Jelentés a 2000. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat a 2000. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyt október 27-én 14 órai kezdettel rendezte meg a következő 20 helyszínen: Békéscsaba, Bonyhád, Budapest, Debrecen, Eger, Győr, Kaposvár, Kecskemét, Miskolc, Nyíregyháza, Pécs, Salgótarján, Sopron, Szeged, Székesfehérvár, Szolnok, Szombathely, Tatabánya, Veszprém, Zalaegerszeg.

A Társulat elnöksége a verseny lebonyolítására a következő bizottságot kérte fel:

Bárász Mihály (titkár), *Bereczky Áron, Bártfai Pál, Csirmaz László, Frenkel Péter, Károlyi Gyula* (elnök), *Kós Géza, Pálmay Lóránt, Pelikán József, Reiman István, Surányi János* (tiszteletbeli elnök).

A Bizottság október 4-i ülésén a következő feladatokat tűzte ki:

1. *Az $A(0,0)$, $B(n,0)$, $C(n,n)$ és $D(0,n)$ pontok által meghatározott négyzet határán és belsejében elhelyezkedő rácspontokat pirosra vagy zöldre színezzük úgy, hogy a négyzetbe eső valamennyi egységoldalú rácsnégyzetnek pontosan két csúcsa legyen piros. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?*

2. *Legyen ABC szabályostól különböző háromszög, P pedig a síknak a háromszög csúcsaitól különböző pontja. Jelöljék A_P, B_P és C_P rendre az AP, BP és CP egyeneseknek az ABC háromszög köré írt körrel vett második metszéspontjait. Mutassuk meg, hogy a síknak pontosan két olyan P és Q pontja van, hogy az $A_PB_PC_P$ és $A_QB_QC_Q$ háromszögek szabályosak, továbbá, hogy a PQ egyenes áthalad az ABC háromszög köré írt kör középpontján.*

3. *Legyen k nemnegatív egész szám, és tegyük fel, hogy az a_1, a_2, …, a_n egész számok legalább $2k$ különböző maradékot adnak $(n+k)$-val osztva. Bizonyítandó, hogy a számok között van néhány, amelyek összege osztható $(n+k)$-val.*

A Bizottság a dolgozatok átnézése után december 11-i ülésén egyhangúlag a következő jelentést fogadta el:

„A verseny minden helyszínen rendben lezajlott. Az előző évhez képest örvendetes módon jelentősen több versenyző adott be dolgozatot. Budapestről 110 résztvevőből 99-en adtak be dolgozatot, vidékről összesen 99 dolgozat érkezett. Több mint tíz versenyző foglalkozott érdemben legalább két feladattal.

Gyenes Zoltán lényegében megoldotta mindhárom feladatot, a második feladat megoldása több ponton hiányos volt. Ezek alapján

I. Kürschák József díjat és 25000 Ft jutalmat kapott

Gyenes Zoltán, aki Budapesten az ELTE Apáczai Csere János Gimnáziumban tett érettségi vizsgát, Drozdy Győzőné és Pósa Lajos tanítványaként, jelenleg az ELTE I. éves matematikus szakos hallgatója.

Csóka Endre és Kiss Gergely kifogástalanul megoldották az első és a harmadik feladatot, a második feladatban jelentős részeredményeket értek el. Ennek alapján

II. Kürschák József díjat és 15000-15000 Ft jutalmat nyert:

Csóka Endre, a debreceni Fazekas Mihály Gimnázium 10. osztályos tanulója, Balázs Tivadar, Páles Zsolt, Pósa Lajos és Reiman István tanítványa, valamint

Kiss Gergely, aki a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnáziumban tett érettségi vizsgát, Beleznay Ferenc, Hraskó András, Pataki János és Surányi László tanítványaként, jelenleg az ELTE I. éves matematikus szakos hallgatója.

Csikvári Péter lényegében megoldotta az első és a harmadik feladatot, továbbá a második feladatban hasznos kezdőlépéseket tett. A harmadik feladat megoldása apróbb hiányosságokat tartalmaz. Ezek alapján

III. Kürschák József díjat és 10000 Ft jutalmat nyert:

Csikvári Péter, a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium 11. osztályos tanulója, Fazakas Tünde, Pósa Lajos és Táborné Vincze Márta tanítványa.

A bizottság említésre méltónak tartja még *Béky Bencének,* a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium 11. osztályos tanulójának teljesítményét, aki egyedül adott teljes megoldást a második feladatra. Sajnálatos módon a másik két feladatban nem ért el eredményt."

A 2000. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldása

1. *Az $A(0,0)$, $B(n,0)$, $C(n,n)$ és $D(0,n)$ pontok által meghatározott négyzet határán és belsejében elhelyezkedő rácspontokat pirosra vagy zöldre színezzük úgy, hogy a négyzetbe eső valamennyi egységoldalú rácsnégyzetnek pontosan két csúcsa legyen piros. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?*

Megoldás. A szóban forgó rácspontok $n+1$ sorban és $n+1$ oszlopban helyezkednek el. Nevezetesen, az i-edik sor ($0 \le i \le n$) azokat a rácspontokat tartalmazza, amelyeknek a második koordinátája i. Hasonlóképpen, az i-edik oszlop azokból a rácspontokból áll, amelyek első koordinátája i. Két rácspontot szomszédosnak fogunk hívni akkor, ha ugyanabban a sorban vagy oszlopban egymás mellett helyezkednek el. Az (i,j) pont szomszédai tehát az $(i-1,j)$, $(i+1,j)$, $(i,j-1)$ és $(i,j+1)$ pontok, amennyiben ezek is az $ABCD$ négyzet pontjai.

Nyilván jó színezését kapjuk a pontoknak akkor, ha minden sorban felváltva színezzük pirosra és zöldre az egymást követő pontokat. Az egyes sorokat ekkor egymástól függetlenül kétféleképpen színezhetjük, ezért az ilyen színezéseknek a száma 2^{n+1}. Ugyanilyen megfontolásból lesz jó az a 2^{n+1} színezés is, ahol az egyes oszlopokban követik egymást felváltva a piros és zöld pontok. Mivel a pontokat kétféleképpen lehet úgy kiszínezni, hogy sem a sorokban, sem az oszlopokban nincs két szomszédos azonos színű pont, ezért így összesen

$$2^{n+1}+2^{n+1}-2=2^{n+2}-2$$

jó színezést találtunk.

Megmutatjuk, hogy a fentieken kívül nincs más jó színezés. Ehhez tegyük fel először azt, hogy a pontokat megszíneztük a kívánt módon, és valamelyik oszlopban – mondjuk az i-edikben – van egymás mellett két azonos színű szomszédos pont. Legyenek ezek (i,j) és $(i,j+1)$. Ekkor az $(i-1)$-edik és az $(i+1)$-edik oszlopban is található egymás mellett két azonos színű pont. Nevezetesen az $(i-1,j)$, $(i-1,j+1)$, $(i+1,j)$, $(i+1,j+1)$ pontok mind azonos színűek, és egyben az (i,j), $(i,j+1)$ pontoktól eltérő színűek kell, hogy legyenek. Indukcióval könnyen ellenőrizhető ezután, hogy az $(i-k,j)$, $(i-k,j+1)$, $(i+k,j)$, $(i+k,j+1)$ pontok színe az (i,j), $(i,j+1)$ pontokéval megegyező, ha k páros, illetve azokétól eltérő, ha k páratlan.

Tegyük fel most még azt is, hogy valamelyik sorban – mondjuk a j'-edikben – is van egymás mellett két azonos színű pont: (i',j') és $(i'+1,j')$. Az előbbihez hasonló gondolatmenettel (vagy egyszerűbben: szimmetria okokra hivatkozva) megállapíthatjuk, hogy minden k-ra az $(i',j'-k)$, $(i'+1,j'-k)$, $(i',j'+k)$, $(i'+1,j'+k)$ pontok azonos színűek.

A fentiek szerint az (i',j) pont színe meg kell, hogy egyezzen mind az $(i',j+1)$, mind az $(i'+1,j)$ pont színével. Ez azonban egy jó színezésben nem történhet meg, hiszen a felsorolt három pont éppen egy egységoldalú rácsnégyzet három csúcsa. Ez az ellentmondás igazolja azon állításunkat, miszerint minden jó színezésben vagy az oszlopokban, vagy a sorokban váltakozó színű pontok követik egymást. A kérdéses színezések száma tehát $2^{n+2}-2$.

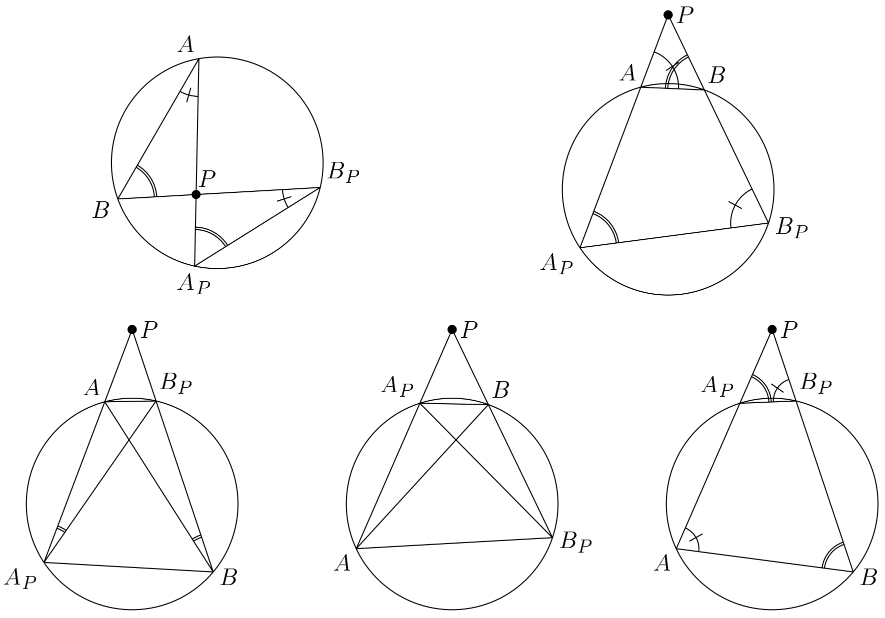
2. *Legyen ABC szabályostól különböző háromszög, P pedig a síknak a háromszög csúcsaitól különböző pontja. Jelöljék A_P, B_P és C_P rendre az AP, BP és CP egyeneseknek az ABC háromszög köré írt körrel vett második metszéspontjait. Mutassuk meg, hogy a síknak pontosan két olyan P és Q pontja van, hogy az $A_PB_PC_P$ és $A_QB_QC_Q$ háromszögek szabályosak, továbbá, hogy a PQ egyenes áthalad az ABC háromszög köré írt kör középpontján.*

Az első két megoldás a körre vonatkozó inverzió fogalmára támaszkodik, ezért röviden összefoglaljuk ennek a transzformációnak legfontosabb tulajdonságait. Ha adott a síkon egy O középpontú, r sugarú k kör, akkor a k körre vonatkozó inverzió a sík O-tól különböző pontjainak az a leképezése, amely tetszőleges P ponthoz az OP félegyenes azon P' pontját rendeli hozzá, amelyre $OP\cdot OP'=r^2$. Ha az A pont (vagy alakzat) képe B, akkor a B ponté (alakzaté) éppen A. A leképezés tehát egy-egyértelmű, a k pontjait helyben hagyja, k-n belüli pontokat pedig k-n kívüli pontokba visz, és fordítva. Ha egy kör az O pontot elkerüli, akkor a körvonal képe egy, az O-t szintén elkerülő körvonal, egy O-n áthaladó k_1 körvonal képe pedig egy O-ra nem illeszkedő egyenes: a k és k_1 körök hatványvonala. Fontos tulajdonsága az inverziónak a szögtartás: ha k_1 és k_2 egy-egy körvonal (elfajuló esetben O-ra nem illeszkedő egyenes), akkor a k_1' és k_2' körök ugyanolyan szög alatt metszik egymást, mint a k_1 és k_2 körök. (Két egymást metsző kör által bezárt szög alatt közös pontjukban húzott érintőik hajlásszögét értjük.) Speciálisan, ha a k_1 kör k-t merőlegesen metszi, akkor $k'=k$ miatt k_1' is merőlegesen metszi k-t, méghozzá ugyanabban a két pontban, ezért $k_1'=k_1$.

Ezek után lássuk először a legkevesebb diszkussziót igénylő megoldást.

I. Megoldás. Ha P az ABC háromszög köré írható k körön van, akkor $A_P=B_P=C_P=P$, és így az $A_PB_PC_P$ háromszögről nem beszélhetünk. Az egyazon húrhoz tartozó kerületi szögek egyenlőségéről szóló tételre hivatkozva az *1. ábráról* leolvasható, hogy az A_PB_PP háromszög hasonló a BAP háromszöghöz, függetlenül attól, hogy P a

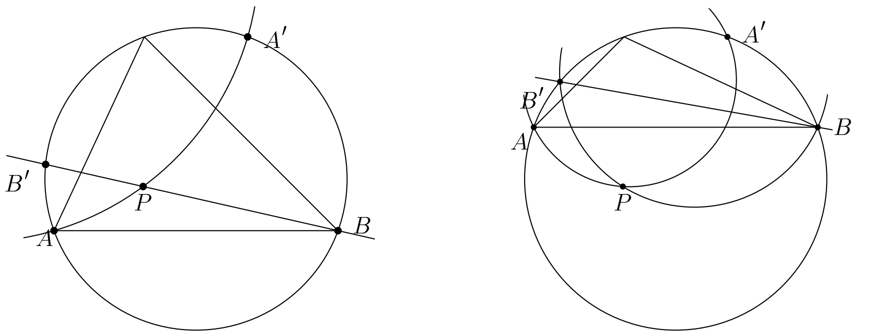
k körön belül, vagy azon kívül helyezkedik-e el. Ezért $\dfrac{A_P B_P}{B_P P} = \dfrac{BA}{AP}$, és hasonló módon $\dfrac{C_P B_P}{B_P P} = \dfrac{BC}{CP}$.



1. ábra

Az $A_P B_P = B_P C_P$ feltétel tehát ekvivalens az $\dfrac{AP}{CP} = \dfrac{AB}{CB}$ feltétellel, vagyis azzal, hogy P az A és C pontokhoz, valamint az $\dfrac{AB}{CB}$ arányhoz tartozó Apollóniusz-körnek k-ra nem illeszkedő pontja. (Abban a speciális esetben, amikor $AB = CB$, ez az Apollóniusz-kör elfajuló, és az AC szakasz felező merőlegesével egyezik meg.) Ugyanígy kapjuk azt is, hogy az $A_P B_P = A_P C_P$ feltétel ekvivalens azzal, hogy P a B és C pontokhoz, valamint az $\dfrac{BA}{CA}$ arányhoz tartozó Apollóniusz-körnek k-ra nem illeszkedő pontja. Az $A_P B_P C_P$ háromszög tehát pontosan akkor szabályos, ha P az említett két Apollóniusz-kör (k-ra nem illeszkedő) közös pontja.

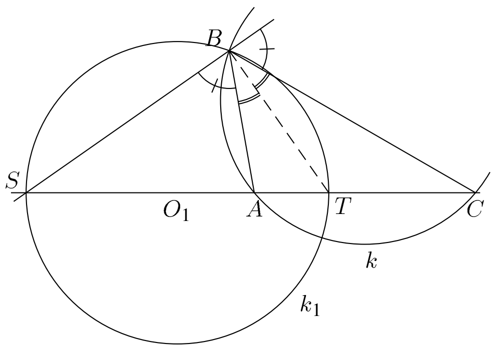
Az AC egyenes elválasztja az első Apollóniusz-kör k-val való, B-től különböző B' metszéspontját a B ponttól. Ugyanígy, a BC egyenes elválasztja a második Apollóniusz-kör k-val való, A-től különböző A' metszéspontját az A ponttól. Következésképpen az A, B, A', B' pontok a k körön ilyen sorrendben helyezkednek el (*2. ábra*), és ezért a két Apollóniusz-kör mind a k körön belül, mind azon kívül egy-egy pontban metszi egymást. Pontosabban, a k-n kívüli metszéspont nem létezik abban az esetben, ha mind a két Apollóniusz-kör elfajuló, ez azonban pontosan akkor következik be, ha az ABC háromszög szabályos. Ezzel a feladat első állítását beláttuk.



2. ábra

A második állítás bizonyítása azon az észrevételen alapul, hogy az említett Apollóniusz-körök a k kört merőlegesen metszik. Ekkor ugyanis a szögtartás miatt a k-ra vonatkozó inverzió mind a két Apollóniusz-kört saját magába viszi, és ezért a körök metszéspontjainak képe az inverzió során ugyanez a két pont. Mivel a k körön belüli pontok a k-n kívüli pontokba transzformálódnak, ez csak úgy lehetséges, ha az inverzió P-t és Q-t felcseréli. A P és Q pontok tehát egymásnak a k körre vonatkozó inverz képei, ennek megfelelően a PQ egyenes valóban áthalad a k kör O középpontján.

Szimmetria okokból elegendő azt megmutatni, hogy az első Apollóniusz-kör (jelöljük ezt k_1-gyel) merőlegesen metszi k-t. Ez nyilvánvaló, ha $AB=CB$, egyébként pedig feltehetjük, hogy $\alpha=BAC\sphericalangle>BCA\sphericalangle=\gamma$. Legyen a B-ből induló belső szögfelező talppontja T, a külsőé S. A szögfelező-tétel értelmében ST éppen a k_1 körnek az AC egyenesre eső átmérője, amely tartalmazza az A pontot is (*3. ábra*). Ezért $SBT\sphericalangle=\dfrac{\pi}{2}$. Továbbá



3. ábra

$$TBO\sphericalangle=\frac{\beta}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\pi}{2}-\left(\pi-\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{2}-BTS\sphericalangle=BST\sphericalangle=SBO_1\sphericalangle,$$

ahol O_1 a k_1 kör középpontja. Ezért

$$O_1BO\sphericalangle=SBT\sphericalangle+TBO\sphericalangle-SBO_1\sphericalangle=\frac{\pi}{2},$$

és éppen ezt akartuk bizonyítani.

