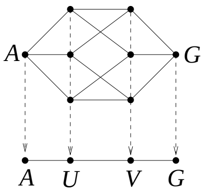
A matematika és fizika totó eredménye

A múlt havi számunkban közreadtuk a 2000. évi Téli Ankét totó-kérdéseit. A telitalálatos szelvény:

X, 2, 1   X, 2, X   2, 1, X,   X, X, 2   1, X.

Az alábbiakban rövid útmutatást adunk a feladatok megoldásához.



1. A kocka hálózatát átalakítva az eredetivel ekvivalens bolyongási feladatot kapunk, ha az A-val szomszédos csúcsokat U-ban, a G-vel szomszédosakat pedig V-ben egyesítjük úgy, hogy U-ból $\frac{2}{3}$, V-ből pedig $\frac{1}{3}$ a továbblépés valószínűsége. Ha p jelöli annak a valószínűségét, hogy U-ból indulva előbb jutunk G-be, mint A-ba, akkor a szimmetria miatt $q=1-p$ annak a valószínűsége, hogy V-ből indulva előbb jutunk G-be, mint A-ba. Így $p=\frac{2}{3}q$, ahonnan $p=\frac{2}{5}$.

2. Az adatok (a Nap és a Hold tömege, illetve a távolságuk) táblázatból kikereshető számértékeinek felhasználásával közvetlenül adódik, hogy a Föld sokkal nagyobb erőt fejt ki a Napra, mint a Holdra.

Ehhez az eredményhez „fejben” is eljuthatunk, ha figyelembe vesszük a következő közismert tényeket. A Nap és a Hold látószöge (a Földről nézve) gyakorlatilag ugyanakkora, hiszen 1999-ben a Hold éppen eltakarta a Napot. A Nap és a Hold felszíne tehát ugyanolyan arányban áll egymással, mint a Földtől mért távolságaik négyzete. Emiatt ha a sűrűségük egyforma lenne, akkor a gravitációs vonzóerők aránya éppen a két égitest sugarának hányadosával lenne egyenlő. Ez az arány erősen a Nap javára billenti a mérleget, s ezen az erős aszimmetrián az sem segít, hogy a Nap sűrűsége egy kicsit kisebb, mint a Holdé.

3. A betétek sorozata, f_n, Fibonacci-típusú sorozat, amelyről ismert, hogy

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} \to \gamma \approx 1{,}618\,03\ldots,$$

ahol γ az aranymetszés aránya, az $x^2-x-1=0$ egyenlet pozitív gyöke.

$$f_{n-1} \approx 10^6 : \gamma \approx 618\,033{,}9887 \quad \text{miatt} \quad f_{n-1}=618\,034$$

választással és az $f_{n-2}=f_n-f_{n-1}$ rekurzióval „visszafelé” számolva a sorozat tagjait $f_{n-18}=144$, $f_{n-19}=154$, $f_{n-20}=-10$, így $n-19\geq 1$, azaz $n\geq 20$, másfelől $n-20\leq$ ≤ 0, azaz $n\leq 20$. Így $n=20$, $f_1=154$ és $f_2=144$.

4. A homok lepergése önmagában is bonyolult folyamat, amelyet a homokóra függőleges mozgása még bonyolultabbá tesz. Egyszerű elméleti megfontolásokkal nem lehet sem a sietésre, sem pedig a késésre következtetni, a ténylegesen elvégzett kísérletek pedig azt mutatták, hogy mindkét eset előfordulhat.

5. Az ábra hasonlóságainak felhasználásával könnyen megmutatható, hogy a körök sugarai mértani sorozatot alkotnak, így $r=\sqrt{5\cdot 45}=15$ cm.

6. A forráshoz az szükséges, hogy a folyadék hőmérsékletének megfelelő telített gőz nyomása meghaladja a folyadék nyomását. Zárt tartály és lassú melegítés esetén a folyadék feletti légtérben levegő és telített gőz található, ezek együttes nyomása (és ezzel együtt a folyadék nyomása is) mindig nagyobb, mint a telített gőz nyomása az esetlegesen képződő buborékokban. Ilyen buborékok tehát nem is jöhetnek létre, a folyadék sosem jön forrásba, hanem lassan, fokozatosan alakul át légnemű halmazállapotúvá.

7. Legalább 99-en biztosan megmenekülhetnek, a leghátul állónak pedig erre $\frac{1}{2}$ esélye van. Ha a leghátsó az előtte álló 99 sapka közül pl. a fehérek számának paritását mondja – pl. „fehér"-t mond, ha ez a szám páros – akkor a látható sapkák és az addig elhangzottak ismeretében minden további elítélt meg tudja mondani, milyen színű sapka van a fején.

8. A gömb tükröző részén visszaverődő fény fotonjainak a gömb középpontjára vonatkoztatott impulzusnyomatéka nem változik az „ütközés" során, ezek a fotonok tehát nem fejtenek ki forgatónyomatékot a gömbre. A fekete felületen elnyelődő fény viszont el akarja forgatni az UFO-t, méghozzá úgy, hogy minél kevesebb fekete részt érjen napfény. Amikor a tükröző oldalát fordítja a Nap felé, az a forgás szempontjából stabil egyensúlyi helyzet, a fordított állás pedig instabil.

9. A **B. 3401.** feladat II. megoldása szerint (lásd e szám 162–163. oldalait) elegendő egyenlő tömegű csomagok esetén megtalálni a maximálisan elszállítható terhet, ehhez pedig az I. megoldás $h(x)$ függvényének a felső határát kell megkeresni. A $\frac{3}{x}$ és $\frac{11}{x}$ egész értékeit vizsgálva $h(x)$ felső határa $\frac{10}{7}$, így a maximális elszállítható teher $14 - \frac{10}{7} = \frac{88}{7}$ tonna, $88+7$ maradéka 3-mal osztva 2.

10. 99 méréssel biztosan ki tudjuk választani a legkönnyebbet, hiszen mindegyik méréssel kiválaszthatunk egy nehezebbet, s azt kidobva egyesével fogyaszthatjuk a még esélyes golyók számát. Meglepő, de ennél hatékonyabb eljárást nem ismerünk!

11. A c/r arány – meglepő módon – tetszőlegesen nagy lehet! Az alábbi eljárással egy adott (c,r) kertből egy megfelelő (c',r') kert készíthető úgy, hogy

$$\frac{c'}{r'} = \frac{c}{r} + \frac{1}{3}.$$

Tekintsünk egy 1 méter sugarú kört és ezen az A_0, A_1, A_2 pontokat, majd a kert minden X virágából mérjük fel az $\overrightarrow{XX_1} = \overrightarrow{A_0A_1}$ és az $\overrightarrow{XX_2} = \overrightarrow{A_0A_2}$ vektorokat, és az X_i pontba ültessük az X-szel azonos fajtájú virágot. Így a kert két eltolt példányát kapjuk, amelyre teljesülnek a feltételek. Végül ha X rezeda, akkor az X, X_1, X_2 hármas – egységnyi sugarú – körülírt körének a középpontjába ültessünk egy cikláment.

Az új kertben $r' = 3r$ rezeda és $c' = 3c + r$ ciklámen lesz, így $\frac{c'}{r'} = \frac{c}{r} + \frac{1}{3}$, így a $\frac{c}{r}$ arány valóban tetszőlegesen nagy lehet.

Megjegyzés. Az $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2}$ vektorokat úgy kell fölvennünk, hogy ne kerüljön egy helyre két virág, és egyetlen ciklámen körül se legyen 3-nál több rezeda. Könnyen látható, hogy így csak véges sok vektort zárunk ki minden egyes alkalommal, így a megfelelő $\overrightarrow{A_0A_i}$ vektorok mindig megadhatók.

12. A klasszikus fizikában a mozgó hullámforrás esetén a Doppler-effektusánál csak a hullámforrásnak a megfigyelő irányába eső sebességkomponense számít, így az éppen merőlegesen mozgó fényforrás színe változatlan maradna. Nagyon nagy sebességeknél azonban a relativisztikus Doppler-formulát kell alkalmaznunk, amely szerint egy „merőlegesen” mozgó fényforrás fényének frekvenciája

$$f' = f\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < f,$$

az eredetileg zöld színű fény tehát a vörös felé tolódik el. (Ez a transzverzális Doppler-effektusnak nevezett jelenség.)

13. A játékot az első játékos nyeri, mégpedig 4-gyel és 5-tel kezdve is nyerhet. Egyesével haladva rendre kiértékelhetők a kezdőhelyzetek, és azt találjuk, hogy a játék kimenetelét tekintve a kezdőhelyzetek sorozata periodikus, a periódus hossza pedig 32 (és nem 11). Mivel $111 = 3 \cdot 32 + 15$ és 15 zseton esetén – a lépésismétlés korlátozása miatt – a 4 és az 5 is nyerő kezdőlépés, innen kapjuk az állítást.

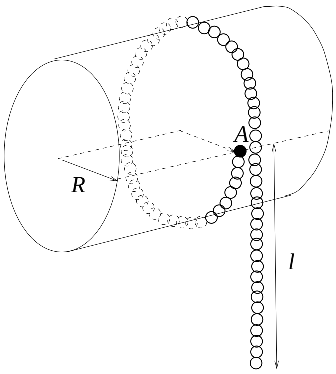
Megjegyzés. Balszerencsés vagy szerencsés, mindenesetre a 13. számú kérdéshez méltó, hogy a feladat kérdésére sokan úgy válaszolhattak jól, hogy nem tudták, mi az igazság. Elsietett elemzés ugyanis azt látzik mutatni, hogy a nyerő helyzetek sorozata 11 szerint periodikus. Eszerint értékelve az első játékos nyeri a játékot, de nyerő lépése nem a 4 és nem is az 5. Helyesen játszva tehát – okoskodtak sokan – nem kezdhet sem 4-gyel, sem pedig 5-tel, A formális logika következtetési szabályai szerint tehát az első két állítás igaz, hiszen az előtagjuk hamis.

