+b^2+c^2) - 2(a^4+b^4+c^4)$$

kifejezést azonos átalakításokkal

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)$$

alakra hozták, majd belátták az eredetivel ekvivalens $(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a) > 0$ egyenlőtlenségről, hogy a, b, c pozitív valós számokra pontosan akkor teljesül, ha mind a három tényező pozitív; ekkor a, b, c-re teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, azaz belőlük háromszög szerkeszthető.

Kevei Péter (Szeged, Radnóti M. Gimn., 11. o.t.)

3. A feladatot beküldők közül sokan nem vették észre, hogy a feladatban a „pontosan akkor” kitétel két állítást takar:

i) *ha* szerkeszthető a, b, c-ből háromszög, *akkor* fennáll az (1) egyenlőtlenség, és

ii) *ha* fennáll az (1) egyenlőtlenség, *akkor* szerkeszthető a, b, c oldalú háromszög.

Aki nem bizonyította mindkét irányt, nem kaphatott teljes pontszámot. Sokan annyira zavarosan írtak, hogy nem volt látható, mit tételeznek fel és mit bizonyítanak: ők 0 pontot kaptak.

4. Többen nem vizsgálták meg, hogy az átalakításaik (négyzetre emelés, gyökvonás) nyomán a kapott feltétel ekvivalens-e az eredetivel, pedig ilyen típusú bizonyításokban ez elengedhetetlen.

270 dolgozat érkezett. 3 pontos 65, 2 pontos 31, 1 pontos 63, 0 pontos 89. Nem versenyszerű 22.

B. 3401. *Egy nagy, önkiszolgáló raktárban rengeteg árut tárolnak legfeljebb 1 tonnás csomagokban. Van egy 3 és egy 4 tonnás teherautónk. Szerződést akarunk kötni, amelyben vállaljuk, hogy a raktárból egy fordulóval legalább N tonna árut szállítunk el. Mekkora N legnagyobb értéke?*

(*5 pont*) Arany D. versenyfeladat (2000) nyomán

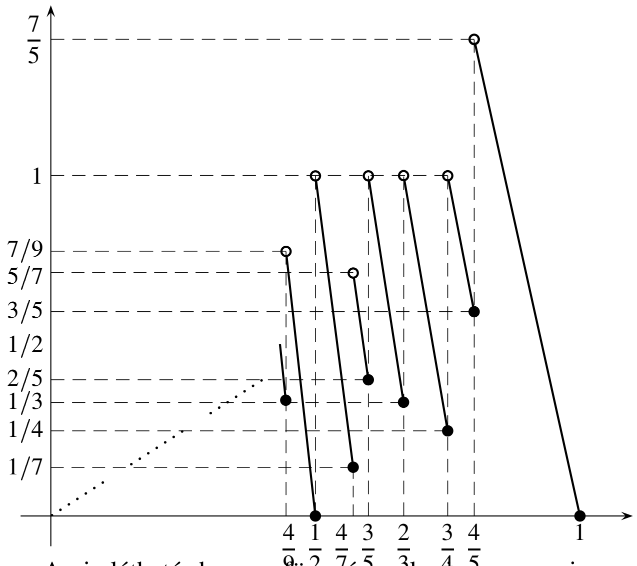
I. megoldás. Ha a raktárban csupa egyforma tömegű csomag van, amelyek közös tömege x, akkor a teherautókra $\left[\frac{3}{x}\right]$, illetve $\left[\frac{4}{x}\right]$ darab fér el, az elszállítható tömeg ilyenkor

$$\left(\left[\frac{3}{x}\right]+\left[\frac{4}{x}\right]\right)x=7-\left(\left\{\frac{3}{x}\right\}+\left\{\frac{4}{x}\right\}\right)x.$$

A „hiányt", a

$$h(x)=\left(\left\{\frac{3}{x}\right\}+\left\{\frac{4}{x}\right\}\right)x$$

függvény grafikonját az ábrán láthatjuk.



Ez a hiányfüggvény a $(0;1]$ intervallumon értelmes, itt szakaszonként fogyó lineáris, azokban a pontokban szakad, ahol $\frac{3}{x}$ vagy $\frac{4}{x}$ értéke egész szám. A grafikont nyilván elegendő csak az $\frac{1}{2}$-nél nagyobb x-ekre vizsgálni, ennél kisebb súlyokkal ugyanis a két teherautó legfeljebb $\frac{1}{2}$-$\frac{1}{2}$ tonnányi hiánnyal feltölthető.

Az is látható, hogy a függvénynek nincsen maximuma, a legnagyobb olyan hiány, ami már nem érhető el egyenlő súlyokkal, a $\frac{7}{5}$.

Ha tehát $7-\frac{7}{5}=\frac{28}{5}$ tonnánál többet akarunk vállalni, akkor ez egyenlő súlyokkal megakadályozható. $\frac{28}{5}+d$ tonna terhet például már nem vállalhatunk, hiszen ha $d^*<\min\left(\frac{1}{5},\frac{d}{7}\right)$, akkor $\frac{4}{5}+d^*$ tonnás csomagokból a két teherautóra összesen $3+4=7$ darab fér, amelyek együttes tömege kisebb, mint $\frac{28}{5}+d$.