II. Megoldás. Rögzítsük a pozitív forgásirányt úgy hogy az A, B, C csúcsok ilyen sorrendben helyezkedjenek el a háromszög köré írt k körön. Hogy kevesebb esetet kelljen megkülönböztetni, irányított szögekkel fogunk dolgozni. Két irányított szöget azonosnak tekintünk akkor, ha különbségük 2π egész számú többszöröse.

Ha X, Y a k kör pontjai, akkor az XY irányított ívhez tartozó (irányított) kerületi szöget jelölje $\varphi(XY)$. Például $\varphi(AB)=\gamma$, $\varphi(BC)=\alpha$ és $\varphi(CA)=\beta$ a háromszög szögei, ugyanakkor $\varphi(BA)=180^\circ-\gamma$. Azt mondjuk, hogy az XY (irányított) szakasz a P pontból φ szög alatt látszik, ha $XPY\sphericalangle=\varphi$, ekkor az YX szakasz P-ből $-\varphi$ szög alatt látszik. Az ilyen P pontok összessége alkotja az XY szakaszra támaszkodó φ szögű látókörívet, ami $\varphi=\pi$ esetén a végpontjait nem tartalmazó XY szakasszal, $\varphi=0$ esetén pedig az XY egyenes XY szakaszon kívül eső részével egyezik meg.

Ennyi előkészület után most már rátérhetünk a megoldás lényegi részére. A k körön nyilván nem helyezkedhet el megfelelő pont. Legyen tehát először P a k kör egy tetszőleges belső pontja, ekkor az ABC és $A_PB_PC_P$ háromszögek azonos körüljárásúak. Az utóbbi háromszög tehát pontosan akkor szabályos, ha a $\varphi(A_PB_P)$, $\varphi(B_PC_P)$, $\varphi(C_PA_P)$ szögek közül legalább kettő (és persze akkor a harmadik is) 60°. Mármost

$$APB\sphericalangle=180^\circ-BAP\sphericalangle-PBA\sphericalangle=180^\circ-BAP_A\sphericalangle-B_PBA\sphericalangle=$$
$$180^\circ-\varphi(BA_P)-\varphi(B_PA)=\varphi(AB)+\varphi(A_PB_P)=\gamma+\varphi(A_PB_P),$$

Az AB, BA_P, A_PB_P és B_PA ívek ugyanis együtt éppen lefedik a k kört, így a hozzájuk tartozó kerületi szögek összege pontosan 180°. Hasonlóképpen, $BPC\sphericalangle=\alpha+\varphi(B_PC_P)$ és $CPA\sphericalangle=\beta+\varphi(C_PA_P)$. Az $A_PB_PC_P$ háromszög tehát pontosan akkor szabályos, ha a P pontból az AB, BC, CA szakaszok rendre $\gamma+60^\circ$, $\alpha+60^\circ$, $\beta+60^\circ$ szögben látszanak. E három feltétel közül persze elég csak kettőt megkövetelni.

Most már nem nehéz megmutatni, hogy a k körön belül pontosan egy ilyen P pont van. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy α, $\gamma<120^\circ$. Tekintsük most az AB szakaszra támaszkodó $\gamma+60^\circ$ szögű ℓ_C látókörívet és a BC szakaszra támaszkodó $\alpha+60^\circ$ szögű ℓ_A látókörívet, ezek tehát a megfelelő szakaszoknak a háromszöget tartalmazó oldalán helyezkednek el. A harmadik hasonló látókörívre is (amely már nem biztos, hogy az AC szakasznak a háromszöget tartalmazó oldalán helyezkedik el) szükségünk lesz később, ezt jelöljük ℓ_B-vel. Hogy ez a két ív pontosan egy pontban metszi egymást, méghozzá a k kör belsejében, a következőképpen igazolhatjuk. Először is vegyük észre, hogy mindkét látókörív a k kör belsejében halad. Másodszor, B közös végpontja mindkét ívnek. Ezért a két ívnek legfeljebb egy közös belső pontja lehet, és a metszéspont létrejöttének szükséges és elégséges feltétele az, hogy az ℓ_A ív a BC oldallal, illetve az ℓ_C ív a BA oldallal olyan szögeket zárjon be, amelyek összege β-t meghaladja (most kivételesen nem irányított szögektől beszélünk). Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy ez valóban így van. Azt is megállapíthatjuk, hogy lévén ekkor $CPA\sphericalangle=\beta+60^\circ$, ez a P pont akkor esik az ABC háromszög belsejébe, ha $\beta<120^\circ$, a háromszögön kívül helyezkedik el a $\beta>120^\circ$ esetben, ha pedig $\beta=120^\circ$, akkor az AC oldalra illeszkedik.

Összefoglalva tehát megállapíthatjuk, hogy a k körön belül mindig pontosan egy ilyen pont van, méghozzá az ABC háromszög belsejében, ha a háromszög minden szöge 120°-nál kisebb, annak határán, ha a háromszögnek van egy 120°-os szöge, illetve azon kívül, ha valamelyik szöge 120°-nál nagyobb. Ebből a P pontból az AB, BC, CA szakaszok rendre $\gamma+60^\circ$, $\alpha+60^\circ$, $\beta+60^\circ$ alatt látszanak.

Legyen most a P pont a k kör egy külső pontja. Az $APB\sphericalangle$ meghatározásához különböztessünk meg négy esetet annak megfelelően, hogy a PA és PB félegyeneseken a P, A, A_P, illetve P, B, B_P pontok milyen sorrendben helyezkednek el (*1. ábra*). Megjegyezzük, hogy az irányított szögekkel való számolásnak az is előnye, hogy nem kell azzal foglalkoznunk, hogy ez a két félegyenes egymáshoz képest milyen helyzetű. Mind a négy esetben könnyen ellenőrizhető, hogy

$$APB\sphericalangle = 180^\circ - BAP\sphericalangle - PBA\sphericalangle = 180^\circ - \varphi(BA_P) - \varphi(B_PA) =$$

$$(180^\circ - \varphi(BA_P) - \varphi(A_PA)) - \varphi(B_PA_P) = \varphi(AB) - \varphi(B_PA_P) = \gamma - \varphi(B_PA_P)\ .$$

Ugyanígy $BPC\sphericalangle = \alpha - \varphi(C_PB_P)$ és $CPA\sphericalangle = \beta - \varphi(A_PC_P)$. Mivel most az $A_PB_PC_P$ háromszög körüljárása ellentétes az ABC háromszögével, ez a háromszög pontosan akkor szabályos, ha a $\varphi(B_PA_P)$, $\varphi(C_PB_P)$, $\varphi(A_PC_P)$ szögek közül legalább kettő (és persze akkor a harmadik is) 60°. Ezzel ekvivalens az, hogy a P pontból az AB, BC, CA szakaszok rendre $\gamma - 60^\circ$, $\alpha - 60^\circ$ és $\beta - 60^\circ$ alatt látszanak. Jelölje az ennek megfelelő látóköríveket rendre ℓ'_C, ℓ'_A és ℓ'_B.

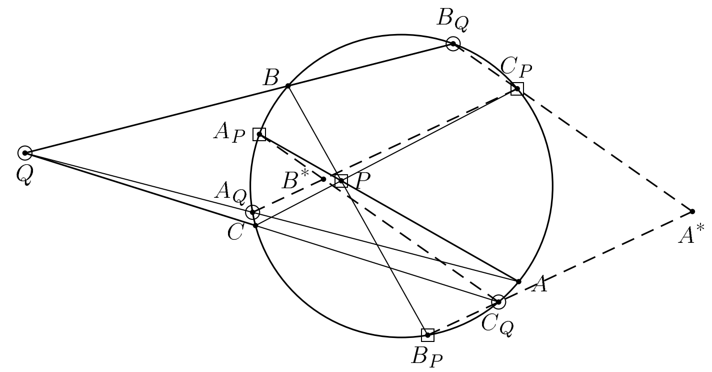
Állítás. *A k körre vonatkozó inverziónál az ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C ívek képe rendre ℓ'_A, ℓ'_B és ℓ'_C.*

Ebből azonnal következik, hogy a k körön kívül is pontosan egy olyan Q pont van, amelyre az $A_QB_QC_Q$ háromszög szabályos, mégpedig ez a pont a P pont inverz képe. Probléma csak akkor lenne, ha P egybeesne a k kör középpontjával, ez azonban nem lehetséges, hiszen az ABC háromszög nem szabályos. Egyúttal azt is megkaptuk, hogy a k kör középpontja, valamint a P és Q pontok egy egyenesen vannak.

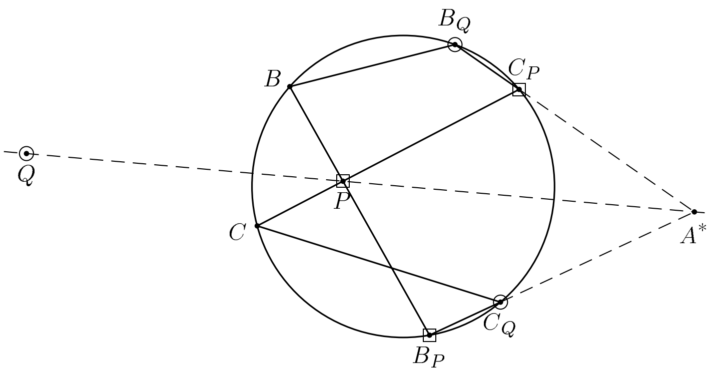
Most már csak a fenti állítást kell igazolni. Ha a háromszög szögeire semmiféle megkötést nem teszünk, akkor szimmetria okok miatt nyilván elég annyit megmutatni, hogy ℓ_A inverz képe éppen ℓ'_A. A bizonyítás azon az egyszerű észrevételen múlik, hogy az a két ív, amelynek pontjaiból az XY (irányított) szakasz φ_1, illetve φ_2 szög alatt látszik, $\varphi_1 - \varphi_2$ szöget zár be egymással. Ennek alapján a kerületi szögek tételéből következik, hogy mind az ℓ_A ív, mind az ℓ'_A ív 60°-os szöget zár be a k körrel. Nem nehéz megmutatni, hogy az ℓ_A ív a k körön belül, az ℓ'_A ív pedig azon kívül halad. A két ívnek ugyanazok a végpontjai, de nem egészítik ki egymást egyetlen körvonallá. Mivel az a két körvonal, amely a k-t a B és C pontokban egyaránt 60°-os szög alatt metszi, egymás inverz képe a k körre nézve, a szóban forgó két ív is egymás inverze, és ezt akartuk bizonyítani.

III. Megoldás. (*Béky Bence* megoldása.) Az előző megoldások valamelyikét követve először is megállapítjuk, hogy valóban két ilyen pont létezik, méghozzá egy a háromszög köré írható körön belül (jelöljük ezt P-vel), a másik pedig a körön kívül (legyen ez Q). Vegyük most észre, hogy az $A_PB_PC_P$ háromszög körüljárása megegyezik az ABC háromszögével, míg az $A_QB_QC_Q$ háromszögé azzal ellentétes. Található tehát egy, a k kör O középpontjára illeszkedő e egyenes, amelyre az $A_PB_PC_P$ háromszöget tükrözve az $A_QB_QC_Q$ háromszöget kapjuk.

Vizsgáljuk először azt az általános esetet, amikor A_P különbözik a B_Q, C_Q pontoktól, B_P különbözik az A_Q, C_Q pontoktól és C_P is különbözik az A_Q, B_Q pontoktól. Nem lehet, hogy például az A_PB_Q egyenes egybeesik az A_QB_P egyenessel, mert ekkor $A_P = B_P$ lenne. Az A_PB_Q egyenes tehát csak akkor lehet párhuzamos az A_QB_P egyenessel, ha egyben e-vel is párhuzamos. Ugyanez elmondható a másik két értelemszerűen felírt egyenespárról. Jelölje A^*, B^* és C^* rendre a B_PC_Q és B_QC_P egyeneseknek, az A_PC_Q és A_QC_P egyeneseknek, illetve az A_PB_Q és A_QB_P egyeneseknek a metszéspontját. Az elmondottak szerint ezen egyenespárok közül legfeljebb egy lehet párhuzamos helyzetben, az e egyenesre eső A^*, B^*, C^* pontok közül tehát kettő biztosan létrejön. Feltehetjük, hogy az A^* és B^* pontok ilyenek. Világos, hogy A^* és B^* különböző pontok (*4. ábra*).



4. ábra



5. ábra

Tekintsük most a k körbe írt $BB_QC_PCC_QB_P$ önmagát átmetsző hatszöget. Ennek BB_Q és CC_Q szemközti oldalai Q-ban, B_QC_P és C_QB_P szemközti oldalai A^*-ban, C_PC és B_PB szemközti oldalai pedig P-ben metszik egymást. Pascal tétele szerint tehát az A^* pont illeszkedik a PQ egyenesre (*5. ábra*). Hasonlóképpen belátható, ezúttal az $AA_QC_PCC_QA_P$ hatszögből kiindulva, hogy a B^* pont is illeszkedik a PQ egyenesre. A PQ egyenes tehát egybeesik az A^*B^* egyenessel, vagyis az O ponton áthaladó e egyenessel, ami bizonyítja az általános esetben a feladat második állítását.

Tegyük fel végül, hogy mondjuk $B_P = C_Q = X$, ekkor az e-re való szimmetria miatt $B_Q = C_P = Y$, végül pedig $A_P = A_Q$ a k körnek az a Z pontja, amelyre az XYZ háromszög szabályos. Világos, hogy Z illeszkedik az e egyenesre, XY pedig merőleges arra. Ekkor az B_PC_Q és B_QC_P egyenesek helyett tekintsük a k körhöz annak X, illetve Y pontjában húzott érintőjét, ez a két egyenes a Z pontnak az XY-ra vonatkozó tükörképében metszi egymást. Jelöljük most ezt a pontot A^*-gal. A B^*, C^* pontok ugyanúgy definiálhatók, mint az általános esetben, és ezúttal egybeesnek Z-vel. Az A^* és B^* pontok tehát most is az e egyenest határozzák meg. Most már szinte szó szerint megismételhetjük az előző bekezdést azzal az apró módosítással, hogy most a $BB_QC_PCC_QB_P$ hatszög elfajuló abban az értelemben, hogy két-két szomszédos csúcsa egybeesik. Ezért a Pascal tétel alkalmazásánál a B_PC_Q és B_QC_P egyenesek helyett éppen az előbb említett érintőket kell tekinteni.

Megjegyzések. 1. A feladat komplex számok segítségével viszonylag egyszerű számolás útján is megoldható. Ezt az utat választotta Gyenes Zoltán a második állítás bizonyításához.

2. Egy mélyebb matematikai eszközöket használó megoldást tartalmaz, és a feladat hátterére mutat rá *Hraskó András* cikke, amely a következő számunkban jelenik meg.

3. A harmadik megoldásból azonnal leolvasható, hogy az $A_PB_PC_P$ és $A_QB_QC_Q$ háromszögek a PQ egyenesre szimmetrikusan helyezkednek el. Erre az eredményre az első megoldás ügyes folytatásával is eljuthatunk. *Hogyan?* Ennek az önmagában is szép feladatnak a megoldását már az olvasóra bízzuk.

3. *Legyen k nemnegatív egész szám, és tegyük fel, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egész számok legalább $2k$ különböző maradékot adnak $(n+k)$-val osztva. Bizonyítandó, hogy a számok között van néhány, amelyek összege osztható $(n+k)$-val.*

I. megoldás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$ számok páronként különböző maradékot adnak $(n+k)$-val osztva. Tekintsük a következő $n+k$ különböző számot:

$$\begin{aligned}
b_1&=a_1, \qquad b_2=a_1, \qquad b_3=a_1+a_2 \\
b_{3i+1}&=a_1+a_2+\ldots+a_{2i}+a_{2i+1} && (0<i<k),\\
b_{3i+2}&=a_1+a_2+\ldots+a_{2i}+a_{2i+2} && (0<i<k),\\
b_{3i+3}&=a_1+a_2+\ldots+a_{2i}+a_{2i+1}+a_{2i+2} && (0<i<k),\\
b_j&=a_1+a_2+\ldots+a_{j-k} && (3k<j\le n+k).
\end{aligned}$$

Ha ezek között van olyan, amelyik osztható $(n+k)$-val, akkor mar készen is vagyunk. Ellenkező esetben pedig van a számok között kettő, mondjuk b_s és b_t $(s<t)$ amelyik ugyanolyan maradékot ad $(n+k)$-val osztva. Ekkor b_t-b_s nyilván osztható $(n+k)$-val. Azt kell már csak észrevennünk, hogy ez a különbség felírható az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok közül néhánynak az összegeként. Ha ugyanis ez nem így lenne, akkor valamilyen k-nál kisebb i-re $s=3i+1$ és $t=3i+2$, vagyis $b_t-b_s=a_{2i+2}-a_{2i+1}$ volna. Ez azonban feltételezésünk értelmében nem osztható $(n+k)$-val.

