ERICSSON-DÍJ ’2000

December elsején 20 iskola néhány tanára, igazgatója nem tartotta meg az óráit, helyette ünneplésre gyűltek össze a Magyar Tudományos Akadémia Dísztermében, mivel a szervezők, az **Ericsson Magyarország Kft. és a Richter Gedeon Rt.** ezt a helyet tartották a legméltóbbnak arra, hogy 16 Ericsson-díjas matematika- és fizikatanárnak, valamint 4 kémiatanárnak a Magyar Kémia Oktatásért immár második alkalommal – ezúttal közösen – díjakat osszanak.

Matematikát eredményesen tanító tanárok részére (akiknek OKTV vagy Arany Dániel versenyen matematikából nyertes versenyzői voltak) először a **Graphisoft R&D Rt.** vezetője, Bojár Gábor ajánlott fel díjat, majd a tavalyi évtől még két élvonalbeli nagyvállalat alapított tanári díjat, fizika- és kémiatanárok részére is. Jövő évtől az említett három cég – eddigi alapítványaik támogatását megtartva – egy új, közös alapítványt hoz létre: a Magyar Természettudományos Oktatásért. A Rátz Lászlóról, a Fasori Gimnázium 70 évvel ezelőtt elhunyt kiváló pedagógusáról és nagy tudású matematikatanáráról elnevezett *Rátz tanár úr* díjat 2001-től évente 2-2-2 olyan matematika-, fizika- és kémiatanár nyerheti el egyenként 1 milló forint értékben, aki pályafutása során kimagasló szerepet tölt be tantárgya népszerűsítésében és a tehetséggondozásban.

A mostani ünnepségen minden egyes kitüntetett tanárt nemcsak a barátok, kollégák, de videóról tanítványai is köszöntöttek – a diákok szövegén ki-ki meghatódhatott vagy nevethetett.

Az ERICSSON 2000-ben 4 millió forintos támogatásban részesítette a MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítványt abból a célból, hogy előmozdítsa és erősítse a magyarországi természettudományos alapképzés világviszonylatban is kiemelkedő színvonalát.

A 2000 áprilisa és szeptembere között a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokban, a Természet Világában, valamint több napi- (és heti-) lapban, a Pályázatfigyelőben és az Interneten is megjelent felhívás szempontjai alapján **az általános- vagy középiskolákban tanítók közül 4 matematika- és 4 fizikatanár kapta meg a külön-külön 200 000 forint díjazású „ERICSSON a matematika és fizika tehetségeinek gondozásáért”, és további 4-4 matematika- és fizikatanár a 150 000 forint pénzjutalommal járó „ERICSSON a matematika és fizika népszerűsítéséért” díjat és az egyedi tervezésű emlékplakettet.**

A díjazottak személyét a javaslatok alapján a Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat választotta ki, és a MATFUND Alapítvány kuratóriuma hagyta jóvá. A díjazott tanárok iskolái részére a KöMaL folyóirat 10-10 példányának jövő tanévre szóló előfizetését is biztosítja a támogatásból az alapítvány.

A kétféle díjra összesen 62 jelöltet javasoltak az iskolák, a kollégák, különböző intézmények, társadalmi szervezetek, tanítványok és szüleik, néhány tanárra 2–3, sőt több helyről is érkezett ajánlás. A tehetséggondozás díjára 23 fizika- és 11 matematikatanárt, a népszerűsítési díjra 16 fizika- és 12 matematikatanárt jelöltek. A sok kiváló szaktanár és pedagógus közül nehéz volt a választás. Azonban azok az arra érdemesek, akik tavaly vagy idén nem kerültek a díjazottak közé, bizonyára ott lesznek a következő években.

Az „**ERICSSON a matematika és fizika tehetségeinek gondozásáért**" díjban részesült 2000-ben a *matematikát tanító tanárok* közül:

Lászlóné Sergyán Stefánia (Budapest, Szent István Gimnázium),
Németh József (Pécs, Zipernowsky Károly Műszaki Szakközépiskola),
Polcz Katalin (Pécs, Janus Pannonius Gimnázium és Szakközépiskola),
Simonné Bujdosó Margit (Debreceni Egyetem Arany János Gyakorló Általános Iskolája),

a fizikát tanító tanárok közül:

Kotormán Mihály (Debrecen, Kossuth Lajos Gyakorló Általános Iskola),
Pálovics Róbert (Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimnázium),
Beregszászi Zoltán (Budapest, Puskás Tivadar Távközlési Technikum),
Horváth Ferenc (Barcs, Dráva Völgye Középiskola).

Az „**ERICSSON a matematika és fizika népszerűsítéséért**" díjban részesült 2000-ben a matematikát tanító tanárok közül:

Károlyi Károly (Bátaszék, Kanizsai Dorottya Általános Iskola és Zeneiskola),

Maráz Lászlóné (Tata, Vaszari János Általános Iskola),
Tarcsay Tamás (Szegedi Tudományegyetem Ságvári Endre Gyakorló Gimnáziuma),
Wágner Tamás (Budapest, Kürt Alapítványi Gimnázium),

a fizikát tanító tanárok közül:

dr. Zátonyi Sándor (Sopron, Orsolya téri Általános Iskola),
dr. Zsúdel László (Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium),
dr. Kopcsa József (Debrecen, Gábor Dénes Szakközépiskola),
dr. Jurisits József (Szekszárd, Garay János Gimnázium).

A társulati bizottságok tagjai a következők voltak: az Eötvös Társulattól: *dr. Molnár Miklós* elnök (a Szegedi Tudományegyetem egyetemi docense), *dr. Berkes József* (a pécsi Janus Pannonius Tudományegyetem egyetemi adjunktusa), *Juhász Nándor* (a szegedi Rókus I. sz. Általános Iskola tanára), továbbá a tavalyi Ericsson-díjasok közül *Sebestyén Zoltán* (a pécsi Testvérvárosok Terei Általános Iskola tanára), *Nagy Márton* (a soproni Berzsenyi Dániel Evangélikus Gimnázium nyugdíjas tanára), *Simon László* (a túrkevei Ványai Ambrus Gimnázium és Gépjárműtechnikai Szakközépiskola tanára) és *dr. Szegedi Ervin* (a Debreceni Egyetem Gyakorló Gimnáziumának szakvezető tanára);

a Bolyai Társulattól: *Pálmay Lóránt* elnök (a Fővárosi Pedagógiai Intézet nyugalmazott vezető szaktanácsadója), *Bonifert Domokos* (a szegedi Tudományegyetem Tanárképző Főiskolájának docense), *Lajos Józsefné* (a Kiss Árpád Országos Közoktatási Intézmény munkatársa), *Pogáts Ferenc* és *Sztrókayné Földvári Vera* (az ELTE Tanárképző Főiskolai Kar docensei), *Szakál Péter* (a soproni Széchenyi I. Gimnázium igazgatója), továbbá a tavalyi Ericsson-díjasok közül *Róka Sándor* (a nyíregyházi Bessenyei György Tanárképző Főiskola docense), *Deli Lajos* (a hajdúszoboszlói Hőgyes Endre Gimnázium tanára) és *dr. Katz Sándor* (a bonyhádi Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium tanára).

A MATFUND Alapítvány kuratóriumának tagjai: *dr. Katona Gyula* elnök (az MTA levelező tagja, a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet igazgatója), *dr. Benczúr András* (az ELTE TTK dékánja, egyetemi tanár), *dr. Nagy Dénes Lajos* (a fizikai tudományok doktora, KFKI RMKI), *Oláh Vera* (matematikus, a KöMaL főszerkesztője), *dr. Tichy Géza* (az ELTE tanszékvezető egyetemi tanára).

A díjazott tanárokat bemutató írásokat és a díjkiosztón készült fényképeket honlapunkon, a http://komal.elte.hu Internet címen láthatják.

Néhány érdekesség a Fibonacci- és a Fibonacci-típusú sorozatokról
II. rész

Előző számunkban a „Fibonacci-típusú” sorozatoknak, illetve magának a Fibonacci sorozatnak több érdekes tulajdonságát bebizonyítottuk. Most ezek felhasználásával különböző megoldásokat adunk az **A. 244.** feladatra. A definíciók, tételek és lemmák számozását nem kezdjük újra, mivel többször hivatkozni fogunk a cikk első részében leírtakra.

A. 244. *Egy számsorozatot nevezzünk Fibonacci-típusúnak, ha a harmadiktól kezdve mindegyik eleme az előző kettő összege. Bizonyítsuk be, hogy a pozitív egész számok halmaza felbontható olyan Fibonacci-típusú végtelen sorozatok uniójára, amelyek közül semelyik kettőnek nincs közös eleme.*

I. megoldás az A. 244. feladatra

Elsőként a feladatnak egy olyan megoldását vizsgáljuk meg, amely két, önmagában is érdekes segédsorozat felhasználásával konstruálja meg a kívánt felbontást.

2. definíció. *Definiáljuk az* $A=(a_0,a_1,\ldots)$ *és a* $B=(b_0,b_1,\ldots)$ *sorozatokat a következőképpen:*

(1) *Legyen* $a_0=b_0=1$*;*

(2) *ha* $a_0,\ldots,a_{n-1}$*-et és* $b_0,\ldots,b_{n-1}$*-et már definiáltuk, akkor legyen* a_n *az a legkisebb pozitív egész, amelyik nem szerepel az* $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},b_0,b_1,\ldots,b_{n-1}$ *értékek között;*

(3) *legyen* $b_n=a_n+n$.

A következő táblázat tartalmazza az A és B első néhány elemét:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	2	4	5	7	9	10	12	13	15	17
b_n	1	3	6	8	11	14	16	19	21	24	27

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
a_n	18	20	22	23	25	26	28	30	31	33	34
b_n	29	32	35	37	40	42	45	48	50	53	55

A megoldás kulcsa a következő lemma.

5. lemma. *Tetszőleges* n *nemnegatív egészre*

$$a_{b_n}=a_n+b_n.$$

A lemma bizonyításához további lemmákra lesz szükségünk.

6. lemma. *Az A és a B sorozat is szigorúan monoton nő, $a_0=b_0=1$-től eltekintve nincs közös elemük, továbbá minden egyes pozitív egészt tartalmazza valamelyik sorozat.*

7. lemma. *Az A és a B elemeire teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:*

$$a_n+1\le a_{n+1}\le a_n+2; \tag{9a}$$

$$b_n+2\le b_{n+1}\le b_n+3; \tag{9b}$$

$$a_n+3\le a_{n+2}\le a_n+4; \tag{9c}$$

$$b_n+5\le b_{n+2}\le b_n+6. \tag{9d}$$

7. feladat. *Igazoljuk a 6. és a 7. lemmát.*

8. lemma. *Tetszőleges n nemnegatív egészre*

$$a_{a_n}=b_n+1. \tag{11}$$

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítunk. Az $n=0$ esetben $b_0+1=1+1=2=a+ +1=a_{a_0}$.

Tegyük fel, hogy az állítás teljesül $n=m$-re, azaz $a_{a_m}=b_m+1$; ebből bebizonyítjuk az $n=m+1$ esetre is. A $b_{m+1}+1$ szám a (9b) alapján nem szerepelhet a B sorozatban, tehát az A sorozatban szerepel: $b_{m+1}+1=a_k$ valamilyen k-ra. Azt kell igazolnunk, hogy $k=a_{m+1}$.

A (9a) egyenlőtlenség szerint $a_m+1\le a_{m+1}\le a_m+2$. Ha $a_{m+1}=a_m+1$, akkor $b_{m+1}=b_m+2$, és $a_k=b_{m+1}+1=(b_m+1)+2=a_{a_m}+2$. (Az utolsó lépésben az indukciós feltevést alkalmaztuk.) A (9a) és (9c) egyenlőtlenségek szerint ez csak úgy lehetséges, ha $k=a_m+1=a_{m+1}$.

Ha $a_{m+1}=a_m+2$, akkor $b_{m+1}=b_m+3$, és $a_k=b_{m+1}+1=(b_m+1)+3=a_{a_m}+3$. (Az utolsó lépésben ismét az indukciós feltevést alkalmaztuk.) A (9a) és (9c) egyenlőtlenségek szerint ez csak úgy lehetséges, ha $k=a_m+2=a_{m+1}$. Ezzel a lemmát igazoltuk.

9. lemma. *Tetszőleges n pozitív egészre*

$$a_{b_n-2}=a_{b_n}-3; \tag{12a}$$

$$a_{b_n-1}=a_{b_n}-1; \tag{12b}$$

$$a_{b_n+1}=a_{b_n}+2. \tag{12c}$$

Bizonyítás. Először a (12b) egyenlőséget igazoljuk. Tegyük fel, hogy az állítás hamis; ekkor $a_{b_n}=a_{b_n-1}+2$, és az $a_{b_n-1}+1=a_{b_n}-1$ szám a B sorozatban van: $a_{b_n}- -1=b_k$ valamilyen k-ra. A 8. lemma szerint $b_k+1=a_{a_k}$, tehát $a_{b_n}=b_k+1=a_{a_k}$. Az A sorozat monotonitása miatt ebből következik, hogy $a_k=b_n$, ami ellentmond annak, hogy az A és a B sorozatnak az $a_0=b_0=1$-en kívül nincs közös eleme. A (12b) tehát teljesül.