Megmutatjuk, hogy legalább $\frac{28}{5}$ tonna terhet mindig el tudunk szállítani – természetesen, ha van ennyi áru a raktárban. Osszuk ehhez a csomagokat két csoportra: legyenek a *nehezek* azok, amelyek tömege legalább $\dfrac{7}{10}$ tonna, a többiek pedig a *könnyűek*. Kezdjük el fölrakni a csomagokat az autókra, ha vannak nehezek, kezdjük ezekkel, majd ha ezek esetleg elfogytak vagy nincsenek, akkor a könnyűekkel folytatva – ha vannak ilyenek – egészen addig, amíg már egyik autóra sem tudunk több csomagot fölrakni.

Ez persze bekövetkezhetett azért, mert valamennyi csomagot fölraktuk már; ekkor nyilván teljesítettük, amit vállaltunk. Ha egy könnyű csomagnál akadtunk el, akkor mindkét teherautó kapacitását kevesebb, mint $\dfrac{7}{10}$ tonna hiánnyal használtuk ki, azaz a két teherautón összesen több, mint $3+4-2\cdot\dfrac{7}{10}=\dfrac{28}{5}$ tonna teher van; most is teljesítettük, amit vállaltunk.

Az az eset maradt, ha egy nehéz csomag fölrakásakor akadunk el. Ekkor a nehéz csomagok együttes tömege több 6 tonnánál, hiszen az elakadáskor az egyik autót túlterheltük, a másikból pedig kevesebb, mint 1 tonna hiányzik. Pakoljunk le a teherautókról és tekintsük csak a nehéz csomagokat. Megmutatjuk, hogy már belőlük is fölrakható legalább $\dfrac{28}{5}$ tonna.

Ha van két olyan csomag, amelyek együttes tömege legalább $\dfrac{8}{5}$ tonna, akkor ezeket tegyük a kisebbik teherautóra. Ekkor itt még legalább egy tonna szabad hely marad, hiszen semelyik két csomag nem nehezebb 2 tonnánál. Ez azt jelenti, hogy a nagyobbik autót elakadásig rakva, az első csomagot, ami ott már nem fér, még éppen elhelyezhetjük a kisebbik teherautón. Így pedig összesen több, mint $4+\dfrac{8}{5}=\dfrac{28}{5}$ tonna súlyt raktunk föl.

Ha bármely két csomag együttes tömege $\dfrac{8}{5}$ tonna alatt marad, akkor könnyen látható, hogy ha $k>2$, akkor bármely k darab csomag együttes tömege is kisebb, mint $k\cdot\dfrac{4}{5}$ tonna, tehát bármely öt csomag együttes tömege kisebb 4 tonnánál. Így bármely öt nehéz csomag elfér a nagyobbik autón, a kisebbiken pedig nyilván elfér három. A két autóra most összesen legalább nyolc darab nehéz csomag rakható, ezek együttes tömege pedig ismét legalább $8\cdot\dfrac{7}{10}=\dfrac{28}{5}$ tonna.

Ezzel igazoltuk, hogy minden esetben elszállítható legalább $\dfrac{28}{5}$ tonna, ennél több azonban nem feltétlenül.

Megjegyzések. 1. A bizonyításból az is kiderül, hogy valójában minden esetben több, mint $\dfrac{28}{5}$ tonna terhet tudunk fölrakni az autókra, ezt azonban nem lehet „szerződésben vállalni”.

2. A fenti bizonyítás lényegében hasolóan működik, ha a két teherautó kapacitása a, illetve $a+1$ tonna, ahol a egész szám. A maximális vállalható teher ebben az esetben $2a+1-\dfrac{2a+1}{a+2}$ tonna.

3. A megoldás során felhasználtuk, hogy ha egy adott számhalmaz elemei közül bármely m

darab átlaga kisebb, mint t, akkor minden $k>m$ esetén bármely k darab átlaga is kisebb, mint t. (A fenti bizonyításban $m=2$ és $t=\frac{4}{5}$, a számok átlaga helyett pedig a számok összegéről beszéltünk.)

Egy k elemű H halmaz elemeiből összesen $\binom{k}{m}=\frac{k}{m}\cdot\binom{k-1}{m-1}$ darab m elemű halmaz készíthető. Eközben a H minden egyes elemét ugyanannyiszor, $\binom{k-1}{m-1}$-szer használtuk fel. A H elemeiből készíthető m tagú összegek összege tehát a H elemei összegének a $\binom{k-1}{m-1}$-szerese, ami a feltétel szerint kisebb, mint $\binom{k}{m}\cdot mt$. A H elemeinek az összege eszerint kisebb, mint

$$\frac{\binom{k}{m}\cdot mt}{\binom{k-1}{m-1}}=kt,$$

és éppen ez a bizonyítandó állítás.

4. A megoldás során kiderült, hogy a maximum az egyenlő súlyokat feltételezve megkapható. Ez egyáltalán nem nyilvánvaló, az Interneten közölt megoldást követve erre adódik egy bizonyítás, ami azonban feltételezi, hogy a raktárkészlet elegendően nagy. Az alábbiakban *Tardos Gábor* nyomán bebizonyítjuk ezt az állítást.

II. megoldás. A következőt igazoljuk. Adottak az M, a, b pozitív számok úgy, hogy $1\le a\le b$ és $M\le a+b-1$. Teljesül továbbá, hogy minden olyan S számhalmazból[1], amelyik egyenlő, 1-nél nem nagyobb elemekből áll és amelyben az elemek összege legalább[2] M, kiválasztható két csoport úgy, hogy az egyik csoportban az elemek összege legfeljebb a, a másikban pedig legfeljebb b.