II. megoldás. Ugyanehhez a végeredményhez egy kissé eltérő kiindulással is eljuthatunk.

Állítás. *Tetszőleges $b_1, b_2, \ldots, b_N$ egész számok esetén léteznek olyan $1\le i\le j\le N$ indexek, hogy a $b_i+b_{i+1}+\ldots+b_j$ összeg osztható N-nel.*

Ez egyébként éppen a feladat állítása a $k=0$ esetben. A bizonyításhoz tekintsük $t=0, 1, \ldots, N$ esetén az $s_t=b_1+\ldots+b_t$ összegeket, ahol $s_0=0$ az üres összeg. Az így felírt $N+1$ egész szám között biztosan van kettő, amelyik ugyanolyan maradékot ad N-nel osztva. Ha s_k és s_ℓ $(0\le k<\ell\le N)$ két ilyen összeg, akkor $s_\ell-s_k=b_{k+1}+b_{k+2}+\ldots+b_\ell$ osztható N-nel.

A feladatot ezután a következő módon vezethetjük vissza erre a speciális esetre. Az első megoldáshoz hasonlóan, most is feltehetjük, hogy az a_1, a_2, …, a_{2k} számok páronként különböző maradékot adnak $(n+k)$-val osztva. Tekintsük a

$$b_1=a_1,\ b_2=a_2-a_1,\ b_3=a_1,\ b_4=a_3,\ b_5=a_4-a_3,\ b_6=a_3,\ \ldots,\ b_{3k}=a_{2k-1},$$
$$b_{3k+1}=a_{2k+1},\quad b_{3k+2}=a_{2k+2},\quad \ldots,\quad b_{n+k}=a_n$$

számokat. Így éppen $N=n+k$ egész számot írtunk fel.

A fenti állítás értelmében léteznek olyan $1\le i\le j\le N$ indexek, hogy $S=b_i+b_{i+1}+\ldots+b_j$ osztható N-nel. Elegendő azt megmutatni, hogy S felírható az a_1, a_2, …, a_n számok közül néhánynak az összegeként. Ez egészen nyilvánvaló akkor, ha $i\ge 3k+1$, ebben az esetben ugyanis

$$S=a_{i-k}+a_{i-k+1}+\ldots+a_{j-k}.$$

Ha $i\le 3k<j$, akkor legyen $i=3s+q$, ahol $0\le s<k$ és $1\le q\le 3$. Ekkor nyilván

$$S=A+a_{2s+3}+a_{2s+4}+\ldots+a_{j-k},$$

ahol $A=a_{2s+1}+a_{2s+2}$, a_{2s+2}, vagy a_{2s+1} annak megfelelően, hogy q értéke 1, 2, vagy pedig 3.

Végül $j\le 3k$ esetén legyen $i=3s+q$, $j=3t+r$, ahol $0\le s\le t<k$ és $1\le q,r\le 3$. Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy

$$S=A+a_{2s+3}+a_{2s+4}+\ldots+a_{2t}+B,$$

ahol A-t ugyanúgy definiáljuk, mint az előző esetben, B értéke pedig a_{2t+1}, a_{2t+2}, vagy pedig e kettő összege aszerint, hogy $r=1$, 2, vagy 3, feltéve, hogy $s\ne t$. Ha $s=t$, akkor is könnyen látható, hogy S értéke $a_{2s+1}+a_{2s+2}$, a_{2s+2}, vagy a_{2s+1}. Kivételt képezne az az egyetlen esetet, amikor $s=t$ és $q=r=2$. Ez azonban nem fordulhat elő, hiszen ekkor $S=a_{2s+2}-a_{2s+1}$ lenne, az a_1, a_2, …, a_{2k} számok közül viszont semelyik kettő különbsége nem osztható N-nel.

III. megoldás. (*Kovács Erika Renáta* megoldása.) Ismét tegyük fel, hogy az a_1, …, a_{2k} számok páronként különböző maradékot adnak $(n+k)$-val osztva. Vezessük be az $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_{2k}\}$ jelölést, és legyen $b_1=a_1$. Ha valamilyen $1<j\le k+1$ esetén a b_1, b_2, …, b_{j-1} számokat már definiáltuk, akkor legyen b_j az A halmaznak egy olyan eleme, amelyik a b_1, b_2, …, b_{j-1}, b_1+b_2, $b_1+b_2+b_3$, …, $b_1+b_2+\ldots+b_{j-1}$ számok egyikével sem ad azonos maradékot $(n+k)$-val osztva. Ilyen szám valóban létezik, hiszen ezekkel a feltételekkel az A halmaznak legfeljebb $(j-1)+(j-2)<2k$ elemét zártuk ki.

Jelölje b_{k+2}, b_{k+3}, …, b_{2k} az A halmaz fennmaradó elemeit valamilyen sorrendben, és tekintsük a következő $n+k$ számot:

$$s_i=b_1+b_2+\ldots+b_i \qquad (1\le i\le 2k),$$
$$s_j=a_1+a_2+\ldots+a_j \qquad (2k<i\le n),$$
$$s_{n+1}=b_2, s_{n+2}=b_3, \ldots, s_{n+k}=b_{k+1}.$$

Ha ezek közül valamelyik osztható $(n+k)$-val, akkor készen is vagyunk, ellenkező esetben viszont közülük kettő azonos maradékot ad $(n+k)$-val osztva, ezek különbsége tehát ismét csak osztható $(n+k)$-val. Az nyilván nem lehetséges hogy mindkét szám az utolsó

k darab közül kerüljön ki, hiszen ezek páronként különböző maradékkal rendelkeznek. Ha mindkét szám az első n szám között van, akkor különbségük éppen az a_i számok közül néhánynak az összege, ebben az esetben tehát megint csak célhoz értünk. Végül, ha a két szám közül az egyik s_i, ahol $1 \le i \le n$, a másik pedig s_{n+j}, $1 \le j \le k$, akkor a b_i számok megválasztása miatt $i > j$ kell, hogy teljesüljön. Ekkor azonban $s_{n+j} = b_{j+1}$ éppen az s_i egyik összeadandója, következésképpen az $(n+k)$-val osztható $s_i - s_{n+j}$ szám most is felírható az a_i számok közül néhánynak az összegeként.

IV. megoldás. (*Zábrádi Gergely* ötlete.) Most egy indukciós bizonyítást mutatunk. Pontosabban az alábbi erősebb állítást fogjuk teljes indukcióval igazolni.

Állítás. *Legyenek m, n pozitív egész számok. Ha az a_1, a_2, ..., a_n egész számok legalább $2i$ különböző maradékot adnak m-mel osztva, akkor vagy van közöttük néhány, amelyek összege osztható m-mel, vagy képezhető belőlük legalább $n+i$ olyan összeg, amelyek páronként különböző maradékot adnak m-mel osztva.*

Ebből az állításból $m = n+k$, $i = k$ választással az eredeti feladat megoldása azonnal leolvasható.

Ha $i = 0$, akkor egyszerűen tekintjük az a_1, $a_1 + a_2$, ..., $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ összegeket; ha ezek között van két olyan, amelyik azonos maradékot ad m-mel osztva, akkor különbségük, ami szintén néhány a_i összege, osztható m-mel.

Tegyük fel most egy pillanatra, hogy $i = 1$ esetén is igazoltuk már az állítást. Az indukciós lépéshez legyen $j \ge 1$ és tegyük fel azt is, hogy az állítás igazolást nyert már $i = j$ esetén is. Ebből $i = (j+1)$-re a következőképpen kaphatjuk meg az állítást. Legyenek a_1, a_2, ..., a_n olyan egész számok, amelyek legalább $2j+2$ különböző maradékot adnak m-mel osztva. Válasszunk ki közülük két különböző maradékot adót, és tekintsük az összes olyan a_i-t, amelyik ezek valamelyikével kongruens modulo m. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ezek éppen az a_{t+1}, a_{t+2}, ..., a_n számok. Az a_1, a_2, ..., a_t számokról tudjuk azt, hogy legalább $2j$ különböző maradékot adnak m-mel osztva.

Tegyük fel, hogy az a_i számokból nem képezhető m-mel osztható összeg. Ekkor az indukciós feltevés és az $i = 1$ esetre vonatkozó feltevés értelmében az a_1, a_2, ..., a_t számokból képezhető $t+j$ különböző maradékot adó összeg, az a_{t+1}, a_{t+2}, ..., a_n számokból pedig képezhető $n-t+1$ különböző maradékot adó összeg. Jelölje ezeket rendre s_1, s_2, ..., s_{t+j}, illetve r_1, r_2, ..., r_{n-t+1}. Minden további nélkül feltehető az is, hogy $s_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_t$. Tekintsük most a következő $n+j+1$ számot: s_1, s_2, ..., s_{t+j}, $s_1 + r_1$, $s_1 + r_2$, ..., $s_1 + r_{n-t+1}$, ezek bármelyike felírható az a_i számok közül néhánynak az összegeként. Tudjuk, hogy az első $t+j$ szám páronként inkongruens modulo m, és hasonlóképpen az utolsó $n-t+1$ is az. Az sem lehet, hogy valamelyik s_b ugyanolyan maradékot ad m-mel osztva, mint $s_1 + r_c$, hiszen különbségük, $(s_1 - s_b) + r_c$ jól láthatóan néhány a_i összege. A felsorolt $n+j+1$ szám tehát páronként inkongruens modulo m, és éppen ezt akartuk megmutatni.

Annyi van már csak hátra, hogy a fent kimondott állítást $i = 1$ esetén is igazoljuk. Tegyük fel tehát, hogy az a_1, a_2, ..., a_n számok közül a_1 és a_2 különböző maradékot adnak m-mel osztva. Ha az $a_1, a_2, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ számok között van kettő, ami ugyanazt a maradékot adja, akkor különbségük, ami nem más, mint néhány a_i összege, osztható lesz m-mel. Ellenkező esetben pedig máris találtunk $n+1$ olyan összeget, ami mind különböző maradékot ad m-mel osztva.

Megjegyzések. 1. Ahogy azt *Gyenes Zoltán* és *Kiss Gergely* is megjegyzik, az első megoldásból (és az azzal lényegében megegyező másodikból is) világosan látszik, hogy nem kell megkövetelnünk $2k$ különböző maradék létezését: elegendő, ha az a_i számokból kiválasztható k olyan pár, hogy az azonos párban lévő számok különböző maradékot adnak $(n+k)$-val osztva.

Ez megtehető már akkor is (hogyan?), ha csak $k+1$ különböző maradék létezését követeljük meg (feltéve persze, hogy $2k \le n$).

2. A KöMaL 2000. decemberi számának A. 252. feladata szerint a $2k \le n$ feltételre valójában nincs is szükség: a feladatban megfogalmazott állítás igazolásához elég annyit feltenni, ahogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok legalább $k+1$ különböző maradékot adnak $(n+k)$-val osztva. Az alábbiakban erre mutatunk két különböző bizonyítást.

3. Megjegyezzük még, hogy *Szemerédi Endre* egy nehéz eredményére támaszkodva ez a feltétel is lényegesen gyengíthető: ha k értéke n-hez képest „elég nagy", akkor elegendő annyit feltenni, hogy az a_i számok több, mint $c\sqrt{k}$ különböző maradékot adnak $(n+k)$-val osztva.

V. megoldás. (*Csikvári Péter* megoldásából.) Ha $k=0$, akkor a feltétel semmitmondó, és a bizonyítandó állítás következik a II. megoldás elején kimondott egyszerű állításból. A továbbiakban legyen tehát $k>0$.

Tegyük fel, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ számok különböző maradékot adnak $(n+k)$-val osztva. Legyen $s=a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}$, és tekintsük $1 \le i \le k+1$ esetén az a_i és $b_i = s-a_i$ számokat, valamint $1 \le j \le n-k$ esetén a $c_j = a_1+a_2+\ldots+a_{k+j}$ számokat, ez összesen $n+k+2$ egész szám. Vizsgáljuk meg, hogyan adhat ezek közül kettő ugyanolyan maradékot $(n+k)$-val osztva. Az a_i számok páronként különböző maradékot adnak, csakúgy mint a b_i számok. Ha a c_j számok közül kettő ugyanazt a maradékot adja, akkor már készen is vagyunk. Hasonlóképpen készen vagyunk akkor is, ha valamelyik c_j szám ugyanolyan maradékot ad, mint valamelyik a_i vagy b_i, hiszen mind maga az a_i szám, mind pedig a b_i minden egyes összeadandója szerepel bármelyik c_j összeadandói között. Mivel a_i a b_j-nek is összeadandója $j \ne i$ esetén, feltehetjük azt is, hogy ilyen esetekben a_i és b_j különböző maradékot adnak.

Összefoglalva, feltehetjük tehát, hogy ha a fent felsorolt $n+k+2$ szám között kettő azonos maradékot ad $(n+k)$-val osztva, akkor ez a két szám a_i és b_i egy alkalmas $1 \le i \le k+1$ indexre. Minden egyéb esetben ugyanis a bizonyítandó állítás az elmondottak miatt rögtön következik. Vegyük észre azt is, hogy azonnal befejezettnek tekinthetjük a bizonyítást akkor is, ha a felsorolt $n+k+2$ szám valamelyike osztható $(n+k)$-val. Egyetlen olyan eset képzelhető már csak el, amelyben még nem végeztük el a bizonyítást, nevezetesen ha 3 különböző i index is létezik úgy, hogy a_i és b_i ugyanazt a maradékot adják, vagyis különbségük, $s-2a_i$ osztható $(n+k)$-val. Legyenek ezek i_1, i_2 és i_3, ekkor a $2a_{i_1}$, $2a_{i_2}$ és $2a_{i_3}$ számok ugyanolyan maradékot adnak $(n+k)$-val osztva. Nem nehéz megmutatni, hogy ez csak úgy lehetséges, ha az a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3} számok közül kettőnek a maradéka megegyezik, ellentétben a megoldás legelején tett feltevésünkkel. Ez mutatja, hogy a bizonyítást már minden esetben elvégeztük.

VI. megoldás. (*Nagy Zoltán* megoldásából.) Ha a számok közül valamelyik osztható $(n+k)$-val, akkor már készen is vagyunk, találtunk egy egytagú megfelelő összeget. Tegyük fel tehát, hogy az a_i számok p különböző maradékot ($p \ge k+1$) adnak $(n+k)$-val osztva, és ezek $0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_p < n+k$. Ha egy összeg minden egyes tagját egy azzal azonos maradékot adó számmal helyettesítünk, a kapott összeg nyilván pontosan akkor lesz osztható $(n+k)$-val, ha az eredeti összeg is ilyen volt. Ezért feltehetjük azt is, hogy mindegyik a_i valamelyik m_j-vel egyenlő.

Állítsuk nagyság szerinti sorrendbe az a_i számokat, vagyis legyen $a_1=a_2=\ldots= =a_{k_1}=m_1$, $a_{k_1+1}=a_{k_1+2}=\ldots=a_{k_2}=m_2$, $\ldots$, $a_{k_{p-1}+1}=\ldots=a_n=m_p$, ahol $1\le k_1< <k_2<\ldots<k_{p-1}<n$. Tekintsük most minden $1\le i\le n$ esetén az $s_i=a_1+a_2+\ldots+a_i$ összeget, és minden $1\le j\le p-1$ esetén a $t_j=a_1+a_2+\ldots+a_{k_j-1}+a_{k_j+1}$ összeget is. Ez összesen $n+p-1\ge n+k$ szám. Ha ezek között van $(n+k)$-val osztható, akkor készen vagyunk. Ellenkező esetben kell, hogy legyen kettő, amelyik ugyanolyan maradékot ad $(n+k)$-val osztva.

Ha az s_i számok között van két ilyen, akkor a szokásos indoklás működik.

Ha s_i-t_j osztható $(n+k)$-val valamilyen i, j esetén, akkor ismét csak készen vagyunk. Ha ugyanis $i<k_j$, akkor az s_i összeg valódi része a t_j összegnek, és ezért t_j-s_i néhány a_i összege. Ha $i>k_j$, akkor pedig a t_j összeg képezi valódi részét az s_i összegnek. Az pedig nem lehet, hogy $i=k_j$, mert ekkor $s_i-t_j=a_{k_j}-a_{k_j+1}=m_j-m_{j+1}$ lenne, ami nem osztható $(n+k)$-val.

Végül tegyük fel, hogy $t_\ell-t_j$ osztható $(n+k)$-val valamilyen $1\le j<\ell\le p-1$ esetén. Ha még $j+1<\ell$ is teljesül, akkor könnyen látható, hogy $t_\ell-t_j$ az a_i számok közül néhánynak az összege. Ugyanez a helyzet akkor is, ha $\ell=j+1$ és $k_{j+1}\ge k_j+ +2$. Az pedig nem lehetséges, hogy $\ell=j+1$ és $k_{j+1}=k_j+1$, ekkor ugyanis $t_\ell-t_j= =a_{k_{j+1}+1}+a_{k_j}-a_{k_{j+1}}=m_{j+2}+m_j-m_{j+1}$. Viszont az m_i számokra tett feltevés miatt nyilván $0<m_j<m_{j+2}+m_j-m_{j+1}<m_{j+2}<n+k$, vagyis az egyetlen megmaradt esetben $t_\ell-t_j$ nem osztható $(n+k)$-val.

Károlyi Gyula

Számelmélet az x^2+dy^2 alakú számok körében*
II. rész

Az első részben elkezdtük vizsgálni, milyen pozitív egész d számokra teljesül, hogy ha két x^2+dy^2 alakú szám hányadosa egész, akkor a hányados is ilyen alakú. A $d=1$ és a $d=2$ eset után most vizsgáljuk a $d=3$ esetet. Legyenek a Q halmaz elemei azok a p prímek, amelyekre $p\mid x^2+3y^2$-ből következik, hogy $p\mid x$, $p\mid y$, a P_1 halmaz elemei pedig az x^2+3y^2 alakú prímek.

