Képek a 2000. évi Téli Ifjúsági Ankétról

A Bolyai János Matematikai Társulat, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat és a MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány a matematika és fizika Téli Ifjúsági Ankéttal zárta az esztendőt (és a XX. századot). Ötödik alkalommal került sor e közös rendezvényre, amelyen kiváló oktatók, tanárok és tehetséges diákok élvezték egymás társaságát és a tudomány szépségét. Az ország különböző középiskoláiból érkeztek a résztvevők, közöttük erdélyiek is. Sajnos betegség és a magas utazási költségek miatt a magyar tannyelvű iskolákból várt vendégeink Szlovákiából és Ukrajnából nem tudtak eljönni.

A díjkiosztón gazdára találtak a jutalomkönyvek és a KöMaL vándorkupája is. A képen éppen Zábrádi Gergely veszi át a díját

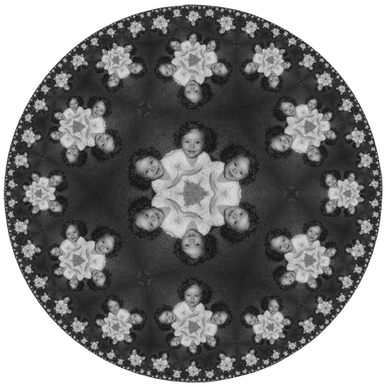
A program már december 21-én, az utolsó tanítási napon elkezdődött, ezért a tanárok közül kevesen, a diákok közül azonban annál többen érkeztek a KöMaL elmúlt tanévi pontversenyének eredményhirdetésére és díjkiosztására. A matematika és a fizika versenyek összesen 14 kategóriájának általában az első tíz helyezettje kapott jutalmat. Az első három díjat nyert diákok tanárainak a két társulat emléklappal és ajándék könyvutalvánnyal kívánta megköszönni eredményes munkájukat. A díjakat *Juhász István,* a Bolyai Társulat főtitkára, *Surányi János* tiszteletetbeli elnök, *Hermann Péter,* a matematika szerkesztőbizottság vezetője, az Eötvös Társulat és a MATFUND Alapítvány képviseletében pedig *Tichy Géza* adta át. A legrangosabb, a tavaly elhunyt *Nicholas Metropolisról* elnevezett díjban olyan 11–12. osztályos tanulók részesültek, akik még nem voltak díjazottak és a legjobbak között is kiemelkedő teljesítményt nyújtottak. 1999-ben öt hasonlóan eredményes diák volt Metropolis-díjas. Idén a MATFUND kuratóriuma úgy döntött, hogy a **Metropolis Alapítvány** 60 000 Ft-os díját ketten kapják: *Gáspár Merse Előd* (Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium, 12. o.t.) a fizika elméleti verseny és a mérési verseny megnyeréséért és *Gyenes Zoltán* (Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium, 12. o.t.) a nehezebb matematika feladatok versenyének és a versenyen kívüli különdíj első fokozatának megnyeréséért. További 2-2 tanuló megosztott Metropolis-díjat kapott, egyenként 30 000 forintos jutalommal, *Börzsönyi Ádám* (Hódmezővásárhely, Bethlen Gábor Gimnázium, 11. o.t.) a fizika feladatok versenyének megnyeréséért és *Babos Attila* (Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyakorlóiskola, 11. o.t) a matematika feladatok versenyének megnyeréséért, valamint *Nagy Ádám* (Budapest, Szent István Gimnázium, 11. o.t.), aki a fizika feladatok versenyében 2., a mérési versenyben 3. lett és *Varjú Péter* (Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, 11. o.t.), aki matematikából és fizikából összesítve a legjobb eredményt érte el, a matematika nehezebb feladatok versenyében 5., a fizika feladatok versenyében 4. helyezéséért és a matematika különdíj első fokozatáért. A Metropolis Alapítványtól kapott támogatásból 100 000 Ft-ot fordít a MATFUND jövő tanévi KöMaL jutalom előfizetésekre a legjobban

KöMaL – 2001/2 FIZ0102 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 20:46 (1. lap)

szerepelt határon túli magyar iskolák részére, a fennmaradó összeget pedig tartalékolja a jövő évi díjazásra. Az **Ipar Műszaki Fejlesztéséért Alapítvány, a Fővárosi Közgyűlés Kulturális Bizottsága, és a Budapest Bank az Oktatásért és a Magyar Pénzügyi Kultúráért Alapítvány** pályázatain elnyert támogatásoknak köszönhetően a Metropolis-díjakon túl összesen 347 000 Ft pénzjutalmat kaphattak az első, második, harmadik helyezettek (a KöMaL 2000/6. számában megjelent végeredménynek megfelelően egyenként 10 000, 7000, 5000 vagy 4000 forintot.) E támogatásokból fedeztük továbbá a Téli Ifjúsági Ankét étkezési költségeit. Az **Oktatási Minisztériumtól** a versenyre és a díjkiosztásra kapott összegből a további helyezettek és a tanárok könyvutalványait (összesen több mint 500 000 Ft értékben) és az ankéton meghívottak szállásköltségét az Eötvös Loránd Fizikai Társulat fizette ki. Kiosztottuk az ankéton részt vevők között a korábbi évekről fennmaradt és az idén alapítványi hozzájárulásként kapott ajándékkönyveket is.

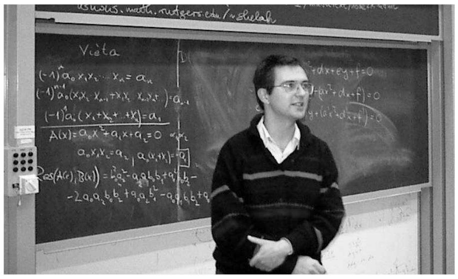
Az ankét első napjának délutánján került sor a Matematikai Társulat századik tanulóversenye, a 2000. évi Kürschák József Matematikaverseny ünnepélyes eredményhirdetésére, ahol a díjakat *Császár Ákos* és *Surányi János* professzorok, a Bolyai János Matematikai Társulat tiszteletbeli elnökei adták át. Császár Ákos, aki diákkorában az 1947. évi tanulóverseny győztese volt, néhány szóval és egy akkori feladattal emlékezett a világ egyik legrégebbi és legrangosabb matematikaversenyére, majd *Károlyi Gyula,* a bizottság elnöke ismertette a feladatok megoldását.* *Tardos Gábor,* aki korábban három egymást követő évben is megnyerte a Kürschák-versenyt, előadást tartott a NIM-összeadásról és a NIM-szorzásról. Ezalatt a fizika iránt érdeklődők *Csótó Attila* napneutrínókról szóló előadását, majd *Varga István* kísérleteit kísérték figyelemmel.

A délután során sokan beváltották könyvutalványaikat a Typotex kiadó helyszínen levő elárusítóhelyén. A meghirdetett poszterkiállításra *Sági Csilla* (Jászberény, Lehel Vezér Gimn., 10. o.t.) elhozta a saját készítésű humoros plakátját, *Ballók István* (Gödöllő, Premontrei Szent Norbert Gimn., 12. o.t.) pedig *Károly Ireneuszról* készített ismeretterjesztő írását. Nagyon érdekes volt két általános iskolás versenyzőnk, *Sükösd Attila* és *Sükösd Zsuzsanna* (Budapest, Orsolya Rendi Szent Angela Ált. Isk. és Gimn.) színes, számítógéppel készült összefoglalója a hang, illetve a víz fizikájáról – Attila számítógépén a különböző hangokat meg is szólaltatta (így azt is hallhattuk, milyen szépen zongorázik), miközben a program kirajzolta a hangok frekvenciáját.


Anna és Poincaré

Kós Géza számítógépes programjával rajzolt színes ábrája saját kislányáról a másnapi, Escher néhány grafikájával és a Poincaré-modellel foglalkozó előadásához kapcsolódott. December 22-én a matematikát kedvelők még három érdekes előadást hallgathattak: *Csirmaz László* a matematikai Bolyai-díjazottakról: Poincaréról, Hilbertről és a 2000-dik évi kitüntetettről, Saharon Shelah-ról és kutatásairól beszélt. *Hraskó András* a rezultáns fogalmát alkalmazta különböző geometriai problémák megoldására; az esti előadáson *Lénárt István* mutatta be közönségének a gömbi geometria néhány

* Az eredményeket és a példák többféle megoldását a 66–75. oldalakon olvashatják.

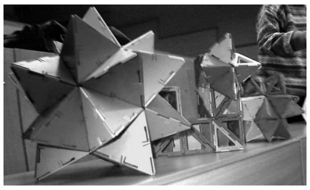


Hraskó András és a rezultáns

Lénárt István produkciója a gömbökkel

különlegességét. A nap folyamán Poincarén kívül Andrew Wiles-ról és a Fermat-tételről is többször esett szó, erről a BBC angol nyelvű videóját nézték végig az érdeklődők.**

A késő délután és az este folyamán egy kis kikapcsolódásként szendvicsek és üdítők, majd geometriai és logikai játékok voltak műsoron. Megtudhattuk az ebéd után beadott Totó végeredményét. Telitalálatos szelvény nem volt. 13 találatot ért el *Máthé András* (az ELTE matematikus hallgatója), *Soós Péter* (Kiskunhalas, Bibó I. Gimn., 11. o.t.) és Csongrád megye 4 fős csapata (átlag 11,5 o.t.). 12 találatos volt *Ballók István* (Gödöllő, Premontrei Szent Norbert Gimn., 12. o.t.). Valamennyien könyvjutalmat kaptak.



Poliéder-változatok

Ki oldja meg előbb, a gyerekek vagy Pósa Lajos?

Akik a fizika iránt érdeklődtek jobban, *Skrapits Lajos* élvezetes kísérleti bemutatóján vettek részt, majd *Geszti Tamást* hallgatták meg a kvantumtitkosírásról. Megtelt a terem *Károlyházy Frigyes* előadására, aki röpke egy óra alatt sokat rajzolt a táblára, s közben megismertetett minket a relativitáselmélet alapjaival, a téridő meghökkentő, de logikus „szerkezetével”. *Csákány Antal* ízelítőt adott a számítógépek végeláthatatlan lehetőségeiből, emellett kézzel fogható, de első ránézésre érthetetlen kísérleteket is bemutatott, *Cserti József* pedig az úgynevezett mezoszkopikus rendszerekről beszélt délután.