A (9a) és (9c) egyenlőtlenségek alapján $a_{b_n-2}\le a_{b_n}-3$ és $a_{b_n-2}\ge a_{b_n-1}-2= =a_{b_n}-3$; ezekből (12a) következik.

Szintén a (9a) és (9c) egyenlőtlenségek alapján $a_{b_n+1}\le a_{b_n}+2$ és $a_{b_n+1}\ge a_{b_n-1}+ +3=a_{b_n}+2$; tehát (12c) is igaz.

Most már rátérhetünk az 5. lemma bizonyítására.

Az 5. lemma bizonyítása. A bizonyításhoz ismét a teljes indukciót használjuk. Az állítás igaz $n=0$-ra: $a_{b_0}=a_1=2=1+1=a_0+b_0$.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n \le m$ esetén, ebből bebizonyítjuk $n=(m+1)$-re is. Ismét két esetet vizsgálunk aszerint, hogy $a_{m+1}=a_m+1$ vagy $a_{m+1}=a_m+2$.

Ha $a_{m+1}=a_m+1$, akkor $b_{m+1}=b_m+2$ és $a_{m+1}+b_{m+1}=a_m+b_m+3=a_{b_n}+3$. Másrészt a 8. lemma alapján

$$a_{b_{m+1}}=a_{b_{m+1}-1}+1=a_{b_m+1}+1=(a_{b_m}+2)+1=a_{b_m}+3.$$

Ebben az esetben tehát $a_{m+1}+b_{m+1}=a_{b_{m+1}}$.

Ha $a_{m+1}=a_m+2$, akkor $b_{m+1}=b_m+3$ és $a_{m+1}+b_{m+1}=a_m+b_m+3=a_{b_n}+5$. A 8. lemma alapján

$$a_{b_{m+1}}=a_{b_{m+1}-2}+3=a_{b_m+1}+3=(a_{b_m}+2)+3=a_{b_m}+5.$$

Az állítás ebben az esetben is teljesül. A lemmát ezzel bebizonyítottuk.

Az 5. lemma segítségével könnyen megkonstruálható az A. 244. feladatban kívánt felbontás, erről szól a következő tétel.

6. tétel. *Tekintsük az összes olyan (a_m, b_m) paraméterű Fibonacci-típusú sorozatot, amelyre az m nemnegatív egész szám nem szerepel a B sorozatban. Az összes pozitív egész szám pontosan egy ilyen sorozatban szerepel.*

Bizonyítás. Ha valamely m-re a_m és b_m egy Fibonacci-típusú sorozat két egymás utáni eleme, akkor az 5. lemma és a B sorozat definíciója alapján a következő két elem $a_m+b_m=a_{b_m}$, illetve $a_{b_m}+b_m=b_{b_m}$. Ezt a gondolatmenetet megismételve láthatjuk, hogy az (a_m, b_m) paraméterű sorozat elemei

$$a_{m_1},\ b_{m_1},\ a_{m_2},\ b_{m_2},\ a_{m_3},\ b_{m_3},\ldots$$

alakban írhatók, ahol $m_1=m$ és $m_{i+1}=b_{m_i}$.

Tetszőleges (a_m, b_m) számpárhoz egyértelműen meghatározható, hogy melyik számpár áll előtte a megfelelő sorozatban. Ha m a B sorozatban szerepel, azaz $m=$ $=b_k$ valamely k-ra, akkor ez az (a_k, b_k) számpár. Ha m nem szerepel a B sorozatban, akkor az (a_m, b_m) számpár a megfelelő paraméterű sorozat első két eleme. Ezen a módon visszafelé lépkedve, mindegyik pozitív egész számról egyértelműen eldönthető, hogy melyik sorozatban szerepel. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

A következő táblázatban felsoroltuk az első néhány sorozatot.

m	a_{m_1}	b_{m_1}	a_{m_2}	b_{m_2}	a_{m_3}	b_{m_3}	a_{m_4}	b_{m_4}	
0	1	1	2	3	5	8	13	21	...
2	4	6	10	16	26	42	68	110	...
4	7	11	18	29	47	76	123	199	...
5	9	14	23	37	60	97	157	254	...
7	12	19	31	50	81	131	212	343	...
9	15	24	39	63	102	165	267	432	...

II. megoldás az A. 244. feladatra

Másodszor egy olyan megoldást mutatunk, amely egy többé-kevésbé természetes konstrukciót ad a keresett felbontásra.

Képzeljük el, hogy a pozitív egész számok halmazát már felbontottuk páronként diszjunkt Fibonacci-típusú sorozatok uniójára. Legyen f az a függvény, ami minden egyes pozitív egészhez hozzárendeli az őt tartalmazó egyetlen sorozat következő elemét. Tehát tetszőleges n pozitív egészre az n-et tartalmazó sorozatban az n után az $f(n)$, azután pedig az $f(f(n))$ következik. Mivel a sorozat Fibonacci-típusú, szükséges, hogy $f(f(n))=f(n)+n$ teljesüljön. Az f függvény tehát pozitív egész számokhoz pozitív egész számokat rendel, és teljesül rá az $f(f(n))=f(n)+n$ függvényegyenlet.

Megoldásunk az iménti gondolatmenet megfordításával működik. Először megadunk egy f függvényt, amire teljesül a talált függvényegyenlet. Ezután definiáljuk a megfelelő Fibonacci-típusú sorozatokat.

3. definíció. *Definiáljuk az f függvényt a következőképpen:*

1. *Legyen $f(1)=2$;*

2. *Ha $f(1), \ldots, f(n-1)$-et már definiáltuk, és az n nem szerepel ezek között, akkor legyen $f(n)=f(n-1)+1$;*

3. *Ha $f(1), \ldots, f(n-1)$-et már definiáltuk, és az n szerepel ezek között, akkor legyen k a legkisebb pozitív egész, amelyre $f(k)=n$, és legyen $f(n)=n+k$.*

Az alábbi táblázat tartalmazza f első néhány értékét.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f(n)$	2	3	5	6	8	10	11	13	14	16	18	19	21	23	24

n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$f(n)$	26	27	29	31	32	34	35	37	39	40	42	44	45	47	48

10. lemma. *Az f függvényre a következők teljesülnek:*

a) *tetszőleges pozitív egész n-re $f(n)>n$;*

b) *az f függvény szigorúan monoton nő;*

c) *tetszőleges n pozitív egészre $f(f(n))=f(n)+n$.*

Bizonyítás. Az a) tulajdonságot teljes indukcióval igazoljuk. Az $n=1$ esetben igaz, mert $f(1)=2>1$. Tegyük fel, hogy igaz $n<m$-re; ebből bebizonyítjuk $n=m$-re is. Ha m nem szerepel az $f(1), \ldots, f(m-1)$ számok között, akkor $f(m)=f(m-1)+1>$ $>(m-1)+1=m$. Ha n szerepel az $f(1), \ldots, f(m-1)$ számok között és k a legkisebb pozitív egész, amelyre $n=f(k)$, akkor $f(n)=n+k>n$. Ezzel az a) állítást igazoltuk.

A b) állításhoz teljes indukcióval igazoljuk, hogy tetszőleges n pozitív egészre $f(n+1)>f(n)$. Ez $n=1$-re igaz, mert $f(1)=2$ és $f(2)=3$. Tegyük fel, hogy

$$f(1)<f(2)<\ldots<f(n);$$

ebből bebizonyítjuk, hogy $f(n)<f(n+1)$.

Ha $n+1$ nem szerepel az $f(1), \ldots, f(n)$ számok között, akkor

$$f(n+1)=f(n)+1>f(n).$$

Tegyük tehát fel, hogy $n+1$ szerepel az $f(1),\ldots,f(n)$ számok között, és legyen k a legkisebb pozitív egész, amelyre $n+1=f(k)$; ekkor persze $f(n+1)=n+k+1$. Legyen ezután $m=f(k-1)$; ekkor $f(m)=m+k-1$. Az indukciós feltevés szerint az $f(1), \ldots$ $\ldots, f(k-2)$ számok kisebbek $f(k-1)$-nél, ezért az $m+1, \ldots, n$ számok egyike sem szerepel $f(1), \ldots, f(k-1)$ között. Az $f(k), \ldots, f(n-1)$ számok pedig az indukciós feltevés szerint nagyobbak $n=f(k-1)$-nél, ezért az f definíciója szerint

$$f(m+1)=f(m)+1=m+k,$$
$$f(m+2)=f(m+1)+1=m+k+1,$$
$$\vdots$$
$$f(n)=f(n-1)+1=n+k-1.$$

Mivel $f(n+1)=n+k+1$, most is $f(n)<f(n+1)$. Ezzel a b) állítást is igazoltuk.

Legyen most n tetszőleges pozitív egész. Az a) állítás szerint $f(n)>n$. A b) állítás szerint pedig az n-en kívül nincs még egy k szám, amelyre $f(n)=f(k)$ teljesülne. Ezért az f függvény a definíció szerint $f(n)$-hez az $f(n)+n$ számot rendeli: $f(f(n))=f(n)+n$. Ezzel a c) állítást is igazoltuk.

Ezután megkonstruálhatjuk az A. 244. feladatban megkívánt felbontást. Tekintsük az összes olyan n, $f(n)$, $f(f(n))$, $f(f(f(n)))$, $\ldots$ sorozatot, amelyben n nem eleme f értékkészletének. A függvényegyenlet szerint ezek mind Fibonacci-típusú sorozatok:

$$1\mapsto 2\mapsto 3\mapsto 5\mapsto 8\mapsto 13\mapsto 21\mapsto 34\mapsto \ldots$$
$$4\mapsto 6\mapsto 10\mapsto 16\mapsto 26\mapsto 42\mapsto 68\mapsto 110\mapsto \ldots$$
$$7\mapsto 11\mapsto 18\mapsto 29\mapsto 47\mapsto 76\mapsto 123\mapsto 199\mapsto \ldots$$
$$9\mapsto 14\mapsto 23\mapsto 37\mapsto 60\mapsto 97\mapsto 157\mapsto 254\mapsto \ldots$$
$$12\mapsto 19\mapsto 31\mapsto 50\mapsto 81\mapsto 131\mapsto 212\mapsto 343\mapsto \ldots$$

Azt is könnyű végiggondolni, hogy minden pozitív egész pontosan egy sorozatban szerepel: ez a szigorúan monoton növekedő tulajdonságból következik.

III. megoldás az A. 244. feladatra*

Ebben a megoldásban az f helyett egy másik függvény segítségével adjuk meg a keresett felbontást.

Mint már láttuk, a Fibonacci-típusú sorozatok bizonyos értelemben hasonlítanak a $q=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ hányadosú mértani sorozatokhoz. Ez adja a konstrukció alapötletét.

4. definíció. *Legyen tetszőleges n pozitív egészre $g(n)$ az az egész szám, amelyik a legközelebb van a qn számhoz, azaz $|g(n)-qn|<\dfrac{1}{2}$.*

11. lemma. *Tetszőleges n pozitív egészre $g(g(n))=g(n)+n$.*

---

* Versenyzőink közül *Horváth Illés,* a Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn. 11. osztályos tanulója oldotta meg így a feladatot.

Bizonyítás. Legyen $m=g(n)$ és $k=g(g(n))=g(m)$. Azt kell igazolnunk, hogy $k=$ $=m+n$. A g definíciója szerint

$$|m-qn|<\frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad |k-qm|<\frac{1}{2}.$$

Felhasználva, hogy $q(q-1)=q^2-q=1$,

$$\left|k-m-n\right|=\left|k-qm+(q-1)m-q(q-1)n\right|<$$

$$<\left|k-qm\right|+(q-1)\left|m-qn\right|<\frac{1}{2}+(q-1)\frac{1}{2}=\frac{q}{2}<1.$$

Mivel k, m és n egész számok, ez csak úgy lehet, ha $k-m-n=0$.

Innen a II. megoldás szerint haladhatunk az f függvény helyett a g függvénnyel.

IV. megoldás az A. 244. feladatra

Ez a megoldás *Csikvári Péter* és *Zsbán Ambrus* (mindketten a Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn. 11. osztályos tanulói) dolgozatából származik.

12. lemma. *Minden pozitív egész számot egyértelműen felírhatunk különböző Fibonacci-számok összegeként úgy, hogy nem használunk fel szomszédos Fibonacci-számokat, például* $17=1+3+13$, $49=2+13+34$.

Ennek a lemmának a felhasználásával egy szép konstrukció adható a szükséges Fibonacci-típusú sorozatokra.

Tekintsünk egy olyan számot, amelynek a 12. lemma szerinti felírásában a tagok között szerepel az 1:

$$F_{i_1}+F_{i_2}+\ldots+F_{i_k},$$

ahol $i_{j+1}\ge i_j+2$ és $i_1=2$. ($F_1=F_2=1$ miatt nem engedjük meg a 0 és 1 indexeket.) Ha ebben az összegben az összes tagot a rákövetkező Fibonacci-számra cseréljük ki, akkor egy másik számot kapunk. Ezt a műveletet ismételve pedig egy sorozatot:

$$F_{i_1}+\ldots+F_{i_k},\ F_{i_1+1}+\ldots+F_{i_k+1},\ F_{i_1+2}+\ldots+F_{i_k+2},\ \ldots$$

Ez a sorozat a Fibonacci-sorozat k darab eltoltjának összege, tehát maga is Fibonacci-típusú.