Azt állítjuk, hogy ekkor ugyanez a kiválasztás még akkor is megtehető, ha a halmaz elemeiről nem tesszük föl, hogy egyenlők.

Itt a és b nyilván a teherautók kapacitása. Megjegyezzük, hogy a bizonyítás során nem használjuk fel, hogy ezek a számok egészek. Vegyük észre viszont, hogy ha azok, akkor az $M\le a+b-1$ megszorítás szükséges, hiszen ha a raktárban $\frac{1}{2}$ tonnánál bármilyen kicsivel nehezebb csomagok vannak, akkor ezekből összesen $(2a-1+2b-1)$ rakható föl, azaz $a+b-1$ tonnánál többet biztosan nem tudunk elszállítani.

A feladat állítása innen nyilvánvaló módon adódik. A $h(x)$ függvény mutatja, hogy bárhogyan helyezünk el a raktárban egyenlő tömegű csomagokat, ha ezek együttes tömege legalább $\frac{28}{5}$ tonna, akkor a két teherautón elfér legalább $\frac{28}{5}$ tonna, $7-h(x)>\frac{28}{5}$.

Tekintsük tehát az S halmazt. Először is feltehető, hogy az S elemei közül bármelyiket elhagyva a megmaradó számok összege már M alá csökken, a többi számot ugyanis

[1] A szokásos megszorítással ellentétben itt most megengedjük, hogy egy számhalmazban azonos elemek is szerepeljenek. Valójában helyesebb volna számok listájáról beszélni.

[2] ld. a II. megoldáshoz fűzött 2. megjegyzést

– ha vannak ilyenek – egyszerűen elhagyhatjuk, a keresett számhalmazok elkészítése, azaz a teherautók feltöltése nélkülük is megvalósítható.

Jelölje m a számok minimumát, ekkor tehát S elemeinek az összege kisebb, mint $M+m$. Legyen t az S elemeinek az átlaga, és tekintsünk egy olyan számhalmazt, amely csupa egyenlő, t értékű számból áll. A feltétel szerint ekkor megoldható a feladat, léteznek tehát az α és β pozitív egészek úgy, hogy $\alpha t \le a$, $\beta t \le b$ és $(\alpha+\beta)t \ge M$. Tekintsük most az eredeti S számhalmazban az $\alpha+\beta$ darab legnagyobb számot.

Ezek összege nyilván legalább M. Ha szétoszthatók egy-egy α, illetve β elemű csoportra úgy, hogy az első csoport összege legfeljebb a, a másodiké pedig legfeljebb b, akkor készen is vagyunk. Ha ez nem megy, akkor közülük például egy α elemű csoportban az elemek összege nagyobb, mint a.

Tekintsük most az S halmazban az α darab legkisebb számot! Ezek átlaga nyilván legfeljebb t, így összegük sem nagyobb, mint a. Ha most ennek a minimális csoportnak az elemeit egyesével kicseréljük az előbbi „nehéz” csoport elemeire – a két csoportban persze lehet átfedés –, akkor lesz egy olyan állapot és egy ennek megfelelő α elemű H_α csoport, amelyben az elemek összege még kisebb, mint a, de H_α egy elemét egy másikra cserélve az összeg a fölé nő. Mivel egy csere legfeljebb $(1-m)$-mel növeli a halmaz elemeinek az összegét, azért H_α elemeinek az összege, ami még nem nagyobb, mint a, nagyobb, mint $a-(1-m)$. Mivel S elemeinek az összege kisebb, mint $M+m$, azért a H_α komplementerében az elemek összege kisebb, mint

$$M+m-a+1-m=M-a+1 \le b,$$

a H_α halmaz és a komplementere tehát egy-egy megfelelő részhalmazt szolgáltat. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzések. 1. A most bizonyítottak szerint elegendő az elszállítható maximális terhet azzal a többletfeltevéssel keresni, hogy a raktárban a csomagok tömege egyenlő. Ez az ábrán látható $h(x)$ függvény *felső határának* vizsgálatát jelenti a $(0;1]$ intervallumon. Ezzel adott a és b egészekre véges sok érték maximumának a megtalálásává egyszerűsödik a feladat, nem látszik azonban egyszerűnek annak tisztázása, hogy miképpen függ ez az érték az a és b számoktól általában. Ha pedig a és b nem egészek – márpedig a feladatban ezt semmi nem indokolja –, akkor a fenti bizonyításban felhasznált $M \le a+b-1$ feltétel sem látszik szükségesnek. A probléma továbbá természetes módon terjeszthető ki kettőnél több teherautó esetére.

2. Érdekes változatát kapjuk a feladatnak, ha – mint ahogyan ezt az Arany Dániel verseny döntőjében két versenyző is megtette[3] – a feltételt némileg módosítva egy raktárost is közbeiktatunk, akinek az a dolga, hogy az általunk vállalt M tömegű terhet ténylegesen összeállítsa. A feladatban így az eredeti változathoz képest a „legalább M” helyett *pontosan* M összegű halmazt kell két, legfeljebb a, illetve b összegű részhalmazra osztani. Az eredeti $a=3$, $b=4$ kapacitásokkal ilyenkor nagyobb érték, $M=\dfrac{33}{5}$ adódik, de most is igaz, hogy a maximális elszállítható terhet elegendő olyan számhalmazokon vizsgálni – legalábbis ha egészek a kapacitások –, amelyekben az elemek egyenlők. Ennek bizonyítását az olvasóra bízzuk.