Most nem működik a $d=2$-re adott bizonyítás, ugyanis $2\notin Q$ (például $2\mid 1^2+3\cdot 1^2$),

* Az I. rész a KöMaL 2000/9. számában az 513–517. oldalakon olvasható. Ott az 516. oldal közepén álló egyenőtlenségbe sajtóhiba került. Helyesen:

$$x_1^2+2\cdot 1^2\le\left(\frac{p-1}{2}\right)^2+2<p^2.$$

és $2 \notin P_1$, hiszen nem írható fel x^2+3y^2 alakban. Nincs azonban nagy baj, csak kisebb módosításokra van szükség.

Először is megmutatjuk, hogy $2 \mid x^2+3y^2$ esetén $4 \mid x^2+3y^2$, tehát a 4 bizonyos értelemben prímként viselkedik. Ez könnyen látható, ugyanis

$$\begin{aligned} x^2 &\equiv 0 \quad \text{vagy} \quad 1 \quad (\text{mod } 4) \qquad \text{és} \\ 3y^2 &\equiv 0 \quad \text{vagy} \quad 3 \quad (\text{mod } 4), \qquad \text{így} \\ x^2+3y^2 &\equiv 0 \quad \text{vagy} \quad 1 \quad \text{vagy} \quad 3 \quad (\text{mod } 4). \end{aligned}$$

Ha ki tudjuk egészíteni az 1. Tételt azzal, hogy $4 \mid a^2+3b^2$ esetén az $\dfrac{a^2+3b^2}{4}$ is x^2+3y^2 alakú, akkor a bizonyítás során a 2 prímszámot a 4-gyel helyettesítve a $d=2$-re adott bizonyítás már szó szerint működni fog. Ezt a kiegészítést fogjuk most bizonyítani:

Vizsgáljuk az $\dfrac{a^2+3b^2}{4}$ törtet. Két lehetőség van: $2 \mid a$ és $2 \mid b$, vagy $2 \nmid a$ és $2 \nmid b$. Az első estben az állítás nyilvánvaló, a-t és b-t is el kell osztani 2-vel, így az $\dfrac{a^2+3b^2}{4}$-et kapjuk x^2+3y^2 alakban. Ha $2 \nmid a$ és $2 \nmid b$, akkor az 1. Tételnél leírt bizonyítás szó szerint működik az $x^2+3y^2=\text{prím}$ helyett $x^2+3y^2=4$-re is addig, hogy

$$x^2+3y^2 \mid ay-bx \qquad \text{vagy} \qquad x^2+3y^2 \mid ay+bx$$

kell, hogy legyen. De most $x=y=1$, így

$$4 \mid a+b \qquad \text{vagy} \qquad 4 \mid a-b$$

kell, hogy legyen. Mivel a és b páratlan, azért ezek közül az egyik valóban teljesül.

Ezzel az állítást $d=3$-ra is bebizonyítottuk.*

Nagyobb d-kre már ez a bizonyítási módszer nem működik. Például, mint majd később látni fogjuk, $d=5$-re igaz az állítás, és mégis $2 \notin Q$ (például $2 \mid 1^2+5\cdot 1^2$), $2 \notin P_1$ (nem írható fel x^2+5y^2 alakban), és az sem igaz, hogy $2 \mid x^2+5y^2$ esetén $4 \mid x^2+5y^2$ (például $6=1^2+5\cdot 1^2$). A bizonyításhoz mindenekelőtt egy, az 1. Tételnél erősebb tételre van szükség:

2. Tétel. *Ha ap és bp is x^2+dy^2 alakú, akkor az ab is x^2+dy^2 alakú.*

(Ennek speciális esete az 1. Tétel: ha az ap és az $1\cdot p$ is x^2+dy^2 alakú, akkor az $a\cdot 1$ is az).

Bizonyítás. Legyen

(3) $$ap=x^2+dy^2 \qquad \text{és}$$

(4) $$bp=z^2+dv^2.$$

* Ez volt a decemberben kitűzött **B. 3421.** feladat.

Ekkor a $(*)$ azonosság szerint

$$abp^2=(xz\pm dyv)^2+d(xv\mp yz)^2.$$

Nyilván elég azt bizonyítani, hogy

(5) $$p\mid xv-yz \qquad \text{vagy} \qquad p\mid xv+yz,$$

mert ekkor $p\mid xz+dyv$, illetve $p\mid xz=dyv$ lesz $(p^2\mid abp^2=(xz\pm dyv)^2+d(xv\mp yz)^2$ miatt), és így

$$ab=\left(\frac{xz\pm dyv}{p}\right)2+d\left(\frac{xv\mp yz}{p}\right)^2,$$

ahol az $\dfrac{xz\pm dyv}{p}$ és az $\dfrac{xv\mp yz}{p}$ egész. Ahhoz, hogy az (5) teljesüljön, ismét elég a $p\mid(xv-yz)(xv+yz)$-t, azaz a

(6) $$p\mid x^2v^2-y^2z^2$$

oszthatóságot bizonyítani. A (3) és (4) alapján

$$x^2\equiv -dy^2 \qquad \text{és} \qquad -dv^2\equiv z^2 \pmod p.$$

Ezeket összeszorozva:

$$dx^2v^2\equiv dy^2z^2, \qquad \text{azaz}$$
$$d(x^2v^2-y^2z^2)\equiv 0 \pmod p.$$

Így $p\nmid d$ esetén a (6) valóban teljesül, ha pedig $p\mid d$, akkor a $p\mid x^2+dy^2$ és $p\mid z^2+dv^2$ miatt $p\mid x$ és $p\mid z$, így a (6) ekkor is teljesül.

Most vizsgáljuk a $d=5$ esetet ($d=1$, 2, 3-ra már bebizonyítottuk, $d=4$-re pedig nem igaz, mivel a 4 egy 1-nél nagyobb négyzetszám). Használjuk a szokásos jelöléseket: legyenek a Q halmaz elemei azok a prímek, amelyekre $p\mid x^2+5y^2$-ből következik, hogy $p\mid x$ és $p\mid y$, és legyenek a P_1 halmaz elemei azok a prímek, amelyek felírhatók x^2+ $+5y^2$ alakban. Vezessünk be egy P_2 halmazt is: legyenek a P_2 halmaz elemei azok a p prímek, amelyekre a $2p$ felírható x^2+5y^2 alakban. A 2. tételből, valamint abból, hogy 2 nem írható fel x^2+5y^2 alakban következik, hogy e három halmaznak nincsen közös eleme.

Be fogjuk bizonyítani, hogy minden p prím eleme Q-nak, P_1-nek vagy P_2-nek. Most is teljes indukcióval fogunk bizonyítani: $p=2$-re igaz, mert $2\in P_2$ $(2p=4=2^2+5\cdot 0^2)$. Tegyük fel, hogy a p-nél kisebb prímekre már bebizonyítottuk, és vizsgáljuk a p-t.

Tegyük fel, hogy $p\notin Q$. Ekkor a $d=2$ esethez hasonlóan létezik olyan x, y, amelyre $p\mid x^2+5y^2$, ahol $x^2+5y^2\le\left(\dfrac{p-1}{2}\right)^2+5$. Ez $p\ge 3$ esetén kisebb p^2-nél, tehát a p-n kívül csak p-nél kisebb prímtényezői vannak. Ezek mind elemei Q-nak, P_1-nek vagy P_2-nek az indukciós feltétel alapján. A Q-beli és P_1-beli prímekkel a $d=2$ esethez hasonlóan leoszthatunk. Így egy olyan x^2+5y^2 alakú számhoz jutunk, amelynek a prímfelbontásában szerepel egy p tényező, és ezen kívül csak P_2-beli prímtényezők.

Legyen egy ilyen P_2-beli prímtényező q. Legyen $x^2 + 5y^2 = pqa$. Ekkor a pqa x^2+5y^2 alakú, és mivel a q P_2-beli, azért a $2q$ is az. Így a 2. Tétel alapján a $2pa$ is x^2+5y^2 alakú. Elvégezve ezt az átalakítást minden 2-nél nagyobb P_2-beli prímtényezővel, végül egy $2^k \cdot p$ számot fogunk kapni x^2+5y^2 alakban.

De $4 \mid x^2+5y^2$ esetén $2 \mid x$ és $2 \mid y$, így $4 \mid x^2+5y^2$ esetén x-et és y-t is eloszthatjuk 2-vel. Így a $2^k \cdot p$ számot eloszthatjuk 4-gyel ($k \geq 2$ esetén). Osszuk el 4-gyel annyiszor, ahányszor csak lehet, végül p-t vagy $2p$-t fogunk kapni x^2+5y^2 alakban. Tehát valóban $p \in P_1$ vagy $p \in P_2$, a megfelelő felbontás most is létezik.

Most azt fogjuk bebizonyítani, hogy ha $p_1 \in P_2$ és $p_2 \in P_2$, valamint a p_1p_2a szám x^2+5y^2 alakú, akkor az a szám is x^2+5y^2 alakú. Valóban, ha a p_1p_2a és a $2p_1$ is x^2+ $+5y^2$ alakú, akkor a $2p_2a$ is x^2+5y^2 alakú, és ha a $2p_2a$ és a $2p_2$ is x^2+5y^2 alakú, akkor a $2 \cdot 2a$ is x^2+5y^2 alakú (a 2. Tétel alapján). Azt pedig már bebizonyítottuk, hogy 4-gyel lehet osztani, így valóban az a is x^2+5y^2 alakú.

Végül bizonyítsuk be, hogy egy x^2+5y^2 alakú szám mindig néhány Q-beli, néhány P_1-beli és páros sok P_2-beli prím szorzata. Valóban, a Q-beli és P_1-beli prímekkel leoszthatunk, majd párosával leoszthatunk a P_2-beli prímekkel is. Így ha páratlan sok P_2-beli prím lenne, akkor végül egy P_2-beli prímet kapnánk x^2+5y^2 alakban. Így a p és a $2p$ is x^2+5y^2 alakú lenne, tehát a 2. Tétel alapján a 2 is, ami ellentmondás.

Ezek után vizsgáljunk egy

$$\frac{x^2+5y^2}{z^2+5v^2}$$

törtet. Ezt rendre egyszerűsíthetjük a Q-beli, P_1-beli, és párosával a P_2-beli prímekkel, és végül $\dfrac{x_1^2+5y_1^2}{1}$ alakú törtet kapunk, tehát a hányados is ilyen alakú.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $d=5$-re is igaz az állítás.

Ugyanígy bizonyíthatunk $d=6$-ra is. Azonban $d=7$-re már a bizonyítás nem működik, két okból sem: egyrészt nem teljesül $p \geq 3$-ra a

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + d < p^2 \tag{7}$$

(ez lenne a kisebbik probléma, ugyanis $p \geq 5$ esetén már teljesül, a $p=3$ pedig $d=7$ esetén Q-beli), másrészt nem lehet 4-gyel osztani. Ez akkora probléma, hogy $d=7$-re nem is igaz az állítás. Például

$$\frac{1^2+7 \cdot 1^2}{2^2+7 \cdot 0^2} = 2,$$

ami nem x^2+7y^2 alakú. Hasonló módon nem igaz $d=8$-ra sem, ekkor

$$\frac{0^2+8\cdot 1^2}{2^2+8\cdot 0^2}=2.$$

A $d=7$ és $d=8$ esetéből általánosabb tapasztalatot is leszűrhetünk:

3. Tétel. *A d-nek, és $d>3$ esetén a $(d+1)$-nek is négyzetmentes számnak kell lennie.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy a d nem négyzetmentes, tehát a^2b alakba írható, ahol $a\ge 2$. Ekkor

$$\frac{0^2+d\cdot 1^2}{a^2+d\cdot 0^2}=b.$$

Mivel $b<d$, ez csak akkor lehetne x^2+dy^2 alakú, ha négyzetszám lenne. De ha a b négyzetszám, akkor a d is az, és azt már tudjuk, hogy a d nem lehet 1-nél nagyobb négyzetszám.

Most vizsgáljuk azt, amikor a $d+1$ nem négyzetmentes, tehát $d+1=a^2b$, ahol $a\ge 2$. Ekkor

$$\frac{1^2+d\cdot 1^2}{a^2+d\cdot 0^2}=b,$$

ami a fentiekhez hasonló módon csak akkor lehet x^2+dy^2 alakú, ha a $d+1$ négyzetszám. Így $d+1\equiv 0$ vagy $1 \pmod 4$, azaz $d\equiv -1$ vagy $0 \pmod 4$. Ha $d\equiv 0 \pmod 4$, akkor a d nem négyzetmentes, így a fentiek alapján nem igaz rá az állításunk. Ha pedig $d\equiv -1 \pmod 4$, akkor az

$$\frac{1^2+d\cdot 1^2}{2^2+d\cdot 1^2}=\frac{d+1}{4} \qquad \frac{3^2+d\cdot 1^2}{2^2+d\cdot 1^2}=\frac{d+9}{4}$$

törtek egészek. De $d>3$ esetén a törtek kisebbek d-nél, igy csak akkor lehetnek x^2+dy^2 alakúak, ha négyzetszámok. De a két tört különbsége 2, és két négyzetszám különbsége nem lehet 2.

Vizsgáljuk tovább a d lehetséges értékeit. Láttuk, hogy a $d=7$-re és $d=8$-ra nem igaz az állításunk. Nyilván $d=9$-re sem igaz, mert a 9 négyzetszám. Azonban $d=10$-re igaz, itt működik a $d=5$-re adott bizonyítás: ekkor $2\in Q$, 4-gyel lehet osztani, $3\in Q$, és $p>3$-ra teljesül a (7) egyenlőtlenség, így innentől működik a teljes indukció. A $d=11$ és $d=12$ esetben nem igaz az állítás, mert ekkor a $d+1$, illetve a d nem négyzetmentes. A $d=13$ esetben megint csak működik a $d=5$-re adott bizonyítás ($2\in Q$, 4-gyel lehet osztani, $3\in Q$, $p>3$-ra teljesül a (7) egyenlőtlenség). A $d=14$ esetben sem a $(d+1)$-nek, sem a d-nek nincs 1-nél nagyobb négyzetszám osztója, az állítás mégsem igaz:

$$\frac{2^2+14\cdot 1}{3^2+14\cdot 0}=2.$$

A $d=15$, 16, …, 20 esetben a d vagy a $d+1$ nem négyzetmentes.

Most vizsgáljuk a $d=21$ esetet. A már ismert Q, P_1, P_2 halmazokon kívül vezessük be a P_3 és P_6 halmazokat, a P_3 elemei legyenek azok a p prímek, amelyekre a $3p$ felírható x^2+21y^2 alakban, a P_6 elemei pedig azok, amelyekre a $6p$ felírható x^2+21y^2 alakban.

Ekkor $2\in P_2$, $3\in P_3$, $5\in P_6$ (mert $2p=4=2^2+21\cdot 0^2$, $3p=9=3^2+21^0$, illetve $6p=$ $=30=3^2+21\cdot 1^2$), $p>5$-re pedig teljesül a (7) egyenlőtlenség. Ezen kívül 2^2-nel és 3^2-nel lehet osztani, így a $d=5$ esethez hasonlóan be lehet bizonyítani, hogy minden prím eleme Q-nak, P_1-nek, P_2-nek, P_3-nak vagy P_6-nak.

A $d=5$ esethez hasonlóan be lehet bizonyítani, hogy egy szám akkor és csak akkor írható fel x^2+21y^2 alakban, ha P_2-beli és P_6-beli prím összesen páros sok van benne, valamint P_3-beli és P_6-beli prím összesen páros sok van benne: le lehet osztani a Q-beli és P_1-beli prímekkel, párosával le lehet osztani a P_2-beli, P_3-beli, valamint a P_6-beli prímekkel, továbbá le lehet osztani egy P_2-beli, egy P_3-beli és egy P_6-beli prímmel egyszerre. Ezek után a bizonyítás folytatható.

Csörnyei Marianna

A következő számunkban közöljük a cikk III. részét, amelyben az általános megoldásról lesz szó.

A szerk.

Szerkesztések vonalzóval

A 2000. évi XI. magyar–izraeli matematikaverseny feladata volt a következő:

1. *Adott a síkon a C kör (a középpontja nélkül) és a P pont. Megszerkeszthető-e csak vonalzóval a C kör középpontját a P-vel összekötő egyenes?*

2. *Adott a síkon a C_1 és a C_2 kör (a középpontjaik nélkül). Szerkesszük meg a középpontjaikon átmenő egyenest csak vonalzóval, ha*

i) a két kör metszi egymást;

ii) a két kör érinti egymást, és az érintési pont, T meg van jelölve;

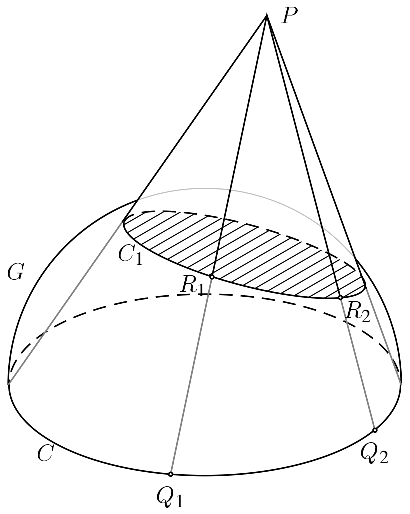
iii) ha nincs közös pontjuk.

A feladatot úgy kaptuk meg, hogy a 2. *iii)* részre nem volt ismert, hogy elvégezhető-e a szerkesztés. A későbbiekben megvizsgáljuk, mit mondhatunk az egyes esetekben.