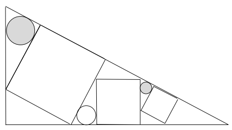
** *Klukovits Lajos* és *Sziklai Péter* előzetesen tervezett előadásaikat a következő Téli Ankéton tartják majd meg.

A zárónapon *Keleti Tamás* előadása fraktálokról és különböző fajta dimenziókról, *Pataki János* előadása pedig az Arany Dániel Matematikaverseny „teherautós” feladatának változatairól szólt. *Fekete Attila* és *Németh Gábor* az ELTE és az Ericsson Research közös laboratóriumában (Communication Networks Laboratory) végzett telefon- és internet-hálózati kutatásaikat mutatták be. *Farkas Illés* az „önhajtó kollektív rendszerek” dinamikáját (például egy kigyulladt épületből pánikszerűen menekülő embertömeg mozgását) modellezte. Az utolsó előadáson *Tichy Géza* arról beszélt, hogy szilárd testek bizonyos tulajdonságai nem érthetők meg, ha csupán páronként ható erőket (kétrészecske-kölcsönhatásokat) tételezünk fel.

A szerkesztők

MATEMATIKA és FIZIKA TOTÓ
a 2000. évi Téli Ankéton*

1. Az $ABCDEFGH$ kocka csúcsain egy bolha ugrál úgy, hogy egy adott csúcsból $1/3$ valószínűséggel ugrik a szomszédos csúcsok bármelyikére. Mekkora a valószínűsége, hogy a kocka A csúcsából elindulva a bolha úgy jut el az AG testátló G végpontjába, hogy eközben nem lép vissza az A csúcsba? $1/2$ (1); $3/8$ (2); $2/5$ (X).
2. Mire fejt ki nagyobb gravitációs vonzóerőt a Föld? A Holdra (1); a Napra (2); esetleg nagyságrendileg egyenlő a két erő (X)
3. Egy különc milliomos úgy dönt, hogy minden nap befizet egy bizonyos, egész forintnyi összeget a bankba: az első napon f_1 forintot, a másodikon f_2 forintot, a további napokon pedig az előző két napi befizetések összegét. Az n-edik napon így éppen egymillió forintot fizetett be. Mi lehet n értéke? 20 (1); 21 (2); 22 (X).
4. Egy függőleges, felül rögzített rugó alsó végére homokórát erősítünk, és rezgésbe hozzuk a rendszert. A homokóra ilyen körülmények között biztosan késni fog (1); biztosan sietni fog (2); a kísérlet körülményeitől függően bármelyik eset megvalósulhat (X).
5. Az ábrán egy derékszögű háromszögbe írt négyzetek és az oldalaikat érintő körök láthatók. Ha a két satírozott kör sugara 5 cm és 45 cm, akkor a középső kör sugara: 9 cm (1); 15 cm (2); 25 cm (X).



6. Erős falú zárt tartály felében víz van, felette normál állapotú levegő. A tartályt lassan melegítve hány fokon kezd el forrni a víz? Kb. 102 °C-on (1); kb. 200 °C-on (2); egyáltalán nem fog forrni (X).
7. Száz elítélt áll egy oszlopban, mindegyikük fején egy sapka, amelynek színe fekete vagy fehér. Előre néznek, az utolsó látja az előtte álló 99-et, az utolsó előtti az előtte álló 98-at és így tovább, a legelső egyetlen sapka színét sem látja. Egy különös bírói végzés nyomán hátulról indulva egyesével megkérdezik őket, milyen színű sapka van a fejükön. Mindenki hangosan nyilatkozik, és aki eltalálja a sapkája színét, azt szabadon engedik, aki viszont rosszul válaszol, azt nyomban főbelövik. Mind a tippet, mind pedig az esetleges lövést hallják a sorbanállók. Mielőtt megkezdődne a procedúra, az elítéltek tanácskozhatnak. Hányan menekülhetnek meg optimális stratégia esetén? Ötvenen biztosan, ennél többen nem feltétlenül (1); több, mint 75-en (2); legfeljebb 67-en (X).
8. Egy gömb alakú, egyenletes tömegeloszlású UFO kering a Nap körül. Egyik fele abszolút fekete, a másik pedig tökéletesen visszaveri a fényt. Melyik felét fordítja stabilan a Nap felé? A tükröző oldalát (1); a fekete oldalát (2); egyiket sem, hanem a választóvonal síkjában lesz a Nap (X).

---

* A megoldást jövő havi számunkban közöljük. A feladatokat Pataki János és Varga István javaslataiból állítottuk össze.

9. Egy nagy önkiszolgáló raktárban az árukészletet legfeljebb egytonnás csomagokban tárolják. Van egy háromtonnás és egy tizenegytonnás teherautónk. Jelölje M tonna azt a maximális terhet, amit ebből a raktárból egy fordulóval biztosan el tudunk szállítani. Ha M egyszerűsített alakja $\frac{p}{q}$, akkor $p+q$ maradéka hárommal osztva: 0 (1); 1 (2); 2 (X).

10. Van 100 golyónk, és nincs közöttük egyforma tömegű. Legkevesebb hány méréssel tudjuk egy (súlysorozat nélküli) kétkarú mérleggel kiválasztani a legkönnyebb golyót? 49 (1); 101 (2); 99 (X)

11. Egy virágoskertben kétfajta virág van, r darab rezeda és c darab ciklámen. A virágok úgy vannak elültetve, hogy minden ciklámentől éppen három rezeda van pontosan egy méter távolságban. Ekkor biztosan $\frac{c}{r} \le \frac{1}{3}$ (1); $\frac{c}{r}$ biztosan korlátos (2); az előző két állítás egyike sem igaz (X).

12. Igen nagy sebességgel elrepül a fejünk felett vízszintesen egy zöld UFO. Milyen színűnek látjuk, amikor éppen függőlegesen felfele nézünk? Kéknek (1); vörösnek (2); zöldnek (X).

13. Ketten játsszák a következő játékot. Felváltva vesznek el 111 zsetonból, egy lépésben legalább 1-et, de legfeljebb 9-et úgy, hogy egyik játékos sem ismételheti meg az ellenfele előző lépését. A játékban az veszít, aki nem tud lépni. Mindegyik játékos optimális stratégiával játszik. Tekintsük az alábbi állításokat:
a) Ha az első játékos 5-tel kezd, akkor megnyeri a játékot.
b) Ha az első játékos 4-gyel kezd, akkor megnyeri a játékot.
c) A játékot az első játékos nyeri.
d) Az előző három állítás közül legfeljebb egy igaz.
Hány hamis van a fenti állítások között? Egy (1); kettő (2); három (X).

13 + 1. Alaszkai aranyásók népes csoportja egy széles folyóhoz érkezik. A túlsó parton – éppen szemben – egy hatalmas aranyrögöt pillantanak meg. Amelyikük először odaér, az kapja meg a bányaművelés jogát. Milyen útvonalat válasszon Joe, ha (a vízhez képest) ugyanolyan gyorsan tud evezni, mint gyalogolni? Úgy kell evezzen, hogy lehetőleg mindig az aranyrög felé mozogjon (1); érdemes minél hamarabb átjutnia a túlsó partra, majd ott visszagyalogolnia (2); a legjobb stratégia attól függ, hogy a vízfolyás és Joe sebességének aránya nagyobb-e vagy kisebb az aranymetszés arányszámánál (X).

A kölcsönös indukció

Ha egy zárt vezetékben elektromos áram folyik, a vezeték közelében mágneses mező alakul ki. Amennyiben az áramerősség időben változó, a mágneses mező (és annak fluxusa) is változik. A változó mágneses fluxus a vezetékben feszültséget indukál, ez az *önindukció* ismert jelensége. A mágneses indukció vektora minden pillanatban és mindenhol arányos a vezetékben folyó áram $I(t)$ pillanatnyi értékével[1], és ugyanez érvényes a vezető egészére jutó mágneses fluxusra is: $\Phi(t) \propto I(t)$.

A Faraday-féle indukciótörvény szerint az indukált elektromotoros feszültség a mág-

[1] Feltételezzük, hogy az áram változásának ideje sokkal hosszabb, mint amennyi idő alatt a fény a vezeték egyik szélétől a másik széléig eljuthat. Ha ez a feltétel nem teljesül, az itt leírt érvelés érvényét veszti.

neses fluxus változási sebességének (-1)-szeresével egyenlő, ez pedig arányos az áram változási sebességével[2]:

$$U^{\mathrm{ind}}(t) = -L\frac{\Delta I(t)}{\Delta t}.$$

Az L arányossági tényező (amely a fenti előjelválasztás mellett mindig pozitív) a kérdéses vezeték (tekercs) önindukciós együtthatója. L nagysága a vezeték geometriai adataitól függ, s a legegyszerűbb esetek kivételével csak bonyolult számítással, vagy méréssel határozható meg.

Amennyiben az időben változó erősségű árammal átjárt (1-es jelű) vezeték (tekercs) közelében egy másik (2-es jelű) vezeték (tekercs) is található, a változó mágneses fluxus abban is elektromotoros feszültséget indukál, és ez a feszültség ugyancsak az áramerősség változási sebességével arányos:

$$U^{\mathrm{ind}}_{1\to 2}(t) = -M\frac{\Delta I_1(t)}{\Delta t},$$

ahol M-et az 1-es vezetéknek a 2-esre vonatkoztatott *kölcsönös indukciós együtthatójának* nevezik.

Természetesen a jelenség fordított irányban is működik: ha a 2-es vezeték I_2 áramerőssége változik időben, az 1-es vezetékben

$$U^{\mathrm{ind}}_{2\to 1}(t) = -M'\frac{\Delta I_2(t)}{\Delta t},$$

ahol M' az 1-es vezetéknek a 2-esre vonatkoztatott kölcsönös indukciós együtthatója.