92 dolgozat érkezett. 5 pontos Ambrus Gergely, Babos Attila, Balka Richárd, Balogh 541 János, Deli Lajos, Farkas Viktor, Gáti Beatrix, Hargitai Gábor, Horváth Illés, Jesch Dávid, Kiss-Tóth Christian, Kőrizs András, Maga Péter, Marton József, Nagy 469 Ambrus, Pach Péter Pál,

[3] A versenyfeladat szövege lehetővé tette ezt az értelmezést is.

Somogyi Dávid, Tábor Áron, Tóth 370 Ágnes, Tóth 143 Anett, Tran Thanh Long és Zalán Péter megoldása. 4 pontot kapott 5, 3 pontot 6, 2 pontot 25, 1 pontot 10, 0 pontot 22 versenyző. Nem versenyszerű 2 dolgozat.

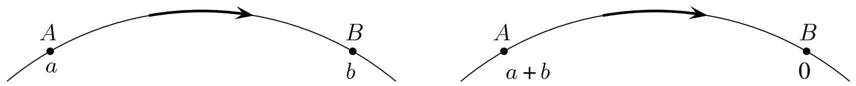
Nehezebb feladatok megoldása

A. 245. *Autónkkal egy kör alakú autópályán kell körbehaladnunk. A pálya mentén bizonyos helyeken benzinkutak vannak, az ezekben található összes üzemanyag két kör megtételére elég. Igazoljuk, hogy a benzinkutak közül kiválasztható legalább egy, amelytől bármelyik irányba elindulva oda visszajuthatunk.*

Előzetes megjegyzés. A klasszikusnak számító „benzinkutas feladatban” azt kell igazolni, hogy ha a benzinkutakban található üzemanyag összesen legalább egy kör megtételére elegendő, akkor mindkét irányhoz létezik olyan benzinkút, amelyből indulva az autó körbeérhet. Ennek a feladatnak több érdekes megoldása is ismert; most csak egy egyszerű teljes indukciós bizonyítást mutatunk. A témáról részletesebben például Bizám György és Herczeg János *Sokszínű logika* c. könyvében olvashatunk.

Legyen a körüljárás iránya rögzített; a megfelelő benzinkút létezését a benzinkutak száma szerinti indukcióval igazoljuk. Ha csak egyetlen benzinkút van, akkor ebben található az összes üzemanyag, amely a feltétel szerint legalább egy teljes kör megtételére elegendő, kész vagyunk.

Legyen a benzinkutak száma n, és tegyük fel, hogy ennél kevesebb benzinkút esetén mindig létezik a megfelelő kiindulópont. A benzinkutak között lehetnek olyanok, amelyekből nem lehet a következő benzinkutat sem elérni; az ezekben levő üzemanyag mennyisége kevesebb, mint amennyi a soron következő útszakasz megtételéhez szükséges. Az ilyen benzinkutakban összesen biztosan kevesebb üzemanyag van, mint amennyi a teljes kör megtételéhez szükséges. Következésképpen van olyan benzinkút is, ahonnan el lehet érni a következő kutat. Legyen A egy ilyen kút, a következő kút pedig legyen B. Jelöljük a két kútban található üzemanyag mennyiségét a-val, illetve b-vel.

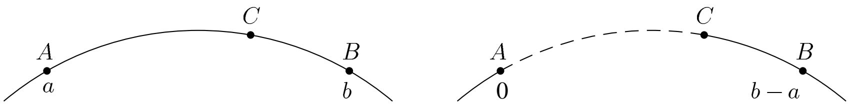


1. ábra

Helyezzük át a B-ben található üzemanyagot A-ba, és a B kutat szüntessük meg (*1. ábra*). A benzinkutak száma csökkent, az indukciós feltevés szerint van tehát egy olyan K kút, ahonnan indulva körbe lehet utazni. Azt állítjuk, hogy K az eredeti A és B benzinkutak esetében is megfelelő. Induljunk el K-ból. Amikor eljutunk A-ba, az ott felvett a üzemanyaggal biztosan eljutunk B-be is, ott pedig felvesszük a b üzemanyagot. B elhagyásakor pontosan ugyanannyi üzemanyagunk lesz, mintha már A-ban felvettük volna az $a+b$ üzemanyagmennyiséget; ezután pontosan ugyanaz történik, mint a módosított esetben. A K kút tehát valóban megfelelő.

I. megoldás. Ismét a benzinkutak száma szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Egy kút esetén az állítás triviális.

Ha mindegyik benzinkútban elég üzemanyag van ahhoz, hogy bármelyik irányban eljussunk a következő kútig, akkor bármelyik kúttól bármelyik irányban indulva biztosan körbeérünk. Feltehetjük tehát, hogy létezik egy kút a kör A pontjában, ahonnan az egyik irányban nem juthatunk el a szomszédos kútig, ami B-ben van. A kutakban levő üzemanyag mennyisége legyen a és b. Feltételezzük, hogy $a \le b$; ellenkező esetben az A és a B szerepe felcserélhető.