Minden pozitív egész n pontosan egy ilyen sorozatban szerepel. Ha ugyanis n-et felírjuk a 12. lemmának megfelelően, akkor a tagokat a megfelelő kisebb Fibonacci-számokra cserélve egyértelműen meghatározható annak a sorozatnak az első eleme, amelyik az n-et tartalmazza.

Az így kapott Fibonacci-típusú sorozatok:
1, 2, 3, 5, 8, ...
$4=1+3$, $7=2+5$, $11=3+8$, $18=5+13$, ...
$6=1+5$, $10=2+8$, $16=3+13$, $26=5+21$, ...
$9=1+8$, $15=2+13$, $24=3+21$, $39=5+34$, ...
$12=1+3+8$, $20=2+5+13$, $32=3+8+21$, $52=5+13+34$, ...
⋮

8. feladat. *Bizonyítsuk be a 12. lemmát!*

További feladatok

9. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy az I. és a II. megoldás ugyanazt a felbontást állítja elő.*

10. feladat. *Mutassuk meg, hogy az I., a III. és a IV. megoldás három különböző konstrukciót ad a feladatra.*

11. feladat. *Két játékos a következő játékot játssza: Két kupac kavicsból felváltva vesznek el. Egy lépésben vagy az egyik kupacból vehetnek el legalább egy kavicsot, vagy pedig mindkét kupacból ugyanannyit. Az veszít, aki nem tud lépni. Mutassuk meg, hogy a második játékosnak pontosan akkor van nyerő stratégiája, ha a kiinduló állásban az egyik kupacban $a_n - 1$, a másik kupacban $b_n - 1$ darab kavics van, ahol n alkalmas természetes szám, a_n és b_n pedig a 2. definícióban szereplő sorozatok megfelelő elemei.*

12. feladat. *Legyen (a_n), illetve (b_n) a 2. definícióban szereplő sorozat. Igazoljuk, hogy tetszőleges n nemnegatív egészre $a_n = [qn] + 1$ és $b_n = [q^2 n] + 1$. ($[x]$ az x egész része.)*

13. feladat. *Jelöljük h-val azt a függvényt, amely minden pozitív egészhez a IV. megoldásban látott felírása eltoltját rendeli; más szóval, ha az $1 < i_1 < \ldots < i_k$ egész számok között nincsenek szomszédosak, akkor legyen $h(F_{i_1} + \ldots + F_{i_k}) = F_{i_1+1} + \ldots + F_{i_k+1}$. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n pozitív egészre*

$$qn - \frac{1}{q^2} < h(n) < qn + \frac{1}{q}.$$

14. feladat. *Azt mondjuk, hogy a (c_n) sorozat a (d_n) sorozat bővítése, ha létezik olyan k nemnegatív egész szám, amelyre $c_{n+k} = d_n$, azaz a (c_n) sorozatot úgy kapjuk, hogy a (d_n) sorozat elé további elemeket írunk. Bizonyítsuk be, hogy ha (c_n) és (d_n) pozitív számokból álló, monoton növő Fibonacci-típusú sorozatok és egyik sem a másik bővítése, akkor*

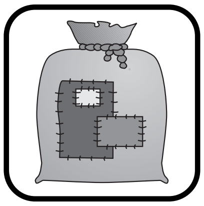
a) *legfeljebb két közös elemük van;*

b) *ha két közös elemük van, akkor az első elemeik megegyeznek.*

15. feladat. *Bizonyítsuk be a következő azonosságokat teljes indukcióval és a 2. lemma segítségével is.*

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}$$
$$F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2$$
$$F_{3n-1} = F_n^3 + 3F_n^2 F_{n-1} + F_{n-1}^3$$

Énekes Béla, Kós Géza



A zsák meg a foltjai

A *Kvant* című, orosz ifjúsági matematika–fizika folyóiratban jelent meg a következő feladat:[1]

Egy egységnyi területű zsákon öt folt található, amelyek bármelyikének a területe legalább $\frac{1}{2}$. Mutassuk meg, hogy van a foltok között kettő, melyek közös részének területe legalább $\frac{1}{5}$.

A következőkben egyszerűbb feladatokon keresztül a probléma általánosításához is eljutunk. A felmerülő nehezebb feladatokat $*$-gal jelöltük. Az alábbiakban a zsákot, valamint annak területét is (a feladatban ez egységnyi) M betűvel jelöljük majd, a foltokat és azok területeit pedig M_1, M_2, M_3, M_4, M_5-tel. Szükségünk lesz például az M_1 és M_2 foltok közös részére; ezt M_{12} jelöli majd, és hasonlóan, az M_1, M_2, M_3 foltok közös részét M_{123} stb. Reméljük, a szövegből világosan kiderül majd, mikor beszélünk egy alakzatról és mikor annak területéről.

Lássunk hozzá a feladat megoldásához!

Abból, hogy a foltok területének összege, $M_1+M_2+M_3+M_4+M_5\geq\frac{5}{2}$, tehát nagyobb a zsák területénél (hiszen $M=1$), következik, hogy a foltok között vannak átfedések. A feladatban alsó korlátot kell keresnünk a foltok páronkénti közös részének a területére, meg kell becsülnünk az M_{12}, M_{13}, $\ldots$, M_{45} számok legnagyobbikát.

Először megmutatjuk, hogy

$$M-(M_1+M_2+M_3+M_4+M_5)+(M_{12}+M_{13}+M_{14}+\ldots+M_{45})\geq 0. \tag{1}$$

Ha a foltok között nem volnának átfedések, akkor már az $M-(M_1+M_2+M_3+M_4+M_5)$ különbség sem lenne negatív; ez a különbség egyenlő volna a zsák azon részének a területével, ahol egyáltalán nincsen folt. Mivel a foltok metszik egymást, az $M_1+M_2+M_3+M_4+M_5$ összeg lényegesen nagyobb, mint a zsák foltokkal fedett részének S területe; itt természetesen $S\leq M=1$. Valóban, az $M_1+M_2+M_3+M_4+M_5$ összegben az M_{12} részt kétszer is számoltuk, mivel az M_1 és az M_2 tagok is tartalmazzák; ugyanígy, az M_{123} részt háromszor, és így tovább.

Most bebizonyítjuk, hogy

$$S\geq\sum M_i-\sum M_{ij}, \tag{1'}$$

ahol a képletben $\sum M_i=M_1+M_2+M_3+M_4+M_5$; $\sum M_{ij}=M_{12}+M_{13}+\ldots+M_{45}$,

[1] A feladat kitűzője *E. B. Denkin,* sorszáma M. 185. A rövid megoldás megtalálható a *Kvant* 1973. évi 10. számában.

és a továbbiakban is eszerint használjuk a $\sum$ jelölést. Mivel $M \geq S$, innen már következik az (1) egyenlőtlenség, annak alapján pedig már megbecsülhetjük a legalább kétszer lefedett területek M_{12}, M_{13}, $\ldots$ nagyságát. Valóban, (1)-ből következik, hogy

$$M_{12}+M_{13}+\ldots+M_{45}) \geq (M_1+M_2+M_3+M_4+M_5)-M \geq \frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}.$$

A foltok páronkénti átfedéseinek száma $\binom{5}{2}=10$, azért az M_{12}, M_{13}, $\ldots$, M_{45} számok legnagyobbika nem kisebb, mint $\frac{3}{2}:10=\frac{3}{20}$. Becslésünk sajnos gyengébbnek bizonyult a szükségesnél, mivel $\frac{1}{5}>\frac{3}{20}$.

1. feladat. Az egységnyi területű zsákon kilenc, egyenként $\frac{1}{5}$ területű folt található. Mutassuk meg, hogy van közöttük kettő, amelyek közös részének területe legalább $\frac{1}{45}$.

A szitaformula

A fentiekben a zsák foltozott részének S területére kapott $(1')$ becslés nem bizonyult eléggé élesnek. Próbálkozzunk finomabb módszerrel: hagyjuk el $(1')$ jobb oldaláról az olyan, M_{ij} alakú részek területeit, amelyeket egyszerre legalább három folt fed le. Eddig ugyanis M_{123} például megtalálható a pozitív előjellel szereplő M_1, M_2, M_3 és a negatív előjellel szereplő M_{12}, M_{13}, M_{23} tagokban is, ezért az M_{123} terület egyáltalán nem szerepel $(1')$ jobb oldalán. Így S pontosabb becslését adja a $\sum M_i-\sum M_{ij}+{}$ $+\sum M_{ijk}$ összeg. Természetesen még ez sem pontos, itt ugyanis kétszer számoltuk a zsák azon részét, amit egyszerre legalább négy folt fed le; az M_{1234} mennyiséget például a páratlanszor fedő M_1, M_2, M_3, M_4, M_{123}, M_{124}, M_{134}, M_{234} tagokban összesen 8-szor pozitív, a párosszor fedő M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24} és M_{34} tagokban pedig összesen 6-szor negatív előjellel vettük figyelembe.

A korábbinál jobban közelíti tehát S értékét a

$$\sum M_i-\sum M_{ij}+\sum M_{ijk}-\sum M_{ijkl}$$

összeg; ez már „majdnem egyenlő” S pontos értékével. Itt már a zsák minden olyan részét figyelembe vettük, amelyet legfeljebb négy folt fed le. De a zsák „legkényesebb”, ötszörösen foltozott része kiesik a fenti összegből, mivel egyszerre van ott az M_1, M_2, M_3, M_4, M_5; M_{123}, M_{124}, $\ldots$, M_{345} tagokban (ez 15 pozitív előjelű tag) és az M_{12}, M_{13}, $\ldots$, M_{45}, M_{1234}, M_{1235}, M_{1245}, M_{2345} tagokban is (ez 15 negatív előjelű tag). Tehát S pontos értékét úgy kapjuk, ha az utolsó összeghez hozzáadjuk az M_{12345} tagot. Ekkor

$$S=\sum M_i-\sum M_{ij}+\sum M_{ijk}-\sum M_{ijkl}+M_{12345} \tag{2}$$

(itt i, j, k, $l=1$, 2, 3, 4 vagy 5).

Legyen σ a zsák ép részének a területe, amelyet egyetlen folt sem fed le. Mivel $\sigma=M-S$ és természetesen $\sigma\ge 0$, így

$$\sigma=M-\sum M_i+\sum M_{ij}-\sum M_{ijk}+\sum M_{ijkl}-M_{12345}\ge 0. \tag{3}$$

A (3) összefüggést az M zsák többszörösen foltozott részeinek szakaszos eltávolításával és azoknak a részeknek a visszaillesztésével kaptuk, amelyeket többször is eltávolítottunk; az összefüggést magyarul *szitaformulának* nevezik. A módszert és a formulát – amelynek más alakja is ismeretes – sok kombinatorikai feladatban használják. Érdemes átgondolni és felírni a képletet akkor is, ha a foltok száma n. Talán bonyolultnak tűnik, de csak a fenti egyszerű elv matematikai formája.

$$\begin{aligned}\sigma=M-\sum M_{i_1}+\sum M_{i_1i_2}-\sum M_{i_1i_2i_3}+\sum M_{i_1i_2i_3i_4}-\dots\\ \dots+(-1)^{n-1}\sum M_{i_1i_2i_3\dots i_{n-1}}+(-1)^n M_{123\dots n}\ge 0\end{aligned} \tag{4}$$

(itt az i_1, i_2, $\dots$, $i_{n=1}$ indexek az 1, 2, 3, $\dots$, n értékek bármelyikét fölvehetik, de az $M_{i_1i_2\dots i_k}$ rész i_1, i_2, $\dots$, i_n indexei feltétlenül különbözők).

Feladatok

2. Írjuk fel és bizonyítsuk be a szitaformulát, ha $n=6$.

3*. Bizonyítsuk be a (4) formulát.

4. Egy táborban 220 gyerek nyaral. Hatféle sportra van lehetőség, ezek: atlétika (a), röplabda (r), kosárlabda (k), labdarúgás (l), birkózás (b) és sakk (s). Az egyes sportágakban résztvevő gyerekek száma rendre: $(a)-30$, $(r)-26$, $(k)-32$, $(l)-31$, $(b)-28$, $(s)-36$. Az említettek közül 53-an többféle sporttal is megpróbálkoztak: közülük 24-en három vagy annál is több, 9-en legalább négy és a 3 leglelkesebb legalább ötféle sportot is kipróbált. Az utóbb említett 3 között van 1 „csodabogár”, aki mind a hat sportággal szerencsét próbált. Hány lusta gyerek nyaralt ebben a táborban, aki tehát egyetlen sportággal sem próbálkozott?