Több vezeték esetén az i-edik áramkörben indukálódó teljes elektromotoros feszültség valamennyi vezeték (beleértve saját magát is) járulékának összegeként áll elő:

$$U^{\mathrm{ind}}_i = -\sum_k L_{i,k}\frac{\Delta I_k(t)}{\Delta t},$$

ahol $L_{i,k}$ a k-adik vezetéknek az i-edikre vonatkoztatott kölcsönös indukciós együtthatója, $L_{k,k}$ pedig a k-adik vezeték (tekercs) önindukciós együtthatója. (Korábbi jelöléseink ebben az írásmódban: $L_1 = L_{1,1}$; $L_2 = L_{2,2}$; $M = L_{2,1}$ és $M' = L_{1,2}$.)

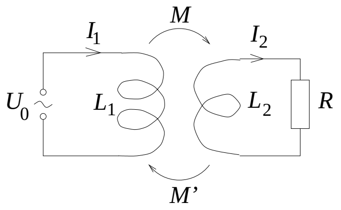
A kölcsönös indukciós együtthatók – az önindukciós tényezőkhöz hasonlóan – általában csak bonyolult matematikai eljárással, vagy tapasztalati úton, mérésekkel határozhatók meg. Előfordul, hogy két vezeték kölcsönös indukciós tényezői közül az egyiket nagyon nehéz kiszámítani, a másikat pedig viszonylag egyszerű meghatározhatjuk. Ilyen esetekben különösen hasznos lenne, ha létezne valamilyen kapcsolatot az „oda-” és a „visszafele” érvényes indukciós tényezők között. Annyit mindenesetre megállapíthatunk, hogy a vezetékeket eltávolítva egymástól a kölcsönös indukció nagysága gyors ütemben (a részletes számítások szerint a távolság köbével fordított arányban) csökken.

[2] A változási sebesség jelölésére a Δt időtartamra vonatkoztatott átlagsebességet tüntettük fel. Ha a pillanatnyi sebesség fogalmát kívánjuk használni, akkor (itt és a továbbiakban) az $I'(t)$ deriválttal kell számolnunk.

A kölcsönös indukciós együtthatók szimmetriája

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy két tetszőleges alakú és tetszőleges térbeli helyzetű zárt vezetékre fennáll a kölcsönös indukciós együtthatók szimmetriája:

$$M = M', \qquad \text{általánosabban:} \qquad L_{i,k} \equiv L_{k,i}.$$



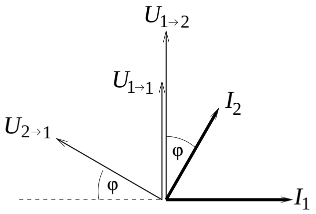
1. ábra

Az állítás igazolásához energetikai megfontolásokat fogunk alkalmazni. Tekintsük az *1. ábrán* látható két ideális (elhanyagolható ellenállású) tekercsből és egy külső terhelő ellenállásból álló áramkört. (Ez lényegében egy transzformátor, de nem tételezzük fel, hogy a tekercsek közös vasmagon lennének, sőt, még azt sem, hogy egymáshoz nagyon közel helyezkednének el.)

Kapcsoljunk az 1-es (primer) tekercsre valamekkora U_0 effektív értékkel jellemzett, ω körfrekvenciájú váltófeszültséget, a másik (szekunder) tekercset pedig zárjuk le egy R nagyságú terhelő ellenállással. A kölcsönös indukció miatt a primer tekercs váltakozó árama a szekunder tekercsben feszültséget indukál, ez áramot indít benne, amely hatására a terhelő ellenálláson egységnyi idő alatt valamekkora P_{ki} hő fejlődik. Ezt a hőteljesítményt a primer oldalon betáplált P_{be} hasznos teljesítmény fedezi, ezt (a primer feszültség és áramerősség, valamint a fázistényező szorzatát) méri a villanyóra. Az energiamegmaradás tétele szerint fenn kell álljon, hogy

$$P_{\text{be}} = P_{\text{ki}}.$$

A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy milyen megszorítást jelent a rendszer paramétereire nézve ezen „energia-mérlegegyenlet” teljesülése.



2. ábra

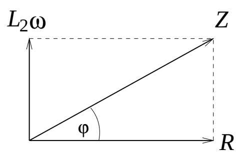
Tételezzük fel, hogy a primer tekercsben I_1 effektív értékű áram folyik. Ennek az áramnak a változási sebessége $I_1\omega$, hatására a szekunder tekercsben

$$U_{1\to 2} = MI_1\omega$$

nagyságú, az I_1 áram fázisához képest 90°-kal siető feszültség indukálódik. Forgóvektoros ábrázolásban a fázisviszonyokat a *2. ábrán* látható módon szemléltethetjük.

Az indukált $U_{1\to 2}$ feszültség hatására az L_2 önindukciójú, R ellenállással terhelt szekunder tekercsben

$$I_2 = \frac{U_{1\to 2}}{\sqrt{R^2 + L_2^2\omega^2}} = \frac{MI_1\omega}{\sqrt{R^2 + L_2^2\omega^2}}$$



3. ábra

nagyságú áram fog folyni, melynek fázisa a *3. ábrán* látható φ szöggel késik az $U_{1\to 2}$ feszültséghez képest. A terhelő (ohmikus) ellenálláson leadott hőteljesítmény:

$$P_{\text{ki}} = I_2^2 R = \frac{M^2 I_1^2 \omega^2 R}{R^2 + L_2^2\omega^2}.$$

Számítsuk ki a bemenő teljesítményt is! A primer áram nagyságát ismerjük, a primer feszültséget pedig viszonylag egyszerűen meg tudjuk határozni. A primer tekercsben indukálódott feszültség két tag összegeként áll elő: egyrészt az önindukcióból származó $U^{\mathrm{ind}}_{1\to 1}=L_1\omega I_1$ nagyságú, másrészt a szekunder tekercs által indukált

$$U^{\mathrm{ind}}_{2\to 1}=M'\omega I_2$$

nagyságú feszültségkomponensekből. Ezeket a feszültségeket és U_0-t megfelelő fázissal összegezve nullát kell kapnunk, hiszen a körben nincs ohmos ellenállás. A primer tekercsre kapcsolt váltófeszültség teljesítménye tehát $-U^{\mathrm{ind}}_{1\to 1}$ és $-U^{\mathrm{ind}}_{2\to 1}$ (fázishelyesen számolt) összegének teljesítménye, vagy ami ezzel egyenértékű, $-U^{\mathrm{ind}}_{1\to 1}$ és $-U^{\mathrm{ind}}_{2\to 1}$ külön-külön (fázishelyesen) kiszámolt a teljesítményének összege. Az önindukcióból származó feszültség az I_1 áramhoz képest 90°-ot siet, a teljesítménye tehát teljesen meddő, a „villanyszámla" szempontjából figyelmen kívül hagyható. Az $U^{\mathrm{ind}}_{2\to 1}$ feszültség viszont az I_2-höz képest 90°-ot siet (lásd a *2. ábrát*), az I_1 áramtól tehát $180°-\varphi$ fázisszöggel tér el, így a bemenő teljesítmény

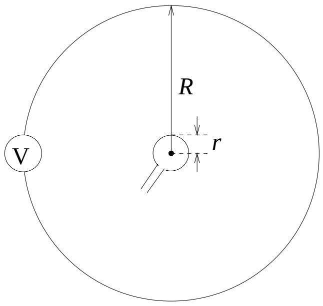
$$P_{\mathrm{be}}=-U^{\mathrm{ind}}_{2\to 1}I_1\cos\left(180°-\varphi\right)=M'\omega\frac{MI_1\omega}{\sqrt{R^2+L_2^2\omega^2}}\,\frac{RI_1}{\sqrt{R^2+L_2^2\omega^2}}=\frac{MM'I_1^2\omega^2R}{R^2+L_2^2\omega^2}.$$

A bemenő és a kimenő teljesítmények egyenlőségéből ($M\neq 0$ esetén) éppen a bizonyítandó $M=M'$ szimmetria-reláció adódik.[3]

Egy egyszerű példa

A kölcsönös indukciós együtthatók szimmetriájának ismerete bizonyos esetekben lényegesen egyszerűsítheti számításainkat. Oldjuk meg például a következő feladatot:

Egy R sugarú körvezető közepén, vele egy síkban, koncentrikusan elhelyezve egy r sugarú ($r\ll R$) másik körvezető található (4. ábra). *A kisebb körvezetőben az áramerősséget t_0 idő alatt nulláról I_0 értékre növeljük. Mekkora feszültség indukálódik ezalatt a nagyobb körben?*



4. ábra

Megoldás. Az indukált feszültséget a kis körvezetőnek a nagyra vonatkoztatott kölcsönös indukciója határozza meg. Ezt a mennyiséget nem könnyű kiszámítani, hiszen a kis körvezető mágneses tere a nagyobb kör belsejében erősen inhomogén, helyről helyre számottevően változik.

[3] Ha M történetesen nulla lenne, akkor a tekercsek felcserélése és az egész számítás megismétlése után $M'=0$ adódik, tehát még ebben a szélsőséges esetben is egyenlő a kétféle kölcsönös indukciós tényező.

Sokkal könnyebb meghatározni a nagy körvezetőnek a kicsire vonatkoztatott kölcsönös indukciós tényezőjét, hiszen a nagy kör mágneses mezője a kis körvezető helyén jó közelítéssel homogénnek tekinthető, nagysága pedig

$$B \approx \mu_0 \frac{I}{2R}.$$

Ennek a mezőnek a $r^2\pi$ területű kis körlapon

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 r^2 \pi}{2R} I(t)$$

a mágneses fluxusa, így az indukált elektromotoros feszültség:

$$U^{\text{ind}}(t) = -\frac{\Delta\Phi(t)}{\Delta t} = -\frac{\mu_0 r^2 \pi}{2R} \frac{\Delta I(t)}{\Delta t} = -M \frac{\Delta I(t)}{\Delta t},$$

vagyis a kérdéses kölcsönös indukciós együttható:

$$M = \frac{\mu_0 r^2 \pi}{2R}.$$

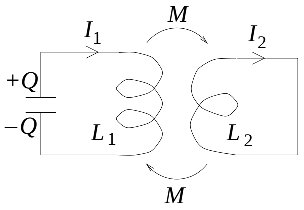
Az előző levezetett szimmetriatulajdonság miatt a kis körvezetőnek a nagyra vonatkoztatott kölcsönös indukciós együtthatója is ugyanekkora ($M' = M$), a feladatban kérdezett feszültség tehát:

$$U = \frac{\mu_0 r^2 \pi}{2R} \frac{I_0}{t_0}.$$

Mekkora lehet két vezető kölcsönös indukciója?