13 + 1. Ez a probléma szerepel a kitűzött feladatok között, részletes megoldását ezért csak később közöljük. Itt most csak annyit árulunk el, hogy Joe partra lépésének helye és az aranyrög közötti x távolságot célszerű független változónak választani, s ennek függvényében keresni a teljes haladási idő minimumát.

Beszámoló a 2000. évi Eötvös-versenyről

2000. október 20-án rendezte meg az Eötvös Loránd Fizikai Társulat hagyományos őszi tanulóversenyét, az Eötvös-versenyt. Összesen 167 versenyző adott be dolgozatot, közöttük egy vietnami és egy román állampolgár, mindketten az ELTE elsőéves fizikus hallgatói.

Ismertetjük a feladatokat, a feladatok helyes megoldását, majd a verseny végeredményét.



1. ábra

1. *Egy R sugarú, sima felületű, vízszintes helyzetű, rögzített hengerhez egy apró szemű láncot kötünk úgy, hogy egyik végét a paláston, a henger tengelyével azonos magasságban levő A pontban rögzítjük, majd a láncot egyszer átvetjük a hengeren.*

Legalább mekkora legyen a függőlegesen lelógó rész l hossza, hogy a lánc többi része mindenhol a henger palástjához simuljon?

(Varga István)

Megoldás. Mindenek előtt azt vegyük észre, hogy ez a probléma nem a jól ismert dinamikai feladat-család egyik eleme, amikor is a hengerről lecsavarodó lánc felpörgeti a hengert! Most a henger rögzített, és rögzített az A pont is, a lánc egyik vége. Legfeljebb az fordulhatna elő, hogy az alul kihasasodó lánc egyre jobban elválik a hengertől, s magával rántja, lehúzza az egész láncot. Persze ez se fordulhat elő, ha a lánc függőlegesen lelógó része elég hosszú. Mennyi ez az „elég”? Ez a kérdés. Vagyis ez egy sztatika feladat, amiben a lánc egyensúlyát kell megvizsgálnunk! (Az igaz, hogy nem éppen a legegyszerűbb feladatok közül való, ezért is jelentett kellemes meglepetést a Versenybizottságnak, hogy 18 olyan versenyző volt, aki hibátlan megoldást adott rá.)

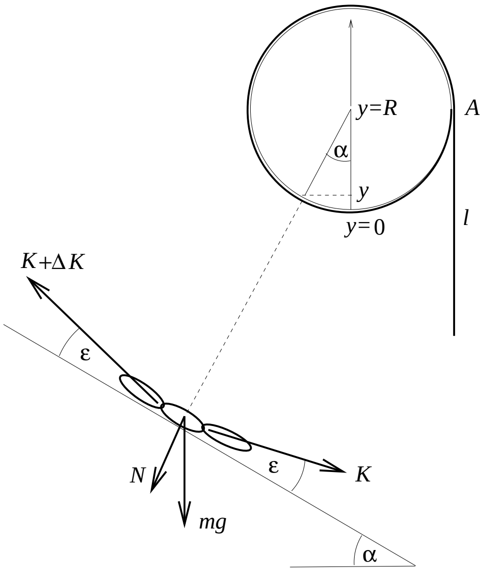
Készítsünk ábrát, melyen egyrészt a hengerhez símuló és jobb oldalt lelógó láncot látjuk, majd ennek egy kicsiny, kinagyított részét, s ezen ábrázoljuk valamelyik kiválasztott láncszemre ható erőket! Jelöljük egyetlen láncszem tömegét m-mel, átmérőjét (két egymás melletti láncszem középpontjának távolságát) d-vel! Válasszuk ki az *2. ábrán* α szöggel (illetve y függőleges koordinátával) megjelölt helyzetű láncszemet, s ábrázoljuk az erre ható erőket:

mg nehézségi erő hat rá függőlegesen lefelé;

N nyomóerőt fejt ki rá a henger sugár irányban (az érintőre merőlegesen);

K erőt fejt ki rá a jobb oldali szomszédja;

$K+\Delta K$ erőt fejt ki rá a bal oldali szomszédja.



2. ábra

E két utóbbi húzóerő, amit a szomszédos láncszemek fejtenek ki rá, nem esik egy egyenesbe, hanem a henger görbületének megfelelően $\varepsilon = d/(2R)$ szöget zárnak be a hengernek a kiválasztott láncszemhez húzott érintőjével, ahogyan ez a *2. ábra* kinagyított részén is látható.

A kiválasztott láncszemre ható erők eredője zérus. Írjuk fel először az érintő irányú erők egyensúlyát:

$$(K+\Delta K)\cos\varepsilon - mg\sin\alpha - K\cos\varepsilon = 0.$$

Mivel $\varepsilon \ll 1$, ezért $\cos\varepsilon \approx 1$, tehát írhatjuk:

$$\Delta K = mg\sin\alpha.$$

Ha a kiválasztott láncszem függőleges koordinátája y, a felső szomszédjáé pedig $y+\Delta y$, akkor

$$\Delta y = d\sin\alpha,$$

ezért

$$\Delta K = \frac{mg}{d}\Delta y.$$

Azt kaptuk, hogy ΔK arányos Δy-nal. Ebből következik, hogy K lineáris függvénye y-nak, vagyis

$$K = \frac{mg}{d} y + \text{konstans}.$$

(Hasonló módon járunk el sok esetben a fizikában; például amikor az egyenletesen gyorsuló mozgásnál abból, hogy Δv arányos Δt-vel, arra következtetünk, hogy $v = at + v_0$.)

A fenti konstans értékét abból a feltételből határozhatjuk meg, hogy speciális esetben, az A pontban ($y = R$ helyen) a K erőnek $(l/d) \cdot mg$-nek kell lennie, hiszen l/d láncszem „húzza lefelé" az A pontbeli láncszemet.

$$\frac{l}{d} mg = \frac{mg}{d} R + \text{konstans},$$

amiből a konstans értéke $mg(l - R)/d$-nek adódik. Ezt felhasználva

$$K = \frac{mg}{d} (y + l - R).$$

Tudunk-e most már valamit mondani az l hosszúság minimális értékéről? Az biztos, hogy a láncszemek csak húzni tudják egymást, tolni nem, ezért $K \geq 0$ még a legalsó pontban is, ahol $y = 0$. Ebből pedig a fenti egyenlet alapján az már biztos, hogy $l \geq$ $\geq R$. Vajon elég lenne $l = R$ is? Csak akkor, ha a legalsó láncszemet már nem húznák a szomszédai. Ez kicsit gyanús!

A lánc egyensúlyának szükséges és elégséges feltétele, hogy az érintő és a sugár irányú erők (erő-összetevők) eredője zérus legyen. Eddig még csak az érintő irányú egyensúlyt vizsgáltuk! Írjuk fel a sugár irányú erők egyensúlyát is:

$$(K + \Delta K) \sin\varepsilon + K \sin\varepsilon - N - mg \cos\alpha = 0.$$

Használjuk fel, hogy $\sin\varepsilon = d/(2R)$, valamint $\cos\alpha = (R - y)/R$.

$$(K + \Delta K) \frac{d}{2R} + K \frac{d}{2R} - N - mg \frac{R - y}{R} = 0.$$

Mivel $\Delta K \ll K$, ezért az első két tag összege Kd/R-nek vehető. Fejezzük ki az N nyomóerőt:

$$N = K \frac{d}{R} - mg \frac{R - y}{R},$$

és helyettesítsük be $K = \frac{mg}{d} (y + l - R)$-et! Azt kapjuk, hogy minden y-ra fenn kell állnia az alábbi egyenlőségnek:

$$N = mg \frac{2y + l - 2R}{R}.$$

Mivel a nyomóerő sem lehet negatív, $N \geq 0$, ez pedig $y = 0$ esetén azt jelenti, hogy

$$l \geq 2R.$$

Ez a feladat megoldása: a lánc lelógó részének legalább $2R$ hosszúságúnak kell lennie.

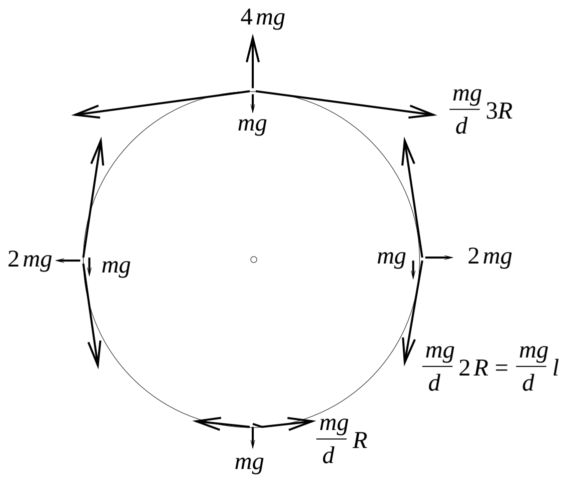
Megjegyzés. Megvizsgálhatjuk most már, hogy a K húzóerőnek mi a minimális értéke.

$$K=\frac{mg}{d}(y+l-R)=\frac{mg}{d}(y+R).$$

A hengerre simuló legalsó láncszem ($y=0$) esetén:

$$K_{\min}=\frac{mg}{d}R.$$

Ez bizony nem zérus, hanem éppen akkora, mint a lánc függőlegesen lelógó részében a vele egy magasságban fellélő húzóerő. A *3. ábrán* feltüntettük a lánc néhány helyén az egyes láncszemekre ható nehézségi erőt, nyomóerőt és a láncot feszítő erőket. Érdekes, hogy ha a legalsó láncszemet nem nyomja a henger, akkor az A pont magasságában levőket a nehézségi erő kétszeresével, a legfelső láncszemet pedig a rá ható nehézségi erőnél négyszer nagyobb erő szorítja a hengerhez.