A kiinduló feladat megoldása

Láttuk, hogy az $M-\sum M_i+\sum M_{ij}\ge 0$ egyenlőtlenség nem adja meg kellő pontossággal a minket érdeklő max M_{ij} mennyiség értékét (így jelöljük az M_{ij} mennyiségek legnagyobbikát). Szükségképpen a teljes becslést használjuk majd, amely tehát a következő:

$$M-\sum M_i+\sum M_{ij}-\sum M_{ijk}+\sum M_{ijkl}-\sum M_{12345}\ge 0 \tag{3'}$$

A másik ötlet, hogy a (4) formula, mint általános összefüggés, valamennyi szóbajövő halmazra alkalmazható, így például ha M_i-re írjuk fel, akkor azt kapjuk, hogy

$$\sigma_1=M_1-\sum M_{1i}+\sum M_{1ij}-\sum M_{1ijk}+M_{12345}\ge 0,$$

ahol σ_1 az M_1 foltnak az a része, amelyet más folt nem fed le. Az i, j, k indexek a 2, 3, 4, 5 számok összes lehetséges értékét felveszik. Hasonló egyenlőtlenségeket írhatunk fel az M_2, M_3, M_4, M_5 foltokra is:

$$\sigma_2 = M_2 - \sum M_{2i} + \sum M_{2ij} - \sum M_{2ijk} + M_{12345} \geq 0,$$
$$\vdots$$
$$\sigma_5 = M_5 - \sum M_{5i} + \sum M_{5ij} - \sum M_{5ijk} + M_{12345} \geq 0.$$

Ha összeadjuk az így kapott öt egyenlőtlenséget, akkor a

$$\sum M_i - 2\sum M_{ij} + 3\sum M_{ijk} - 4\sum M_{ijkl} + 5M_{12345} \geq 0. \tag{5}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. (Ellenőrizzük az együtthatókat!)

Próbáljuk most elkészíteni a ($3'$) és az (5) egyenlőtlenségek olyan kombinációját, amelyben nem szerepelnek a $\sum M_{ijk}$ típusú összegek, tehát a zavaróan „nagy”, hármasan fedett részek. Látható, hogy ehhez (5)-öt $\frac{1}{3}$-dal kell szorozni, és ezt kell hozzáadni ($3'$)-höz. Így a következő egyenlőtlenséget nyerjük:

$$M - \frac{2}{3}\sum M_i + \frac{1}{3}\sum M_{ij} - \frac{1}{3}\sum M_{ijkl} + \frac{2}{3}M_{12345} \geq 0. \tag{6}$$

Megmutatjuk, hogy ebből

$$M - \frac{2}{3}\sum M_i + \frac{1}{3}\sum M_{ij} \geq 0 \tag{7}$$

következik.

Valóban, hiszen M_{12345} része az M_{ijkl} halmazok mindegyikének, azért $\sum M_{ijkl} \geq 5M_{12345}$, és így még inkább $-\frac{1}{3}\sum M_{ijkl} + \frac{2}{3}M_{12345} \leq 0$. A (7) egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk, hogy

$$\sum M_{ij} \geq 2\sum M_i - 3M \geq 2 \cdot \left(5 \cdot \frac{1}{2}\right) - 3 = 2.$$

Mivel az M_{ij} „dupla lefedettségek” száma 10, ezért közülük legalább egynek az értéke nem kisebb, mint $2:10 = \frac{1}{5}$, és éppen ezt kellett bizonyítani! A felhasznált egyenlőtlenségek láncolatát végignézve látható, hogy a fenti becslésben lehetséges egyenlőség, mégpedig pontosan akkor, ha $S = M$, vagyis ha a foltok a zsák teljes területét lefedik, továbbá, ha minden $M_i = \frac{1}{2}$, minden $M_{ij} = \frac{1}{5}$, és minden $M_{ijkl} = 0$. Eredményünk éles:

12	13	14	15	23
24	25	34	35	45
123	124	125	134	135
145	234	235	245	345

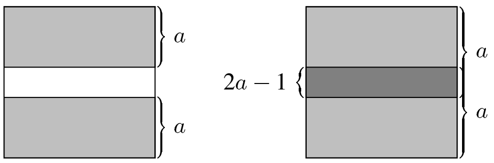
1. ábra

Az *1. ábrán* látható elrendezésben az M területű (nagy) téglalap játssza a zsák szerepét, az egyes négyzeteken szereplő számok pedig azt mutatják, hogy hányas számú folt vesz részt a szóban forgó terület lefedésében. Talán zavaró lehet, hogy a „foltok” most nem összefüggő darabok, de a feladatban csak a területük fontos, alakjuk és szerkezetük nem.

Fogalmazzuk most meg az általánosabb feladatot, amelynek a most megoldott csak speciális esete.

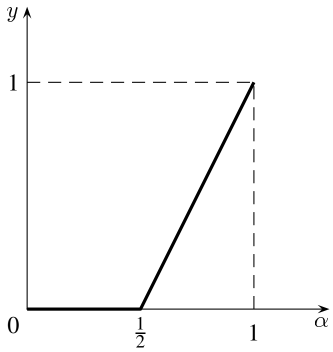
A kétszeresen foltozott terület általában

Az egységnyi területű M zsákon n folt található, ezek M_1, M_2, $\ldots$, M_n; egyikük területe sem kisebb egy adott pozitív α számnál. Becsüljük meg az M_{ij} számok legnagyobbikának területét. Más szavakkal: minden n-szeresen foltozott zsákon megkeressük a kétszeresen fedett M_{ij} területek legnagyobbikát, és azt kérdezzük, hogy mennyi az így talált maximumok legkisebb értéke. Feltételezzük, hogy ez a minimum létezik, bár végtelen számhalmazról lévén szó ez egyáltalán nem nyilvánvaló. Ilyen jellegű „minimax” feladatok megoldása, amikor maximumként értelmezett számok minimumát keressük, nagyon fontos a modern matematikában. A keresett $\min\max M_{ij}$ természetesen függ az adott α számtól, annak függvénye; mivel a foltok számától, az n-től is függ, ezért jelöljük $f_n(\alpha)$-val. (Itt természetesen $0 \le \alpha \le 1$ és $n \ge 2$). A kiinduló „zsák–folt” feladatot megoldva az $f_5\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{5}$ egyenlőséget bizonyítottuk be. A feladat általánosításában az $f_n(\alpha)$ függvényt kellene megadni α és n segítségével.



a) b)

2. ábra



3. ábra

Tapasztalatok gyűjtése érdekében vizsgáljuk először az egyszerűnek tűnő $n = 2$ esetet. Legyen tehát az egységnyi területű M zsákon két folt (M_1 és M_2) úgy, hogy mindkettejük területe legalább α; feladatunk, hogy megtaláljuk az M_1 és M_2 foltok M_{12} közös részének a legkisebb $f_2(\alpha)$ területét. Világos, hogy ha $\alpha \le \dfrac{1}{2}$, akkor lehetséges, hogy egyáltalán nincsen átfedés (*2.a ábra*); ha pedig $\alpha \geq \frac{1}{2}$, akkor kétszeresen fedett M_{12} terület legkisebb értéke $2\alpha - 1$ (*2.b ábra*). Így

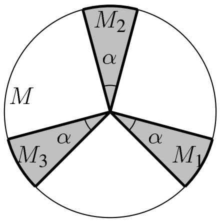
$$f_2(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \\ 2\alpha - 1, & \text{ha } \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1, \end{cases} \tag{8}$$

a függvény grafikonja látható a *3. ábrán*.

Feladat

5. Jellemezzük az $y = f_3(\alpha)$ függvényt.

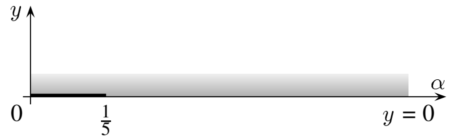
Útmutatás: vizsgáljuk az M körlap olyan egybevágó M_1, M_2, M_3 körcikkeit, amelyek szimmetriatengelyei páronként 120°-os szöget zárnak be, középponti szögük mérőszáma pedig α, pontosabban a teljesszög α-szorosa. Kezdjük kicsi értékekkel (*4. ábra*), majd fokozatosan növeljük α értékét egészen 1-ig.



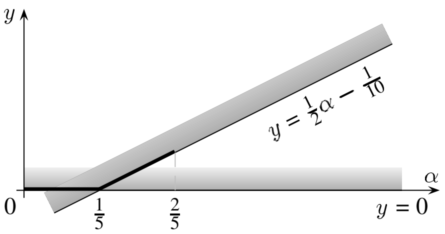
4. ábra

Öt folt

Térjünk most vissza az eredeti feladathoz, keressük, hogy legalább mekkora a kétszeresen lefedett terület, amennyiben az M zsákon található M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 foltok bármelyikének területe legalább α. Világos, hogy $f_5(\alpha) \geq 0$, vagyis az $y = f_5(\alpha)$ függvény grafikonja nem helyezkedhet el az x tengely alatt (*5. ábra*). A függvény értéke lehet nulla, ha a foltok elrendezhetők úgy, hogy mindegyik M_{ij} értéke nulla. Ez pontosan akkor lehetséges, ha a foltok területének összege, amely a feltételek szerint legalább 5α, nem nagyobb 1-nél (mivel a zsák területe egységnyi): $f_5(\alpha) = 0$, ha $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{5}$. Továbbá



5. ábra

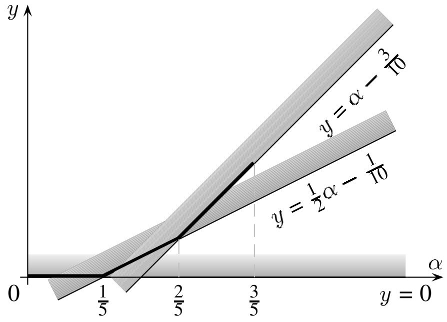


6. ábra

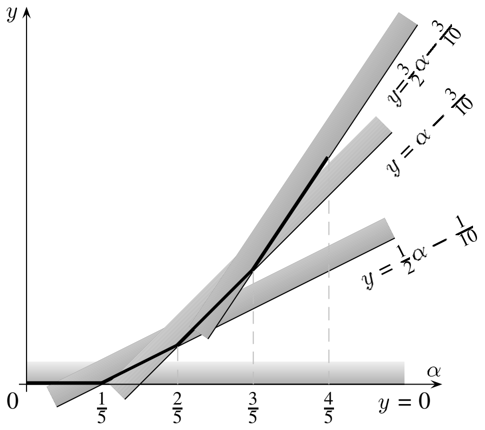
az (1) egyenlőtlenségből következik, hogy $\sum M_{ij} \geq \sum M_i - M \geq 5\alpha - 1$. Figyelembe véve, hogy a foltok „páronkénti (dupla) átfedéseinek" száma egyenlő 10-zel, kapjuk, hogy

$$f_5(\alpha) \geq \frac{1}{10}(5\alpha - 1) = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10}. \tag{9}$$

A (9) egyenlőtlenség minden szóba jövő α-ra igaz; így az $y = f_5(\alpha)$ függvény grafikonja nem helyezkedhet el az $y = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10}$ egyenes alatt (*6. ábra*). Ahhoz, hogy a (9)-ben éppen egyenlőség álljon, szükséges, hogy $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10}$ nagyobb legyen nullánál; ezen kívül még az is, hogy az (1) egyenlőtlenségben is az egyenlőség teljesüljön – tehát mindegyik M_{ijk} értéke nulla kell, hogy legyen, és minden M_{ij} értéke ugyanannyi, $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10}$ kell legyen. De ha az összes $M_{ijk} = 0$, akkor mindegyik α területű folton, például az M_1-en, az egyenként $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10}$ területű M_{12}, M_{13}, M_{14} és M_{15} foltoknak már átfedések nélkül kell elhelyezkedniük. Ez csak akkor lehetséges, ha $4\left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10}\right) \leq \alpha$, azaz $\alpha \leq \frac{2}{5}$. Sikerült tehát az $f_5(\alpha)$ függvényt kiterjesztenünk: $f_5(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10}$, ha $\frac{1}{5} \leq \alpha \leq \frac{2}{5}$.