Vajon milyen határok között változhat két vezető kölcsönös indukciója? Ha a vezetők elegendően messze vannak egymástól, akkor M nyilván tetszőlegesen kicsivé válhat. De vajon milyen nagy lehet maximálisan a kölcsönös indukció értéke? Megmutatjuk, hogy M abszolút értéke nem lehet akármilyen nagy, legfeljebb akkora, mint a két vezető önindukciós együtthatóinak mértani közepe:

$$|M| \le \sqrt{L_1 L_2}.$$



5. ábra

Ezt az egyenlőtlenséget ugyancsak energetikai megfontolások segítségével láthatjuk be.

Végezzünk el egy gondolatkísérletet! Vegyünk egy jó nagy kapacitású kondenzátort, és töltsük fel Q töltéssel a kapacitásának megfelelő $U_0 = Q/C$ feszültségre. Kapcsoljuk rá erre a kondenzátorra a vizsgálandó két vezetőből álló „ideális transzformátor" primer körét, a szekunder körét pedig zárjuk rövidre (*5. ábra*). Könnyen beláthatjuk, hogy mindkét körben az idővel egyenes arányban növekvő erősségű áram indul meg, hiszen a körök feszültsége időben állandó (U_0, illetve nulla), következésképpen az áramerősségek változási sebessége is állandó kell legyen:

$$I_1(t) = a_1 \cdot t, \qquad \text{illetve} \qquad I_2(t) = a_2 \cdot t.$$

(Felhasználtuk, hogy a kondenzátor kapacitása jó nagy, ezért egy rövid idő alatt a rajta levő töltés nem változik meg számottevően.) Írjuk fel az egyes tekercsekben indukálódó feszültségeket, majd ezek segítségével a primer és a szekunder körben Kirchhoff huroktörvényét:

$$\frac{Q}{C} - L_1 a_1 - M a_2 = 0,$$
$$-M a_1 - L_2 a_2 = 0.$$

(Kihasználtuk korábbi eredményünket, miszerint $M = M'$.) A fenti egyenletrendszert megoldva a primer tekercs áramerősségére

$$I_1 = \frac{L_2 Q t}{C} \cdot \frac{1}{L_1 L_2 - M^2}$$

adódik. Ha ez az áram $Q > 0$ esetén negatív mennyiség lenne (vagyis a pozitív töltésű lemezhez kapcsolódó vezetéken nem a lemeztől el, hanem éppen a lemez felé folyna az áram), akkor a kondenzátor töltése időben egyre nőne. A kondenzátor ebben az esetben „magától” feltöltődne, elektrosztatikus energiája egyre növekedne. Ez ellentmond az energiamegmaradás általános törvényének, következésképpen I_1/Q nemnegatív kell legyen. Ez a követelmény viszont csak akkor teljesül, ha

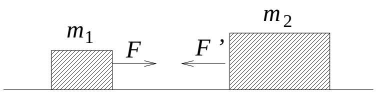
$$L_1 L_2 - M^2 \geq 0,$$

s éppen ezt akartuk belátni.

Két, egymással elektromágneses csatolásban levő tekercs kölcsönös indukciója $-\sqrt{L_1 L_2}$ és $+\sqrt{L_1 L_2}$ közötti értékeket vehet fel. Emiatt célszerű M-et $k\sqrt{L_1 L_2}$ alakban felírni, ahol k a tekercsek (vezetékek) csatolásának erősségére jellemző dimenziótlan szám ($-1 \leq k \leq +1$). Ha pl. közös vasmagra tekercselünk két tekercset, akkor bármelyikük által keltett mágneses fluxus gyakorlatilag teljes egészében áthalad a másik tekercsen is; ilyenkor a csatolás erős, $k = \pm 1$ (az előjel a tekercselés irányától függ). Egy további példa: egy nagyobb átmérőjű szolenoid belsejébe egy másik, kisebb szolenoidot helyezünk. A kölcsönös indukció ekkor is könnyen kiszámítható, s a csatolási tényező $|k| = \sqrt{A_2/A_1} < 1$ lesz, ahol A_2 a belső tekercs keresztmetszete, A_1 pedig a külsőé.

Hatás–ellenhatás (mechanikai analógia)

A kölcsönös indukciók szimmetriáját (vagyis azt az összefüggést, hogy az egyik tekercsnek a másikra való indukciós hatása ugyanolyan mértékű, mint a másik tekercsnek az előbbire való visszahatása) energetikai megfontolások segítségével láttuk be. Hasonló helyzet klasszikus (newtoni) mechanikában is előfordul, és ott is hasonló jellegű érveléssel – energetikai megfontolások segítségével – láthatjuk be, hogy egy zárt rendszer két része közti belső erőhatások (erő és ellenerő) azonos nagyságú és ellentétes irányú vektorok kell legyenek.



6. ábra

Tekintsünk két testet, melyek kezdetben állnak, majd az egymásra kifejtett erőhatások következtében egy egyenes mentén gyorsulni kezdenek (*6. ábra*). Ha m_1 és m_2 jelöli a testek tömegét, F és F' pedig a rájuk ható belső erőket, akkor a gyorsulásuk $a_1 = F/m_1$ és $a_2 = F'/m_2$, valamely kicsiny t idő alatt elért sebességük pedig $v_i = a_i t$ ($i = 1, 2$). A két test mozgási energiájának megváltozása tehát t idő alatt

$$\Delta E_{\text{álló}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{Ft}{m_1}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{F't}{m_2}\right)^2.$$

(Az „álló” kifejezés arra utal, hogy ezt az energiaváltozást abban a koordinátarendszerben észleljük, melyhez viszonyítva a testek kezdetben álltak.)

Képzeljük most el, hogy az egész jelenséget egy $-v_0$ sebességgel haladó vonatból figyeljük. Innen szemlélve a következőket mondhatjuk: a két test mozgási energiája kezdetben

$$E_0 = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 + \frac{1}{2} m_2 v_0^2$$

volt, t idővel később pedig

$$E_t = \frac{1}{2} m_1 \left(v_0 + \frac{Ft}{m_1}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(v_0 - \frac{F't}{m_2}\right)^2$$

lett, a rendszer mozgási energiának megváltozása tehát

$$\Delta E_{\text{mozgó}} = E_t - E_0 = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{Ft}{m_1}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{F't}{m_2}\right)^2 + (F - F') t v_0.$$

A kétféle megfigyelő által észlelt mozgási energia változásnak meg kell egyeznie egymással, hiszen ΔE-t a két test távolságától függő helyzeti energia (pl. rugalmas energia, vagy elektrosztatikus energia) megváltozása fedezi, esetleg kémiai energia felszabadulásából (ágyú elsütéséből) származik; ezek mindegyike az álló és a mozgó megfigyelő számára ugyanakkora. $\Delta E_{\text{mozgó}}$ és $\Delta E_{\text{álló}}$ fentebb kiszámított értékei viszont csak akkor lesznek egyenlőek, ha

$$F = F',$$

vagyis a hatás és ellenhatás erői egyforma nagyok.

Nem állítjuk, hogy ezzel az érveléssel „levezettük” Newton III. törvényét, hiszen felhasználtuk az energiamegmaradás tételét és a vonatkoztatási rendszerek egyenértékűségét, s ezek legalább olyan fontos részei a klasszikus mechanikának, mint a hatás–ellenhatás törvénye. Nem szándékozunk fontossági sorrendet megállapítani az említett fizikai törvények között, csupán arra akarjuk felhívni a figyelmet, hogy ezek a törvények nem teljesen függetlenek egymástól, valahol mélyen kapcsolat van közöttük. Néha az egyik, néha pedig egy másik fizikai törvény használata a célszerűbb, tartozzon a vizsgált jelenség (megoldandó feladat) akár a klasszikus mechanika, akár pedig az elektromágneses indukció körébe.

Gnädig Péter

Fizika gyakorlatok és feladatok megoldása

P. 3320. *Nehézion-gyorsítóban azonos feszültséggel gyorsítunk elhanyagolható kezdősebességű α-részecskéket,* C *és* Ca *atommagokat. Hogyan aránylanak egymáshoz az elért végsebességek? Függ-e a végeredmény a gyorsítófeszültség nagyságától?*

(*4 pont*) Közli: *Radnóti Katalin,* Budapest

Megoldás. Az U feszültségű gyorsító elektromos tér egy Q töltésű részecskén $W = QU$ munkát végez, s ez a munka a részecske mozgási energiájának $E = \frac{1}{2}mv^2$ megváltozásával egyenlő:

$$QU = \frac{1}{2}mv^2, \qquad \text{ahonnan} \qquad v = \sqrt{2U\frac{Q}{m}}.$$

Látható, hogy adott U feszültség esetén a részecske végsebessége csak a Q/m fajlagos töltéstől függ, ez viszont a feladatban szereplő 3 atommagnál (jó közelítéssel) ugyanakkora, tehát a három részecske végsebessége is egyforma nagy lesz.

Ha a gyorsítófeszültség olyan nagy, hogy a relativisztikus

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

képlettel kell számolnunk, akkor a munkatétel így írható:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 = QU,$$

ahonnan a részecske végsebessége:

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{QU}{mc^2} + 1\right)^2}}.$$

Látható, hogy ebben az esetben is csak a fajlagos töltéstől függ a gyorsítóban elérhető legnagyobb sebesség, tehát az azonos fajlagos töltésű α-részecske, C atommag és Ca atommag a relativisztikus nehézion-gyorsítóban is ugyanakkora maximális sebességre gyorsítható.