3. ábra

2. *Felül nyitott kémcsőben vizet forralunk. Közvetlenül mielőtt az utolsó néhány csepp is elforrna, a kémcsövet hirtelen légmentesen lezárjuk. Ezután a kémcső tetején a hőmérsékletet lassan* 200 °C*-ra emeljük, miközben gondoskodunk arról – ha kell hűtéssel, ha kell fűtéssel, – hogy a kémcső legalján a hőmérséklet* 100 °C *maradjon.*

Mekkora lesz a kémcsőben a gőznyomás?

(Károlyházy Frigyes)

Megoldás. A feladat kérdése is sugallja, hogy a nyomás az egész kémcsőben végig ugyanakkora. Az a kis nyomáskülönbség, ami a gőz hidrosztatikai nyomásából adódna a kémcső alja és teteje között, nyilván elhanyagolható a telített gőz nyomásához képest.

Kiindulási állapotban a kémcső felül nyitott, benne vizet forralunk, tehát az alján 100 °C-os a víz, felette 100 °C-os telített vízgőz van, amelynek nyomása megegyezik a külső légnyomással (101 kPa).

Amikor bezárjuk a kémcsövet, az alján még van egy pici víz. A végállapotban a kémcső tetején a hőmérséklet 200 °C, az alján pedig 100 °C. Nőtt a gőz átlaghőmérséklete, ezért a nyomása nem csökkenhetett. Csökkent viszont a sűrűsége (legjobban a kémcső tetején, ahol a legjobban nőtt a hőmérséklete), s ez csak úgy lehetséges, hogy a gőz egy része lecsapódott vízzé. Alul tehát maradt víz (még nőtt is a mennyisége), amelyet 100 °C-on tartottunk. A 100 °C-os telített gőz nyomása pedig a kezdeti, 101 kPa.

A kémcsőben tehát a végállapotban is 101 kPa a gőznyomás!

Megjegyzés. Érdekes, hogy ez a könnyűnek látszó feladat milyen nehéznek bizonyult a versenyzők számára. Csupán 11 versenyzőnek sikerült jól megoldania. A legtöbb hibás érvelés szerint a nyomás nő a lezárt kémcsőben – akik így gondolták, nem vették észre az alul maradó 100 °C-os víz nyomásbeállító szerepét.

Egy megoldónak nehézséget okozott, hogy a „Négyjegyű”-ben lévő táblázatban a vízgőz hővezetési együtthatójára egy sajtóhiba következtében 6 nagyságrenddel nagyobb érték szerepel, mint az igazi érték. A hibás adat figyelembe vételével a gőz hőmérsékletét végig állandónak lehetett tekinteni, s a kémcső alján lévő vízben alakult volna ki $100\,^\circ$C hőmérsékletkülönbség a víz alja és teteje között. Ennek feltételezésével viszont teljesen jól érvelt, ezért a Versenybizottság az ő megoldását is elfogadta. (A Nemzeti Tankönyvkiadó azóta megígérte, hogy a hibát már a 2001-es kiadásban korrigálni fogják.)

3. *Egy optikai rácsra, rá merőlegesen, monokromatikus fényt bocsátunk. A rács, melynek szomszédos rései d távolságra vannak egymástól, nem egészen szokványos: szélesebb és keskenyebb rések felváltva követik egymást. (Például a páratlan sorszámúak szélessége a, a párosaké b, ahol $b<a$ és mindkettő sokkal kisebb, mint d.) A rács fenti sajátsága jellegzetes, könnyen észrevehető módon mutatkozik meg az elhajlási képben. Hogyan?*

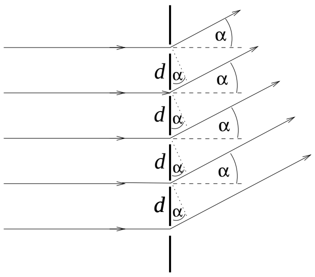
Készítsünk vázlatos ábrát az elhajlási képről, ha $b \ll a$, illetve ha $b \approx a$!

(Gnädig Péter)

Megoldás. Az optikai rács egy síkba eső, egymással párhuzamos rések rendszere. A rések egymástól egyenlő távolságra helyezkednek el; két egymás melletti rés távolságát (egy átlátszó és egy át nem látszó rész együttes vastagságát) d-vel, a rések számát pedig N-nel szokás jelölni. Általában a rések egyenlő vastagságúak, ez a feltétel azonban most nem teljesül.

Mivel a feladatban szereplő optikai rácsra merőlegesen esik monokromatikus fény, feltehetjük, hogy a résekből kilépő fényhullámok fázisa kilépéskor egyenlő, amplitúdójuk pedig arányos a rések szélességével.

E hullámok interferenciájának eredményét látjuk az ernyőn. Az intenzitás az eredő hullámamplitúdó négyzetével arányos. N rés esetén N hullám interferenciáját kell tanulmányoznunk; az interferencia eredménye a találkozáskor fellépő fáziskülönbségektől, az pedig az útkülönbségektől függ.



4. ábra

Két egymás melletti résből kilépő hullám közötti útkülönbség abban az irányban, amelyik az eredeti iránnyal α szöget zár be: $d\sin\alpha$ (lásd a *4. ábrát*). Ha $d\sin\alpha = \lambda/2$, akkor az egymás melletti résekből érkező hullámok ellentétes fázisban találkoznak az ernyőn. Ha a rések egyenlő szélességűek ($a=b$), akkor a hullámok páronként kioltják egymást. Ha $a>b$, akkor az eredő intenzitás

$$I \sim \left[\frac{N}{2}(a-b)\right]^2 .$$

Ez nemcsak akkor következik be, ha $d\sin\alpha=\lambda/2$, hanem minden olyan esetben, amikor

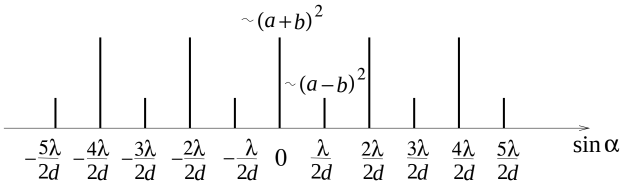
$$d\sin\alpha=(2k+1)\frac{\lambda}{2}, \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

Azokban az esetekben pedig, amikor

$$d\sin\alpha = 2k\frac{\lambda}{2} = k\lambda, \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

akkor valamennyi résből érkező hullám azonos fázisban találkozik az ernyőn. Ekkor az eredő intenzitás:

$$I \sim \left[\frac{N}{2}(a+b)\right]^2.$$

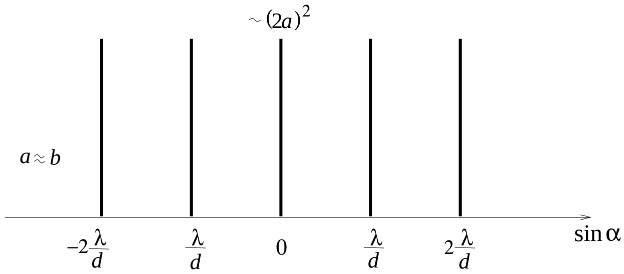


5. ábra

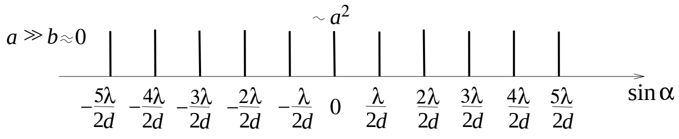
Ábrázoljuk az ernyőn látható elhajlási kép intenzitását az elhajlási irányt jellemző $\sin\alpha$ függvényében (*5. ábra*)! (Kicsiny elhajlási szögeknél $\sin\alpha$ arányos az ernyőn ténylegesen megfigyelhető eltérülési távolsággal.) Minthogy a is és b is sokkal kisebb d-nél, N viszont általában elég nagy szám, az elhajlási képben csak a „főmaximumok" intenzitása lesz észrevehető. (Belátható, hogy ha a fentebb tárgyalt esetek egyike sem teljesül, vagyis az egymás melletti résekből érkező fényhullámok útkülönbsége nem egész számú többszöröse a félhullámhossznak, akkor a sok-sok helyről érkező hullám csaknem teljesen kioltja egymást.)

Az ernyőn tehát aránylag éles vonalakat látunk, egymástól egyenlő távolságra, de most csak minden másodiknak lesz egyenlő az intenzitása. Felváltva követik egymást az erősebb és a halványabb vonalak. Ez az a könnyen felismerhető jellegzetessége az elhajlási képnek, amit a kétféle résszélesség okoz. A vonalak annál élesebbek, minél több résből áll a rács, és külön az erősebb, illetve külön a halványabb vonalak intenzitása annál inkább egyenlő egymással, minél kisebb a rések szélessége a rések távolságához képest.

Ábrázoljuk még a kérdezett két speciális esetet! Ha $a \approx b$, akkor a *6. ábrán* látható intenzitás-eloszlást, ha pedig $a \ll b$, akkor a *7. ábrán* bemutatott intenzitás-eloszlást kapjuk.