2. ábra

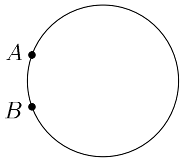
Jelölje C azt a pontot, ameddig A-ból B felé elindulva az a üzemanyaggal eljuthatunk. Csökkentsük le az üzemanyag mennyiségét az A, illetve B benzinkutakban 0-ra, illetve $(b-a)$-ra, továbbá az AB ívet rövidítsük le az AC távolsággal (*2. ábra*). Ekkor továbbra is kétszer annyi üzemanyag van, mint amennyi a (lerövidített) kör megtételéhez szükséges, viszont az A benzinkút kiürítése révén a nem üres benzinkutak száma 1-gyel csökkent. Az indukciós feltevés szerint tehát létezik egy olyan K benzinkút, ahonnan elindulva mindkét irányban körbehaladhatunk. Megmutatjuk, hogy ez a kút az eredeti körön is jó lesz.

Ha K-ból elindulunk valamelyik irányban, akkor előbb-utóbb eljutunk az iránytól függően A-ba vagy B-be; eddig a pontig nincs különbség a kétféle utazás között. Az A vagy B pontba érve az eredeti állapotban a-val több üzemanyagot vehetünk fel, és az AB szakasz is éppen annyival hosszabb, amire ez a többlet üzemanyag elegendő. Az AB szakasz elhagyása után mindig a-val több üzemanyagunk lesz, mint a lerövidített körön. A K kút tehát megfelelő.

II. megoldás. Nevezzük a két lehetséges irányt pozitívnak, illetve negatívnak. Tekintsük azokat a kutakat, amelyek „rosszak” olyan értelemben, hogy onnan pozitív irányban elindulva nem érhetünk körbe. Ha az ezekben levő üzemanyag legalább egy kör megtételére elegendő, az a klasszikus feladat szerint ellentmondás; ha csak ezen kutak üzemanyagát használjuk fel, akkor is van olyan, ahonnan pozitív irányban körbeérhetünk. A kiválasztott kutakban található üzemanyag tehát kevesebb, mint amennyi egy teljes kör megtételéhez szükséges.

Hasonlóan láthatjuk, hogy azokban a kutakban, ahonnan negatív irányban indulva nem érhetünk körbe, az egy kör megtételéhez szükségesnél kevesebb üzemanyag van. A rossz kutakban tehát összesen kevesebb üzemanyag van, mint amennyi két kör megtételéhez szükséges. Ezért a rossz kutak nem tartalmazhatják az összes üzemanyagot, van jó kút is.

Jankó András (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., 10. o.) dolgozata alapján



3. ábra

Megjegyzés. Ha a kutakban levő üzemanyag mennyisége nem elég két kör megtételére, akkor az állítás nem igaz. Helyezzük el a *3. ábra* szerint az üzemanyagot két, egymáshoz közeli bezninkútnál, A-nál és B-nél úgy, hogy a két kútban külön-külön ne legyen elegendő üzemanyag a hosszabbik AB ív megtételéhez. Ebben az esetben A-ból csak pozitív, B-ből csak negatív irányban járhatjuk be a kört.

25 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Csikvári Péter, Csóka Endre, Harangi Viktor, Horváth Illés, Jankó András, Kovács Erika Renáta, Kunszenti-Kovács Dávid, Tran Thanh Long, Varjú Péter és Vörös László. 4 pontos 3, 1 pontos 7, 0 pontos 5 dolgozat.

A. 246. *Határozzuk meg az összes olyan x, y, z, w valós számnégyest, amelyre*

(1) $$x+y+z+w=x^7+y^7+z^7+w^7=0.$$

Shay Gueron, Haifa

Megoldás. Az egyenletrendszernek triviálisan megoldásai azok a számnégyesek, amelyekben két-két szám egymás ellentettje. Megmutatjuk, hogy más megoldás nincs. Ehhez először bebizonyítjuk a következő lemmát:

Lemma. *Ha a, b valós számok és $a\neq 0$, akkor az $X+Y=a$, $X^7+Y^7=b$ egyenletrendszernek – az ismeretlenek sorrendjétől eltekintve – legfeljebb egy valós megoldása lehet.*

Legyen $X=\frac{a}{2}-Z$, $Y=\frac{a}{2}+Z$. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $Z\ge 0$. Azt kell igazolnunk, hogy a második egyenlet legfeljebb egy $Z\ge 0$ értékre teljesülhet. Behelyettesítve

$$\left(\frac{a}{2}-Z\right)^7+\left(\frac{a}{2}+Z\right)^7=b$$

$$7aZ^6+\frac{35a^3}{4}Z^4+\frac{21a^5}{16}Z^2+\frac{a^7}{64}=b.$$

A bal oldal $a>0$ esetén Z-ben szigorúan monoton nő, az $a<0$ esetben szigorúan monoton fogy, ezért valóban legfeljebb csak egy nemnegatív Z-re teljesül az egyenlet.

Tekintsük most az (1) egyenletrendszert. Tegyük fel, hogy valamelyik két szám összege nem 0, pl. $x+y\neq 0$. Legyen $a=-(x+y)$ és $b=-(x^7+y^7)$. A z, w számokra teljesülnie kell a

$$z+w=a,\quad z^7+w^7=b$$

egyenletrendszernek. Ennek a $(-x,\,-y)$ számpár megoldása; a lemma szerint – a sorrendtől eltekintve – más nincs.

Ha az x, y, z, w számok közül bármelyik kettő összege 0, akkor többek között $x+y=y+w=0$, vagyis x és y, illetve z és w egymás ellentettje. (Természetesen ennél sokkal több is igaz; rövid számolással kapjuk, hogy $x=y=z=w=0$.)