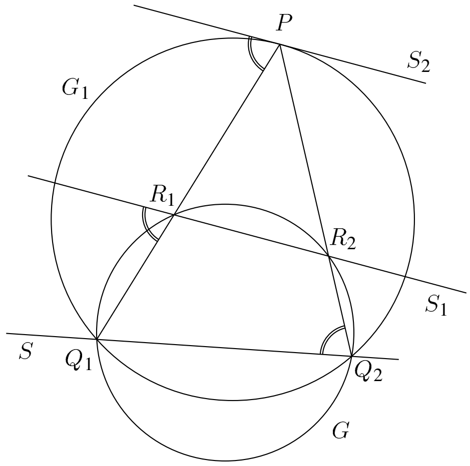
1. Először is vegyük észre, hogy itt az a kérdés, megszerkeszthető-e a C kör középpontja. Valóban, egyrészt ha megszerkeszthető, akkor P-vel összekötve, a kívánt egyenest kapjuk meg. Másrészt, ha két tetszőleges pontot, P_1-et és P_2-t véve megszerkesztjük a kérdezett egyeneseket (ha szerkeszthetők), akkor ezek metszéspontja a kör középpontját adja meg (kivéve, ha OP_1 egyenesén P_2 is rajta van, de először OP_1 egyenesét megszerkesztve felvehetjük P_2-t rajta kívül). Átfogalmazzuk tehát a kérdést:

1.’ Megszerkeszthető-e csak vonalzóval a C kör középpontja?

Megmutatjuk, hogy ez nem lehetséges. A bizonyítás indirekt: tegyük fel, hogy szerkesztési lépések egy sorozatával megkaptuk a középpontot, O-t. A bizonyítás alapgondolata nagyon szép: vetítsük a kört egy pontból egy másik S_1 síkra úgy, hogy kör maradjon, a sík egyenesei egyenesek maradjanak, de a kör O középpontja ne kerüljön az új kör O_1 középpontjába. A vetítést a feltételezett szerkesztés lépéseire alkalmazva az új síkon ugyanannak a lépéssorozatnak az O_1 középpontot kellene adnia, de a lépések nyomán a C körvonal középpontjának O^* vetítettjét kapjuk, ami ellentmondás, mert ez a pont nem középpontja a C_1-nek. Célunk tehát az, hogy egy ilyen vetítést találjunk.



1. ábra



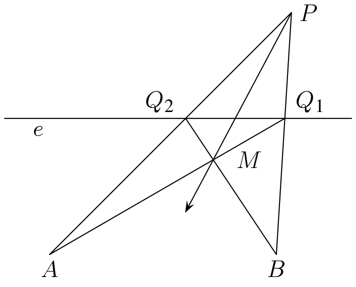
2. ábra

Lépjünk ki ezért az S síkból a térbe, vegyünk fel egy P pontot a síkon kívül, és tekintsük a P és a C körvonal által meghatározott kúpot. Az a G gömb, amelynek C az egyik főköre, metszi a kúpot, ha P a G-n kívül van (*1. ábra*). Belátjuk, hogy a metszet kör, vagy ami ezzel ekvivalens, hogy a metszet pontjai egy síkban vannak. Valóban, ha Q_1 és Q_2 a C két pontja, a PQ_1 és PQ_2 egyenesek másodszor R_1-ben és R_2-ben metszik a G gömböt, akkor az R_1 és R_2 által meghatározott egyenes párhuzamos egy adott állású síkkal. Ennek belátásához tekintsük azt a G_1 gömböt, ami átmegy C-n és a P ponton; e gömb P-beli érintősíkja, S_2 megfelelő lesz. Messük el ugyanis az egész elrendezést a $Q_1Q_2R_2R_1$ négyszög síkjával: állításunk bizonyítása a kerületi szögek tétele alapján a *2. ábráról* leolvasható.

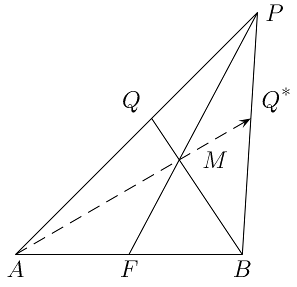
Legyen a metszet síkja (az S_2-vel párhuzamos) S_1 sík; azt állítjuk, hogy ha P merőleges vetülete az eredeti S síkon nem C középpontja, vagyis a P csúcsú C alapú kúp nem egyenes kúp, akkor a P pontból az S_1 síkra való vetítés megfelel.

Valóban, az S és az S_1 sík, C és C_1 síkja nem párhuzamos, így O (a C középpontja) képe nem lesz középpont; C képe a bizonyítottak szerint kör, az pedig nyilvánvaló, hogy a vetítés során minden egyenes képe egyenes. Tehát **1.’**-re valóban nemmel válaszolhatunk.

2. Az első két részfeladat megoldásához két ismert alapszerkesztést használunk fel.



3. ábra



4. ábra

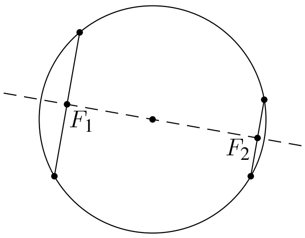
a) Ha ismert egy AB szakasszal párhuzamos e egyenes, akkor csak vonalzóval meg tudjuk szerkeszteni az AB szakasz F felezőpontját.

b) Ha adott az AB szakasz F felezőpontja, akkor tetszőleges Q ponton át csak vonalzóval meg tudjuk szerkeszteni az AB-vel párhuzamos, Q ponton átmenő egyenest.

a) A P segédpontot felvéve a létrejövő ABQ_1Q_2 trapézban PM átmegy az AB felezőpontján.

b) A P segédpontot felvéve az M pont PF és BQ metszéspontjaként adódik. Ezután az AM és PB metszéspontját (Q^*) a Q-val összekötő egyenes párhuzamos lesz AB-vel.

Az első szerkesztés helyessége a párhuzamos szelők tételéből, a másodiké pedig annak megfordításából közvetlenül adódik.



5. ábra

Térjünk rá ezek után a 2. feladat első két szerkesztésére.

a) szerint mindkét esetben elegendő az egyik körbe egy párhuzamos húrpárt rajzolnunk. Ekkor ugyanis meg tudjuk felezni őket, és az F_1F_2 egyenes átmegy a kör középpontján (*5. ábra*).

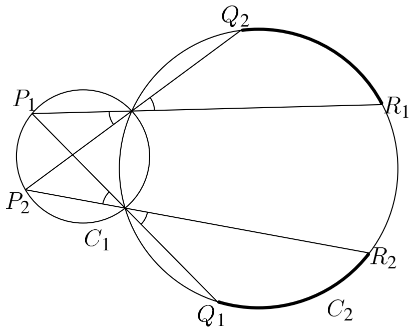
Ezt a lépést egy újabb, az előzővel nem párhuzamos húrpárra megismételve a kör középpontja is megszerkeszthető, a centrálist tehát a körök középpontjainak megszerkesztésével kapjuk.

i) A C_1 körön a P_1, P_2 segédpontokat fölvéve és összekötve őket a körök metszéspontjaival, a kerületi szögek tétele szerint a $\widehat{Q_1R_2}$ és az $\widehat{R_1Q_2}$ ívek egyenlők, így a végpontjaikat összekötő húrok, Q_1Q_2 és R_1R_2 párhuzamosak (*6. ábra*).

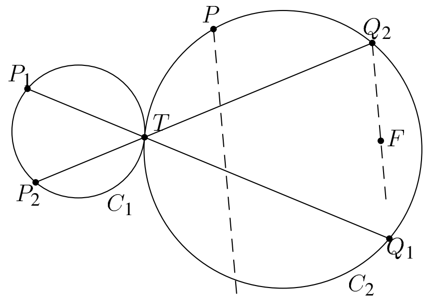
ii) Mivel T a két érintkező kör belső hasonlósági pontja, a P_1, P_2 segédpontokat fölvéve P_1P_2 párhuzamos Q_1Q_2-vel (*7. ábra*).

a) szerint így meg tudjuk felezni a Q_1Q_2 szakaszt, és ezután b) szerint a C_2 kör tetszőleges P pontján át meg tudjuk rajzolni a Q_1Q_2-vel párhuzamos húrt.

Mielőtt rátérnénk *iii)* vizsgálatára, megfigyelhetjük, hogy az *i)* és *ii)* esetben nemcsak a centrálist kapjuk meg, hanem a középpontokat is. Az *i)* részre majd mutatunk egy olyan szerkesztést is, amely közvetlenül a centrálist adja meg, a középpontokat nem. Az *iii)* esetben pedig megmutatjuk, hogy az eddigi típusú szerkesztések nem működnek, ti. C_1 és C_2 középpontja általában nem szerkeszthető.



6. ábra



7. ábra

iii) A pontos állítás, amit bizonyítunk, a következő:

Állítás. Ha a C_1 és C_2 körvonalaknak nincs közös pontja, továbbá nem koncentrikusak, akkor középpontjaik csak vonalzóval nem szerkeszthetők.

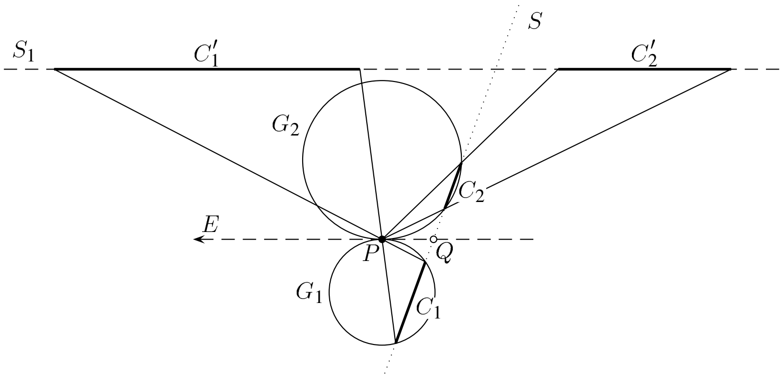
Bizonyítás. Az első bizonyításhoz hasonlóan most is azt mutatjuk meg, hogy van olyan P pont és S_1 sík a térben, hogy a P-ből a körök S síkját S_1-re vetítve mindkét kör képe kör marad, de a vetítés során a középpontok képe nem középpont. A *8. ábra* azt a síkmetszetet mutatja, amelyben a P ponton és a C_1, C_2 körök centrálisán átmenő sík metszi az elrendezést.

Tekintsük C_1 és C_2 hatványvonalát, messe ezt a centrális a Q pontban, vegyük fel a P pontot C_1 és C_2 síkján kívül úgy, hogy a QP szakasz hossza egyenlő legyen a Q pontból a körökhöz húzható érintő szakasz hosszával; továbbá P merőleges vetülete a centrálison legyen. Mivel C_1 és C_2 nem koncentrikusak, így a hatványvonaluk létezik; másrészt Q-ból C_1-hez és C_2-höz is húzható érintő, mert a hatványvonal nem metszi (vagy érinti) a köröket az adott feltételek mellett. Tekintsük a P és a C_1 által meghatározott G_1, továbbá a P és a C_2 által meghatározott G_2 gömböt. QP egyenese mindkét gömböt érinti (hiszen a Q-ból a G_1-hez, illetve G_2-höz húzott érintők mind egyenlő hosszúak), a két gömb P-beli érintősíkja így azonos (mivel QP-vel és a hatványegyenessel is párhuzamos), tehát a két gömb P-ben érinti egymást. Vegyünk fel az itteni E érintősíkkal párhuzamos S_1 síkot, amely nem megy át P-n.

P-ből erre az S_1 síkra vetítve (ami S-sel nem párhuzamos, mert C_1 és C_2 nem koncentrikusak) C_1 és C_2 képe kör, az egyenesek képe egyenes, de C_1 és C_2 középpontja nem megy át a megfelelő középpontokba, így **1.**-hez hasonlóan ellentmondáshoz jutottunk.

Mindebből még nem következik, hogy a centrális nem szerkeszthető. A középpontok viszont még akkor sem szerkeszthetőek, ha még a centrális is meg van adva, ez adódik a fenti bizonyításból. Ez azért fontos, mert ellenkező esetben be lehetne bizonyítani, hogy ha körök nem metszik egymást, akkor nem szerkeszthető meg a centrális. Valóban, ha a centrális ismeretében már meg lehetne szerkeszteni a középpontokat, akkor abból a körök középpontjára adódna szerkesztési eljárás.

A fenti eredmény tehát negatív: nem vezet ellentmondásra az a feltevés, hogy két nem metsző kör centrálisa csak vonalzóval megszerkeszthető. Ennél többet a fentiek alapján nem állíthatunk, az *iii)* probléma továbbra is nyitott.

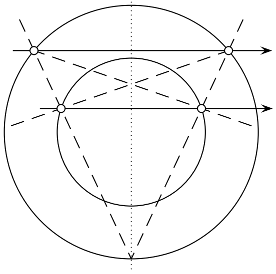


8. ábra

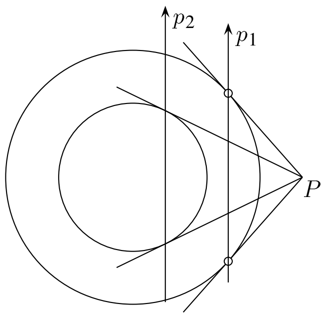
Befejezésül egy további speciális eredményt bizonyítunk:

Állítás. Ha C_1 és C_2 koncentrikus körök, akkor szerkeszthető a közös középpont.

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg, hogy koncentrikus körökbe ismét rajzolhatunk párhuzamos húrokat csak vonalzóval (*9. ábra*), az így adódó szimmetrikus trapéz felhasználásával pedig a közös középponton átmenő egyenest rajzolhatunk.



9. ábra



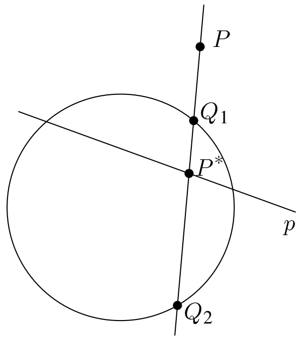
10. ábra

Ha P a körök külső pontja, akkor a P-nek a körökre vonatkozó *polárisai*[1], p_1 és p_2 párhuzamosak lesznek (*10. ábra*).

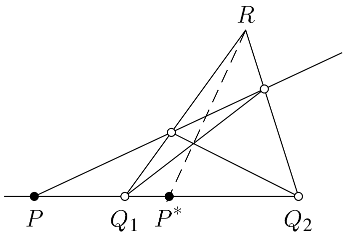
Egy P pont adott körre vonatkozó p polárisát pedig megszerkeszthetjük csak vonalzóval, ha felhasználjuk, hogy a P-n átmenő tetszőleges egyenes, amelyik a kört két pontban (Q_1 és Q_2) metszi, a p polárist olyan P^* pontban metszi, amelyre a $PQ_2P^*Q_1$ ún. *harmonikus pontnégyest* alkot, tehát amelyre $\dfrac{Q_2P}{PQ_1}=\dfrac{Q_2P^*}{P^*Q_1}$ (*11. ábra*).

[1] Egyenes és pont körre vonatkozó kölcsönösen egyértelmű megfeleltetéséről, a *polaritásról* ld. pl.: *Havalampijev:* Pólus és poláris a körben c. cikkét a KöMaL 1987/1. számában.

KöMaL – 2001/2 MAT0102 cianmagentayellowblack2002. június 19. – 8:50 (22. lap)



11. ábra

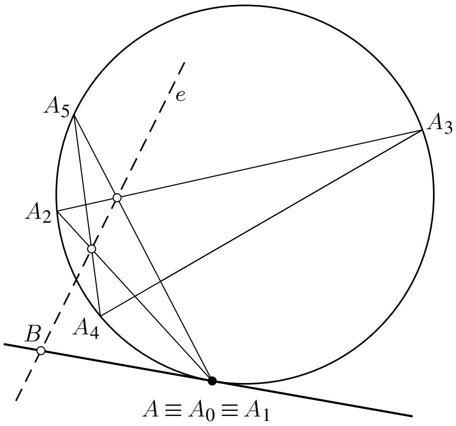


12. ábra

A P pontnak a Q_1, Q_2 pontokra vonatkozó *harmonikus társát* pedig megszerkeszthetjük csak vonalzóval (*12. ábra*). A szerkesztés a $2/\mathrm{a}$) eljárás kiterjesztése, a „teljes négyoldal" tulajdonságait használja fel.

Így két szelő felhasználásával két pontot kapunk a polárison.

Némileg hasonló az új megoldás az *i)* feladatra: elég lenne a két kör metszéspontjaiban érintőket szerkeszteni, ezek metszéspontjai kiadják a centrálist. Ehhez a projektív geometria ad segítséget: a *Pappos–Pascal* tétel. Eszerint ha adott egy körbe írt hatszög, akkor az A_iA_{i+1} és $A_{i+3}A_{i+4}$ egyenesek metszéspontjai ($i = 1, 2, 3$) $A_{j+6} = A_j$ egy egyenesen vannak. A hatszög itt akár önmagát metsző is lehet: a csúcsok számozása határozza meg az egyenespárokat. A tétel akkor is igaz, ha egy egyenest meghatározó két pont egybeesik a körön: összekötő egyenesük ekkor az adott pontba húzott érintő. Éppen ezt használhatjuk egy kör adott A pontjába húzott érintő megszerkesztésekor. Legyen $A_0 \equiv A_1 \equiv A$, és vegyük fel az A_2, A_3, A_4, A_5 pontokat a körön tetszőlegesen. Szerkesszük meg az $A_2A_3 \cap A_5A_0$, $A_4A_5 \cap A_1A_2$ metszéspontokat; a tétel szerint ezek egy e egyenesen vannak. Ez A_3A_4-et B-ben metszi; AB a keresett érintő (*13. ábra*). Ez utóbbi két megoldás mutatja, hogy milyen hasznos segédeszköz lehet a projektív geometria bizonyos feladatok megoldásánál.



13. ábra

Végül az érdeklődőknek ajánljuk *Szőkefalvi Nagy Gyula:* A geometriai szerkesztések elmélete című könyvét. A bizonyítások egy része innen származik, és itt található az **1.** feladatra, illetve a **2.** *iii)* részre koordináta-geometriát felhasználó bizonyítás is.