6. ábra



7. ábra

Megjegyzés. Erre a feladatra nem született hibátlan megoldás, elég jó megoldást adott három versenyző. Többen megsejtették, hogy az elhajlási képen fényesebb és halványabb vonalak váltakozva követik egymást, de ezt – tévesen – a szélesebb és keskenyebb réseken átjutó fény erősségének különbözőségével, mégpedig a fényerő-arány valamiféle „leképződésével" magyarázták. Pedig a keskeny és a széles résből jövő fény intenzitásának aránya $\left(b/a\right)^2$, míg az ernyőn a halvány és a fényes vonalak intenzitásának aránya $(a-b)^2/(a+b)^2$, s e kettő csak egyetlen esetben egyenlő: ha $b/a=\sqrt{2}-1$.

A verseny végeredménye

Első díjat (és 12 ezer Ft jutalmat) kapott: **Buruzs Ádám**, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem mérnök-fizikus hallgatója, aki a szegedi Radnóti Miklós Gimnáziumban érettségizett mint *Mike János* és *Hilbert Margit* tanítványa.

Második díjat (és 6–6 ezer Ft jutalmat) kaptak: **Pozsgay Balázs**, a pécsi Magyar-német Nyelvű Iskolaközpont 12. osztályos tanulója, *Kotek László* tanítványa és **Siroki László**, a debreceni Fazekas Mihály Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Adorján László* és *Szegedi Ervin* tanítványa.

Harmadik díjat (és 4–4 ezer Ft jutalmat) kaptak: **Béky Bence**, a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Horváth Gábor* tanítványa; **Gáspár Merse Előd**, az Eötvös Loránd Tudományegyetem fizikus hallgatója, aki a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnáziumban érettségizett mint *Horváth Gábor* tanítványa; **Hegedűs Ákos**, az Eötvös Loránd Tudományegyetem fizikus hallgatója, aki a pécsi ciszterci Nagy Lajos Gimnáziumban érettségizett mint *Orovica Márkné* és *Kotek László* tanítványa; **Máthé András**, az Eötvös Loránd Tudományegyetem matematikus hallgatója, aki az ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnáziumban érettségizett mint *Flórik György* tanítványa; **Pápai Tivadar**, a barcsi Dráva Völgye Középiskola 11. osztályos tanulója, *Horváth Ferenc* tanítványa; **Pesti Gábor**, a nagykanizsai Batthyány Lajos Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Piriti János* tanítványa és **Schmidt András**, a budapesti Szent István Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Moór Ágnes* tanítványa.

Dicséretet kaptak: **Csillag Kristóf Béla**, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem műszaki informatika szakos hallgatója, aki a püspökladányi Karacs Ferenc Gimnáziumban érettségizett mint *Szerdi János* és *Szegedi Ervin* tanítványa; **Hegedűs Zoltán Csaba**, a Szegedi Tudományegyetem programtervező matematikus hallgatója, aki a miskolci Andrássy Gyula Műszaki Középiskolában érettségizett mint *Gonda Gáspár* tanítványa; **Patay Gergely**, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem mérnök-fizikus hallgatója, aki a debreceni Tóth Árpád Gimnáziumban érettségizett mint *Kovács Miklós* és *Szegedi Ervin* tanítványa és **Pápai Péter**, a barcsi Dráva Völgye Középiskola 12. osztályos tanulója, *Horváth Ferenc* tanítványa.

❄

Az ünnepélyes díjkiosztásra 2000. november 17-én az ELTE TTK új lágymányosi épületének földszinti nagy előadótermében került sor. Bevezetőjében a Versenybizottság elnöke emlékeztetett arra, hogy ez a verseny több, mint száz éves múltra tekinthet vissza, s a millenniumi 2000. évben felidézte, kik nyerték a versenyt 100, 75, 50 és 25 évvel ezelőtt.

KöMaL – 2001/3 FIZ0103 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 20:47 (9. lap)

1900-ban Juvancz Ireneusz és Szmodics Kázmér lettek az akkor még tisztán matematikai tanulóverseny győztesei. Juvancz Ireneusz később Szilárd Leónak tanította a matematikát a VI. kerületi Főreálban, majd rövid ideig a Mintagimnázium igazgatója is volt. A Szmodics családból 1900-ban Kázmér, két év múlva Hildegárd iratkozott fel a nyertesek közé.

1925-ben már külön matematikai és külön fizikai versenyt hirdetett meg az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat. Mindkettőben első helyezett lett az akkor 17 éves Teller Ede; matematikából hármas holtversenyben, fizikából egyedül lett első. Tudjuk, hogy milyen szeretettel és nosztalgiával emlékszik vissza erre a ma 90-es éveiben járó idős tudós.

1950-ben, a matematikusoktól különvált Eötvös Loránd Fizikai Társulat rendezésében lebonyolított versenyt Mráz (Zimányi) József és Rozványi Iván nyerte meg holtversenyben, természetesen mindketten fizikusok lettek.

1975-ben a Versenybizottság nem adott ki első díjat. A második díjon ketten osztoztak: Szép Jenő, aki ma az ELTE Szilárdtestfizikai tanszékén dolgozik és Zimányi Gergely, aki jelenleg az Egyesült Államokban kutatja és tanítja a fizikát. A névazonosság nem véletlen: Gergely Zimányi József fia. A díjkiosztó ünnepségen mindkettőjük képviseletében megjelent Zimányi Józsefnét a résztvevők tapsa köszöntötte.

A 2000. évi Eötvös-verseny nyertesei
Első sor (balról jobbra): Siroki László, Buruzs Ádám és Pozsgay Balázs.
Második sor: Gáspár Merse Előd, Schmidt András, Pápai Tivadar, Béky Bence, Máthé András és Hegedűs Ákos.
Harmadik sor: Hegedűs Zoltán Csaba, Pápai Péter, Patay Gergely, Csillag Kristóf Béla.

Ezután került sor az idei feladatok megoldásának ismertetésére és diszkussziójára. Az első feladathoz kapcsolódóan Gnädig Péter mutatott be érdekes kísérleteket a még csak általános iskolás Sükösd Attila aktív közreműködésével. (Attila fizikus édesanyja biztosította a kísérlethez szükséges eszközöket.) A második feladat megoldásának bemutatására a Versenybizottság elnöke váratlanul három versenyzőt hívott ki a táblához. Ők a hallgatóság számára is meggyőzően, egymást kiegészítve ismertették saját megoldásaikat. Csak a díjkiosztásnál derült ki később, hogy ők lettek az idei verseny első három helyezettje. A harmadik feladat megoldását újra a Versenybizottság elnöke mutatta be, aki ezután a Társulat alelnökeként ünnepélyesen kiosztotta a 2000. évi Eötvös-verseny díjait és a dicséreteket.

A díjakhoz a már említett pénzjutalmakon kívül a Nemzeti Tankönyvkiadó könyvutalványokat is felajánlott, összesen 50 ezer forint értékben, melyeket a Kiadó képviselője személyesen adott át. A nyertes diákokat elkísérő tanárok ugyancsak a Nemzeti Tankönyvkiadó, valamint a Műszaki-Calibra Kiadó és a TYPOTEX Kiadó által felajánlott könyvek közül válogathattak.

Az ünnepélyes díjkiosztás záróaktusaként a jelenlévő diákok és tanárok régebbi Eötvös-verseny nyertesekkel ismerkedhettek meg, ha még eddig nem ismerték volna őket személyesen: Holics László (1949), Tichy Géza (1963), Gnädig Péter (1965) és Szép Jenő (1975) pályáját döntően befolyásolta a Eötvös-versenyen elért sikeres szereplés.

Radnai Gyula
a Versenybizottság elnöke

Fizika gyakorlatok és feladatok megoldása

P. 3280. *Csökkentsük vagy növeljük a vízgőzzel telített levegő térfogatát annak érdekében, hogy a vízgőz egy része kicsapódjék a levegőből?*

(*4 pont*) Közli: *Fári Jánosné,* Szigetvár

Megoldás. Vizsgáljuk meg, mi történik a vízgőzzel, ha a térfogatát csökkentjük, illetve ha növeljük. (Megfontolásaink során csak a vízgőzzel kell törődjünk, egyéb gázok jelenléte — Dalton törvénye szerint — a telítési nyomásra nincs hatással.)

A telített gőzre (hacsak nem vagyunk a kritikus pont közelében) jó közelítéssel érvényes az ideális gázok állapotegyenlete:

$$pV = NkT.$$

Ha a telített gőz térfogatát *lassan* csökkentjük, a hőmérséklet állandó marad, a nyomás sem tud megváltozni, mert az csak a hőmérséklettől függ, így a gáztörvény szerint az N részecskeszámnak kell csökkennie. A lassan összenyomott gőz egy része tehát *kicsapódik.* A térfogat lassú növelésekor a fordított folyamat játszódik le: a víz egy része elpárolog, növekszik a gőztérben levő vízmolekulák száma.

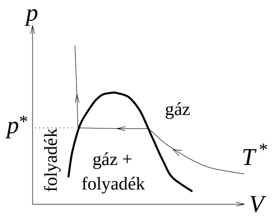
Ha a térfogatot olyan *hirtelen* növeljük meg, hogy nincs idő számottevő hőcserére a vízgőzt tartalmazó tartály és a környezete között, akkor a hőmérséklet lecsökken (adiabatikus tágulás). Az új, alacsonyabb hőmérséklethez tartozó telítési gőznyomás kisebb lesz, mint az eredeti, sőt, annak ellenére, hogy V nő és T csökken, a gőz egy része *kicsapódik.*

A gőz kicsapódása tehát a térfogat csökkentésével és növelésével egyaránt előidézhető, a térfogatváltozás tényleges hatása a folyamat sebességétől függ.