40 dolgozat érkezett. 5 pontos Ambrus Gergely, Balogh 541 János, Csikvári Péter, Csóka Endre, Gerencsér Balázs, Hablicsek Márton, Harangi Viktor, Kiss-Tóth Christian, Koch Dénes,

Kovács Erika Renáta, Kunszenti-Kovács Dávid, Pach Péter Pál, Rácz Béla András, Vajda Péter, Varjú Péter, Vígh Viktor és Vörös László megoldása. 4 pontos 2, 3 pontos 2, 2 pontos 2, 1 pontos 1, 0 pontos 16 dolgozat.

A. 248. *Hányféleképpen lehet egy n-elemű halmaz hatványhalmazát két diszjunkt részre: az I és H halmazokra bontani úgy, hogy a következő feltételek egyszerre teljesüljenek?*

a) *tetszőleges* $a, b \in I$ *esetén* $a \cup b \in I$ *és* $a \cap b \in I$;

b) *tetszőleges* $a, b \in H$ *esetén* $a \cup b \in H$ *és* $a \cap b \in H$;

c) *tetszőleges* $a \in I$, $b \in H$ *esetén* $a \cup b \in I$ *és* $a \cap b \in H$.

(Egy halmaz hatványhalmazának *az összes részhalmazainak halmazát nevezzük.)*

Javasolta: *Csirmaz Előd,* Budapest

Megoldás. Jelöljük az n-elemű halmazt S-sel, elemei legyenek $x_1, \ldots, x_n$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy megfelelő az a két felbontás, amikor az összes részhalmaz H-ba, illetve I-be kerül, azaz H és I valamelyike üres. Nevezzük ezeket triviális felbontásoknak. A továbbiakban pontosan leírjuk, mik azok a nemtriviális felbontások, amelyekben sem H, sem I nem üres.

Először megmutatjuk, hogy egy nem triviális felbontásban $\emptyset \in H$ és $S \in I$. Legyen ugyanis $h \in H$ és $i \in I$ két tetszőleges halmaz; ekkor $\emptyset = \emptyset \cap h \in H$ és $S = S \cup i \in I$ az a), b) és c) tulajdonságok miatt.

Tegyük fel, hogy $n \ge 1$, és tekintsük most az $\{x_1\}, \ldots, \{x_n\}$ egyelemű részhalmazokat. Azt állítjuk, hogy ezek közül pontosan egy tartozik I-be. Ha mindegyik egyelemű halmaz H-ba tartozna, akkor a c) tulajdonság miatt az $\big(\{x_1\} \cup \{x_2\}\big) \cup \ldots \cup \{x_n\} = S$ halmaz is H-ban lenne, ami ellentmondás. Az egyelemű részhalmazok között tehát van olyan, ami I-be tartozik. Ha az egyelemű halmazok közül legalább kettő tartozna I-be, akkor az a) tulajdonság miatt ezek metszete, $\emptyset$ is I-beli lenne, ami szintén ellentmondás.

Legyen $\{x_j\}$ az az egyelemű halmaz, amely I-be tartozik. Az a) és b) tulajdonságok alapján megállapíthatjuk, hogy minden olyan r részhalmaz, amelynek x_j eleme, I-be tartozik; ugyanis $r = r \cup \{x_j\}$.

Megfordítva, ha egy r részhalmaznak x_j nem eleme, akkor $r \in I$ nem lehetséges, ugyanis $r \in I$ esetén az a) tulajdonság alapján $r \cap \{x_j\} = \emptyset$ is I-beli lenne. Azt kaptuk tehát, hogy egy r halmaz akkor és csak akkor tartozik I-be, ha $x_j \in r$. A nemtriviális felbontások száma tehát a lehetséges x_j-k száma, azaz n.

Az $n = 0$, azaz $S = \emptyset$ esetben a két triviális felbontás ugyanaz: $I = H = \emptyset$ és más felbontás nincs; az összes felbontások száma tehát 1. Ha $n = 1$, akkor a két triviális felbontás különböző, és más felbontás nincs, így a felbontások száma 2. Ha $n > 1$, akkor a két triviális felbontás különböző, az összes felbontások száma $n + 2$.

24 dolgozat érkezett. 5 pontos Babos Attila, Csikvári Péter, Csóka Endre, Gerencsér Balázs, Harangi Viktor, Jankó András, Kovács Erika Renáta, Kunszenti-Kovács Dávid, Nagy 139 Gergely, Rácz Béla András, Szalay Zsófia, Vajda Péter, Varjú Péter, Vígh Viktor és Vörös László megoldása. 4 pontot kapott 4, 2 pontot 2, 1 pontot 1, 0 pontot 2 versenyző.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (620–624.)

C. 620. Egy trapézt *szimmetrikus trapéznak* nevezünk, ha alapjainak felező merőlegese egybeesik. Igaz-e, hogy ha egy trapéz szimmetrikus, akkor szimmetrikus trapéz?

C. 621. Egy sütödében, ahol mazsolás kalácsot is készítenek, a pék azt szeretné, ha a kalácsok bármely 4 dkg-os szeletében legalább 0,99 valószínűséggel lenne mazsola. 1 kg kalács elkészítéséhez hány szem mazsolát keverjen a tésztához?

C. 622. Adjuk meg az összes olyan 7-tel osztható $\overline{ABCCBA}$ alakú hatjegyű számot, amelyre $\overline{ABC}$ is 7-tel osztható. (A, B, C különböző számjegyeket jelölnek.)