7. ábra



8. ábra

A továbbiakban ismét a (7) egyenlőtlenséget használjuk. Ebből az egyenlőtlenségből következik, hogy $\sum M_{ij} \geq 2\sum M_i - 3M \geq 2\,(5\alpha) - 3 = 10\alpha - 3$, tehát

$$f_5(\alpha) \geq \frac{1}{10}(10\alpha - 3) = \alpha - \frac{3}{10}. \tag{10}$$

A (10) egyenlőtlenség minden α esetén teljesül, vagyis az $f_5(\alpha)$ függvény grafikonja teljes egészében az $y = \alpha - \frac{3}{10}$ egyenes felett helyezkedik el (*7. ábra*); megjegyzendő, hogy (10)-ben csak akkor lehetséges egyenlőség, ha $\frac{2}{5} \leq \alpha \leq \frac{3}{5}$ (lásd a 6.a feladatot). A továbbiakban a szitaformulát nem csak a foltok M_i területére alkalmazzuk majd, mint a megoldásban tettük, hanem a kétszeresen és a háromszorosan fedett M_{ij}, M_{ijk} területekre is. Így, ha például az említett képletet az M_{12} területre használjuk, amelyen az

M_{123}, M_{124} és M_{125} foltok helyezkednek el, a következőt kapjuk:

$$\sigma_{12} = M_{12} - \sum M_{12i} + \sum M_{12ij} - M_{12345} \geq 0.$$

Összesen tíz ilyen egyenlőtlenség írható fel; ezeket összeadva kapjuk, hogy

$$\sum M_{ij} - 3\sum M_{ijk} + 6\sum M_{ijkl} - 10M_{12345} \geq 0. \tag{11}$$

Hasonlóan, az M_{123}-ra (ezen az M_{1234} és M_{1235} foltok találhatók) felírt szitaformula azt adja, hogy

$$\sigma_{123} = M_{123} - \sum M_{123i} + M_{12345} \geq 0.$$

Mivel a foltok M_{ijk} hármas átfedéseinek a száma 10, azért ha összeadjuk a megfelelő tíz egyenlőtlenséget, akkor kapjuk, hogy:

$$\sum M_{ijk} - 4\sum M_{ijkl} + 10M_{12345} \geq 0. \tag{12}$$

Mostanra rendelkezésünkre állnak a ($3'$), (5), (11) és (12) egyenlőtlenségek, amelyek kapcsolatot teremtenek az M, $\sum M_i$, $\sum M_{ij}$, $\sum M_{ijk}$, $\sum M_{ijkl}$ és M_{12345} mennyiségek között. Most tekintsük az (5) egyenlőtlenség $\frac{1}{2}$-szeresének, a (11) $\frac{1}{6}$-szorosának és a ($3'$) egyenlőtlenségnek az összegét:

$$M - \frac{1}{2}\sum M_i + \frac{1}{6}\sum M_{ij} - \frac{1}{6}M_{12345} \geq 0 \tag{13}$$

Az együtthatók megválasztása miatt ez már nem tartalmazza a háromszoros és a négyszeres $\sum M_{ijk}$, valamint a $\sum M_{ijkl}$ tagokat. Elhagyva az ötszörösen fedett negatív tagot innen következik, hogy

$$M - \frac{1}{2}\sum M_i + \frac{1}{6}\sum M_{ij} \geq 0$$

és ezért

$$\sum M_{ij} \geq 3\sum M_i - 6M \geq 3\,(5\alpha) - 6,$$

tehát

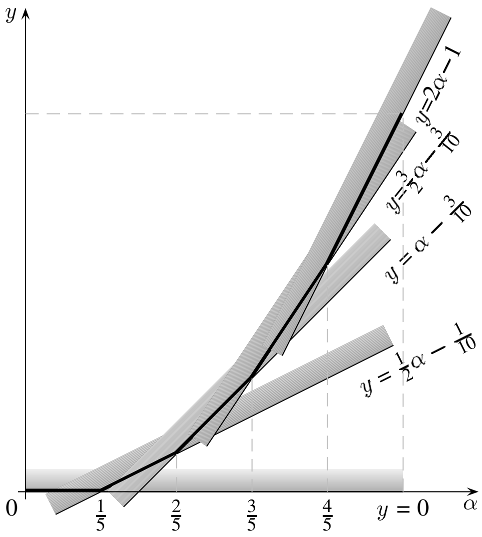
$$f_5(\alpha) \geq \frac{1}{10}\,(15\alpha - 6) = \frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{5}.$$

Eszerint az $f_5(\alpha)$ függvény grafikonja nem helyezkedhet el az $y = \frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{5}$ egyenes alatt (*8. ábra*). Készítsük most el a ($3'$), (5), (11), (12) egyenlőtlenségek

$$(3') + \frac{3}{5}\cdot(5) + \frac{3}{10}\cdot(11) + \frac{1}{10}\cdot(12)$$

lineáris kombinációját; kapjuk, hogy

$$M-\frac{2}{5}\sum M_i+\frac{1}{10}\sum M_{ij}\ge 0. \tag{15}$$



9. ábra

Itt már csak az M, $\sum M_i$ és $\sum M_{ij}$ tagok szerepelnek. A (15)-ből következik, hogy

$$\sum M_{ij}\ge 4\sum M_i-10M\ge$$
$$\ge 4(5\alpha)-10=20\alpha-10,$$

tehát

$$f_5(\alpha)\ge\frac{1}{10}(20\alpha-10)=2\alpha-1.$$

Az $f_5(\alpha)$ függvény grafikonja tehát nem haladhat az $y=2\alpha-1$ egyenes alatt, végeredményben tehát nem helyezkedhet el az *9. ábrán* látható töröttvonal alatt; könnyen belátható, hogy a függvény grafikonja éppen azonos ezzel a töröttvonallal.

Feladatok

6. Bizonyítsuk be, hogy

a) $f_5(\alpha)=\alpha-\frac{3}{10}$, ha $\frac{2}{5}\le\alpha\le\frac{3}{5}$; b) $f_5(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha-\frac{3}{5}$, ha $\frac{3}{5}\le\alpha\le\frac{4}{5}$;

c) $f_5(\alpha)=2\alpha-1$, ha $\frac{4}{5}\le\alpha\le 1$.

7. Jellemezzük az a) $f_4(\alpha)$ b) $f_6(\alpha)$ függvényt.

A feladat általánosítása

Ezt az esetet az $n=5$ esethez hasonlóan tárgyaljuk. Világos, hogy n folt esetén az M_1, M_2, $\ldots$, M_n foltok (ezek bármelyikének területe legalább α) akkor nem fedik egymást, ha az összterületük $\sum M_i\ge n\alpha$, és ez az összterület nem nagyobb $M=1$-nél (hiszen a zsák területe egységnyi). Ezért $f_n(\alpha)=0$, ha $0\le\alpha\le\frac{1}{n}$. A továbbiakban ismét a (4) egyenlőtlenségből (a szitaformulából) indulunk ki. Ebből most

$$M-\sum M_i+M_{ij}\ge 0 \tag{16}$$

következik. (Miért?) Így

$$\sum M_{ij}\ge\sum M_i-M\ge n\alpha-1.$$

Mivel az M_{ij} átfedések száma általában $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$, azért

$$f_n(\alpha) \geq \frac{1}{n(n-1)/2} \cdot (n\alpha - 1) = \frac{2}{n-1}\alpha - \frac{2}{n(n-1)}. \tag{17}$$

A (17) egyenlőtlenség csakis akkor válik egyenlőséggé, ha egyenlőséggé alakul a (16), vagyis ha (4)-ben az összes olyan tag, amelyik a $\sum M_{ij}$ tag után következik, nulla. Szükséges ezen kívül még az is, hogy az egyenként α területű M_i foltok teljesen lefedjék az M zsákot. De ez esetben az M_1 kétszeres lefedései, tehát az M_{12}, M_{13}, ..., M_{1n} (ezekből $n-1$ db van) az M_1 foltot további átfedések nélkül fedik le mivel az összes $M_{ijk}=0$. Miután ekkor $M_{1i} = \dfrac{2}{n-1}\alpha - \dfrac{2}{n\,(n-1)}$, azért

$$(n-1)\left[\frac{2}{n-1}\alpha - \frac{2}{n(n-1)}\right] \leq \alpha,$$

tehát $\alpha \leq \dfrac{2}{n}$ (és természetesen $\alpha \leq \dfrac{1}{n}$).

A továbbiakban a már megszokott módon az M_i foltokra alkalmazzuk a szitaformulát, majd azok M_{ij}, M_{ijk} stb. átfedéseire. Alkalmazzuk ezt a képletet, például az M_1 foltra, amelyet az M_{12}, M_{13}, ..., M_{1n} „másodrendű foltok" fednek:

$$\begin{gathered} M_1 - \sum M_{1i_1} + \sum M_{1i_1i_2} - \sum M_{1i_1i_2i_3} + \ldots \\ \ldots + (-1)^{n-2} \sum M_{1i_1i_2\ldots i_{n-2}} + (-1)^{n-1} M_{123\ldots n} \geq 0 \end{gathered}$$

(ahol $i_1, i_2, \ldots, i_{n-2} = 2, 3, \ldots, n$). Ha összeadjuk az M_1, M_2, ..., M_n foltokra felírt n db egyenlőtlenséget, akkor a következőt kapjuk:

$$\begin{gathered} \sum M_i - 2\sum M_{i_1i_2} + 3\sum M_{i_1i_2i_3} - \ldots \\ \ldots + (-1)^{n-2} \cdot (n-1) \sum M_{i_1i_2\ldots i_{n-1}} + (-1)^{n-1} \cdot nM_{123\ldots n} \geq 0 \end{gathered} \tag{18}$$

(hasonlítsuk össze az (5) egyenlőtlenséggel).

A (4)-ból és a (18)-ból a szokott módon iktathatók ki a $\sum M_{i_1i_2i_3}$ tagok – ehhez (18) $\dfrac{1}{3}$-szorosát kell hozzáadni a (4)-hez:

$$M - \frac{2}{3}\sum M_{i_1} + \frac{1}{3}\sum M_{i_1i_2} - \frac{1}{3}\sum M_{i_1i_2i_3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{n-3}{3} \cdot M_{123\ldots n} \geq 0. \tag{19}$$

A (19)-ből következik

$$M - \frac{2}{3}\sum M_{i_1} + \frac{1}{3}\sum M_{i_1i_2} \geq 0, \tag{19a}$$

és így

$$\sum M_{i_1i_2} \geq 2\sum M_{i_1} - 3M \geq 2(n\alpha) - 3 = 2n\alpha - 3.$$

Tehát

$$f_n(\alpha) \ge \frac{1}{\frac{n(n-1)}{2}}(2n\alpha - 3) = \frac{4}{n-1}\alpha - \frac{6}{n(n-1)}, \tag{20}$$

ahol egyenlőség csakis $\frac{2}{n} \le \alpha \le \frac{3}{n}$ esetén lehetséges (lásd a 8. feladatot). A fentiekhez hasonlóan folytatva a következő általános képlethez jutunk:

$$f_n(\alpha) = 2\frac{r-1}{n-1}\alpha - \frac{r\,(r-1)}{n\,(n-1)}, \tag{21}$$

ha $\frac{r-1}{n} \le \alpha \le \frac{r}{n}$, ahol $r = 1, 2, 3\ \ldots, n$.

Feladatok

8. Mutassuk meg, hogy (20)-ban csak akkor állhat egyenlőség, ha $\frac{2}{n} \le \alpha \le \frac{3}{n}$.

9*. Mutassuk meg, hogy $f_n(\alpha) = \frac{6}{n-1} - \frac{12}{n\,(n-1)}$, ha $\frac{3}{n} \le \alpha \le \frac{4}{n}$.

10*. Bizonyítsuk be a (21) összefüggést.

I. M. Jaglom
fordította: *Paulin Elemér*

Ennek a cikknek a nyomán tűztük ki a **B. 3378.** *feladatot, amelynek megoldása a 30. oldalon olvasható.* *A szerk.*

Feladatok felvételi előkészítő szakkörre II.

Molnár József vezető szakfelügyelő emlékére

1. Igazolja, hogy az (a_n) $(n \in \mathbf{N}^+)$ sorozat pontosan akkor (akkor és csak akkor) számtani sorozat, ha

a) $a_n = An + B$, $A, B \in \mathbf{R}$; illetve

b) a sorozat első n tagjának összege $S_n = Kn^2 + Ln$, $K, L \in \mathbf{R}$, $K \neq 0$.

2. Az $ABCD$ konvex négyszögben $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $BD = f$.

Igazolja, hogy a négyszög pontosan akkor (akkor és csak akkor) trapéz ($AB \parallel CD$), ha

$$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac.$$

3. Az ABC háromszögben $BAC\sphericalangle = \alpha$, $0° < \alpha < 60°$.

A háromszög oldalaira kifelé állítsuk az ABC_1, BCA_1, ACB_1 egyenlő szárú háromszögeket, amelyek alapja a háromszög megfelelő oldala, és az alapon fekvő szögek α-val egyenlők.

Igazolja, hogy az ABC és az A_1BC háromszögek területének összege egyenlő az ABC_1 és az AB_1C háromszögek területének összegével!

4. Igazolja, hogy

$$2+7+14+\ldots+(n^2+2n-1)=\frac{n}{6}(2n^2+9n+1).$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k-1)=\frac{n}{6}(2n^2+9n+1)\right)$$

Rábai Imre

Megoldásvázlatok, eredmények a II. mérőlap (2000/9. sz.) feladataihoz

1. Ha a munkások számának növekedése $2p\%$, akkor a termelés növekedése $3p\%$. Így

$$\left(1+\frac{2p}{100}\right)\left(1+\frac{3p}{100}\right)=1{,}265.$$

Legyen $\frac{p}{100}=x$. Ekkor $6x^2+5x-0{,}265=0$, $x_1=0{,}05$, $x_2=-\frac{10{,}6}{12}$. Csak x_1 ad megoldást, ekkor $\frac{5}{100}=\frac{p}{100}$, $p=5$. A munkások száma 10%-kal, az egy főre jutó termelés pedig 15%-kal nőtt.