Antal Miklós (Pécs, Babits M. Gimn., 10. o.t.)

KöMaL – 2001/3 FIZ0103 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 20:47 (11. lap)

Megjegyzések. 1. Ha a telített gőzök állapotváltozását az ideális gáz közelítésnél pontosabban akarjuk nyomon követni, akkor pl. a van der Waals-féle állapotegyenletet használhatjuk, vagy vizsgálhatjuk a mérési eredmények alapján empírikusan megállapított összefüggéseket. Az *1. ábrán* egy valódi izotermát látunk a $p-V$ diagramon. Ezen megfigyelhetjük, hogy az izotermikus összenyomás során a gáz nyomása mindaddig nő, amíg el nem éri az adott T^* hőmérséklethez tartozó p^* (a telített gőz nyomásának megfelelő) értéket. Ezek után a nyomás nem nő tovább, hanem a gáz elkezd lecsapódni. A térfogat csökkentése közben fokozatosan nő a lecsapódott folyadék mennyisége. A nyomás mindaddig állandó marad, amíg az egész gázmennyiség le nem csapódik. A gázok tehát *állandó hőmérsékleten* úgy cseppfolyósíthatók, ha a *térfogatukat csökkentjük.*

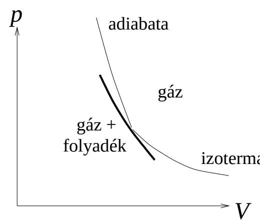


1. ábra

Ha a gázt a környezetétől adiabatikusan elzárva akarjuk cseppfolyósítani, akkor azt kell valamilyen módon elérnünk, hogy a hőmérséklet lecsökkenjen. Mivel most nincs hőátadás ($Q=0$), az első főtétel szerint $\Delta E=-W_{\text{gáz}}$. Ha a gáz végez munkát (vagyis $W_{\text{gáz}}>0$), a belső energia (és vele együtt a gáz hőmérséklete) le fog csökkenni. A gáz pedig akkor végez munkát, ha a *térfogata nő.*

A vízgőz kicsapódásához tehát több út is vezethet: izotermikus folyamatban a térfogat csökkenése, adiabatikus folyamatban a térfogat növelése okozhat vízlecsapódást.

A p–V diagramon a gáz és a kétfázisú állapotokat egymástól elválasztó görbe elég széles tartományban $p\propto 1/V^{1+x}$ alakú, ahol x általában egy viszonylag kicsi pozitív szám. Vízgőz esetén x kb. $\frac{1}{16}$. Ez azt jelenti, hogy a határgörbe meredekebb, mint az izoterma (amelyre ideális gáz esetén $x=0$), de kevésbé meredek, mint az adiabata (amelyre f termodinamikai szabadsági fokú ideális gázra $x=2/f$).



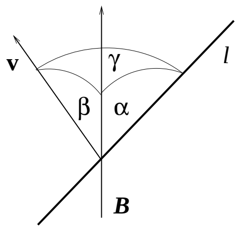
2. ábra

2. A hirtelen kitágított (s emiatt túltelítetté váló) vízgőz kicsapódásához ún. kondenzációs magok szükségesek. Ilyen magok lehetnek pl. koromszemcsék, vagy ionizált részecskék. Az előbbiek a repülőgép kondenzcsíkjának képződésekor, az utóbbiak az elemi részecskéket láthatóvá vevő Wilson-féle ködkamra működése során kapnak szerepet: a gyorsan mozgó, elektromosan töltött elemi részecskék ionokat keltenek, s az ezek által megindított folyadékcsepp-képződés ködfonalként jelöli ki a részecskék pályáját.

(R. Gy.)

190 dolgozat érkezett. Helyes Antal Miklós, Horváth Eszter, Janáky Csaba, Seres András, Takács Gábor és Urbán Dániel megoldása. Hiányos (1–3 pont) 157, hibás 19, nem versenyszerű 8 dolgozat.

P. 3381. **B** *indukciójú homogén mágneses mezőben* l *hosszúságú,* **v** *sebességű egyenes vezető mozog. Mekkora feszültség keletkezik a vezeték két vége között, ha a vezeték a mágneses indukcióval* α*, az indukció a sebességgel* β*, a sebesség a vezetékkel* γ *szöget zár be? (Legyen pl.* $\alpha=30^\circ$*,* $\beta=40^\circ$*,* $\gamma=50^\circ$*,* $l=0{,}5$ m*,* $v=2\,\text{m/s}$ *és* $B=0{,}5$ mT*.)*

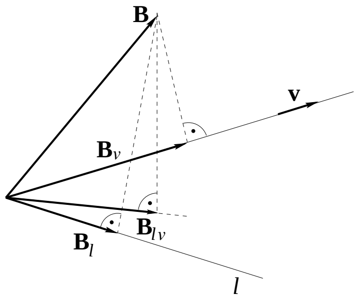


(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

KöMaL – 2001/3 FIZ0103 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 20:47 (12. lap)

I. megoldás. A vezető Δt idő alatt $vl\sin\gamma\Delta t$ területet súrol. Ha a mágneses indukciónak az $l-v$ síkra merőleges komponensét $B_\perp$ módon jelöljük, akkor a Δt idő alatt „átmetszett erővonalak” száma $\Delta\Phi=B_\perp vl\sin\gamma\Delta t$, így az indukált feszültség

$$U=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=B_\perp vl\sin\gamma.$$



1. ábra

Határozzuk meg $B_\perp$-t! Jelölje $\mathbf{B}_l$,$\mathbf{B}_v$ és $\mathbf{B}_{lv}$ rendre a mágneses indukció l-lel, v-vel és az $l-v$ síkkal párhuzamos összetevőit (*1. ábra*)! Az előbbi kettő hossza könnyen számítható:

$$B_l=B\sin\alpha=0{,}433\text{ mT},$$
$$B_v=B\sin\beta=0{,}383\text{ mT}.$$

Legyen x a $\mathbf{B}_l$ és $\mathbf{B}_v$ vektorok által meghatározott háromszög harmadik oldala (*2. ábra*). A koszinusztételből:

$$x=\sqrt{B_l^2+B_v^2-2B_lB_v\cos\gamma}=0{,}348\text{ mT}.$$

Másrészt tudjuk, hogy $\mathbf{B}_{lv}$ vektornak a vezetőre merőleges vetülete $\mathbf{B}_l$, $\mathbf{v}$-re merőleges vetülete pedig $\mathbf{B}_v$, így OPQ és ORQ derékszögű háromszögek, OQ tehát az ORP háromszög körülírt körének átmérője. Alkalmazva a Thalész tételét és az ismert $OQ=x/\sin\gamma$ összefüggést:

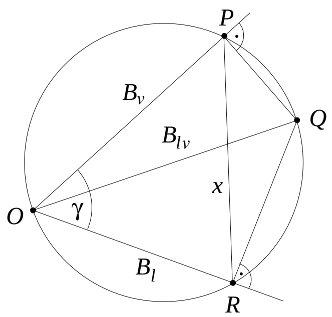
$$B_{lv}=\frac{x}{\sin\gamma}=0{,}454\text{ mT}$$

adódik. Ebből és a Pitagorasz-tételből kapjuk, hogy

$$B_\perp=\sqrt{B^2-B_{lv}^2}=0{,}209\text{ mT},$$

az indukált feszültség pedig

$$U=B_\perp vl\sin\gamma=0{,}16\text{ mV}.$$



2. ábra

Varjú Péter (Szeged, Radnóti M. Gimn. 12. o.t.)

II. megoldás. Válasszuk a koordináta-rendszerünket úgy, hogy a **v** vektor az x irányú legyen, a **B** vektor pedig kerüljön az $x-y$ síkba. Ekkor a három vektor koordinátái:

$$\mathbf{v}=(v,0,0),$$
$$\mathbf{B}=(B_x,B_y,0)=(B\cos\beta,B\sin\beta,0),$$
$$\mathbf{l}=(l_x,l_y,l_z)=(l\cos\gamma,l_y,l_z).$$

KöMaL – 2001/3 FIZ0103 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 20:47 (13. lap)

(Kihasználtuk, hogy ismerjük **B** és **v**, valamint **l** és **v** vektorok egymással bezárt szögét.) Az indukált feszültség számításánál **B**-nek csak **v**-re merőleges (vagyis y irányú), **l**-nek pedig csak **v**-re is és **B**-re is merőleges (vagyis az z irányú) komponense játszik szerepet:

$$U = v \cdot B \sin\beta \cdot l_z.$$

A vektorok skaláris szorzásának szabályai szerint:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{l} = Bl\cos\alpha = B_x l_x + B_y l_y + B_z l_z = Bl\cos\beta\,\cos\gamma + B\sin\beta\, l_y,$$

azaz

$$l_y = l\frac{\cos\alpha - \cos\gamma\,\cos\beta}{\sin\beta}.$$

Innen Pitagorasz tételének felhasználásával

$$l_z = \sqrt{l^2 - l_x^2 - l_y^2} = l\sqrt{1 - \cos^2\gamma - \frac{(\cos\alpha - \cos\gamma\,\cos\beta)^2}{\sin^2\beta}},$$

a keresett feszültség pedig

$$U = Bvl\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma} = 0{,}16\ \mathrm{mV}.$$

Siroki László (Debrecen, Fazekas M. Gimn. 11. o.t.)