Papp Gábor (Budaörs, Illés Gy. Gimn., 12.o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Feltételeztük, hogy a feladat szövege a szén 12-es tömegszámú stabil izotópjára utalt, nem pedig a radioaktív kormeghatározásnál használt bomlékony 14-es izotópra.

2. A feladatben szereplő 3 részecske fajlagos töltése ezrelék pontossággal megegyezik, mert a bennük található protonok és neutronok számaránya ugyanakkora. Ha a részecskék tömegénél

figyelembe vesszük az eltérő kötési energiákból adódó kicsiny különbségeket is, az elérhető vég-sebességek arányára

$$v_\alpha : v_\mathrm{C} : v_\mathrm{Ca} = 1 : 1{,}000\,32 : 1{,}000\,79$$

adódik.

135 dolgozat érkezett. Helyes 114 megoldás, kicsit hiányos (1–3 pont) 21 dolgozat.

P. 3330. *p_0 külső légnyomás mellett egy r sugarú szappanbuborékot fújunk. Ha Q elektromos töltést viszünk rá, a buborék sugara R-re nő. Mekkora a szappanoldat felületi feszültsége?*

(*5 pont*) Közli: *Légrádi Imre,* Sopron

Megoldás. Jelöljük a buborék belsejében levő levegő nyomását töltetlen állapotban p_1-gyel, az elektromosan feltöltött buboréknál p_2-vel, a külső légnyomást pedig p_0-lal.

Képzeljük el, hogy a töltetlen buborékba egy szívószálon keresztül óvatosan még egy kevés levegőt fújunk, s ezáltal a sugara r-ről egy kicsit nagyobb $r+\Delta r$-re változik. A buborék térfogatának változása ilyenkor

$$\Delta V = 4\pi r^2\,\Delta r,$$

az általunk végvett munka tehát

$$W = p_1\Delta V = p_1\cdot 4\pi r^2\,\Delta r. \tag{1}$$

Ez a munka egyrészt a felület (külső és belső oldalának) változásából származó felületi energia növekedését fedezi:

$$W_1 = 2\alpha\left[4\pi(r+\Delta r)^2 - 4\pi r^2\right] \approx 16\pi\alpha r\Delta r, \tag{2}$$

másrészt a külső légnyomás ellenében végzünk

$$W_2 = p_0\Delta V = p_0\cdot 4\pi r^2\,\Delta r \tag{3}$$

munkát (a légkört egy kicsit „megemeljük”). A munkatétel szerint $W = W_1 + W_2$, ahonnan (1), (2) és (3) felhasználásával

$$p_1 = p_0 + \frac{4\alpha}{r}. \tag{4}$$

Végezzük el ugyanezt a számítást az elektromosan töltött buborék esetében is, vagyis hasonlítsuk össze az R sugarú és az $R+\Delta R$ sugarú buborékok energiaviszonyait. A buborék felfúvásakor végzett

$$W = p_2\Delta V = p_2\cdot 4\pi R^2\,\Delta R \tag{5}$$

munka egyrészt a felületi energia növekedését fedezi:

$$W_1 = 2\alpha\left[4\pi(r+\Delta R)^2 - 4\pi R^2\right] \approx 16\pi\alpha R\Delta R, \tag{6}$$

növeli a légkör helyzeti energiáját:

$$W_2 = p_0 \Delta V = p_0 \cdot 4\pi R^2\, \Delta R, \tag{7}$$

továbbá változást idéz elő az elektromosan töltött szappanbuborék elektrosztatikus energiájában. Tekintettel arra, hogy egy Q töltésű, R sugarú gömb (gömbkondenzátor) kapacitása $C = Q/k$ (ahol k a Coulomb-törvényben szereplő állandó), a

$$\frac{Q^2}{2C} = k\frac{Q^2}{2R}$$

elektrosztatikus energia megváltozása:

$$W_3 = k\frac{Q^2}{2(R+\Delta R)} - k\frac{Q^2}{2R} = -k\frac{Q^2}{2(R+\Delta R)R}\Delta R \approx -k\frac{Q^2}{2R^2}\Delta R. \tag{8}$$

Felírhatjuk, hogy $W = W_1 + W_2 + W_3$, ahonnan (5)–(8) alapján

$$p_2 = p_0 + \frac{4\alpha}{R} - k\frac{Q^2}{8\pi R^4}. \tag{9}$$

Feltételezhetjük még, hogy a buborék feltöltése közben a hőmérséklete nem változik, így a Boyle–Mariotte-törvény alkalmazható:

$$p_1 \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 = p_2 \cdot \frac{4\pi}{3} R^3,$$

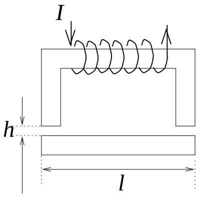
ahonnan (4) és (9) segítségével a folyadék felületi feszültsége kifejezhető:

$$\alpha = \frac{kQ^2}{32\pi R(R^2 - r^2)} - \frac{p_0(R^2 + rR + r^2)}{4(R+r)}.$$

Fehérvári Bence (Dombóvár, Illyés Gy. Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján

43 dolgozat érkezett. Helyes Fehérvári Bence, Hárs Annamária, Komjáthy Júlia, Rácz Judit, Selyem Noémi Renáta és Szilágyi Tamás megoldása, kicsit hiányos (4 pont) 13, hiányos (1–2 pont) 15, hibás 7, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 3341. *Egy elektromágnes* U *alakú vasmagjának keresztmetszete A, középvonalának hossza L. A záró vasmag l hosszú és szintén A keresztmetszetű. Amikor a záró vasmag h távolságra van az* U *alakú vasmagtól, amelyen lévő tekercsben I áram folyik, a záró vasmagot F erővel húzza magához az elektromágnes. A vas permeabilitása nem állandó, de a mágneses indukciótól való $\mu(B)$ függését ismerjük.)*



a) Hány menetből áll a tekercs?

b) Mekkora erővel szorítja magához az elektromágnes a záró vasmagot, ha nincs közöttük légrés? Mekkora ekkor a mágneses indukció és a relatív permeabilitás értéke a vasban?

Adatok: $L = 30$ cm, $l = 12$ cm, $A = 10$ cm^2, $h = 1$ mm, $I = 1$ A, $F = 500$ N, *és* $\mu(B) = \mu_0\left(4500 - 2500\ \mathrm{T}^{-1}\, B\right)$ *a vizsgált tartományban.*

(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula*, Budapest

Megoldás. a) Írjuk fel az Ampère-féle gerjesztési törvényt (lásd *Radnai Gyula* cikkét „Az elektromágnes húzóerejéről” a KöMaL 2000. évi 4. számában) az U alakú vasmagból, a két légrésből és a záró vasmagból álló mágneses körre:

$$\frac{B}{\mu(B)}(L+l)+\frac{B}{\mu_0}\cdot 2h=nI, \tag{1}$$

ahol $\mu(B)$ a vas permeabilitása az adott B indukció mellett, n pedig a menetszám. (Felhasználtuk, hogy a légrés kicsi a vasmag méreteihez képest, így feltehető, hogy az indukcióvonalak csak a vasban, illetve a légrésben futnak, a kiszóródó mágneses mező kicsi. A középvonal teljes hossza akkor is $L+l$, ha számításba vesszük a vasak véges szélességét.) Másrészt tudjuk, hogy az összesen $2A$ keresztmetszetű légrésnél a húzóerő

$$F=\frac{B^2A}{\mu_0}, \tag{2}$$

ahonnan a mágneses indukcióra

$$B=\sqrt{\frac{\mu_0F}{A}}=0{,}79\ \mathrm{T},$$

amit (1)-be, illetve a megadott $\mu(B)$ függvénybe helyettesítve a menetszámra $n=$ $=1367\approx 1370$ adódik. (A kerekítés indoka: a számításnál alkalmazott közelítések miatt az eredmény negyedik számjegye semmiképpen nem tekinthető megbízhatónak.)

b) Ha nincs légrés, akkor az (1) képlet így módosul:

$$\frac{B}{\mu(B)}(L+l)=nI,$$

amit $\mu(B)$ ismert alakjának felhasználásával megoldva a mágneses indukcióra $B=$ $=1{,}64$ T, a relatív permeabilitásra $\mu(B)/\mu_0=400$, a húzóerőre pedig a (2) összefüggésből $F=2{,}14$ kN adódik.

Nagy Ádám (Budapest, Szent István Gimn., 11. o.t.)

19 dolgozat érkezett. Helyes Hegedűs Ákos és Nagy Ádám megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 5, hiányos (1–3 pont) 12 dolgozat.