2. Legyen $B(b;0)$. Ekkor $AB^2=6^2+b^2$ és $6^2+b^2=10^2$, ahonnan $b=8$ vagy $b=-8$, $B_1(8;0)$, $B_2(-8;0)$.

A és S ismeretében a B_1C_1 (illetve B_2C_2) felezőpontja $A'(6;6)$, így $C_1(4;12)$, $C_2(20;12)$. Az AB_1C_1 háromszög területét megkapjuk, ha az $OBC\overline{C}$ trapéz területéből ($\overline{C}$ a C_1 merőleges vetülete az y-tengelyen, $\overline{C}(0;12)$, O az origó) kivonjuk az OB_1A és az $AC_1\overline{C}$ derékszögű háromszögek területének összegét.

$$T_1=\frac{8+4}{2}\cdot 12-\frac{8\cdot 6}{2}-\frac{4\cdot 6}{2}=36 \text{ területegység.}$$

Az AB_2C_2 háromszög területét megkapjuk, ha a B_2OA háromszög területéhez hozzáadjuk az ODC_2A trapéz területét (D a C_2 pont vetülete az x tengelyen, $D(20;0)$), és az összegből kivonjuk a B_2C_2D háromszög területét.

$$T_2=\frac{8\cdot 6}{2}+\frac{6+12}{2}\cdot 20-\frac{28\cdot 12}{2}=36 \text{ területegység.}$$

3. *a)* $x\neq 2$ és $x\neq -2$. $\frac{x^4-16}{x^2-4}=x^2+4>0$ minden megengedett x-re, tehát $x\in\mathbf{R}\setminus\{-2;2\}$.

b) Ha $x>2$, akkor $x+2-(x-2)-x>0$, $x<4$, tehát $2<x<4$;
ha $-2\le x\le 2$, akkor $x+2+x-2-x>0$, $x>0$, tehát $0<x\le 2$;
ha $x<-2$, akkor $-x-2+x-2-x>0$, $x<-4$, tehát $x<-4$.

A kifejezés akkor pozitív, ha $x < -4$ vagy $0 < x < 4$. (A kifejezés grafikonjának elkészítésével grafikusan is megoldható a feladat.)

c) $\sin 2x > 0$ és $\log_2 \sin 2x > -1$, tehát $\sin 2x > \frac{1}{2}$. (Az $x \mapsto \log_2 x$ függvény szigorúan monoton növekedő!)

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \qquad \frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + k\pi, \qquad x \in \mathbf{Z}.$$

4. *a)* Az (a_n) sorozat első $(n-1)$ tagjának összege $S_{n-1} = 2(n-1)^2 + 3(n-1)$. Mivel $a_n = S_n - S_{n-1}$, azért

$$a_n = 2n^2 + 3n - \Big(2(n-1)^2 + 3(n-1)\Big) = 4n + 1.$$

Így $a_{n-1} = 4(n-1) + 1$ és $a_n - a_{n-1} = 4$, azaz (a_n) valóban számtani sorozat. A (b_n) sorozat is számtani, hiszen

$$b_n - b_{n-1} = 4n - 1 - (4(n-1) - 1) = 4.$$

b) A (b_n) sorozat első tagja $b_1 = 3$, így első n tagjának összege

$$S'_n = \frac{3 + 4n - 1}{2} \cdot n, \qquad S'_n = 2n^2 + n.$$

c) $c_n = (4n+1) + (4n-1) = 8n$; a c_n sorozat első n tagjának összege S''_n.

$$S''_n = 8(1 + 2 + \ldots + n) = 8 \cdot \frac{n(n+1)}{2}, \qquad S''_n = 4n^2 + 4n.$$

5. Az egyenletnek nincs értelme, ha $\sin 2x = -1$, így $2x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Mivel $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$ és $1 + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = (\cos x + \sin x)^2$, azért a törtet egyszerűsíthetjük $(\cos x + \sin x)$-szel; szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $(\cos x + \sin x)$-szel, majd nullára rendezés után alakítsunk szorzattá.

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - (\cos x - \sin x) = 0,$$

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x - 1) = 0.$$

Ha $\cos x - \sin x = 0$, akkor $\operatorname{tg} x = 1$, $x_n = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, és ezek az adott egyenlet megoldásai,

ha $\cos x + \sin x = 1$, akkor az egyenlet mindkét oldalát elosztva $\sqrt{2}$-vel a $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ egyenlethez jutunk. Tehát a további megoldások: $x_k = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ és $x_m = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$.

6. Mivel a feladat csak szöget kérdez, vehetünk az adott alakzathoz hasonlót. Így a szóban forgó oldal két része legyen $\sqrt{3}$ és 1 egység. A magasság a 75°-os szöget két részre osztja, α és $75^\circ - \alpha$; a $\sqrt{3}$-résznél legyen az α szög. Ekkor a szóban forgó magasság egyrészt $\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\alpha}$, másrészt

$\dfrac{1}{\operatorname{tg}(75^\circ-\alpha)}$, tehát $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}\operatorname{tg}(75^\circ-\alpha)$. Legyen $\operatorname{tg}\alpha=t$; $\operatorname{tg}75^\circ=2+\sqrt{3}$.

$$t=\sqrt{3}\cdot\frac{2+\sqrt{3}-t}{1+(2+\sqrt{3})t},\qquad (2+\sqrt{3})t^2+(1+\sqrt{3})t-(2\sqrt{3}+3)=0.$$

Az egyenlet diszkriminánsa $D=\ldots=(5+3\sqrt{3})^2$. Most $t>0$, ezért $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{-1-\sqrt{3}+(5+3\sqrt{3})}{2(2+\sqrt{3})}$, $\operatorname{tg}\alpha=1$, $\alpha=45^\circ$, $75^\circ-\alpha=30^\circ$. A magasság a 75°-os szöget 45° és 30°-ra osztja.

(Más módon is számolhatunk. Hogyan?)

7. Az egyenlet gyökei pontosan akkor valósak, ha a diszkriminánsa nemnegatív.

$$D=16p^2-4(2p^2+3p-1)=8(p-1)\left(p-\frac{1}{2}\right)\geq 0,\qquad \text{ha } p\leq\frac{1}{2} \text{ vagy } p\geq 1.$$

a) A két gyök akkor egyenlő, ha a diszkrimináns nulla. $D=0$, ha $p=\dfrac{1}{2}$ vagy $p=1$, az első esetben $x^2+2x+1=0$, $x_1=x_2=-1$, a második esetben $p=1$, $x^2+4x+4=0$, $x_1=x_2=-2$.

b) $D\geq 0$ és $x_1x_2=1$, $2p^2+3p-1=1$, $p=-2$ vagy $p=\dfrac{1}{2}$, $x^2-8x+1=0$, $x_1=4+\sqrt{15}$, $x_2=$ $=4-\sqrt{15}$; $x^2+2x+1=0$, $x_1=x_2=-1$.

c) $x_2=2x_1$; $x_1+x_2=-4p$, $x_1x_2=2p^2+3p-1$, innen $14p^2-27p+9=0$, $p=\dfrac{3}{2}$ vagy $p=\dfrac{3}{7}$.

Ha $p=\dfrac{3}{2}$, akkor $x^2+6x+8=0$, $x_1=-2$, $x_2=-4$,
ha $p=\dfrac{3}{7}$, akkor $x^2+\dfrac{12}{7}x+\dfrac{32}{7}=0$, $x_1=-\dfrac{4}{7}$, $x_2=-\dfrac{8}{7}$.

d) A $p\mapsto 2p^2+3p-1$ függvény minimumát keressük, ha $p\leq\dfrac{1}{2}$ vagy $p\geq 1$. $2p^2+3p-1\equiv$ $\equiv 2\left(p+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{17}{8}$.

Mivel $p=-\dfrac{2}{3}<\dfrac{1}{2}$, azért a gyökök szorzata akkor minimális, ha $p=-\dfrac{3}{4}$, és ekkor $x_1x_2=-\dfrac{17}{8}$.

8. A vágások száma legyen k, illetve n, $k\leq n$. A „jó” darabok száma $(k-1)(n-1)$, a „rossz” darabok száma $2(k+1)+2(n-1)=2k+2n$. (A rossz darabok száma más módokon is kifejezhető: $2(k+1)+2(n+1)-4$ vagy $(k+1)(n+1)-(k-1)(n-1)$.)

A feltétel szerint:

$$\begin{gathered}(k-1)(n-1)=4(k+n),\\ kn-5k-5n+1=0,\\ k(n-5)-5(n-5)=25-1,\\ (k-5)(n-5)=24.\end{gathered}$$

24 a következő egész számok szorzataként állítható elő: $1\cdot 24$; $2\cdot 12$; $3\cdot 8$; $4\cdot 6$ és $(-24)\cdot(-1)$; $(-12)\cdot(-2)$; $(-8)\cdot(-3)$; $(-6)\cdot(-4)$. $k-5\leq n-5$ miatt csak ezek az esetek fordulhatnak elő.

Mivel k és n pozitív egész szám, azért $k-5$ nem lehet sem -24, sem -12, sem -8, sem -6, mert akkor k nem lenne pozitív.

$k-5=1$, $k=6$, $n-5=24$, $n=9$, és ekkor 140 „jó”, 70 „rossz” sütemény keletkezik, az adagok száma 70; vagy

$k-5=2$, $k=7$, $n-5=12$, $n=7$, és ekkor 96 „jó”, 48 „rossz” sütemény keletkezik, az adagok száma 48; vagy

$k-5=3$, $k=8$, $n-5=8$, $n=13$, és ekkor 84 „jó”, 42 „rossz” sütemény keletkezik, az adagok száma 42; vagy

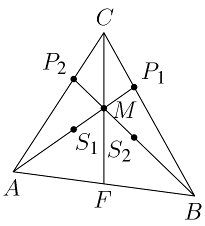
$k-5=4$, $k=9$, $n-5=6$, $n=11$, és ekkor 80 „jó”, 40 „rossz” sütemény keletkezik, az adagok száma 40.

Rábai Imre

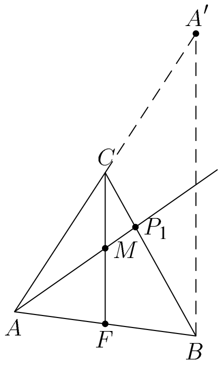
Megjegyzés a B. 3343. feladathoz

B. 3343. *Az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja F. Az AFC háromszög súlypontja S_1, a BFC háromszög súlypontja S_2. Az AS_1 egyenes a BC oldalt a P_1 pontban, a BS_2 egyenes az AC oldalt a P_2 pontban metszi. Igazoljuk, hogy az $S_1S_2P_1P_2$ négyszög paralelogramma.*

A feladatra a 2000/7. szám 414–415. oldalán két megoldást közöltünk, egyikük a Menelaos-tétel, a másik pedig vektorok felhasználásával bizonyította be az állítást. Örömmel közöljük az alábbi elemi megoldást, amit egyik olvasónk talált; egyúttal arra biztatunk mindenkit, ne tekintse lezártnak egy feladat sorsát a megoldás megjelenésével.



1. ábra



2. ábra

Ha M a CF szakasz felezőpontja, akkor S_1 és S_2 harmadolják az MA, illetve MB súlyvonalakat, így S_1S_2 párhuzamos AB-vel és annak harmada (*1. ábra*). Az állítás így következik abból, ha belátjuk, hogy ugyanez P_1P_2-re is teljesül. Ehhez elegendő, ha megmutatjuk, hogy P_1 és P_2 harmadolópontok a megfelelő oldalakon.

Ha találunk olyan háromszöget, amelyben CB súlyvonal és P_1 súlypont, akkor készen vagyunk.

Tükrözzük az A csúcsot a C-re, a tükörkép legyen A' (*2. ábra*). Az ABA' háromszög B-ből induló súlyvonala BC. C és F felezőpontok az AA', illetve az AB oldalakon, így a CF középvonal párhuzamos $A'B$-vel, az AM egyenes tehát az $A'AB$ háromszögben is súlyvonal. A két súlyvonal, AM és BC metszéspontja, P_1 tehát valóban az ABA' háromszög súlypontja, így harmadolja a BC szakaszt. A P_2 pontról ugyanígy igazolható, hogy harmadolja AC-t.

Ambrus Gabriella
ELTE TFK matematika tanszék

Matematika tréning

Balatonberény, 2001. június

A Zalai Matematikai Tehetségekért Alapítvány az elmúlt évekhez hasonlóan 2001-ben is megrendezi az Országos Matematika Tréninget. A rendezvényt két turnusban (turnusonként 240 fővel) **2001. június 16 – június 23-ig és június 24 – július 1-ig** tartjuk Balatonberényben.

A foglalkozások elsődleges célja a 7–11. évfolyamot végzett diákok matematikai tehetséggondozása. A szakmai program napi 4 matematika órán kívül 2 német vagy angol órát tartalmaz. A teljes részvételi díj 15 000 Ft, amelyhez támogatást is próbálunk szerezni.

Tisztelettel kérem az iskolák matematika munkaközösségét, hogy az érdeklődő tanulók névsorát (a kiválasztott nyelv megjelölésével) az eddigi teljesítményük alapján **ajánlási sorrendben szíveskedjenek megküldeni lehetőleg 2000. január 15-ig**. (Versenyeredmény, KöMaL helyezés előnyt jelent a kiválasztásnál.)