III. megoldás. **B** indukciójú mágneses mezőben **v** sebességgel mozgó, **l** vektorral jellemezhető vezetőben (**l** iránya a vezetővel párhuzamos, nagysága pedig a vezető hossza) az indukált feszültség

$$U = (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\mathbf{l},$$

vagyis a **v**, **B** és **l** vektorok vegyesszorzata. Ennek a szorzatnak a nagysága a három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogatával egyezik meg, ami a három vektor által kifeszített tetraéder V térfogatának 6-szorosa. A tetraéder térfogata viszont (lásd pl. *Reiman I.*: Fejezetek az elemi geometriából, 202. old.)

$$V = \frac{vBl}{3}\sqrt{\sin s \cdot \sin(s-\alpha) \cdot \sin(s-\beta) \cdot \sin(s-\gamma)},$$

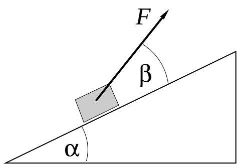
ahol $s = (\alpha + \beta + \gamma)/2$. A megadott számadatokkal $U = 1{,}6 \cdot 10^{-4}$ V.

Nagy Ádám (Budapest, Szent István Gimn. 12. o.t.)

Megjegyzés. Sokan a térbeli vektorok egymásra merőleges vetületeit hibásan („páronként”) számolva az $U = Blv\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma$ képlethez jutottak, és ebből a téves 0,12 mV-os eredményt kapták.

56 dolgozat érkezett. Helyes 20 megoldás. Hiányos (1–3 pont) 33, hibás 1, nem versenyszerű 2 dolgozat.

KöMaL – 2001/3 FIZ0103 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 20:47 (14. lap)



P. 3388. *Az α hajlásszögű deszkán m tömegű testet csúsztatunk fel egyenletes mozgással. Határozzuk meg a csúsztatáshoz szükséges minimális erő nagyságát és irányát! A súrlódási tényező μ.*

(*5 pont*) Közli: *Rácz György*, Mezőkövesd

I. megoldás. A ládát toló F erő iránya az ábrának megfelelően β szöget zár be a lejtővel. Jelölje azt az erőt amivel a láda a lejtőt nyomja N, a súrlódási erőt S, a súrlódási határszöget pedig α_0 (ahol tg $\alpha_0=\mu$)! Az erők egyensúlya miatt

$$F\cos\beta = mg\sin\alpha + S\,,$$
$$N = mg\cos\alpha - F\sin\beta\,,$$
$$S = \mu N\,.$$

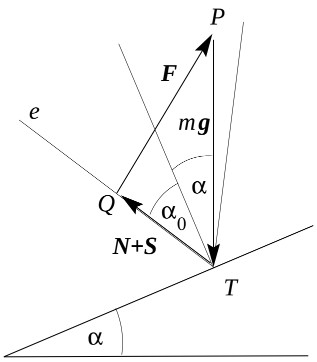
Innen

$$F=mg\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\cos\beta+\mu\sin\beta}=mg\frac{\sin(\alpha+\alpha_0)}{\cos(\beta-\alpha_0)}\,.$$

Ez nyilván akkor a legkisebb, ha $\beta=\alpha_0$. Ekkor

$$F=mg\sin(\alpha+\alpha_0)=mg\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Megoldásunk akkor helyes, ha F még nem függőleges, és a ládát nem emeljük el a lejtőtől (N pozitív). Érdekes módón a két feltétel konkrétan megfogalmazva ugyanarra az egyenlőtlenségre vezet: $\cos(\alpha+\alpha_0)>0$. Ha ez nem teljesül, a legkönnyebb a ládát a lejtő elhagyásával egyszerűen felemelni.



II. megoldás. A test csúszik, tehát a talaj **N** nyomóerejének és az **S** súrlódási erőnek az eredője rajta fekszik a súrlódási határszög által kijelölt (vagyis a test pillanatnyi helyzetét megadó T ponton átmenő, a lejtő normálisával „balra” α_0 szöget bezáró) e egyenesen. Ennek az erőnek és a kérdéses **F** erőnek vektori összege $-m\mathbf{g}$-t kell adjon, hiszen $\mathbf{N}+\mathbf{S}+\mathbf{F}+m\mathbf{g}=0$.

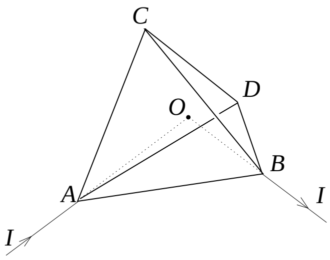
Az **F** erőt úgy szerkeszthetjük meg, hogy a $-m\mathbf{g}$ vektor P végpontját összekötjük az e egyenes valamely Q pontjával. Az erő F nagysága akkor a legkisebb, ha PQ minimális, vagyis amikor PQ merőleges TQ-ra. Az *ábráról* leolvasható, hogy PQ optimális esetben a vízszintessel $\alpha+\alpha_0$ szöget zár be, a minimális nagyságú erő és a lejtő síkjának szöge tehát $\beta=\alpha_0$. A minimális erő nagysága

$$F=mg\sin(\alpha+\alpha_0)=mg(\sin\alpha\,\cos\alpha_0+\sin\alpha_0\,\cos\alpha)=$$
$$=mg\cos\alpha_0(\sin\alpha+\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha_0)=mg\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Mindez csak akkor igaz, ha Q a T ponttól „balra” helyezkedik el, vagyis amíg $\alpha+\alpha_0<\pi/2$. Ellenkező esetben F legkisebb értéke mg, iránya pedig függőlegesen felfelé mutat.

P. 3393. *Homogén, egyenletes keresztmetszetű ellenálláshuzalból szabályos tetraédert állítottunk össze. Egy hosszú, egyenes, a tetraéder O középpontjába irányuló vezetéken az A csúcshoz I áramot vezetünk, a B csúcsból pedig hasonló módon elvezetjük. Mekkora és milyen irányú lesz a mágneses indukcióvektor a tetraéder középpontjában?*

(*6 pont*) Közli: *Radnai Gyula*, Budapest



I. megoldás. Az elrendezésben a C és a D pontok teljesen szimmetrikus szerepet töltenek be, emiatt ekvipotenciálisak, közöttük nem folyik áram. Az ACB és ADB ágak ellenállása kétszerese az AB ág ellenállásának, így a megfelelő áramerősségek:

$$I_{AC}=I_{CB}=I_{AD}=I_{DB}=\frac{I}{4},\qquad I_{AB}=\frac{I}{2}.$$

A Biot–Savart-törvény szerint egy véges hosszúságú egyenes vezetődarab járuléka az általa létrehozott mágneses mezőhöz arányos a vezetékben folyó árammal, és a mező iránya valamely O pontban merőleges arra a síkra, amely vezetőre és az O pontra illeszkedik. Így például az AC szakasz járuléka az O pontbeli mágneses indukcióvektorhoz

$$\mathbf{B}_{AC}=kI\overrightarrow{BD},$$

ahol k (a tetraéder méretétől is függő) pozitív szám. (Felhasználtuk, hogy a szabályos tetraéder szemközti élei merőlegesek egymásra, így a $\overrightarrow{BD}$ vektor éppen a Biot–Savart-törvénynek és a jobbkéz-szabálynak megfelelő irányú.) A többi él járuléka is hasonlóan számolható, és mivel a két hosszú egyenes vezető a középpontban nem hoz létre mágneses teret, a teljes mágneses indukció az O pontban:

$$\mathbf{B}=kI\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{DC}\right).$$

Ez a vektor viszont

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CA}\qquad\text{és}\qquad\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CB}$$

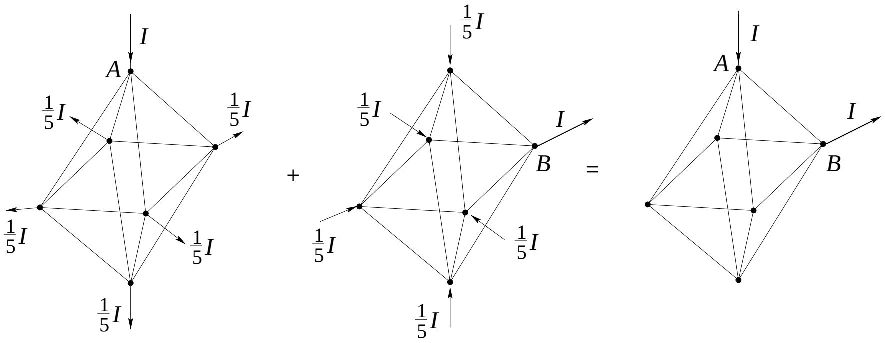
miatt *nullvektor*, vagyis a mágneses indukció a tetraéder középpontjában nulla.

Király Tamás (Budapest, Mechatronikai Szki. és Gimn. 12. o.t.)

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy *mindegyik* szabályos poliéderre (a tetraéder mellett a kockára, az oktaéderre, a dodekaéderre és az ikozaéderre is) igaz a következő állítás: a poliéder *bármely* két csúcsánál „centrálisan” oda-, illetve elvezetett áram hatására kialakuló mágneses mező a poliéder O középpontjában *nulla*.