P. 3349. *Egymástól jó távol helyezkedik el két egyforma szupravezető gyűrű. Az egyik (A) gyűrűben I_0 erősségű áram folyik, a másikban (B) nem folyik áram. A két gyűrűt lassan közelítjük egymáshoz. Mekkora áram fog folyni A-ban, amikor a másik gyűrűben I_1 erősségű áram folyik? (Egy szupravezető gyűrű által körülfogott mágneses fluxus értéke nem változhat meg.)*

(*5 pont*) Közli: *Bodor András,* Budapest

Megoldás. A két gyűrű egyforma, ezért az önindukciós együtthatójuk ugyanakkora, L. A kölcsönös indukciós együtthatók mindig egyenlőek (lásd az erről szóló cikket lapunk 110. oldalán), jelöljük ezt M-mel! Ez az érték a gyűrűk helyzetével és távolságával változik, amíg a gyűrűk egymástól nagyon messze vannak, addig $M=0$, azok közelítésével viszont M megnő. Az áramokat I_A-val és I_B-vel jelölve az egyes gyűrűk által körülvett fluxusra (amelyek az áramerősségek és a megfelelő indukciós együtthatók szorzataként állnak elő) minden pillanatban fennáll, hogy

(1) $$\Phi_A = LI_A + MI_B = LI_0,$$

(2) $$\Phi_B = MI_A + LI_B = 0.$$

M-et kiküszöbölve az

(3) $$I_A^2 - I_0 I_A - I_B^2 = 0$$

egyenlet adódik, amelynek a megoldása $I_B = I_1$ mellett I_A-ra

$$I_A = \frac{I_0 \pm \sqrt{I_0^2 + 4I_1^2}}{2}.$$

A két megoldás közül a gyök felső (pozitív) előjelhez tartozó a helyes, hiszen a két gyűrű távoli telyzeténél ($I_1 = 0$ esetén) a feladat szövege szerint $I_A = I_0$. Így tehát az A tekercs árama a kérdéses helyzetben

$$I_A = \frac{I_0 + \sqrt{I_0^2 + 4I_1^2}}{2}.$$

Több megoldás alapján

Megjegyzés. A másodfokú egyenlet 2 megoldásából úgy is kiválaszthatjuk a fizikailag megfelelőt, hogy (3) helyett a $x = I_A/I_B$ áramarányra írunk fel egyenletet:

(4) $$x^2 - ax - 1 = 0,$$

ahol $a = I_0/I_B$. Ezen egyenlet két gyökének szorzata -1, az egyik gyök abszolút tehát biztosan kisebb, mint 1. Ez azonban nem lehet a fizikailag helyes gyök, hiszen (2) szerint

$$|x| = \left|\frac{I_A}{I_B}\right| = \left|\frac{L}{M}\right|,$$

ez a szám pedig – az idézett cikkben levezetett $M \le \sqrt{L_1 L_2} = L$ egyenlőtlenség miatt – biztosan legalább 1.

(G. P.)

16 dolgozat érkezett. Helyes Coc Károly, Fábián Ákos, Horváth Balázs, Horváth György, Jurányi Zsófia, Nagy Ádám, Nagy Dávid és Raffai Péter megoldása, hibás 8 dolgozat.

P. 3360. *Legalább milyen magasról esett az üveglapra egy* 1 mm *átmérőjű, gömb alakú higanycsepp, ha* 1000 *darab egyforma gömbbé esett szét?*

(*4 pont*) *Bay Zoltán verseny,* Sarkad

Megoldás. Ha egy r sugarú, ϱ sűrűségű higanycsepp h magasságból leesik, akkor a gravitációs helyzeti energiája

$$\Delta E_{\text{helyzeti}} = h\varrho\frac{4r^3\pi}{3}g$$

értékkel csökken. (Tudjuk, hogy a higany az eredeti méreténél sokkal kisebb átmérőjű cseppekre esik szét, emiatt a végállapot helyzeti energiáját elhanyagolhatjuk.)

Az 1000 darabra széteső csepp törmelékeinek sugara $r/10$, emiatt az összfelület

$$1000 \cdot 4\pi \left(\frac{r}{10}\right)^2 = 40\pi r^2,$$

az eredeti $4\pi r^2$ nagyságú felületnél $36\pi r^2$ értékkel nagyobb lesz. Ha α-val jelöljük a higany (levegőre vonatkoztatott) felületi feszültségét, a felület növekedéséből származó energianövekedés

$$\Delta E_{\text{felületi}} = 36\pi r^2 \alpha.$$

A higanycseppnek legalább olyan magasról kell leesnie, hogy a gravitációs helyzeti energia csökkenése fedezze a felületi energia növekedését. (Ténylegesen ennél több energiára van szükség, hiszen a közegellenállás munkáját, az ütközésnél fejlődő hőt, a szétrepülő kis cseppek mozgási energiáját, valamint az az egymást „taszító” üveg és higany érintkezéséből származó felületi energiát nem is vettük figyelembe.) Az energetikai feltétel akkor teljesül, ha

$$h\varrho \frac{4r^3\pi}{3} g > 36\pi r^2 \alpha,$$

ahonnan a keresett esési magasságra

$$h > 27 \frac{\alpha}{\varrho g r} \approx 20 \text{ cm}$$

adódik. Ez az érték valóban sokkal nagyobb, mint a kialakuló kis gömbök sugara, a törmelékek helyzeti energiájának elhanyagolása tehát jogos volt.

Több dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. A numerikus számítás során a higany felületi feszültségét 0,5 N/m-nek vettük. A különböző táblázatok meglehetősen nagy szórással adják meg a higany felületi feszültségét. A Négyjegyű függvénytáblázat bizonyos kiadásaiban például 0,047 N/m, illetve 0,74 N/m szerepel. Ezekkel az adatokkal számolva a kérdéses magasság kb. 2 cm, illetve 30 cm lenne. Azokat a megoldásokat, amelyek elvi hibát nem tartalmaztak, csupán az anyagi állandók téves értéke miatt tértek el az itt megadott számértéktől, az értékelésnél természetesen helyesnek tekintettük. Táblázati adatok hibájából származó numerikus tévedésért csak akkor „jár” pontlevonás, ha nyilvánvalóan irreális számszerű végeredmény (jelen feladatnál pl. a Nap–Föld távolság sokszorosának megfelelő ejtési magasság) szerepel a dolgozatban, és ehhez semmilyen megjegyzést nem fűz a beküldő.

2. Sokan a felületi energia számításánál a hártyákra érvényes $\Delta E = 2\alpha\Delta A$ formulát használták. Ez helytelen, hiszen míg a hártyáknál két oldalon érintkezik a folyadék levegővel (vagy a folyadék gőzével), addig a higanycsepp felületének csak egy oldala van!

282 dolgozat érkezett. Helyes 168 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 29, hiányos (1–2 pont) 69, hibás 4, nem versenyszerű 12 dolgozat.

P. 3361. *Egy soros gerjesztésű, egyenáramú motort* 100 V *feszültségre kapcsolunk. Indulás előtt a motor* 16 A *áramot vesz fel, majd forogni kezd. Mire a fordulatszáma állandóvá válik, a motoron átfolyó áram* 4 A*-re csökken. A motort dinamónak akarjuk használni, és ugyanakkora fordulatszámon üzemeltetjük, mint amikor motor volt. Mekkora terhelő ellenállást kell a dinamóra kötni, ha azt akarjuk, hogy a dinamón is* 4 A *áram folyjon át, és mekkora ebben az esetben a dinamónak a terhelő ellenálláson leadott teljesítménye?*

(*4 pont*) *Bicentenáriumi Jedlik Ányos verseny,* Győr

Megoldás. Jelöljük $\mathcal{E}$-nal a motor tekercseiben indukálódó feszültséget (ennek nagysága függ a fordulatszámtól), R_b-vel pedig a tekercsek ohmos ellemállását. Ha a motorra U_0 feszültséget kapcsolunk és I erősségű áram folyik át a rendszeren, az Ohm-törvény szerint fennáll, hogy

$$U_0 - \mathcal{E} = IR_\mathrm{b}.$$

Elinduláskor $\mathcal{E} = 0$, hiszen a forgórész még áll, tehát $U_0 = I_0 R_\mathrm{b}$, vagyis

$$R_\mathrm{b} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{100\ \mathrm{V}}{16\ \mathrm{A}} = 6{,}25\ \Omega.$$

Ha a motor már állandó fordulatszámon üzemel és $I = I_1 = 4$ A, akkor a belső ellenálláson már csak 25 V feszültség esik, az indukált feszültség tehát ezen a fordulatszámon $\mathcal{E} = 75$ V.

Amikor dinamónak használjuk a motort, a korábbival azonos fordulatszámon az indukált feszültség $\mathcal{E} = 75$ V, és mivel az áramerősség most is $I_1 = 4$ A, a belső ellenálláson 25 V feszültség esik. A kapocsfeszültség tehát $75 - 25 = 50$ V, a terhelő ellenállás pedig

$$R_\mathrm{t} = \frac{50\ \mathrm{V}}{4\ \mathrm{A}} = 12{,}5\ \Omega.$$

A terhelő ellenálláson leadott teljesítmény:

$$P = I_1^2 R_\mathrm{t} = 200\ \mathrm{W}.$$

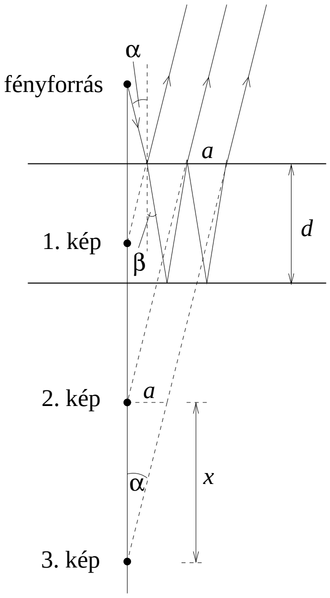
Horváth György (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

31 dolgozat érkezett. Helyes 11 megoldás. Hiányos (1–3 pont) 12, hibás 8 dolgozat.

P. 3380. *Pontszerűnek tekinthető fényforrást helyezünk el egy* 8,4 mm *vastag üvegtábla mellett. A fényforrás oldaláról, az üvegre majdnem merőlegesen nézve több tükörképet is látunk, amelyek egymástól* 12-12 mm*-re vannak. Határozzuk meg az üveg törésmutatóját!*

(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

Megoldás. Vizsgáljuk a fényforrásból a lemezre merőlegesen kiinduló, valamint egy hozzá képest kicsiny α szög alatt induló másik fénysugarat (lásd az *ábrát*). Mind a két sugár részben visszaverődik az üveg felületéről, részben pedig belép az üvegbe. A belépő sugarak a táblán keresztül haladva részben visszaverődnek, részben kilépnek az üvegből. Ez elvben még sokszor ismétlődik, természetesen a többszörösen visszavert fénysugarak erőssége rohamosan csökken.



Minket azok a fénysugarak érdekelnek, amelyek a fényforrás oldalán hagyják el az üveglemezt, mivel ezeket látjuk. Kép ott keletkezik, ahol az egymáshoz közeli fénysugarak metszik egymást. Jelen esetben az egymáshoz közel haladó sugarak (amelyek közül az ábrán csak egyet-egyet jelöltünk be) széttartóak, csak a meghosszabbításaik metszi egymást; ezért mindegyik kép látszólagos. Attól függően, hogy hányszor verődtek vissza a sugarak az üvegtábla valamelyik oldalán, más-más helyen keletkezik a kép, de mindegyik látszólagos kép a fényforrásból a táblára bocsátott merőlegesen (az „optikai tengelyen") helyezkedik el.