Gyenes Zoltán

Mérőlap felvételire készülőknek III.

Steinfeld Ottó matematikus emlékére

1. Az ABC háromszögben $AC = 5{,}8$, $BC = 5$ egység. Az AB oldalhoz tartozó magasság $CT = 4$ egység. Számítsa ki a háromszög területét!

2. Oldja meg a valós számpárok halmazán az

$$x^2 = 2y + 8, \qquad y^2 = 2x + 8$$

egyenletrendszert.

3. Az ABC háromszögben a C csúcsból induló belső szögfelező az AB oldalt a D pontban metszi. Számítsa ki a háromszög C csúcsánál fekvő szögét és az AB oldal hosszát, ha $AC = 5$, $BC = 12$ és $CD = \dfrac{60\sqrt{2}}{17}$ egység.

4. Oldja meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

a) $\sqrt{4x - x^2} > 6 - 2x$; *b)* $\log_{\frac{3}{4}} \log_{18}(x^2 - 63) \ge 0$.

5. Az $ABCD$ téglalapban BC=3AB. A rövidebb oldalak felezőpontjai $E\left(\dfrac{7}{2}; -\dfrac{3}{2}\right)$ és $F\left(-\dfrac{11}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$. Számítsa ki a csúcspontok koordinátáit!

6. Határozza meg azokat az a, b és c pozitív egész számokat, amelyekre

$$ab = a + 2b + 33,$$

valamint az a, b és c hosszúságú szakaszokból olyan háromszög szerkeszthető, amely mindhárom oldalának hossza osztható 3-mal.

7. Milyen határok között mozog $2p - 2q$ értéke, ha p és q olyan valós számok, hogy az $x^2 - px + q = 0$ egyenlet gyökei valósak, és az egyenlet x_1 és x_2 gyökeire fennáll az $x_1^2 + x_2^2 = 4$ összefüggés?

8. Oldja meg az

$$\frac{x - 2p}{x + 2p} = \frac{x - p}{x - 2p} - \frac{8p^2 - 3x}{x^2 - 4p^2}$$

egyenletet, ahol p valós paraméter.

Rábai Imre

A januári szakköri feladatok megoldásvázlatai, eredményei

1. *a)* Ha (a_n) számtani sorozat, akkor $a_n = a_1 + (n-1)d$, azaz $a_n = (d)n + (a_1 - d)$; ha $a_n = An + B$, akkor $a_{n-1} = A(n-1) + B$, és így $a_n - a_{n-1} = A$, tehát a sorozat számtani.

b) Ha (a_n) számtani sorozat, akkor $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$, azaz valóban fennáll, hogy $S_n = \left(\frac{d}{2}\right)n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$;

ha pedig $S_n = Kn^2 + Ln$, akkor $S_{n-1} = K(n-1)^2 + L(n-1)$, és így $a_n = S_n - S_{n-1} = (2K)n + (L-K)$, azaz a sorozat valóban számtani.

2. Dolgozhatunk vektorokkal. Legyen $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ ($|\mathbf{a}| = a$), $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$ ($|\mathbf{b}| = b$), $\overrightarrow{CD} = \mathbf{c}$ ($|\mathbf{c}| = c$), $\overrightarrow{DA} = \mathbf{d}$ ($|\mathbf{d}| = d$), $\overrightarrow{AC} = \mathbf{e}$ ($|\mathbf{e}| = e$), $\overrightarrow{BD} = \mathbf{f}$ ($|\mathbf{f}| = f$); ekkor $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d} = \mathbf{0}$, $\mathbf{e} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{e} = -\mathbf{c}-\mathbf{d}$; $\mathbf{f} = \mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{f} = -\mathbf{a}-\mathbf{d}$, $\mathbf{e}^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2$, $\mathbf{e}^2 = \mathbf{c}^2 + 2\mathbf{cd} + \mathbf{d}^2$, $\mathbf{f}^2 = \mathbf{b}^2 + 2\mathbf{bc} + \mathbf{c}^2$, $\mathbf{f}^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ad} + \mathbf{d}^2$.

Ezekből, figyelembe véve, hogy $\mathbf{b}+\mathbf{d} = -(\mathbf{a}+\mathbf{c})$:

$$2(\mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2) = 2(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + \mathbf{d}^2) + 2(\mathbf{a}+\mathbf{c})(\mathbf{b}+\mathbf{d}),$$
$$\mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{d}^2 + \mathbf{a}^2 + \mathbf{c}^2 - (\mathbf{a}+\mathbf{c})^2,$$
$$\mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{d}^2 - 2\mathbf{ac}.$$

Ha a négyszög trapéz, akkor az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{c}$ vektorok párhuzamosak és ellentétes az irányításuk, tehát

$$\mathbf{ac} = |\mathbf{a}||\mathbf{c}|\cos 180^\circ = -|\mathbf{a}||\mathbf{c}| = -ac,$$

tehát

$$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac.$$

Ha $e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac$, akkor mivel a fentiek szerint $\mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{d}^2 - 2\mathbf{ac}$, $2ac = -2\mathbf{ac}$, azaz $2ac = -2|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{c}|\cos\varphi$, ahol φ az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{c}$ vektorok szöge. Most

$$2ac = -2ac\cos\varphi, \qquad \cos\varphi = -1, \qquad \varphi = 180^\circ,$$

tehát $\mathbf{a} \parallel \mathbf{c}$, azaz a négyszög valóban trapéz.

3. Ha egy egyenlő szárú háromszög alapja x, az alapon fekvő szög α, akkor a magassága $m = \frac{1}{2}\cdot x\cdot \operatorname{tg}\alpha$, területe $T = \frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha$, $T = \frac{x^2}{4}\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

Ennek alkalmazásával:

$$T_{ABC} + T_{A_1BC} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha + \frac{1}{4}a^2\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}(\operatorname{tg}\alpha)(a^2 + 2bc\cos\alpha),$$
$$T_{AB_1C} + T_{ABC_1} = \frac{1}{4}(\operatorname{tg}\alpha)(b^2 + c^2).$$

A koszinusztétel szerint $a^2 + 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2$, tehát igaz az állítás.

4. Ismeretes, hogy $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ és $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

$$\begin{aligned}
&2+7+14+\ldots+(n^2+2n-1)=\\
&=(1^2+2\cdot1-1)+(2^2+2\cdot2-1)+(3^2+2\cdot3-1)+\ldots+(n^2+2n-1)=\\
&=(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+2(1+2+3+\ldots+n)-n\cdot1=\\
&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n=\frac{n}{6}(2n^2+9n+1).
\end{aligned}$$

Rábai Imre

A Hajdú-Bihar Megyei Középiskolai Versenyről

Ebben a tanévben 2000. november 16-án került megrendezésre a Hajdú-Bihar Megyei Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny a Debreceni Egyetem Matematikai és Informatikai Intézete és a Bolyai János Matematikai Társulat Hajdú-Bihar Megyei tagozata szervezésében. A versenyen a város és a megye középiskolái (gimnázium, szakközépiskola) tanulói indultak, több, mint 1000 tanuló írt versenydolgozatot.

A versenyt a Versenybizottság igen eredményesnek ítélte. 35 tanár 61 diákja ért el helyezést vagy kapott dicséretet. Maximális pontszámot 6 tanuló ért el: *Egri Attila, Tóth Ágnes, Erdei Zsuzsa, Siroki László, Nagy Dávid, Deli Lajos.*

Ízelítőül néhány a verseny feladatai közül:

9. osztály

3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy 10-es számrendszerbeli szám 7-tel osztható, akkor az utolsó számjegyének elhagyásával keletkezett számot e jegy kétszeresével kisebbítve szintén 7-tel osztható számot kapunk. Igaz-e ennek az állításnak a megfordítása is?

5. Melyek a sík azon pontjai, amelyek a sík e és f, egymással nem párhuzamos egyeneseitől mért távolságainak összege egy adott d távolsággal egyenlő?

10. osztály

2. Egy kocka középpontjának távolsága az egyik csúcsától a, az egyik élének felezőpontjától b, az egyik lapjának középpontjától c. Van-e olyan háromszög, amelyik oldalainak hossza a, b, c?

3. Az ABC háromszög BC oldalának A_1 belső pontján áthaladó, AC-vel párhuzamos egyenes AB-t C_1-ben metszi. Az A_1 ponton áthaladó, AB-vel párhuzamos egyenes AC-t B_1-ben metszi. Legyen az ABC, CB_1A_1, BA_1C_1 háromszögek köré írt kör sugara rendre r, r_c, r_b. Igazolja, hogy $r=r_c+r_b$!

11. osztály

2. Oldjuk meg a

$$\sin x-\sqrt{y}+z^2=3 \qquad 2\sin x+\sqrt{y}-z^2=0 \qquad 3\sin x+2\sqrt{y}+3z^2=19$$

egyenletrendszert.

5. Az x_n sorozat tagjai teljesítik az $x_{n+1}-2x_n+x_{n-1}=1$ rekurziót. Határozzuk meg x_{2000} értékét, ha $x_0=1$ és $x_1=2$.

12. osztály

4. Legyen az ABC háromszög belső szögfelezőinek a metszéspontja O, az α szög belső szögfelezőjének a BC oldallal való metszéspontja M, a β szög belső szögfelező-jének az AC oldallal való metszéspontja N,

$$d_{AO}=\sqrt{3}d_{MO}, \qquad d_{NO}=(\sqrt{3}-1)d_{BO}.$$

Mekkorák az ABC háromszög szögei?

5. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sin 2x-2\left(2\sqrt{\sin x+\cos x}-3\right)(\sin x+\cos x)=4\sqrt{\sin x+\cos x}-2.$$

Dr. Kántor Sándorné

Matematika gyakorlatok megoldása

C. 580. *Kati dolgozatot írt matematikából, majd még egy javító dolgozatot is írt. A tanár a két jegy helyett azok átlagát írta be az osztályozó füzetébe. Bizonyítsuk be, hogy Kati akkor jár jobban ezzel, ha a többi matematika jegyeinek átlaga nagyobb a két dolgozatjegy átlagánál.*

Javasolta: *Kovács Gabriella,* Budapest

Megoldás. Tegyük fel, hogy Katinak a két utolsó dolgozat megírása előtt n darab jegye volt, és ezek összege x; akkor az átlagok $\frac{x}{n}$.

A két újonnan kapott jegyének összegét jelölje y, ezek átlaga $\frac{y}{2}$.

Tegyük fel, hogy Kati úgy jár jobban, ha a tanár a két új jegyét írja be a naplóba, s nem azok átlagát, azaz

$$\frac{x+y}{n+2}>\frac{x+\frac{y}{2}}{n+1}.$$

Hozzunk közös nevezőre, és egyszerűsítsünk: $\frac{ny}{2}>x$, ahonnan $\frac{y}{2}>\frac{x}{n}$.

Ez tehát pontosan akkor teljesül, ha a két újonnan kapott jegy átlaga nagyobb, mint az addigi jegyeinek átlaga. Kati tehát ilyenkor jár jobban azzal, ha a tanár a két új jegyét írja be.

Béky Zsófia (Budapest, Árpád Gimn., 8. o.t.)

243 dolgozat érkezett. 5 pontos 139, 4 pontos 45, 3 pontos 8, 2 pontos 6, 1 pontos 37, 0 pontos 1. Nem versenyszerű 7,

C. 590. *Ismeretes, hogy a Föld felszínén a szabadon eső test* $s\approx 4{,}903t^2$ *méter utat tesz meg* t *másodperc alatt. Hogyan módosul a képlet, ha a távolságot lábban, az időt pedig percben mérjük?*

Megoldás. Tudjuk, hogy 1 perc 60 másodperc és 1 angol láb $\approx 0{,}3048$ m.

Ezért $s=\frac{4{,}903\cdot(60t)^2}{0{,}3048}\approx 57\,909t^2$, ha a távolságot lábban, az időt pedig percben mérjük.

Megjegyzés. A megoldók közül többen megjegyezték, hogy többféle eredmény adódhat, mivel a láb–méter átváltás nem egységes.

Sándor Ágnes (Pápa, Református Koll. Gimn., 9. o.t.) fel is sorolt néhányat a különböző mértékekből. Ezek:

1 láb = 0,3048 m	(angol, USA, orosz)
= 0,316 m	(magyar, osztrák)
= 0,325 m	(francia), ekkor $s\approx 54\,310t^2$
= 0,314 m	(porosz, dán)
= 0,292 m	(bajor), ekkor $s\approx 60\,448t^2$.

Ebből is látszik, hogy nem élünk egyforma nagy lábon.

867 dolgozat érkezett. 5 pontos 430, 4 pontos 19, 3 pontos 8, 2 pontos 2, 1 pontos 1, 0 pontos 389. Nem versenyszerű 18,

C. 591. *Arnold gondolt* 5 *számot, és Bendegúznak megmondta valamennyi összeget, amelyeket két-két szám összeadásával kapott. Ezek a következők:* 6, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 11, 12. *Milyen számokra gondolt Arnold?*

Megoldás. Legyenek a gondolt számok $x_1\le x_2\le x_3\le x_4\le x_5$. Ha valamennyi kéttagú összeget összeadjuk, azt kapjuk, hogy

$$4(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)=90,$$

azaz a számok összege

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=\frac{45}{2}. \tag{1}$$

A számok rendezése miatt $x_1+x_2=6$ a legkisebb összeg, és

$$x_4+x_5=12 \tag{2}$$

a legnagyobb. (1)-gyel összevetve adódik, hogy

$$x_3=\frac{45}{2}-(x_1+x_2)-(x_4+x_5)=\frac{9}{2}.$$

Mivel $x_3+x_4\le x_3+x_5\le x_4+x_5$, ezért az utolsó előtti legnagyobb összeg $x_3+x_5=11$, innen, mivel $x_3=\frac{9}{2}$, az $x_5=\frac{13}{2}$, (2)-ből pedig $x_4=12-\frac{13}{2}=\frac{11}{2}$.

Végül $x_1+x_2=6$ és $x_1+x_3=7$ a következő legkisebb összeg, ahonnan

$$x_1=7-x_3=7-\frac{9}{2}=\frac{5}{2}\qquad\text{és}\qquad x_2=6-\frac{5}{2}=\frac{7}{2}.$$

A gondolt számok tehát nagyság szerint: $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{11}{2}$ és $\frac{13}{2}$.

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy valamennyi felsorolt kéttagú összeg előfordul, hiszen

$$x_1+x_2=6,\quad x_1+x_3=7,\quad x_1+x_4=8,\quad x_1+x_5=9,\quad x_2+x_3=8,$$
$$x_2+x_4=9,\quad x_2+x_5=10,\quad x_3+x_4=10,\quad x_3+x_5=11\quad\text{és}\quad x_4+x_5=12.$$

Blaskó Ján (Budapest, Szlovák Gimn., 10. o.t.)

782 dolgozat érkezett. 5 pontos 177, 4 pontos 146, 3 pontos 189, 2 pontos 156, 1 pontos 55, 0 pontos 59.

C. 594. *Egy húrtrapéz alapja a, másik három oldalának összege d. Mekkorák az oldalak, ha a trapéz területe maximális?*

Megoldás. A húrtrapéz olyan trapéz, amelynek oldalai a körnek húrjai, s mivel a húrnégyszög szemközti szögeinek összege 180°, ebből következik, hogy a trapéz egyenlő szárú.

Legyen a trapéz nagyobbik alapja $AB=a$, a kisebbik $DC=c$, szárai pedig $AD=$ $=BC=b$ (*1. ábra*).

A feltétel szerint:

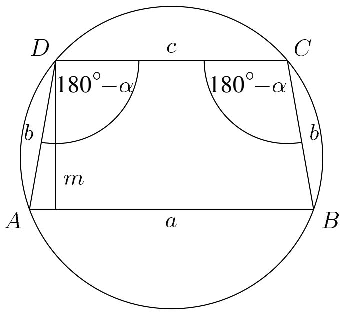
(1) $$d=2b+c.$$

A trapéz területe: $T=\frac{a+c}{2}\cdot m$. Pitagorasz tétele szerint:

$$m=\sqrt{b^2-\left(\frac{a-c}{2}\right)^2}.$$

(1)-ből $b=\frac{d-c}{2}$; ezeket behelyettesítve

$$T=\frac{a+c}{2}\sqrt{\left(\frac{d-c}{2}\right)^2-\left(\frac{a-c}{2}\right)^2}.$$



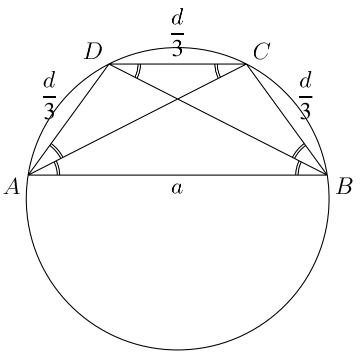
1. ábra

Alakítsuk át a kifejezést, használjuk fel az ismert $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ azonosságot:

$$T=\frac{a+c}{4}\sqrt{(d+a-2c)(d-a)}.$$

A $(d-a)$ értéke állandó, ez nem befolyásolja a maximum értéket; $d+a=k$ a trapéz kerülete. Tovább alakítva a kifejezést kapjuk, hogy

$$T=\frac{1}{4}\sqrt{d-a}\sqrt{(a+c)(a+c)(k-2c)}.$$



2. ábra

A második gyökjel alatt mindegyik tényező pozitív, a háromtényezős szorzatra felírhatjuk a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt[3]{(a+c)(a+c)(k-2c)}\le$$
$$\le\frac{(a+c)+(a+c)+(k+2c)}{3}=\frac{k+2a}{3}.$$

A szorzat akkor maximális, ha a tényezők egyenlők, azaz $a+c=k-2c=d+a-2c$, ahonnan $3c=d$, illetve $c=\frac{d}{3}$ és $b=\frac{d-c}{2}=\frac{d}{3}$, vagyis a szárak és a rövidebbik alap hossza egyenlő.