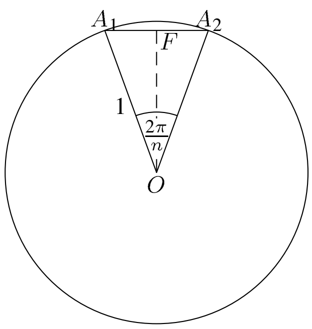
Jelentkezni, részletes információt kérni az alábbi címen lehet:
Zalai Matematikai Tehetségekért Alapítvány, 8801 Nagykanizsa, Pf. 148.
e-mail: zalamat@yahoo.com, tel.: (93)-516-153 vagy (93)-311-390/23.
A jelentkezési határidő: **2001. február 15.**

dr. Pintér Ferenc
kuratóriumi titkár

Matematika gyakorlatok megoldása

C. 584. *Egy körnek a területét vagy a kerületét tudjuk jobban (kisebb relatív hibával) közelíteni a körbe írt szabályos n-szög segítségével?*

Megoldás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a kör sugara egységnyi. Legyen a kör középpontja O, a szabályos n-szög egyik oldala A_1A_2, a hozzá tartozó középponti szög $\frac{2\pi}{n}$, az A_1A_2 szakasz felezőpontja F.



Az A_1OA_2 háromszög területe $\frac{1\cdot 1\cdot \sin\frac{2\pi}{n}}{2}$, így a sokszög területe

$$T=\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Legyen $A_1A_2=2x$, ahol $x=\sin\frac{\pi}{n}$ az OA_1F derékszögű háromszögből. A sokszög kerülete:

$$K=n2x=2n\sin\frac{\pi}{n}.$$

A pontos érték és a közelítő érték különbségének arányát a pontos értékhez relatív hibának nevezzük.

Írjuk fel a terület és a kerület relatív hibáját.

$$T_h = \frac{\pi - \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}}{\pi} = 1 - \frac{n\sin\frac{2\pi}{n}}{2\pi},$$
$$K_h = \frac{2\pi - 2n\sin\frac{\pi}{n}}{2\pi} = 1 - \frac{2n\sin\frac{\pi}{n}}{2\pi}.$$

Képezzük a terület és kerület relatív hibájának különbségét.

$$T_h - K_h = \frac{2n\sin\frac{\pi}{n}}{2\pi} - \frac{n\sin\frac{2\pi}{n}}{2\pi} = \frac{n}{\pi}\left(2\sin\frac{\pi}{n} - \sin\frac{2\pi}{n}\right).$$

Az $\frac{n}{2\pi} > 0$, és $0 < \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{2}$, mivel n legalább 3.

Felhasználjuk a $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ összefüggést, ekkor a zárójelben lévő különbség:

$$2\sin\frac{\pi}{n} - \sin\frac{2\pi}{n} = 2\sin\frac{\pi}{n} - 2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} = 2\sin\frac{\pi}{n}\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right).$$

A $0 < \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{2}$ összefüggés miatt $\sin\frac{\pi}{n} > 0$ és $\cos\frac{\pi}{n} < 1$, azaz $1 - \cos\frac{\pi}{n} > 0$.

A relatív hibák különbsége pozitív, vagyis a körbe írt szabályos sokszöggel számolva a kör kerületét kisebb relatív hibával tudjuk közelíteni, mint a területet.

Erdei Zsuzsa (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., 10. o.t.)

174 dolgozat érkezett. 5 pontos 118, 4 pontos 9, 3 pontos 3, 2 pontos 7, 1 pontos 11, 0 pontos 26.

C. 585. *Bizonyos magnókazettákban* 0,0075 mm *vastagságú szalag tekeredik a* 11 mm *átmérőjű orsókra. Az orsók középpontjainak távolsága* 42 mm*. Legfeljebb hány méter szalag lehet egy használható magnókazettában? (A tele orsóról a szalagnak akadálytalanul át kell jutnia az üres orsóra.)*

Megoldás. A szalag henger alakban tekeredik fel az orsókra, és hosszát csak az orsók sugarai befolyásolják a szalag vastagságán kívül.

A szalag hossza akkor a legnagyobb, ha a hengerek érintkeznek, vagyis alapterületeik összege a legnagyobb. Maximális terület esetén egy bizonyos helyzetben a hengerek éppen érintik egymást, a szimmetria miatt ez akkor áll fenn, amikor a két henger sugara megegyezik: ha ugyanis a két sugár nem egyenlő, akkor a nagyobb sugarúról letekert szalag a kisebb sugarún nagyobb sugárnövekedést hoz létre (egyenlő szalaghosszúság mellett), mint amennyivel csökkenne a másik orsó sugara. Így tovább tekercselve növelhetnénk a szalag hosszát.

Érintkező orsók esetén a sugár 21 mm, a körök együttes területe $2\cdot 21^2\pi$. Ahhoz, hogy megkapjuk a szalag hosszát, ebből kell kivonni az orsók területét, és osztani a szalag vastagságával.

Azaz $h=\dfrac{2\pi 21^2-2\pi 5{,}5^2}{0{,}0075}\approx 344109$ mm.

Vagyis közelítőleg 344 méter szalagot használhatunk fel.

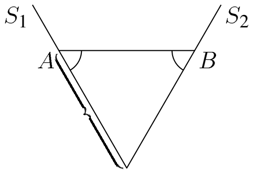
Széll Károly (Szeged, Ságvári E. Gimn., 9. o.t.)

169 dolgozat érkezett. 5 pontos 80, 4 pontos 2, 3 pontos 17, 2 pontos 21, 1 pontos 21, 0 pontos 26. Nem versenyszerű 2 dolgozat.

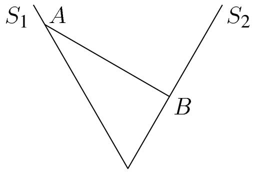
C. 589. *Egy* V *keresztmetszetű vízlevezető árokban elakadt egy egyenes bot. A bot két vége az árok két különböző oldalához ér hozzá, és a két oldal síkjával azonos nagyságú szöget zár be. Mutassuk meg, hogy ekkor a bot két vége egyenlő távolságra van az árok aljától.*

Megoldás. Jelöljük az árok két oldalának síkját S_1-gyel és S_2-vel. Ha a bot merőleges a két sík metszésvonalára, akkor a két oldal síkjával egyenlő szöget zár be, és az állítás nyilvánvalóan igaz (*1. ábra*).

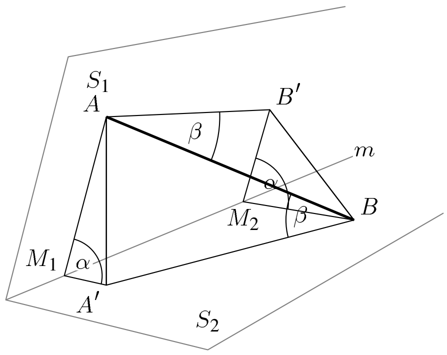
Jelöljük a bot két végpontját A-val és B-vel. A az S_1, B az S_2 síkon van, és AB most nem merőleges a két sík metszésvonalára (*2. ábra*).



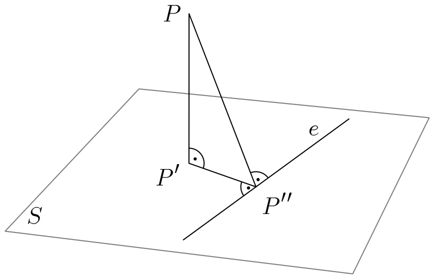
1. ábra



2. ábra



3. ábra



4. ábra

Vetítsük A-t az S_2, B-t az S_1 síkra, vetületük rendre A' és B'. Állítsunk A-ból merőlegest m-re, talppontja M_1 (*3. ábra*). Ekkor $A'M_1$ ugyancsak merőleges m-re a három egymásra merőleges egyenes tétele szerint, és $AM_1A'\sphericalangle$ éppen a két sík hajlásszöge. [A három merőleges egyenes tétele a következőket mondja ki: adott egy S sík, benne egy e egyenes és a síkon kívül egy P pont. Bocsássunk P-ből merőlegest a síkra, talppontja P' és az egyenesre, talppontja P''. Ekkor $P'P''$ ugyancsak merőleges lesz az e egyenesre (*4. ábra*).]

Hasonlóan, B vetülete S_1-re B' és a metszésvonalra M_2. A két sík hajlásszöge $BM_2B'\sphericalangle$. Az ABA' szög éppen az AB egyenesnek az S_2 síkkal bezárt szöge, β (hiszen

BA' a BA merőleges vetülete az S_2 síkra). $BAB'\sphericalangle$ pedig AB-nek az S_1 síkkal bezárt szöge, ami ismét β.

$ABA'\triangle \cong BAB'\triangle$, egy oldaluk közös, egy szögük derékszög, és $ABA'\sphericalangle = BAB'\sphericalangle = \beta$ a feltétel szerint. Így $AA' = BB'$, vagyis a bot két vége valóban egyenlő távolságra van az árok aljától.

Horváth László (Csurgó, Nagyváthy J. Középisk., 12. o.t.)

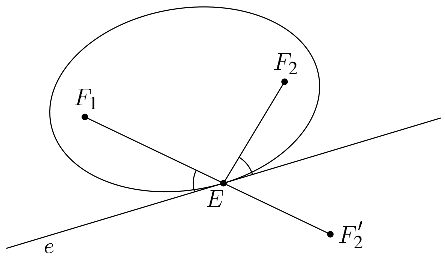
103 dolgozat érkezett. 5 pontos 30, 4 pontos 21, 3 pontos 10, 2 pontos 3, 1 pontos 33, 0 pontos 6.

Matematika feladatok megoldása

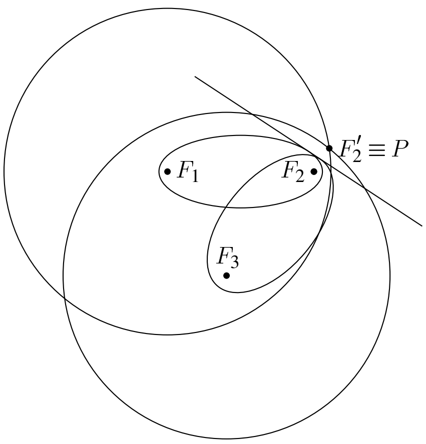
B. 3371. *Legfeljebb hány közös érintője lehet két ellipszisnek, ha közös az egyik fókuszuk?*

(*5 pont*)

Megoldás. Ismert, hogy ha egy ellipszis e érintőjén lévő E érintési pontot összekötjük az ellipszis F_1 és F_2 fókuszaival, akkor az így kapott vezérsugarak külső szögfelezője az e érintő (*1. ábra*). Ebből következik, hogy ha az F_2 fókuszt tükrözzük az ellipszis összes érintőjére, akkor a tükörképek halmaza az F_1 köré írt $2a$ sugarú kör lesz – $2a$ az ellipszis nagytengelyének hosszát jelöli –, mert ha F_2' az e-re vonatkozó tükörkép, akkor $F_2'F_1 = F_2'E + EF_1 = F_2E + F_1E = 2a$, hiszen a szögek egyenlősége miatt az F_2', E és F_1 pontok egy egyenesen vannak, a tükrözés miatt pedig $F_2'E = F_2E$. (Ezeknek az állításoknak a részletes bizonyítása megtalálható pl. *Hajós György:* Bevezetés a geometriába című könyvének 42.1 és 42.2 tételeinél.)

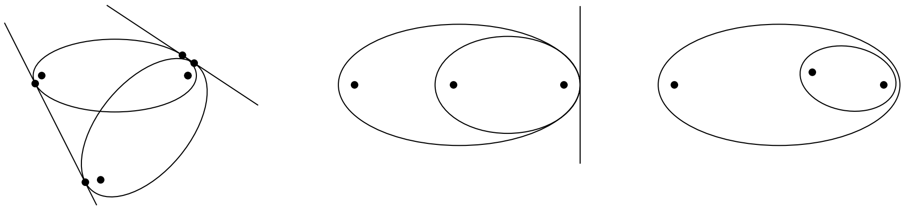


1. ábra



2. ábra

Jelöljük a feladatban szereplő két ellipszis közös fókuszát F_2-vel, másik fókuszaikat F_1-gyel, illetve F_3-mal, nagytengelyeik hosszát pedig $2a_1$-gyel, illetve $2a_3$-mal. Az előzőek szerint, ha F_2-t a két ellipszis egy közös érintőjére tükrözzük, akkor a kapott F_2' pont rajta lesz az F_1 körüli $2a_1$ sugarú és az F_3 körüli $2a_3$ sugarú körön is. Ha a két kör nem esik egybe (azaz ha a két ellipszis különböző), akkor legfeljebb két metszéspontjuk van, tehát a két ellipszisnek legfeljebb két közös érintője lehet. Ha P a két kör egy közös pontja, akkor a PF_2 szakasz felező merőlegese mindkét ellipszisnek érintője (*2. ábra*). Mivel két különböző kör közös pontjainak száma 0, 1 vagy 2, azért ha két ellipszisnek közös az egyik fókusza, de az ellipszisek különbözők, akkor közös érintőik száma 0, 1 vagy 2 lehet, s mindhárom eset elő is fordul (*3. ábra*).