C. 623. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$a^2b^2 - a^2 - ab + 1 = 0$$
$$a^2c - ab - a - c = 0$$
$$abc = -1.$$

Javasolta: *Kiss Sándor,* Szatmárnémeti

C. 624. Belefér-e százezer darab 4 cm átmérőjű szabványos pingponglabda egy 200 cm × 164 cm × 146 cm méretű ládába?

❄

Beküldési határidő: 2001. április 17.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest, Pf. 47. 1255

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (3442–3451.)

B. 3442. Van-e olyan 2001 jegyű természetes szám, amely megegyezik a 2001-edik hatványának utolsó 2001 számjegyével?

(*4 pont*) Javasolta: *Kiss Tamás,* Budapest

B. 3443. Az $ABCD$ téglalap CB oldalának B-n túli meghosszabbítására, valamint a CD oldalának D-n túli meghosszabbítására egyenlő hosszúságú szakaszokat mértünk fel. Így kaptuk az F, illetve az E pontokat. Igazoljuk, hogy az EB és az FD egyenesek metszéspontját A-val összekötő egyenes felezi az A csúcsnál lévő szöget.

(*3 pont*)

B. 3444. A pozitív egész számokból álló végtelen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sorozatban jelölje f_n az n természetes szám előfordulásainak a számát, ha ez az érték véges.

Az $a_1, a_2, \ldots$ sorozat „gyakoriságsorozata” ezután az $f_1, f_2, \ldots$ sorozat, ha minden f_i véges. Hasonlóan értelmezzük a fenti $f_1, f_2, \ldots$ sorozat gyakoriságsorozataként az $a_1, a_2, \ldots$ sorozat másodrendű gyakoriságsorozatát, ha minden gyakoriság véges, és ennek gyakoriságsorozataként a harmadrendű gyakoriságsorozatot és így tovább.

Van-e olyan $a_1, a_2, \ldots$ sorozat, amelynek minden k-ra létezik a k-adrendű gyakoriságsorozata?

(*4 pont*)

B. 3445. Van-e olyan háromszög, amelyet valamelyik oldalával párhuzamosan ketté lehet vágni úgy, hogy a két rész kerülete is és területe is egyenlő?

(*4 pont*) Javasolta: *Reményi Gusztáv,* Budapest

B. 3446. Határozzuk meg a $q(x)$ polinomot úgy, hogy a $p(x)=x^2+x+1$ polinommal $p^2(x)-2p(x)q(x)+q^2(x)-4p(x)+3q(x)+3\equiv 0$ azonosság teljesüljön.

(*4 pont*)

B. 3447. Az ABC háromszög oldalait pozitív körüljárás szerint kétszeresére nyújtjuk, majd ugyanezt megismételjük a kapott $A_1B_1C_1$ háromszögre, ezúttal negatív körüljárás szerint. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott $A_2B_2C_2$ háromszög hasonló az ABC háromszöghöz. Milyen hasonló állítás igaz négyszögekre?

(*4 pont*)

B. 3448. Mutassuk meg, hogy adott ellipszisbe írt olyan háromszögek területe, amelyek súlypontja egybeesik az ellipszis középpontjával, állandó.

(*4 pont*) Javasolta: *Kiss Sándor,* Szatmárnémeti

B. 3449. Legyen $a>1$ adott egész szám. Bizonyítsuk be, hogy ha az $x^2-ay^2=-1$ egyenletnek van egész megoldása, akkor végtelen sok egész megoldása van.

(*5 pont*) Javasolta: *Fried Ervin,* Budapest

B. 3450. Tekintsük azokat a síkokat, amelyek a $\mathcal{T}$ tetraéder lapsíkjaival párhuzamosak, és a $\mathcal{T}$-ből általuk levágott kis tetraéderek térfogata $\mathcal{T}$ térfogatának $1/3$ része. A $\mathcal{T}$ térfogatának hányadrésze marad meg, ha csúcsait levágjuk ezekkel a síkokkal?

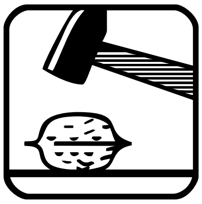
(*5 pont*)

B. 3451. Oldjuk meg a következő egyenletet: $\arcsin x + \arcsin \sqrt{15}x = \pi/2$. (*4 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2001. április 17.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

❄



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (260–262.)

A. 260. Adott az e egyenesen négy különböző pont: A, B, C és D, és tudjuk, hogy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Létezik-e olyan, egyetlen egyenes vonalzót használó szerkesztési eljárás, amely egy e-vel párhuzamos egyenest szerkeszt meg?

A. 261. Aladár és Benedek egységnyi oldalú szabályos háromszögekből összerakott egy n oldalú szabályos háromszöget. Az így kapott táblán a következő játékot játsszák: Felváltva kiszíneznek egy-egy csúcspontot a piros, kék és zöld színek valamelyikével mindaddig, amíg az összes csúcs, beleértve a nagy háromszög oldalain és belsejében levő pontokat is, ki lesz színezve. Minden olyan egységnyi oldalú háromszögért, amelynek csúcsai piros-kék-zöld színűek *pozitív* körüljárás szerint, az első lépést megtevő Aladár kap egy pontot. Azokért a háromszögekért, amelyeknek csúcsai piros-kék-zöld színűek *negatív* körüljárás szerint, Benedek kap egy-egy pontot. Az nyer, aki több pontot szerez.