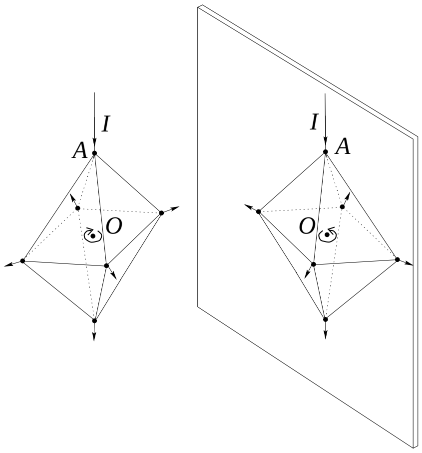
Képzeljük el a következő (csillagszóróra emlékeztető) elrendezést: a poliéder egyik (mondjuk A jelű) csúcsához egy hosszú, egyenes, a középpont felé irányuló vezetéken I

áramot vezetünk, az összes többi csúcsból pedig hasonló irányítású huzalokon egyforma erősségű áramot vezetünk el. Hozzunk létre egy másik, hasonló árameloszlást: vezessünk el a B pontból I áramot, az összes többi csúcspontba pedig egyforma erősségű befolyó áramokkal folyamatosan pótoljuk a hiányzó töltéseket. Ezen két árameloszlás szuperpozíciója éppen az állításunkban szereplő áramelrendezést adja (*1. ábra*); így tehát ha sikerül belátnunk, hogy egyetlen „csillagszóró” mágneses tere a poliéder középpontjában nulla, akkor a két tetszőleges helyzetű külső vezetékes árameloszlásra is bebizonyítottuk állításunkat.



1. ábra

Tételezzük fel, hogy A pontba vezetett (és a többi csúcspontnál szimmetrikusan elvezetett) áram hatására a poliéder O közeppontjában valamekkora $\mathbf{B}$ mágneses indukció alakul ki. Ennek a $\mathbf{B}$ vektornak AO irányúnak kell lennie, hiszen a poliédert AO körül valamekkora (a poliéder szimmetriájára jellemző) szöggel (az oktaédert pl. 90°-kal) elforgatva az eredetivel megegyező áramelrendezést kapjuk vissza, és ezzel a „diszkrét szimmetriával” nyilván a mágneses mező is rendelkezik.)



2. ábra

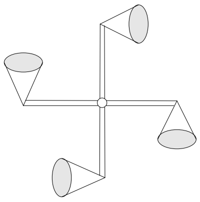
Képzeljük el, hogy a poliéder középpontjának közelében egy töltött részecske az AO tengely körül körpályán mozog. Ha alkalmasan választjuk meg a részecske szögsebességét és keringési irányát, akkor az O pontban mérhető mágneses mező éppen biztosítani képes a körmozgáshoz szükséges nagyságú és irányú centripetális erőt. Képzeljük el továbbá azt is, hogy az egész elrendezést (az árameloszlást, a kialakuló mágneses mezőt és a keringő részecskét) egy tükörből nézzük (*2. ábra*). A poliéder tükörképe az eredetivel megegyező poliéder lesz, az árameloszlás is ugyanolyan, mint a „tükör előtti világban”, a részecske keringése azonban megfordul. Ha a részecske a valóságban az A pont felől nézve mondjuk az óramutatóval megegyező irányban forog, akkor a „tükrön túl” a forgásának iránya éppen ellenkező lesz. A tükrözött elrendezésben tehát a mágneses mező fordított irányú, mint a valóságban, noha az árameloszlás mindkét esetben ugyanaz, tehát a **B** vektornak sem lenne szabad megváltoznia. Egyetlen olyan vektor van, amelyik önmaga (-1)-szerese: a nullvektor.

A poliéder középpontjában tehát a csillagszóróra emlékeztető elrendezésben nem lehet nullától különböző mágneses indukció, s az egyenletek linearitása (szuperponálhatósága) miatt ugyanez érvényes a csillagszórókból összetehető bonyolultabb áramelrendezésekre is.

(G. P.)

28 dolgozat érkezett. Helyes 20 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 6, hibás 2 dolgozat.

A mérési feladat megoldása



M. 220. *Készítsünk papírkúpokból vagy félbevágott pingponglabdákból jól csapágyazott szélkereket! Mérjük meg, hogyan függ a kerék fordulatszáma a szél (légáramlás) sebességétől! Következtethetünk-e a mérési adatokból a homorú (konkáv), illetve a domború (konvex) oldalra vonatkozó közegellenállási tényezőkre?*

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Budapest

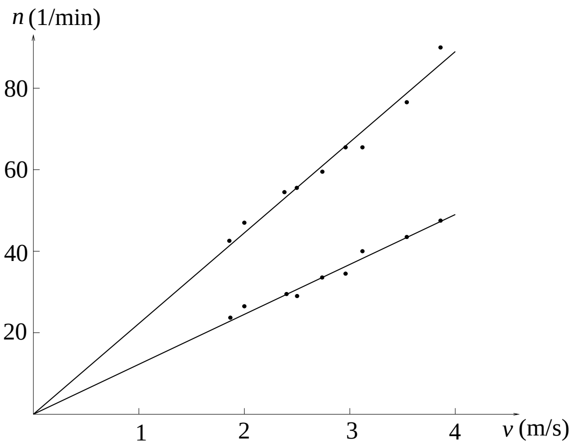
Megoldás. A mérési feladat megoldói több nehéz technikai problémával is szembetalálták magukat: a légáram létrehozása, az áramlás sebességének változtatása, a szélsebesség mérése, egyeseknek pedig a fordulatszám mérése okozott gondot.

A szélkerék elkészítése nem volt különösen nehéz, ezt a javasolt papírtölcséren és félbevágott pingponglabdákon kívül pl. kisméretű műanyagpoharakkal is meg lehetett oldani. Csapágyazáshoz innen-onnan kiszerelt, könnyen forgó szerkezeteket használtak a versenyzők. *Coc Károly,* (Marosvásárhely, Bolyai F. Líceum 10. o.t.) például egy számítógép mikroprocesszorát hűtő ventillátort alkalmazott, mások egyszerűen egy tű hegyére szerelték a szélkereket.

A légáram létrehozására a háztartásban fellelhető „fúvó-alkalmatosságokon" (porszívón, hajszárítón) kívül a legkülönbözőbb módszerekhez folyamodtak a mérők. *Vadász Péter* (Pécs, Leöwey K. Gimn. 11. o.t.) gépkocsira szerelte a szélkereket, *Bíró István* (Marosvásárhely, Bolyai F. Líceum 11. o.t.) kerékpáros megoldást választott, és akadt, aki egyszerűen csak futott a kerékkel.

A nagy kihívást a versenyzők számára a szélsebesség mérése jelentette. Többen azzal kezdték a mérést, hogy meghatártozták (kalibrálták) a porszívó vagy hajszárító légáramának sebességét a készüléktől való távolság függvényében. *Víg Máté* (Pécs, PTE Babits M. Gyak. Gimn. 9. o.t.) és *Nagy Ádám* (Budapest, Szent István Gimn. 12. o.t.) a légmozgás sebességét egy fonalra felfüggesztett, majd a légáramba helyezett (ismert alaktényezőjű) pingponglabda kitéréséből számította ki. *Orosz Gergő* (Miskolc, Földes F. Gimn. 11. o.t.) egy asztal szélére helyezett kis papírgalacsint, a légáramlattal lefújta, majd a vízszintes hajítás megmért eltávolodásából kiszámolta a szélsebességet. *Jurányi*

Zsófia (Pécs, Leöwey K. Gimn. 12. o.t.) egy 8 m hosszú csövet ragasztott össze papírból, és az abban mozgó tollpihék repülési idejéből számolta ki a légáram sebességét. Néhányan „profi” sebességmérő eszközöket használtak, mint pl. *Pethő Balázs* (Pécs, PTE Babits M. Gyak. Gimn. 12. o.t.), aki egy hitelesített kanalas szélsebességmérővel (anemométerrel) dolgozott.



A fordulatszám mérését – ha nem pörgött túlságosan gyorsan a kerék – egyszerű számlálással oldották meg a versenyzők. Ez könnyebben megy, ha a négy kis tölcsér közül az egyiket befestjük, állítja többek között Orosz Gergő. Nagy fordulatszám esetén a kerék tengelyére feltekeredő (vagy az onnan letekeredő) cérnaszál elmozdulásából lehet következtetni a szélkerék fordulatszámára; ezt a módszert alkalmazta *Kupai József* (Kazincbarcika, Ságvári E. Gimn., 11. o.t.). Mások stroboszkópos eljárással próbálták meghatározni a kerék fodulatszámát.

A mérési eredmények feldolgozása (grafikus ábrázolása) után a legtöbb versenyző megállapította, hogy a szélkerék fordulatszáma jó közelítéssel arányos a szél (relatív légmozgás) sebességével. A mellékelt grafikon *Szilágyi Péter* (Debrecen, Kossuth L. Gimn. 9. o.t.) mérési adatait mutatja. Az arányossági tényezők hányadosából becslést lehetett adni a homorú és a domború oldalra vonatkoztatott alaktényezők hányadosára is. Tekintsük a szélkeréken levő 4 félgömbből (vagy papírkúpból) azt a kettőt, melyek éppen a széllel megegyező irányba, vagy azzal ellentétesen mozognak. Ezekre a „lapátokra” ható erők forgatónyomatéka akkor lesz egyenlő (eredőjük akkor nulla), ha

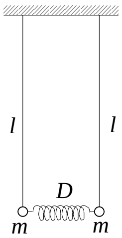
$$k_{\text{domború}}(v_{\text{szél}}+v_{\text{lapát}})^2=k_{\text{domború}}(v_{\text{szél}}-v_{\text{lapát}})^2.$$

(A másik két lapátra ható erőt első közelítésben elhanyagoljuk.) A fenti egyenletben szereplő $v_{\text{szél}}$ és $v_{\text{lapát}}$ arányát a mérési adatokból ismerjük, innen az alaktényezők hányadosát ki tudjuk számítani. Ezzel a módszerrel pl. Bíró István az alaktényezők hányadosára félbevágott pingponglabdáknál 2,6-et, mások műanyagpohárkáknál 11,7-es, papírkúpoknál pedig 6,4-es értéket kaptak.