Az *ábrán* látható jelölésekkel a törési törvény szerint

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=n,$$

továbbá

$$a=2d\,\mathrm{tg}\,\beta \qquad \text{és} \qquad a=x\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

ahonnan két egymást követő kép látszólagos távolsága

$$x=\frac{a}{\mathrm{tg}\,\alpha}=\frac{2d\,\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha}=\frac{2d}{n}\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\approx\frac{2d}{n}.$$

(Kihasználtuk, hogy α és β kicsiny szögek, emiatt a koszinuszuk jó közelítéssel 1-nek vehető. Ezzel egyenértékű kijelentés, hogy kis szögekre $\mathrm{tg}\,\alpha\approx\alpha\approx\sin\alpha$.) A fenti összefüggésből a megadott távolságok ismeretében az üveg törésmutatójára

$$n=\frac{2d}{x}=1{,}4$$

adódik.

Ádám Zoltán (Révkomárom, Selye J. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. 1. Ha éppen merőlegesen nézünk az üvegre, nyilván nem láthatjuk a tükörképeket, vagy azért, mert a fényforrás takarja el azokat, vagy pedig a fejünk kerül a fényforrás és az üvegtábla közé. A merőlegeshez képest kicsiny szögben nézve is csak akkor figyelhetjük meg a tükörképeket, ha a fényforrást a szemünk elől eltakarjuk.

2. Ha nagyobb α szögben nézünk az üvegtáblára, a fényforrás képeit nem az optikai tengelyen, hanem attól (n-től és α-tól is függő mértékben) eltávolodva látjuk. A képek helyeit ilyenkor is az egymáshoz közeli fénysugarak metszéspontjai jelölik ki, ezek meghatározása azonban meglehetősen bonyolult.

3. A fénysugarak szigorúan véve nem egy pontban metszik egymást, emiatt a pontszerű fényforrás képe bizonyos mértékben kiterjedt, véges méretű megvilágított tárgyak képe pedig egy kicsit elmosódott lesz.

51 dolgozat érkezett. Helyes 36 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 12, hiányos (1 pont) 1, hibás 2 dolgozat.

A mérési feladat megoldása

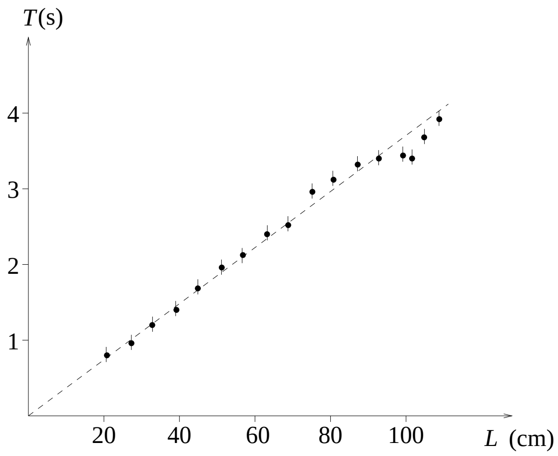
M. 219. *Egyensúlyozzunk különböző hosszúságú egyenes vonalzókat (lécdarabokat) egy hengeren, a henger tengelyére merőleges helyzetben! Állapítsuk meg, hogyan függ a vonalzók kis billegéseinek periódusideje a vonalzók hosszától!*

(*6 pont*) Közli: *Bakonyi Gábor,* Budapest

Megoldás. A mérés elvégzésének egyik kényes pontja: miként akadályozható meg a vonalzó (léc, hurkapálca stb) megcsúszása? A versenyzők különböző „trükkökkel" oldották meg ezt a problémát. *Kiss Imre* (Pécs, PTE Babits M. Gyak. Gimn. 9. o.t.) finom dörzspapírral vonta be a hengerként használt partvis rúdját. *Hegedűs Viktor* (Szolnok, Verseghy F. Gimn. 10. o.t.) viasszal kente be a hengert is és a hurkapálcákat is. *Pethő Balázs* (Pécs, PTE Babits M. Gyak. Gimn. 12. o.t.) választása pedig egy sodrófára esett, amelyen elég nagynak bizonyult a súrlódás.

A légellenállás okozta csillapodás csak a széles vonalzók esetében volt számottevő – állapította meg *Soós Péter* (Kiskunhalas, Bibó I. Gimn. 11. o.t.) –, ezért csak keskenyebb vonalzókkal végezte el a mérést.

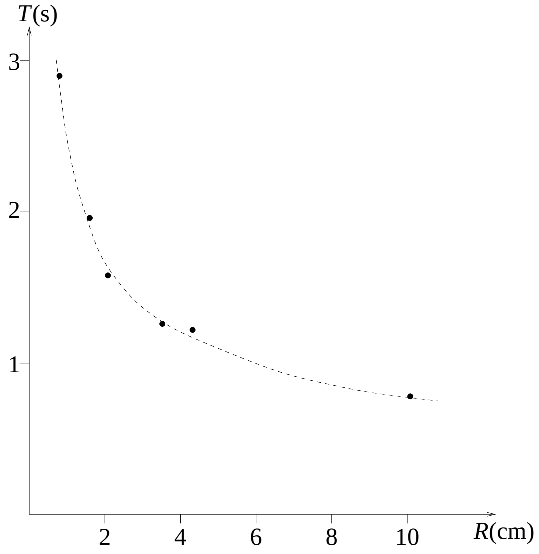
Több versenyzőnek is sikerült meglepően sok és hosszú mérési sorozatot elvégezni, mert a javasolt vonalzó helyett lécet (kerítéslécet) használtak, amelynek hosszát fűrészeléssel fokozatosan csökkentették. (Ilyen mértékben bármelyik mérési feladatnál szabad eltérni az eredeti kiírástól, ha a módosítás a vizsgálandó jelenség lényegét nem változtatja meg.)



1. ábra. A lengésidő a test hosszának függvényében

Bogdán Ákos (Pécs, Leőwey K. Gimn. 12. o.t.) egy kezdetben 1 m-es lécből 2-2 cm-es darabokat fűrészelt le, egészen 12 cm-ig (az ennél rövidebbek ugyanis már lecsúsztak). Így összesen 45 különböző hosszúságú (!) léc lengésidejét mérte (mindegyiket háromszor).

A lengésidőt a hosszúság függvényében ábrázolva jó közelítéssel egyenes arányosságot tapasztalunk. Az *1. ábra Vigh Máté* (Pécs, PTE Babits M. Gyak. Gimn. 9. o.t.) mérési adatait és az illesztett egyenest mutatja. (A mérési adatok bejelölt hibái csak a becsült eltérések nagyságrendjét jelzik, nem pedig azt, hogy az „igazi" értékek biztosan a jelzett szakaszokon belül kell legyenek. Emiatt nem feltétlenül szükséges, hogy az illesztett egyenes valamennyi mérési adaton áthaladjon, de nem kerülheti el azokat a feltüntetett hiba sokszorosával.) Néhányan elméletileg is megindokolták a periódusidő és a hossz arányosságát. (Ez a levezetés a mérési feladat megoldásához nem szükséges, nélküle is teljes értékű lehet a dolgozat. Természetesen nem is baj, ha valaki elvégzi és be is küldi a mérés kiértékelését megkönnyítő, saját tájékozódását elősegítő elméleti megfontolásait, de ne ez legyen a megoldás legfontosabb része, még kevésbé a tényleges mérések helyettesítője!)



2. ábra. A lengésidő a henger sugarának függvényében

A feladat nem kérdezte a lengésidő és a henger sugara közötti kapcsolatot, mégis néhányan különböző sugarú hengereken „billegtették” a vonalzókat, és tanulmányozták a periódusidőnek a henger sugarától való függését. *Szatmári Emőke* (Marosvásárhely, Bolyai F. Líceum 12. o.t.) hat különböző sugarú hengeren mért, eredményeit a *2. ábra* mutatja. A mért adatokból megállapította, hogy kb. 4-szer nagyobb sugarú hengeren 2-szer kisebb a lengésidő, ebből arra a következtetésre jutott, hogy $T \propto 1/\sqrt{R}$. (Az említett elméleti levezetések ezt a sejtést alátámasztják.)

A mérés hibájára az időmérés néhány tizedmásodperces pontatlanságából és a hosszmérés kb. milliméteres hibájából, továbbá a többször megismételt mérés szórásából lehet következtetni. Kényesebb kérdés az, hogy miként vehető figyelembe a gördülő ellenállásból és a közegellenállásból származó csillapodás a hibaszámításnál. Az egész mérés pontosságát a versenyzők többsége 1–3%-osra becsülte.

40 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Bogdán Ákos, Jurányi Zsófia, Nagy Ádám, Orosz Gergő, Szilágyi Péter és Vigh Máté megoldása. Kicsit hiányos (5 pont) 9, hiányos (1–4 pont) 18, nem értékelhető 7 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

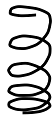
M. 222. A palánkról visszapattanó jégkorong visszaverődési szöge általában nem egyezik meg a beesési szöggel. (A jégkorong mozgását modellezhetjük falról visszapattanó befőttesüveg-tető mozgásával.) Hogyan függ a visszaverődés szöge a falhoz csapódó korong (tető) sebességétől és a beesési szögtől?

(*6 pont*) Közli: *Varga István,* Békéscsaba

P. 3404. Belül üres alumíniumgolyó 20,0 °C-os vízben lebeg. A vizet a golyóval együtt melegíteni kezdjük. Nő vagy csökken ekkor a golyóra ható felhajtóerő? Miért?

(*3 pont*) *Tarján Imre emlékverseny,* Szolnok

P. 3405. A robogók rugózását gyakran az *ábrán* látható változó menetemelkedésű csavarrugóval oldják meg. Mi az előnye ennek a rugónak?