Ilyen trapéz akkor létezik, ha $d>a$ (*2. ábra*).

A kétíves szögek egyenlők, mert egyenlő hosszúságú húrokhoz tartoznak, így $AB\parallel CD$, vagyis a négyszög valóban trapéz.

Ásványi Katalin (Ajka, Bródy I. Gimn., 11. o.t.)

Megjegyzések. 1. A feladatot, mint szélsőérték-feladatot, deriválással is meg lehet oldani (lásd az internetes megoldásvázlatot).

2. A szokásosnál több 0 pontos dolgozat oka az alábbi: Többen a következő hibás következtetéseket írták le:

a) „Mivel a négyszög kerülete adott, és adott kerületű négyszögek közül a négyzetnek a területe a legnagyobb, ezért a négyszög négyzet.” Ez a gondolat hibás, ugyanis nem csak a négyszög kerülete adott, hanem egyik oldala is, ezért (a $d=3a$ esetet kivéve) a trapéz semmiképpen nem lehet négyzet.

b) „A húrtrapézt a hosszabbik párhuzamos oldalára tükrözve hatszöget kapunk. Adott kerület esetén a szabályos hatszög területe a legnagyobb, ezért a húrtrapéz 3 oldala egyenlő, és $\frac{d}{3}$-mal egyenlő.” Ez a hiba hasonló az előzőhöz: a kapott húrtrapéznak a kerületén kívül egyik átlója is előre megszabott, így erre az általános szélsőérték-feladatra sem hivatkozhatunk.

c) Voltak, akik a területet két egymástól nem független tag összegére bontották, és külön-külön keresték a maximumot, s ebből próbálták meghatározni a közös maximumot.

335 dolgozat érkezett. 5 pontos 67, 4 pontos 17, 3 pontos 11, 2 pontos 6, 1 pontos 25, 0 pontos 201. Nem versenyszerű 8,

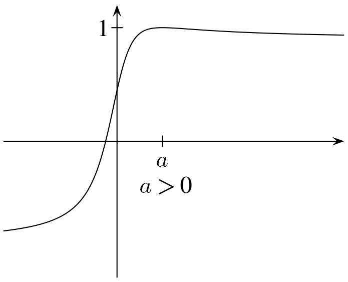
Matematika feladatok megoldása

B. 3358. *Bizonyítsuk be, hogy négy különböző valós szám között van olyan kettő: a és b, amelyekre*

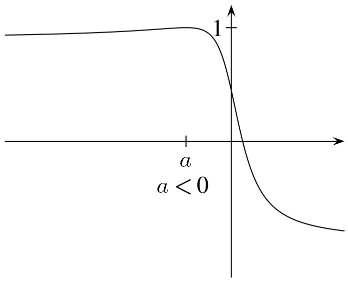
$$\frac{1+ab}{\sqrt{1+a^2}\cdot\sqrt{1+b^2}}>\frac{1}{2}.$$

(*5 pont*) *Mezei József,* Vác

I. megoldás. Legyen a rögzített valós szám, és tekintsük az $f_a(x)=\dfrac{1+ax}{\sqrt{1+a^2}\,\sqrt{1+x^2}}$ függvényt. f_a minden valós számra értelmes, és mint az szokványos eszközökkel (elemi differenciálszámítással) megmutatható, f_a a $(-\infty;a]$ intervallumon növő, az $[a;+\infty)$ intervallumon fogyó, $\lim\limits_{+\infty} f_a=\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ és $\lim\limits_{-\infty} f_a=-\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$. Ezzel a jelöléssel adott a és b számokra pontosan akkor teljesül a feladat előírása, ha $f_a(b)>\dfrac{1}{2}$.



1.a) ábra



1.b) ábra

Az *1.a), b) ábrán* az f_a grafikonja látható $a>0$, illetve $a<0$ esetben. Könnyű számolással kapjuk, hogy ha $|a|\ge\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, akkor $\dfrac{|a|}{\sqrt{1+a^2}}\ge\dfrac{1}{2}$. Így ha $a\ge\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, akkor $f_a(x)>\dfrac{1}{2}$ minden $x\ge a$ esetén, ha pedig $a\le-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, akkor $f_a(x)>\dfrac{1}{2}$ minden $x\le a$ esetén.

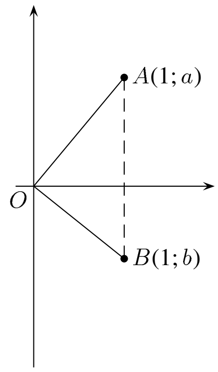
Ez azt jelenti, hogy ha a négy adott valós szám közül kettő esik akár a $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$, akár pedig a $\left(-\infty;-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ intervallumba, akkor teljesül rájuk az előírt egyenlőtlenség.

Ha egyik fenti intervallumban sincs egynél több a megadott számok közül, akkor legalább kettő esik a $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ intervallumba. Egyszerű számolással kapjuk, hogy $f_a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > \frac{1}{2}$ pontosan akkor teljesül, ha $a > -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Így ha $-\frac{\sqrt{3}}{3} < a \le b < \frac{\sqrt{3}}{3}$, akkor

$$1 = f_a(a) \ge f_a(b) > f_a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > \frac{1}{2},$$

hiszen az f szigorúan monoton fogyó az $[a;+\infty)$ intervallumon. Ezzel megmutattuk, hogy négy valós szám között valóban mindig található kettő, amelyekre teljesül az előírt egyenlőtlenség.

II. megoldás. Némi tapasztalat és intuíció révén természetes jelentés adható az egyenlőtlenség bal oldalán szereplő kétváltozós kifejezésnek, továbbá – ennek nyomán – maga az állítás is egy geometriai közhellyé egyszerűsödik.



2. ábra

A nevezőben álló pitagoraszi mennyiségek nyomán természetesnek látszik az $A(1;a)$ és a $B(1;b)$ pontok bevezetése (*2. ábra*).

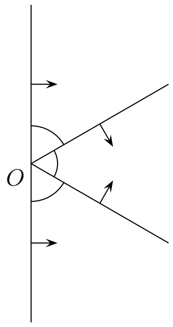
A koszinusztételt az OAB háromszögben felírva:

$$(a-b)^2 = (1+a^2) + (1+b^2) - 2\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}\cos AOB\sphericalangle,$$

ahonnan rendezés után $\cos AOB\sphericalangle = \frac{1+ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}$, a szóban forgó egyenlőtlenség bal oldala adódik, maga a feltétel pedig a

$$\cos AOB > \frac{1}{2}, \qquad \text{azaz az} \qquad AOB\sphericalangle < 60^\circ$$

alakot ölti.



3. ábra

Ebben a formában az állítás azt jelenti, hogy ha adott négy pont az $x=1$ egyenesen, akkor van köztük kettő, A és B, hogy $AOB\sphericalangle < 60^\circ$. Ez pedig nyilvánvaló, az O pontból kiinduló $\frac{\sqrt{3}}{3}$ és $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ meredekségű félegyenesek a nyílt pozitív félsíkot három 60°-os szögtartományra osztják, a középső nyílt, a két szélső pedig félig nyílt, így a skatulyaelv szerint a négy adott pont között van olyan kettő, amelyik ugyanannak a tartománynak a belsejében található (*3. ábra*). Erre a két pontra pedig az AOB szög kisebb, mint 60°.

Megjegyzések. 1. A két megoldás kapcsolata jól látható, a második jelentése mintegy értelmezi az első függvényének a viselkedését, az ott kapott eredmények a geometriai megközelítésben érthetők meg. A feladat persze korrekt módon oldható meg az első megoldás módszerével, legfeljebb az az érzésünk, hogy egy sötét szobában kerestük a kijáratot a falak mentén tapogatva

– és meg is találtuk –, míg a második megoldásban először a lámpát kapcsoltuk fel. Ez mindig látványos, de jó tudni, hogy akkor sem kell kétségbe esni, ha nem találjuk a kapcsolót.

2. A második megoldás ötletéhez az $\mathbf{a}(1;a)$ és $\mathbf{b}(1;b)$ vektorok skalárszorzata, $1+ab$, illetve a definícióból adódó $\cos\varphi=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$ alak felismerése közvetlenül is elvezethet, egyúttal rámutathatunk a feladat lehetséges eredetére.

78 dolgozat érkezett. 5 pontos 55, 4 pontos 3, 3 pontos 2, 2 pontos 5, 1 pontos 4, 0 pontos 9.

B. 3363. *Van-e olyan háromszög, amit két vágással három egybevágó részre lehet darabolni?*
(*3 pont*)

Megoldás. Egy háromszöget egyetlen vágással vagy két háromszögre, vagy egy háromszögre és egy négyszögre lehet darabolni. Ezért, mivel a részek között kell lennie háromszögnek is, ha két vágással három egybevágó részt kapunk, akkor mindhárom rész háromszög.

Kell, hogy legyen (legalább) egy olyan pont, amely mind a három háromszögnek határpontja. Ha ugyanis ilyen nem volna, akkor két egybevágó háromszöget a harmadik szétválasztana; ez egy-egy oldalon szomszédos volna a két szétválasztandó háromszöggel, ezen kívül további egy-egy oldalnak kellene biztosítani, hogy a két szélső háromszög határponton se érjen össze, így a középső háromszögben négy oldalnak kellene lennie.

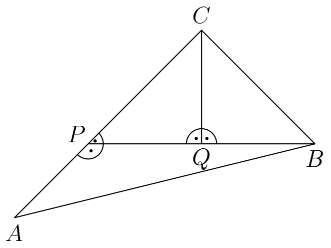
A közös határpont helyzete háromféle lehet:

I. a határpont az eredeti háromszög belsejében van;

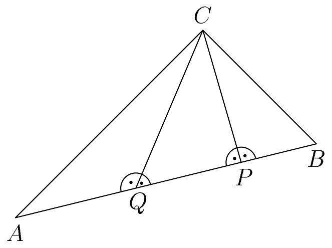
II. a határpont egy csúcsban van;

III. a határpont egy oldal belső pontja.

I. Ekkor biztos, hogy az egyik vágás végpontja a másiknak közbülső pontja, ugyanis különben nem kapnánk 3 háromszöget. Továbbá ahhoz, hogy háromszögeket kapjunk, mindkét vágás egyik végpontjának csúcsban kell lennie. Tehát a darabolás csak az *1. ábra* szerinti lehet. Az ábra betűzését használva, mivel $PQC\sphericalangle+CQB\sphericalangle=180^\circ$, ezek nem lehetnek a két egybevágó háromszögnek két különböző szöge, így csak $PQC\sphericalangle=$ $=CQB\sphericalangle=90^\circ$ lehet. Hasonló okokból $APB\sphericalangle=CPB\sphericalangle=90^\circ$. Ekkor pedig a CPQ háromszögben két derékszög volna, ami lehetetlen.

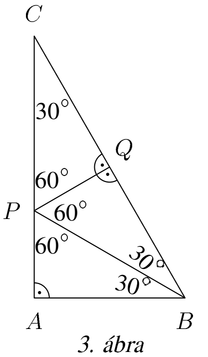


1. ábra



2. ábra

II. Legyen a határpont például a C csúcsban. Most az előzőhöz hasonlóan az $AQC\sphericalangle$ és a $CQP'\sphericalangle$, mivel összegük 180°, nem lehetnek az egybevágó háromszögeknek különböző nagyságú szögei, így $AQC\sphericalangle = CQP\sphericalangle = 90^\circ$, ugyanígy $BPC\sphericalangle = CPQ\sphericalangle = 90^\circ$, tehát ismét két derékszög lenne a CPQ háromszögben, így ez az eset sem lehetséges.



3. ábra

III. Legyen most a P határpont az AC oldalon. Ekkor a két vágás egyike a szemben fekvő csúcsba, a másik egy oldal belső pontjába megy, más esetben ugyanis nem kapnánk csupa háromszög darabot. Most az előzőekhez hasonló gondolatmenet miatt $PQC\sphericalangle = PQB\sphericalangle = 90^\circ$. Nem lehet az $APB\sphericalangle = 90^\circ$, mert akkor a PAB háromszögben PB befogó, a PQB háromszögben pedig átfogó lenne, így nem volnának egybevágóak. A P-nél levő három szög összege 180°. Ha az egybevágó háromszögek derékszögtől különböző szögeit α-val és β-val jelöljük, akkor vagy $a)$ $2\alpha + \beta = 180^\circ$, vagy $b)$ $3\alpha = 180^\circ$ lehet. Az $a)$ eset nem fordulhat elő, hiszen $\alpha + \beta = 90^\circ$, így $a)$-ból $\alpha = 90^\circ$ következne. Marad tehát a $b)$ eset, ekkor $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$. Ez a darabolás a *3. ábra* szerint meg is valósítható. (Az ismert $CB = 2AB$ tulajdonság miatt a kis háromszögek egybevágóak.)

Így a feladat kérdésére a válasz: létezik ilyen darabolás, és csakis akkor, ha az eredeti háromszög (és egyúttal a keletkezett rész-háromszögek is) a derékszögű és 60°-os szögű háromszög, és a darabolás csak a III. esetben leírtak szerinti lehet.

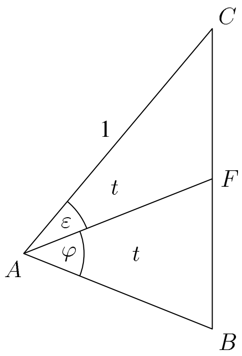
Rácz Béla András (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.)

Megjegyzés. Azok is megkapták a 3 pontot, akik csak a fenti konstrukciót adták meg.

205 dolgozat érkezett. 3 pontos 148, 2 pontos 1, 1 pontos 39, 0 pontos 17.

B. 3376. *Az ABC háromszög AC oldala egységnyi. Az A csúcsból induló súlyvonal $1:2$ arányban osztja az A-nál lévő szöget. Mekkora lehet a háromszög AB oldala?*

(*3 pont*) Javasolta: *Mihalovics Sándor,* Esztergom



1. ábra

I. megoldás. Legyen F a BC oldal felezőpontja, ekkor AF az ABC háromszög súlyvonala. Legyen $CAB\sphericalangle = \varepsilon + \varphi$, ahol $CAF\sphericalangle = \varepsilon$ és $FAB\sphericalangle = \varphi$. Mivel a CAF és az FAB háromszögek területe egyenlő, igaz a következő:

$$t = \frac{AF \cdot AC \cdot \sin\varepsilon}{2} = \frac{AB \cdot AF \cdot \sin\varphi}{2},$$

$AC = 1$, tehát $AB = \dfrac{\sin\varepsilon}{\sin\varphi}$.

Esetünkben a súlyvonal a CAB szöget $1:2$ arányban osztja, így két eset lehetséges:

a) $\varphi = 2\varepsilon$ vagy *b)* $\varepsilon = 2\varphi$.

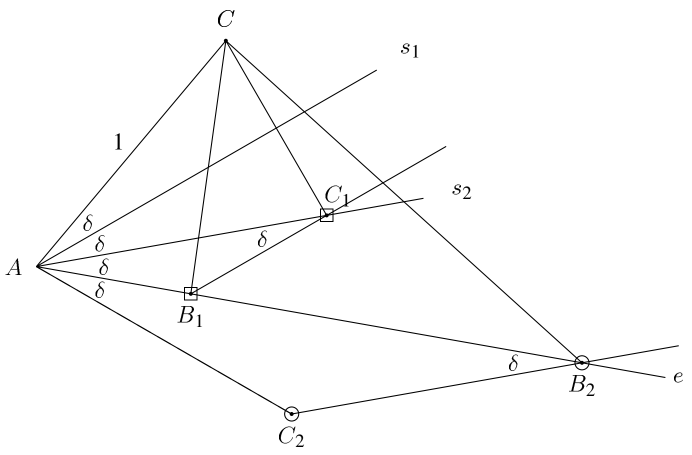
Az *a)* esetben $AB = \dfrac{\sin\varepsilon}{\sin 2\varepsilon} = \dfrac{\sin\varepsilon}{2\cos\varepsilon \cdot \sin\varepsilon} = \dfrac{1}{2\cos\varepsilon}$, és mivel $0^\circ < \varepsilon + \varphi < 180^\circ$, így $0^\circ < \varepsilon < 60^\circ$, tehát $\dfrac{1}{2} < AB < 1$.

A *b)* esetben $AB = \frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi} = \frac{2\cos\varphi\cdot\sin\varphi}{\sin\varphi} = 2\cos\varphi$, és mivel most $0^\circ < \varphi < 60^\circ$, így $1 < AB < 2$.

Az AB oldal hossza tehát $\frac{1}{2}$ és 2 között lehet, de nem veheti fel az 1 értéket.

Raikovich Tamás (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., 10. o.t.)

II. megoldás. *Megjegyzés.* Ez a megoldás nem használ szögfüggvényeket, csak a háromszög-egyenlőtlenséget, ezért érdemes megismerni.