A szélsebességmérés esetenként megbízhatatlan „kalibrációja”, mozgatott szélkeréknél (mesterséges szél) a természetes szél zavaró hatása és a kerék csapágysúrlódásából adódó „szisztematikus hiba” miatt a mérések reálisan becsült hibája viszonylag nagynak adódott, és emiatt a közegellenállási tényezők arányára kapott számérték aligha tekinthető 10–20%-osnál pontosabbnak.

23 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Bíró István, Jurányi Zsófia, Nagy Ádám, Szilágyi Péter és Vigh Máté megoldása. Kicsit hiányos (5 pont) 6, hiányos (1–4 pont) 11, nem értékelhető 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

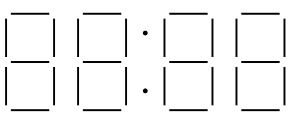


M. 223. Készítsük el az ábrán látható (gyenge rugóval csatolt) kettős ingát, s vizsgáljuk a rendszer olyan mozgásait, amelyek *az ábra síkjában* történnek. Mérjük meg a lebegés frekvenciáját mint l és m függvényét!

(*6 pont*) Közli: *Varga István,* Békéscsaba

P. 3416. A Föld mely részén és hogyan tölthető el két vasárnap egy szombat és a rákövetkező hétfő között?

(*3 pont*) *Takács Gábor,* Budapest



P. 3417. Nagyméretű digitális órát készítettünk, ami az órát és a percet mutatja. A percek jelzéséhez 14 db fénycsövet használtunk fel, amelyek mindegyike átlagosan 2160 üzemóra után kiég. Az órát 2001. január elsején 00 óra 00 perckor indítottuk. A percet jelző fénycsövek közül várhatóan melyik és mikor ég ki elsőként, illetve várhatóan melyik és mikor ég ki utolsóként?

(*3 pont*) Közli: *Sári Péter,* Budapest

P. 3418. Két egyenlő sugarú, 30 Ω ellenállású, rézből készült körvezetőt úgy forrasztunk össze, hogy egymás középpontjain átmennek. A forrasztási pontokra 12 V-os akkumulátort kapcsolunk.

a) Mekkora az egyik kisebb íven átfolyó áram erőssége?

b) Mekkora az akkumulátor által leadott teljesítmény?

(*3 pont*) Közli: *Farkas László* (Newton-Kupa feladat), Keszthely

P. 3419. Egy vadász a feje felett 100 méter magasban eltalál egy húzó vadlibát, amely a vadásztól 60 méterre esik a földre. Körülbelül hány méterrel és hány fokkal kellett a madár elé céloznia, ha a lövedék sebessége 400 m/s volt?

(*4 pont*) Közli: *Szabó Gergő,* Heves, Eötvös J. Gimn.

P. 3420. Egy hosszú, egyenes vonalzó fekszik a vízszintes asztalon. A vonalzót az egyik végéhez kötött fonal segítségével vízszintesen húzzuk. Ha a fonal a vonalzó hossztengelyével párhuzamos, akkor F_0 erő szükséges a test megmozdításához. Mekkora erővel lehet a vonalzót megmozdítani, ha a fonal merőleges a hossztengelyre? (A vonalzó egyenletesen nyomja az asztalt.)

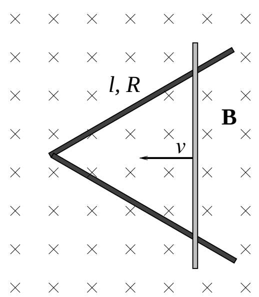
(*4 pont*) Közli: *Brájer László,* Budapest

P. 3421. Alaszkai aranyásók népes csoportja egy széles folyóhoz érkezik. A túlsó parton – éppen szemben – egy hatalmas aranyrögöt pillantanak meg. Amelyikük először odaér, az kapja meg a bányaművelés jogát. Milyen útvonalat válasszon Joe, ha ugyanolyan gyorsan tud evezni a vizen, mint gyalogolni a szárazföldön. Számítsuk ki és rajzoljuk le Joe legkedvezőbb útvonalát, ha sebességének és a folyó sebességének aránya az aranymetszés arányszámánál a) nagyobb, b) kisebb. (Az optimális útvonal meghatározásánál grafikus módszert is használhatunk.)

(*5 pont*) *Bihary Zsolt* feladata nyomán

P. 3422. Kilenc ponttöltést helyezünk el egy 1 cm rácsállandójú, 3×3-as négyzetrács rácspontjaiban. A töltések nagyságát úgy választjuk meg, hogy az egyes töltések helyén a többi töltésből származó potenciál 10 kV legyen. Mekkora a töltések összes kölcsönhatási energiája?

(*5 pont*) Közli: *Bakonyi Gábor,* Budapest



P. 3423. Az *ábrán* látható szabályos háromszög alakú vezető keret egyik, mozgatható oldalát egyenletesen, $v=0{,}1$ m/s sebességgel csúsztatjuk végig a másik két oldalon. A vízszintes keret függőleges irányú, homogén, $B=0{,}4$ T indukciójú mágneses mezőben van. Az oldalak hosszúsága $l=1$ m, ellenállásuk 1 Ω.

a) Hogyan változik időben a körben indukált elektromotoros erő?

b) Hogyan változik időben az áramerősség?

c) Mennyi munkát végzünk a csúsztatáskor, ha a súrlódás elhanyagolható?

(*5 pont*) Közli: *Gálfi László,* Budapest

P. 3424. Egy adiabatikusan zárt rendszer két testet tartalmaz. Az A test hőkapacitása 4000 J/K és hőmérséklete 2400 K, a B test hőkapacitása 8000 J/K és hőmérséklete 300 K. Mekkora munka nyerhető ki ebből a rendszerből (mint hőerőgépből)?

(*6 pont*) *Schwartz Lajos emlékverseny,* Nagyvárad

P. 3425. Milyen egy kerékpár küllős kerekének képe a célfotón? (A célfotó úgy készül, hogy a célvonal nagyon keskeny sávjáról nagyon sűrűn egymás után elektronikus kamerával felvételeket készítenek, majd ezeket egymás mellett, a kerékpár várható haladási sebességének megfelelő távolságban helyezik el.)

(*6 pont*) Közli: *Bodor András,* Budapest

A fizika feladatok megoldásai a következő címre küldendők:
Eötvös Loránd Fizikai Társulat, KöMaL feladatok
Budapest, Pf. 433. 1371
A beküldési határidő: **2001. április 12.**

Physics

M. 223. Prepare the double pendulum (coupled with a weak spring) shown in the figure and investigate the motions of the system occurring in the plane of the figure. Measure the frequency of beat as a function of l and m.

P. 3416. On what part of Earth and how can two Sundays be spent between a Saturday and the following Monday? **P. 3417.** A large digital clock is made to show the hours and the minutes. 14 electric discharge tubes are used to show the minutes, each of which goes out after an average of 2160 hours of operation. The clock is started at 00 : 00 on the first of January 2001. Which of the tubes showing the minutes can be expected to go out first and when? And which one can be expected to go out last and when? **P. 3418.** Two circular copper conductors of identical radii and resistances of 30 Ω each are soldered in such a way that they cross each other's centre. An accumulator of 12 V is connected to the soldered points. a) What is the magnitude of the current flowing through one of the smaller arcs? b) What is the power given out by the accumulator? **P. 3419.** A hunter hits a bird flying at 100 metres above him, the bird hits the ground at 60 metres from him. Approximately how many metres and how many degrees did the hunter aim in front of the bird if the speed of the bullet was 400 m/s? **P. 3420.** A long, straight ruler lies on the level table. The ruler is pulled horizontally using a thread attached to one of its ends. Force F_0 is required to move the body when the thread is parallel to the longitudinal axis of the ruler. What force is required to move the ruler when the thread is perpendicular to the longitudinal axis? (The ruler presses the table uniformly.) **P. 3421.** A large group of Alaskan gold diggers arrives at a wide river. They catch sight of a huge nugget on the opposite bank, just in front of them. The digger who arrives first at the nugget will get the right for the exploitation of a mine. What route should Joe choose if he can paddle on the water as fast as he can walk on the ground? Calculate and draw Joe's most favourable route if the proportion of Joe's speed to the speed of the river equals the gold section, is a) greater, b) lesser than the gold section. (Graphical methods can also be used to determine the optimum route.) **P. 3422.** Nine point-like charges are placed in the points of a 3×3 tetragonal grid with a lattice constant of 1 cm. The magnitude of the charges is chosen in such a way that the potential caused by the other charges at the position of each charge is 10 kV. What is the total interaction energy of the charges? **P. 3423.** The mobile side of the triangular conducting frame shown in the figure is slid at a uniform speed of $v=0.1$ m/s along the two other sides. The horizontal frame is in a vertical, homogeneous magnetic field with an induction of $B=0.4$ T. The length of each side is $l=1$ m, the resistance is 1 Ω. a) How does the electromotive force induced in the circuit change with time? b) How does the current change with time? c) How much work is required for the sliding if friction is negligible? **P. 3424.** An adiabatically closed system contains two bodies. The heat capacity of body A is 4000 J/K, its temperature is 2400 K, while the heat capacity of body B is 8000 J/K and its temperature is 300 K. What maximum work can be obtained from this system (as heat engine)? **P. 3425.** What is the picture of the spoked wheel of a bicycle like on a photo finish? (The photo finish is made the following way: pictures of a very narrow band around the finish line are made in very short time intervals using an electronic camera. These are then placed next to each other at distances corresponding to the expected speed of the bicycle.)

KöMaL – 2001/3 FIZ0103 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 20:47 (22. lap)