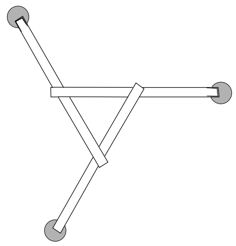


(*4 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Budapest

P. 3406. Milyen magasra ér fel az a rakéta, amit az első kozmikus sebességgel függőlegesen lőnek ki a Föld felszínéről?

(*4 pont*) *Schwartz Lajos emlékverseny,* Nagyvárad

P. 3407. Az *ábrán* felülnézetben látható elrendezésben egymásra tettünk három ugyanolyan méretű, de különböző tömegű, homogén tömegeloszlású rudat. A rudak egyik vége egy-egy oszlopra, másik vége mindig egy másik rúd közepére támaszkodik. Az oszlopok egyforma magasak. Mekkora erővel nyomják a rudakat? (Legyen $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $m_3 = 3$ kg.) Változik-e az eredmény, ha két rudat felcserélünk?



(*5 pont*) Közli: *Sári Péter,* Budapest

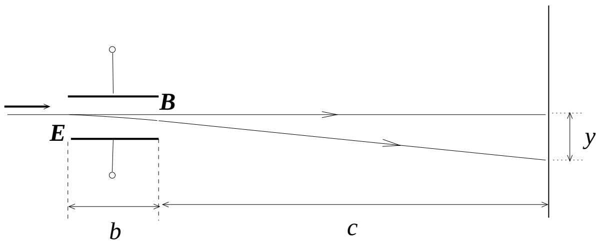
P. 3408. Nagyon érzékeny mérlegen lemérjük egy levegővel felfújt léggömb súlyát. Ezután kiengedjük a levegőt, és lemérjük az üres léggömb (és a madzag) súlyát. Mit tapasztalunk? Miért?

(*4 pont*) *Lánczos Kornél verseny,* Székesfehérvár

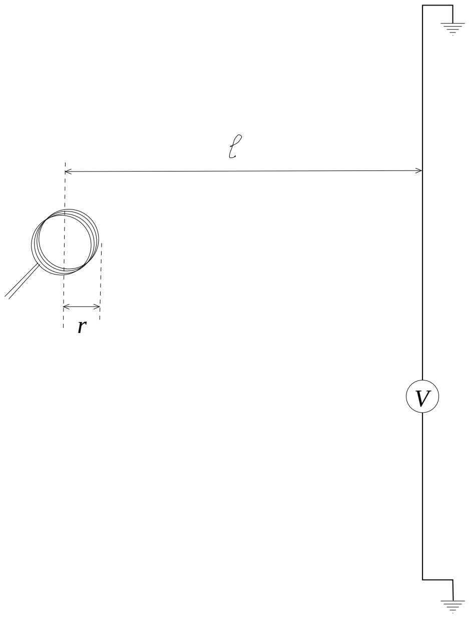
P. 3409. Ideális gázzal végzett nyitott folyamatot a (V, T) diagramon egy egyenes szakasz ábrázolja. Milyen esetekben lehet a szakasz felezőpontjában a nyomás a kezdő- és végállapot nyomásának számtani közepe?

(*5 pont*) Közli: *Légrádi Imre,* Sopron

P. 3410. Síkkondenzátor lemezei között olyan homogén E elektromos és az *ábra* síkjára merőleges homogén B mágneses mező van, hogy a lemezekkel párhuzamosan belőtt pozitív töltésű részecskék irányváltoztatás nélkül érik el az ernyőt. A síkkondenzátor lemezeinek hossza b, az ernyő c távolságra van a lemezek jobb oldali végétől. Ha a mágneses mezőt kikapcsoljuk, a töltött részecskék becsapódási pontja az ernyőn y-nal elmozdul. Határozzuk meg a részecskék Q/m fajlagos töltését! (A nehézségi erő hatásától tekintsünk el!)



(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs



P. 3411.[*] N menetes, r sugarú lapos tekercset egy hosszú, egyenes vezetőtől ℓ távolságra helyezünk el ($\ell \ll r$). A lapos tekercs és az egyenes vezető egy síkban vannak. Az egyenes vezetőbe egy voltmérőt iktatunk, távoli végeit pedig leföldeljük. Mit mutat a voltmérő, ha a tekercs áramát t_0 idő alatt egyenletesen nulláról I_0-ra növeljük?
Adatok: $N = 100$, $\ell = 100$ cm, $r = 2$ cm, $t_0 = 5$ s, $I_0 = 2$ A.

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Budapest

P. 3412. Keresztezett állású polárszűrőkön nem jut át a fény. Ha közéjük becsúsztatunk egy harmadik polárszűrőt, valamennyi fény átjuthat. A bejövő fénynek legfeljebb hányad része juthat át?

(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 3413. Ha egy fényes kanálba annak homorú oldala felől belenézünk, fejreállva látjuk magunkat. Megfordítva a kanalat, a domború oldala felől nézve egyenes állásban látjuk magunkat, de úgy tűnik, hogy ugyanakkorának, mint az előbb. Próbáljuk ki, és magyarázzuk meg a jelenséget!

(*4 pont*) Közli: *Tichy Géza,* Budapest

P. 3414. A paksi atomerőműben az ${}^{235}_{92}$U atommag egy „termikus” neutronnal ütközve ${}^{90}_{36}$Kr-ra és ${}^{143}_{56}$Ba-ra hasadhat, miközben három gyors neutron is keletkezik. A Kr és a Ba izotóp instabil, β-sugárzást kibocsátva még négyszer bomlanak. Mik a végtermékek?

(*4 pont*) Közli: *Korpássy Péter,* Budapest

P. 3415. Egy hagyományos lemezjátszót α szögben megdöntünk. Ráteszünk a korongjára egy kis testet, a tengelyétől r távolságra, a lehető legalacsonyabb helyzetben. Ezután a korongot nyugalmi helyzetből indítva β szöggyorsulással forgatjuk. A kis test t idő múlva csúszik meg.

a) Mekkora a μ tapadási súrlódási együttható a korong és a kis test között?

b) Legalább mekkora legyen μ, hogy kezdetben még ne csússzon meg a test?

(*6 pont*) Közli: *Balogh Péter,* Budapest

---

[*] Lásd a Kölcsönös indukció c. cikket lapunk 110. oldalán.

KöMaL – 2001/2 FIZ0102 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 20:46 (23. lap)

A fizika feladatok megoldásai a következő címre küldendők:
Eötvös Loránd Fizikai Társulat, KöMaL feladatok
Budapest, Pf. 433. 1371
A beküldési határidő: **2001. március 11.**

Physics

M. 222. The angle of refraction of a puck bouncing back from a board is usually not identical to its angle of incidence. (The motion of a puck can be modelled using the lid of a jar.) How does the angle of refraction depend on the speed of the puck (lid) and on the angle of incidence?

P. 3404. An aluminium ball with an empty interior floats in 20.0 $^\circ$C water. The water with the ball in it is heated. Does the upthrust exerted onto the ball increase or decrease? Why? **P. 3405.** The springing of scooters is often carried out using the screw spring of varying pitch shown in the figure. What is the advantage of such a spring? **P. 3406.** How high does a rocket that is launched vertically at the first cosmic speed from the surface of the Earth go? **P. 3407.** There are three rods of identical size but different masses and homogeneous mass distribution placed atop each other in the arrangement shown from above in the figure. One end of each rod leans on a pillar, while the other end leans on the centre of another rod. The height of the pillars is identical. What is the force exerted by each pillar onto each rod? (Let $m_1=1$ kg, $m_2=2$ kg, $m_3=3$ kg.) Does the result change when two rods are interchanged? **P. 3408.** The weight of an air-balloon inflated with air is measured using a very sensitive scale. The air is let out from the balloon and the weight of the balloon (and of the thread) is measured. What is the result? Why? **P. 3409.** A process made with an ideal gas is represented by a straight section on a (V,T) diagram. In what cases can the pressure at the middle of this section be the arithmetic mean of the respective pressure values of the initial and final states? **P. 3410.** There are such a homogeneous electric field E and a homogeneous magnetic field B perpendicular to the plane of the figure between the plates of a plane capacitor that positively charged particles shot parallel to the plates reach the screen without changing direction. The length of the plates of the plane capacitor is b and the screen is at distance c from the right-hand end of the plates. When the magnetic field is switched off the point where the charged particles hit the screen moves by y. Determine the specific charge Q/m of the particles. (Neglect the effect of gravitation.) **P. 3411.** A flat coil with N turns of radius r is placed at distance ℓ from a long, straight conductor ($\ell \ll r$). The flat coil and the straight conductor are in the same plane. A voltmeter is inserted into the long conductor, and the far ends of this latter are earthed. What does the voltmeter show when the current in the coil is uniformly increased from zero to I_0 in time t_0. (The self-induction of the straight conductor is negligible.) Data: $N=100$, $\ell=100$ cm, $r=2$ cm, $t_0=5$ s, $I_0=2$ A. **P. 3412.** Light does not get through perpendicular polar filters. When a third polar filter is slid between the first two some light may pass through. What is the maximum proportion of the incident light that can pass through such an arrangement? **P. 3413.** When one looks into the concave side of a shiny spoon, one sees oneself upside down. Turning the spoon and looking into its convex side, the image is erect and looks the same size as the inverted image seen in the concave side. Try this out and explain the phenomenon. **P. 3414.** At Paks Nuclear Power Plant the nucleus $^{235}_{92}$U, when hit by a "thermal" neutron, may e.g. split into a $^{90}_{36}$Kr and a $^{143}_{56}$Ba, while three fast neutrons are also produced. The Kr and Ba isotopes are unstable and decay once more emitting β radiation. What are the final products? **P. 3415.** A conventional turntable is tilted at angle α. A small body is placed onto its disc, at distance r from its axis, at the lowest possible position. Then, starting from rest, the disc is turned at angular acceleration β. The small body slips after time t. a) What is the coefficient of static friction μ between the small body and the disc? b) What is the required minimum value of μ so that the small body does not slip at once at the beginning?