Kinek van nyerő stratégiája?

A. 262. $0 < a < b < c$ egész számok. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan x, y, z egész számok, amelyek nem mind 0-k, $ax + by + cz = 0$ és $|x|$, $|y|$, $|z|$ mindegyike kisebb, mint $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{c}$.

2000. évi Schweitzer-feladat alapján

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 51. No. 3. March 2001)

New exercises for practice – competition C (see page 168): **C. 620.** A trapezium is called *symmetrical* if the perpendicular bisectors of its bases coincide. Is it true that every trapezium which has a symmetry is symmetrical? **C. 621.** The baker prepares raisin bread. How many raisins should he add to the dough in order to ensure that every 40 gram slice of the 1 kilogram loaf will contain a raisin with a probability at least 0.99? **C. 622.** Find all 6-digit numbers $\overline{ABCCBA}$, divisible by 7, for which $\overline{ABC}$ is also divisible by 7. (Here A, B and C denote different digits.) **C. 623.** Solve the system of the following equations: $a^2b^2 - a^2 - ab + 1 = 0$, $a^2c - ab - a - c = 0$, $abc = -1$. (Proposed by *S. Kiss,* Szatmárnémeti) **C. 624.** The diameter of a standard table tennis ball is 4 cm. Is it possible to pack 100000 such balls in a box whose dimensions are 200 cm, 164 cm and 146 cm?

New problems – competition B (see page 168): **B. 3442.** Is there any 2001-digit number that can be obtained as the last 2001 digits of its 2001^{st} power? (*4 points*) (Proposed by *T. Kiss,* Budapest) **B. 3443.** The sides CB and CD of a rectangle $ABCD$ are extended beyond B and D, respectively, and points F and E are produced on these lines such that $BF = DE$. Prove that the line connecting A with the intersection point of lines EB and FD halves the angle at vertex A. (*3 points*) **B. 3444.** In a sequence $a_1, a_2, \ldots$ of positive integers, let f_n denote the number of times the positive integer n occurs in the sequence, provided that this number is finite. If f_n is finite for every n, then the sequence $f_1, f_2, \ldots$ is called the *frequency sequence* of $a_1, a_2, \ldots$. If the sequence $f_1, f_2, \ldots$ also admits a frequency sequence, it is then called the 2^{nd} frequency sequence of the sequence $a_1, a_2, \ldots$. Frequency sequences of higher order are defined similarly. Is there any sequence which admits a k^{th} frequency sequence for every positive integer k? (*4 points*) **B. 3445.** Is there any triangle which can be dissected into two parts by a line parallel to one of its sides such that the two parts have equal area and also equal perimeter? (*4 points*) (Proposed by *G. Reményi,* Budapest) **B. 3446.** Let $p(x) = x^2 + x + 1$. Determine the polynomial $q(x)$ such that $p^2(x) - 2p(x)q(x) + q^2(x) - 4p(x) + 3q(x) + 3$ is identically 0. (*4 points*) **B. 3447.** Each side of triangle ABC is extended, in clockwise direction, to twice its length. Next, each side of the triangle $A_1B_1C_1$ thus obtained is extended, this time in counter-clockwise direction, to twice its length, yielding triangle $A_2B_2C_2$. Prove that this triangle is similar to triangle ABC. Find a similar statement for quadrilaterals. (*4 points*) **B. 3448.** Inscribe a triangle in a given ellipse such that its centroid coincides with the centre of the ellipse. Prove that the area of the triangle is independent of the position of the triangle. (*4 points*) (Proposed by *S. Kiss,* Szatmárnémeti) **B. 3449.** Let $a > > 1$ be an integer such that the Diophantine equation $x^2 - ay^2 = -1$ has a solution. Prove that it has an infinite number of solutions. (*5 points*) (Proposed by *E. Fried,* Budapest) **B. 3450.** Given a tetrahedron $\mathcal{T}$, consider those planes parallel to the faces of $\mathcal{T}$ which cut off $1/3$ the volume of $\mathcal{T}$. What proportion of the volume of $\mathcal{T}$ remains after chopping off each vertex of $\mathcal{T}$ with these planes? (*5 points*) **B. 3451.** Solve the equation $\arcsin x + \arcsin\sqrt{15}x = \pi/2$. (*4 points*)

New advanced problems – competition A (see page 170): **A. 260.** Four points, A, B, C and D, are given on a line e such that $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Is it possible to construct a line parallel to e with the help of a single ruler (*U.S.: straight-edge*)? **A. 261.** Alice and Bob assemble equilateral triangles of unit side to form an equilateral triangle of side n. They play the following game on the triangular grid thus obtained. They move alternately, Alice moving first. At each move they colour one grid point red, blue or green. When every point is coloured, they count those triangles of unit side whose vertices have three different colours. Alice gets a score for each of those triangles whose red, blue and green vertices are in clockwise order, while Bob gets a score for each red-blue-green triangle oriented counter-clockwise. The one who has the higher score, wins. Which player has a winning strategy? **A. 262.** Let $0 < a < b < c$ be positive integers. Prove that there exist integers x, y and z, not all 0, such that $ax + by + cz = 0$, and $|x|$, $|y|$, $|z|$ are all less than $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{c}$. (Based on a problem of the 2000 Schweitzer Competition)