2. ábra

Tekintsük az ABC háromszög két csúcsát, A-t és C-t, valamint az A-nál levő $\alpha = 3\delta$ szögét adottnak. Nevezzük e-nek az AB egyenesét: a háromszög B csúcspontja valahol ezen az egyenesen van. Mivel $\alpha < 180^\circ$, így $\delta < 60^\circ$. A *2. ábra* jelölései szerint a háromszögnek vagy s_1, vagy s_2 a súlyvonala. Tükrözzük C-t s_1-re és s_2-re, legyenek a tükörképek C_1, illetve C_2. Ekkor $AC = AC_1 = AC_2 = 1$, és C_1 nyilván rajta van s_2-n. Húzzunk C_1-en keresztül párhuzamost s_1-gyel és C_2-n keresztül párhuzamost s_2-vel; ezek metszéspontjai e-vel B_1, illetve B_2. Azt állítjuk, hogy ha az ABC háromszög súlyvonala s_1, akkor $B \equiv B_1$, ha pedig s_2, akkor $B \equiv B_2$. Valóban, s_1 felezi a CB_1, s_2 pedig a CB_2 szakaszt. B_1 vagy B_2 mindig egyértelműen adódik mint e és az s_1-gyel, illetve s_2-vel párhuzamos egyenesek egyetlen metszéspontja: s_1, s_2 és e ugyanis nem párhuzamosak.

Mivel $B_1C_1 \parallel s_1$, így a $B_1C_1A\sphericalangle = \delta$, tehát az AB_1C_1 háromszög egyenlő szárú; hasonlóan, az s_2-re vonatkozó szimmetria miatt $C_2AB_2\sphericalangle = \delta$, és $B_2C_2 \parallel s_2$ miatt $C_2B_2A\sphericalangle = \delta$, így az AC_2B_2 háromszög is egyenlő szárú.

Az AB_1C_1 háromszögben $AB_1 + B_1C_1 = 2AB_1 > AC_1 = 1$ a háromszög-egyenlőtlenség miatt, tehát $AB_1 > \frac{1}{2}$.

Mivel $AB_1C_1\sphericalangle = 180^\circ - 2\delta > 60^\circ$ ($\delta < 60^\circ$) és a nagyobb szög nagyobb oldallal szemben van, így $AB_1 < AC_1 = 1$.

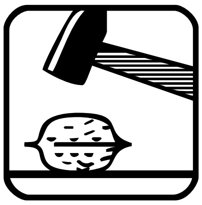
Azt kaptuk, hogy $\dfrac{1}{2} < AB_1 < 1$.

Az AC_2B_2 háromszögben $AC_2 + C_2B_2 = 2 > AB_2$ a háromszög-egyenlőtlenség miatt, és $AC_2B_2\sphericalangle = 180^\circ - 2\delta > 60^\circ$, így mivel nagyobb oldallal szemben kell hogy legyen a nagyobb szög, $AB_2 > AC = 1$, tehát $1 < AB_2 < 2$.

Tehát az AB oldal hossza az egyik esetben $\dfrac{1}{2}$ és 1, a második esetben 1 és 2 közé esik, és itt bármilyen értéket felvehet, hiszen minden ilyen értékhez megszerkeszthető vagy az AB_1C_1, vagy az AC_2B_2 háromszög. (Vigyázat, $AB \neq 1$!)

Takács Gergő (Tatabánya, Árpád Gimn. és Pedagógiai Szki., 10. o.t.) dolgozata alapján

82 dolgozat érkezett. 3 pontos 34, 2 pontos 14, 1 pontos 12, 0 pontos 18. Nem versenyszerű 4.



Nehezebb feladatok megoldása

A. 242. *Egy* $5 \times 5 \times 10$*-es téglatestben adott* 2001 *pont. Bizonyítsuk be, hogy ki tudunk közülük választani kettőt, amelyek távolsága kisebb, mint* 0,7.

Megoldás. Tekintsük azt a 2001 darab 0,35 sugarú gömböt, amelyek középpontjai az adott pontok. Ezek térfogatának összege

$$2001 \cdot \frac{4\pi}{3} 0{,}35^3 \approx 359{,}37.$$

Ha a téglatest mindegyik lapsíkját 0,35 egységgel kifelé toljuk, akkor az így kapott téglatest már mindegyik gömböt tartalmazza. A kibővített téglatest mérete $5{,}7 \times 5{,}7 \times$ $\times\, 10{,}7$, térfogata

$$5{,}7^2 \cdot 10{,}7 \approx 347{,}64.$$

Mivel a kibővített téglatest térfogata kisebb, mint a gömbök térfogatának összege, biztosan van két olyan gömb, amelyeknek van közös belső pontja. Két metsző gömb középpontjának távolsága pedig kisebb, mint sugaraik összege, 0,7.

98 dolgozat érkezett. 5 pontos 75, 4 pontos 4, 3 pontos 4, 2 pontos 1, 0 pontos 14.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (615–619.)

C. 615. Egy háromtételes zenemű lejátszása 60 percig tart. Egyik tétel sem hosszabb, mint a másik két tétel együttvéve. Bármelyik két tétel hossza között legalább 3 perc különbség van. Milyen határok között változhat a legrövidebb tétel időtartama?

C. 616. Lehetséges-e, hogy egy nyolctagú társaságban az ismeretségek száma rendre

a) 1, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 6 *b)* 1, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7?

C. 617. Az ABC egyenlő szárú háromszögben az AB alap felezőpontja D, a D-ből CB-re állított merőleges talppontja P, a DP szakasz felezőpontja F. Fejezzük ki az $AFPC$ négyszög területét a CF és az AP segítségével.

C. 618. Egy $ABCD$ téglalap hosszabbik oldala AB, P az AB szakasz, Q a CD szakasz belső pontja. Igazoljuk, hogy P-nek és Q-nak pontosan egy olyan helyzete van, amelyben $APCQ$ rombusz. Mutassuk meg, hogy a téglalap oldalainak arányát változtatva a rombusz és a téglalap területének aránya $1/2$ és 1 között bármilyen értéket felvehet.

NRICH Online Maths Club
`http://nrich.maths.org`

C. 619. 1-től 100 000-ig hány olyan n egész szám van, amelyre n^3+23n többszöröse a 24-nek?

❄

Beküldési határidő: 2001. március 16.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest, Pf. 47. 1255

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (3432–3441.)

B. 3432. Az alábbi táblázat a Pascal-háromszög mintájára készült. Az első sor két eleme 1 és 2, ezután pedig minden újabb szám a felette álló kettő összege.

a) Mennyi a 100-adik sorban álló számok összege?

b) Mit kapunk, ha a 100-adik sorban váltakozó előjellel adjuk össze a számokat?

c) Mennyi a 100-adik sor 47-edik eleme?

(*4 pont*)

1 2
1 3 2
1 4 5 2
1 5 9 7 2
. . . .

B. 3433. Egy geometria konferencia résztvevői a szünetben olyan szendvicseket kaptak, amelyek mindegyikén egy téglatest alakú kenyéren egy vastag szelet henger alakú sajt és egy gömb alakú húspogácsa volt. Mindig ketté lehet-e vágni egy ilyen szendvicset egyetlen egyenes vágással úgy, hogy a két rész kenyérből, húsból és sajtból is ugyanannyit tartalmazzon?

(*4 pont*)

B. 3434. Egy trapéz alapjai a és b. A trapéz elmetszhető az alapokkal párhuzamos egyenessel úgy, hogy a két rész-trapézba kör írható. Mekkora az eredeti trapéz kerülete?

(*3 pont*) Javasolta: *Reményi Gusztáv,* Budapest

B. 3435. Keressük meg az alábbi egyenletrendszer nemnegatív megoldásait:

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{100}=5050$$

$$x_2^2-x_1^2=3 \qquad \ldots \qquad x_k^2-x_{k-1}^2=2k-1 \qquad \ldots \qquad x_{100}^2-x_{99}^2=199.$$

(*4 pont*)

B. 3436. Az egységnyi területű ABC háromszög AB, BC, CA oldalain adottak a C_1, A_1, B_1 pontok úgy, hogy

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{BA_1}{A_1C}=\frac{1}{3}, \qquad \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{1}{4}.$$

Mekkora területű háromszöget határolnak az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek?

(*3 pont*)

B. 3437. Egy egyenesen ebben a sorrendben adottak az A, B, C, D pontok úgy, hogy $BC=2AB$, $CD=AC$. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is rajzolunk egy-egy kört az A és C, illetve a B és D pontokon keresztül, akkor ezek közös húrja felezi az AC szakaszt.

(*4 pont*)

B. 3438. Az $f(x,y,z)$ függvényre teljesül, hogy bármely t valós számra

$$f(x+t,y+t,z+t)=t+f(x,y,z);$$

$$f(tx,ty,tz)=tf(x,y,z);$$

$$f(x,y,z)=f(y,x,z)=f(x,z,y).$$

Mennyi $f(2000,2001,2002)$?

(*5 pont*)

B. 3439. Jelöljön p egy pozitív számot, és tekintsük az $1,\ p,\ \frac{1}{p},\ p^2,\ \frac{1}{p^2},\ \ldots,\ p^n,\ \frac{1}{p^n}\ \ldots$ végtelen sorozatot. Mely p számokra igaz, hogy minden pozitív szám tetszőleges pontossággal megközelíthető a fenti sorozat véges sok alkalmas elemének összegével?
(*5 pont*)

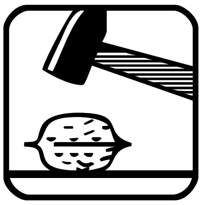
B. 3440. Az A, B, C pontok tükörképe egy e egyenesre A_1, B_1, C_1, egy P pontra pedig A_2, B_2, C_2. Mi a P tükörképe az e egyenesre, ha $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{0}$?
(*3 pont*)

B. 3441. Pinokkiónak 9-féle akadályon kell sikerrel túljutnia, hogy hús-vér gyerek lehessen. Nehéz dolga van; ha egy akadályon elbukik, akkor vissza kell térnie az előzőhöz, és ott újra kell próbálkoznia. Ha a legelső akadályon bukik el, akkor fabábu marad örökre. Pinokkió nem tanul a kudarcokból, ezért az egyes akadályokon a siker valószínűsége mindig $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \ldots, \frac{9}{10}$, akárhányadszor is próbálkozik. Milyen sorrendben rendezze el a Kékhajú Tündér a Pinokkióra váró akadályokat ahhoz, hogy Pinokkió a legnagyobb eséllyel változzék át igazi gyerekké, és mekkora ebben az esetben a siker valószínűsége?
(*5 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2001. március 16.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

❄



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (257–259.)

A. 257. Van n golyó, mindegyiknek szeretnénk megtudni a súlyát. Ehhez rendelkezésünkre áll egy olyan egykarú mérleg, amellyel egyszerre egy vagy két golyó súlyának összegét lehet meghatározni. Arra is fel kell készülnünk, hogy esetleg az egyik mérés pontatlan lesz. Jelöljük $f(n)$-nel azt a minimális mérésszámot, amellyel az összes golyó súlya minden esetben biztosan meghatározható. Igazoljuk, hogy

$$f(n) > n + \log_3 n - 3.$$

Surányi László és *Virág Bálint* ötletéből

A. 258. Adott az e egyenesen hat különböző pont: A, B, C, D, E és F. Tudjuk, hogy $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$. Szerkesszünk egyetlen egyenes vonalzóval olyan egyenest, amely párhuzamos e-vel.

A. 259. Az x_1, x_2, ..., x_n, valamint $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$ pozitív valós számokra és az $u > 1$ valós számra teljesül, hogy tetszőleges $1 \le k \le n$ esetén

$$x_1^u + x_2^u + \ldots + x_k^u \le y_1^u + y_2^u + \ldots + y_k^u.$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \le y_1 + y_2 + \ldots y_n.$$

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS

(Volume 51. No. 2. February 2001)

New exercises for practice – competition C (see page 101): **C. 615.** A piece of music is composed of three movements; its total playing time is 60 minutes. No movement is any longer then the other two altogether. The difference between the playing times of any two movements is at least 3 minutes. Determine the range for the playing time of the shortest movement. **C. 616.** Eight people are travelling together in a railway compartment. Is it possible that the respective numbers of acquaintances in the compartment are a) 1, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 6; b) 1, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7? **C. 617.** The midpoint of the base AB of the isosceles triangle ABC is denoted by D. Let P denote the foot of the perpendicular dropped from D to CB and F the midpoint of segment DP. Express the area of the quadrilateral $AFPC$ in terms of the length of CF and AP. **C. 618.** Take any rectangle $ABCD$ such that $AB > BC$. The point P is on AB and Q is on CD. Show that there is exactly one position of P and Q such that $APCQ$ is a rhombus. Show also that, by choosing a suitable rectangle, the ratio of the area of the rhombus to the area of the rectangle can take any value strictly between $1/2$ and 1. (*"NRICH Online Maths Club"* `http://nrich.maths.org`) **C. 619.** Determine the number of such integers n, lying between 1 and 100000 so that $n^3 + 23n$ is a multiple of 24.

New problems – competition B (see page 101): **B. 3432.** The array below is constructed in a similar way as Pascal's triangle. The first row in the array contains the numbers 1 and 2, every further entry is the sum of the two neighbours above. *a)* Determine the sum of the entries in the 100th row. *b)* What do we get if the entries in the 100th row are summed with alternating signs? *c)* Determine the 47th element in the 100th row. (*4 points*) **B. 3433.** The participants of a geometry conference got curious sandwiches with the refreshments. On the top of each cuboid-shaped slice of bread there was a thick slice of cheese in the shape of a cylinder and also a spherical meat ball. Is it always possible to cut such a sandwich into two parts with a straight cut such that the two parts contain the same amount of each ingredient? (*4 points*) **B. 3434.** A trapezium has bases a and b. A line parallel to its bases cuts the trapezium into two parts such that a circle can be inscribed into each sub-trapezium. Determine the perimeter of the original trapezium. (*3 points*) **B. 3435.** Find all non-negative solutions of the following system of equations:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & 2 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 2 & & \\ & 1 & & 4 & & 5 & & 2 & \\ 1 & & 5 & & 9 & & 7 & & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{100} = 5050, \quad x_2^2 - x_1^2 = 3, \quad \ldots \quad x_k^2 - x_{k-1}^2 = 2k - 1, \quad \ldots \quad x_{100}^2 - x_{99}^2 = 199.$$

(*4 points*) **B. 3436.** Triangle ABC has a unit area. Points A_1, B_1 and C_1 lie on the sides BC, CA and AB, respectively, such that $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{1}{2}$, $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{1}{3}$, $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{1}{4}$. Determine the area of the triangle enclosed by the lines AA_1, BB_1 and CC_1. (*3 points*) **B. 3437.** Points A, B, C, D are, in this order, incident to a line such that $BC = 2AB$ and $CD = AC$. Draw two circles; one passing through points A and C, the other incident to B and D. Prove that the common chord of the two circles halves the segment AC. (*4 points*) **B. 3438.** The function $f(x,y,z)$ satisfy the equations

$$f(x+t,y+t,z+t)=t+f(x,y,z) \qquad f(tx,ty,tz)=tf(x,y,z) \qquad f(x,y,z)=f(y,x,z)=f(x,z,y)$$

for every real number t. Determine the value of $f(2000,2001,2002)$. (*5 points*) **B. 3439.** Consider the infinite sequence $1, p, \frac{1}{p}, p^2, \frac{1}{p^2}, \ldots, p^n, \frac{1}{p^n}, \ldots$, where p is a positive number. Find those values of p for which every positive number can be arbitrarily closely approximated with a finite sum of suitable elements of the above sequence. (*5 points*) **B. 3440.** Points A_1, B_1, C_1 and A_2, B_2, C_2 are obtained by reflecting the points A, B, C in a line e and in a point P, respectively. Assume that $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{0}$. What is the mirror image of P through e? (*3 points*) **B. 3441.** Pinocchio has to pass 9 obstacles before he can turn into a real boy. It is not easy: any time he fails he has to go back to the previous obstacle he just passed and try it once more. If he ever fails at the first obstacle he will remain a wooden doll forever. Stubborn Pinocchio does not learn from his failures: the probability of success at the given obstacles is always the same, namely $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{9}{10}$ respectively, no matter how many times had he tried them before. How should The Fairy With The Blue Hair arrange the obstacles to maximize the probability that Pinocchio turns into a real boy? What is this probability? (*5 points*)

New advanced problems – competition A (see page 103): **A. 257.** n marbles are to be measured with the help of a one-armed balance. We are allowed to measure one or two marbles at a time. It may happen, however, that one of the results is misread. Denote by $f(n)$ the minimum number of weighings necessary to determine the weight of each marble. Prove that $f(n)>n+$ $+\log_3 n-3$. (Based on a problem proposed by *L. Surányi* and *B. Virág*) **A. 258.** Six points, A, B, C, D, E and F are on a line e such that $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$. Given a ruler, construct a line parallel to e. **A. 259.** Suppose that $u>1$ and the positive numbers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ and $y_1<y_2<\ldots<y_n$ satisfy the inequality

$$x_1^u+x_2^u+\ldots+x_k^u \le y_1^u+y_2^u+\ldots+y_k^u$$

for every $1\le k\le n$. Prove that

$$x_1+x_2+\ldots+x_n \le y_1+y_2+\ldots y_n.$$

THE PROBLEMS OF THE 2000 KÜRSCHÁK CONTEST

1. For any positive integer n, consider in the Cartesian plane the square whose vertices are $A(0,0)$, $B(n,0)$, $C(n,n)$ and $D(0,n)$. The grid points of the integer lattice inside or on the boundary of this square are coloured either red or green in such a way that every unit lattice square in the square has exactly two red vertices. How many such colourings are possible?

2. Let P be a point in the plane of the non-equilateral triangle ABC and different from its vertices. Let this lines A_P, B_P and C_P meet the circumcircle of the triangle at AP, BP and CP, respectively. Prove that there are exactly two points P and Q in the plane that the triangles $A_PB_PC_P$ and $A_QB_QC_Q$ are equilateral. Prove also that the line PQ is passing through the circumcentre of triangle ABC.

3. Let k denote a non-negative integer and assume that the integers $a_1, \ldots, a_n$ give at least $2k$ different remainders when they are divided by $n+k$. Prove that some of them add up to an integer divisible by $n+k$.