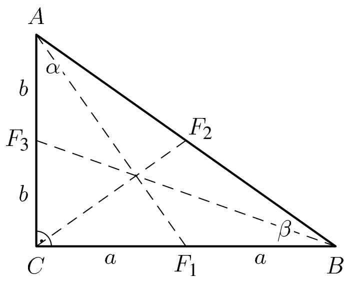
2 közös érintő　　1 közös érintő　　nincs közös érintő

3. ábra

Belső Róbert (Bonyhád, Petőfi S. Gimn., 9. o.t.) dolgozata alapján

56 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 34, 4 pontot 2, 3 pontot 4, 2 pontot 1, 1 pontot 1, 0 pontot 13 versenyző. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

B. 3372. *Egy derékszögű háromszögről tudjuk, hogy a súlyvonalaiból mint oldalakból szerkesztett háromszög is derékszögű. Bizonyítsuk be, hogy a két háromszög hasonló.*
(*3 pont*) Javasolta: *Gyanta Nándor,* Budapest



Megoldás. Az eredeti derékszögű háromszög nem lehet egyenlő szárú, mert akkor nem lehet súlyvonalaiból derékszögű háromszöget szerkeszteni: lenne két egyenlő hosszú súlyvonal, amelyek hosszabbak, mint a harmadik, de a leghosszabb oldalnak az átfogónak kell lennie. Ezért az eredeti háromszögben a derékszög mellett két különböző szög van. Legyen a két befogó hossza $2a$ és $2b$, tegyük fel, hogy $a>b$. Ekkor $\alpha>\beta$ (*ábra*). Mivel $AB^2=AC^2+CB^2=4(a^2+b^2)$ és $AF_2=F_2B=$ $=CF_2$, így $CF_2^2=a^2+b^2$. A BF_2F_3C trapézban $BF_3>CF_2$ ($\beta<90°$), a CF_1F_2A trapézban $AF_1>CF_2$ ($\alpha<90°$), az AF_3F_1B trapézban $BF_3>AF_1$ ($\beta<\alpha$). Ezek alapján $BF_3>AF_1>CF_2$, vagyis a súlyvonalakból szerkesztett derékszögű háromszögben BF_3

az átfogó. A súlyvonalakból szerkesztett háromszögre igaz a Pitagorasz-tétel: $AF_1^2 + CF_2^2 = BF_3^2$; azaz $\left((2b)^2 + a^2\right) + \left(a^2 + b^2\right) = \left((2a)^2 + b^2\right)$, vagyis $a = \sqrt{2} \cdot b$. Az eredeti háromszögben $\frac{2a}{2b} = \frac{a}{b} = \sqrt{2}$.

A súlyvonalakból szerkesztett háromszögben:

$$\frac{AF_1}{CF_2} = \frac{\sqrt{4b^2 + a^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{4b^2 + 2b^2}}{\sqrt{2b^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{6b^2}{3b^2}} = \sqrt{2}.$$

Ha tehát a súlyvonalakból szerkesztett háromszög derékszögű, akkor az eredeti háromszög és az új háromszög befogóinak aránya is $\sqrt{2}$, és mivel a közbezárt szögek is egyenlőek (90°-osak), azért a két háromszög hasonló.

Márton Sándor (Szeged, Radnóti M. Kísérl. Gimn., 9. o.t.)

158 dolgozat érkezett. 3 pontos 138, 2 pontos 2, 1 pontos 3, 0 pontos 8, nem versenyszerű 7 dolgozat.

B. 3378. Egy érettségiző osztályban öt egyetemre felvételiznek, mindegyikre a diákoknak legalább a fele. Bizonyítsuk be, hogy van két olyan egyetem, hogy a diákoknak legalább az egyötöde mindkettőre jelentkezik.

(*5 pont*)

I. megoldás. Képzeljük el, hogy a felvételi rendszer reformja miatt azoknak a felvételizőknek, akik egynél több egyetemre jelentkeznek, egyetempárokat kellene megjelölniük az erre a célra rendszeresített „dupla jelentkezési íveken”. Aki persze nem akar továbbtanulni vagy pontosan tudja, mit akar, annak ilyesmivel nem kell vesződnie, de ha valaki például 4 egyetemre is jelentkezik, annak $\binom{4}{2} = 6$ dupla ívet kell kitöltenie.

Egy diáknak így 0, 0, 1, 3, 6, illetve 10 dupla ívre van szüksége aszerint, hogy 0, 1, 2, 3, 4 vagy pedig 5 egyetemre jelentkezik. Mindenképpen igaz tehát, hogy aki e helyre jelentkezik, az legalább $2e - 3$ dupla ívet tölt ki.

Ha az osztályba n diák jár, akik rendre $e_1, e_2, \ldots, e_n$ egyetemre jelentkeznek, akkor a fentiek szerint összesen legalább $\sum_{i=1}^{n} 2e_i - 3 = 2\sum_{i=1}^{n} e_i - 3n$ dupla ívet írnak meg.

Vizsgáljuk most a $\sum_{i=1}^{n} e_i$ összeget. Ez az összes jelentkezések száma, amit ha egyetemenként számolunk össze, akkor legalább $5\frac{n}{2}$-t kapunk, hiszen a feltétel szerint minden egyetemre legalább az osztály fele jelentkezett. A szükséges dupla ívek száma így legalább $2\sum_{i=1}^{n} e_i - 3n \geq 2 \cdot 5\frac{n}{2} - 3n = 2n$. Az összesen 10 egyetempárra így legalább $2n$

dupla ív érkezik, van tehát olyan egyetempár, ahová ennek legalább az egytizede, $\frac{n}{5}$, és ezt kellett bizonyítani.

Csóka Endre (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 9. o.t.)

II. megoldás. Legyen az osztály létszáma n, és jelölje s_i azoknak a számát, akik pontosan i darab egyetemre jelentkeztek. Ha most T a továbbtanulni szándékozók, J pedig az egyetemi jelentkezések száma, akkor nyilván $T=s_1+s_2+s_3+s_4+s_5\le n$, másfelől $J=s_1+2s_2+3s_3+4s_4+5s_5$, ami a feltétel szerint legalább $5\frac{n}{2}$. Az egyszerűség kedvéért jelölje k a k-adik egyetemet ($k=1$, 2, 3, 4, 5), az egyetemek egy tetszőleges H részhalmazára pedig e_H azon diákok számát, akik pontosan a H-beli egyetemekre jelentkeztek. Így azoknak a diákoknak a száma, akik jelentkeztek H-beli egyetemekre: $\sum\limits_{H\subseteq G} e_G=E_H$. (A szóban forgó halmazok valamennyien az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz részhalmazai.) Ekkor

$$E_{12}=e_{12}+(e_{123}+e_{124}+e_{125})+(e_{1234}+e_{1235}+e_{1245})+e_{12345},$$

ennyien jelentkeztek tehát az 1 és a 2 egyetemre. Még kilenc hasonló összeget írhatunk fel,

$$E_{13}=e_{13}+(e_{132}+e_{134}+e_{135})+(e_{1324}+e_{1325}+e_{1345})+e_{13245},$$

$$\vdots$$

$$E_{45}=e_{45}+(e_{451}+e_{452}+e_{453})+(e_{4512}+e_{4513}+e_{4523})+e_{45123}.$$

Azt kell bizonyítanunk, hogy e tíz összeg között van olyan, amelyiknek az értéke legalább $\frac{n}{5}$, ez pedig következne abból, ha e tíz összeg E összege – amelyik szimmetrikus lévén könnyebben kezelhető – legalább ennek 10-szerese, azaz legalább $2n$. Vizsgáljuk tehát az E összeget.

Egy adott e_G tagot a G minden kételemű $\{i,j\}$ részhalmazához felírt E_{ij} összeg tartalmaz, mégpedig pontosan egyszer. Eszerint az E összegben pontosan $\binom{|G|}{2}$ alkalommal fordul elő az e_G tag. Így

$$E=\sum_{|G|=2}^{5}\binom{|G|}{2}\cdot e_G=\sum_{|G|=2}e_G+3\sum_{|G|=3}e_G+6\sum_{|G|=4}e_G+10\sum_{|G|=5}e_G.$$

Másfelől a $\sum\limits_{|G|=i} e_G$ összeg éppen azoknak a diákoknak a száma, akik pontosan i darab egyetemre jelentkeztek, korábbi jelölésünkkel s_i. Így az

$$E=s_2+3s_3+6s_4+10s_5$$

egyenlőséget kapjuk, erről az összegről kell megmutatnunk, hogy legalább $2n$. Rendelkezésünkre állnak a

(1) $$T \le n$$

és a

(2) $$J \ge \frac{5}{2}n$$

feltételek, ebből kell bebizonyítanunk, hogy $E \ge 2n$. Tekintsük az (1) szerint nyilván teljesülő $\frac{3}{2}n + \frac{1}{2}E \ge \frac{3}{2}T + \frac{1}{2}E$ egyenlőtlenséget. Ennek jobb oldala $1{,}5s_1 + 2s_2 + 3s_3 + 4{,}5s_4 + 6{,}5s_5$, ami nyilván nagyobb vagy egyenlő, mint $J = s_1 + 2s_2 + 3s_3 + 4s_4 + 5s_5$. Így (2) miatt $\frac{3}{2}n + \frac{1}{2}E \ge J \ge \frac{5}{2}n$, ahonnan rendezés után valóban $E \ge 2n$ adódik. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Dénes Attila (Békéscsaba, Rózsa F. Gimn., 12. o.t.)

Megjegyzések. 1. Mindkét megoldásból kiderül, hogy a feladat állítása éles. Egyenlőség pontosan akkor lehetséges, ha valamennyi becslésben egyenlőség van, senki nem jelentkezik 0, 1, 4 vagy 5 egyetemre, és az osztály tanulóinak pontosan a fele jelentkezik minden egyes egyetemre.

2. Az s_i változók segítségével megfogalmazott feladat: *keressük az* $s_2 + 3s_3 + 6s_4 + 10s_5$ *összeg minimumát az* $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 \le n$ *és az* $s_1 + 2s_2 + 3s_3 + 4s_4 + 5s_5 \ge \frac{5}{2}n$ *feltételek mellett* mutatja, hogy a feladatnak ez a része az ún. *lineáris programozás* témakörébe tartozik.

3. Érdemes egybevetni a két megoldást. A másodikban a szerző szemmel láthatólan nem használta ki, hogy a feladat egy osztály tanulóiról szól, az n-nel való osztás után a megoldás szó szerint alkalmazható bármely halmazra és annak részhalmazaira, amennyiben a részhalmazokhoz mérőszámot – például területet – rendelünk. Ez a mérőszám a feladatban a halmazok elemszáma, az első megoldás kombinatorikai megközelítésében alapvető volt, hogy a szóban forgó halmazok végesek. A feladat állítása a második megoldás szerint nem csak ekkor igaz, tehát például a következő állítást is igazolta a szerző:

Egy egységnyi területű zsákon öt folt található, amelyek bármelyikének a területe legalább $\frac{1}{2}$*. Mutassuk meg, hogy van a foltok között kettő, amelyek közös részének területe legalább* $\frac{1}{5}$*.*

Ennek a feladatnak a megoldásáról és lehetséges általánosításairól szól *I. M. Jaglomnak* a *Kvant* című folyóiratban megjelent klasszikus cikke, amelynek fordítását számunk 10–20. oldalán közöljük.

41 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Bákor Krisztina, Balka Richárd, Csikvári Péter, Deli Lajos, Dénes Attila, Gerencsér Balázs, Keszegh Balázs, Kunszenti-Kovács Dávid, Máthé András, Papp Dávid, Rácz Béla András, Somogyi Dávid, Szalay Zsófia, Venter György, Vörös László. 4 pontos 6, 3 pontos 8, 2 pontos 7, 1 pontos 5 dolgozat.

B. 3379. *Legyen az ABC háromszögben az AA_1, BB_1, CC_1 szögfelezők metszéspontja O. Igazoljuk, hogy* $8 \leqslant \frac{AO}{A_1O} \cdot \frac{BO}{B_1O} \cdot \frac{CO}{C_1O} \leqslant \frac{4R}{r}$, *ahol R a köréírt, r a beírt kör sugarát jelöli.*

(*5 pont*) Javasolta: *Bencze Mihály,* Brassó

Megoldás. Jelöljük a háromszög oldalait a szokásos módon a, b, c-vel, területét T-vel, kerületének felét pedig s-sel.

Először kifejezzük az egyenlőtlenség középső tagjában szereplő arányokat a háromszög oldalaival. Az ABA_1 háromszögben BO szögfelező, ezért a szögfelezőtétel szerint a szemközti oldalt a mellette levő oldalak arányában osztja, vagyis

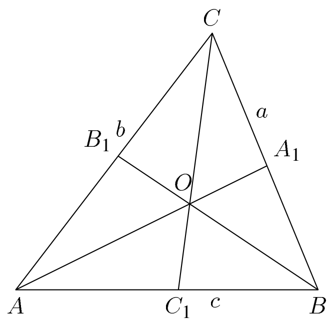
$$\frac{AO}{A_1O}=\frac{AB}{A_1B}. \tag{1}$$

Az AA_1 egyenes a CAB háromszögben szögfelező, ezért

$$\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{c}{b}. \tag{2}$$

De $A_1B+A_1C=a$, vagyis $A_1C=a-A_1B$, amit (2)-be helyettesítve, majd a kapott egyenlőségből A_1B-t kifejezve

$$A_1B=\frac{a\cdot c}{b+c}.$$



Ezt (1)-be beírva kapjuk, hogy

$$\frac{AO}{A_1O}=\frac{AB}{A_1B}=\frac{c}{\frac{a\cdot c}{b+c}}=\frac{b+c}{a}.$$

Ugyanígy látható be, hogy

$$\frac{BO}{B_1O}=\frac{a+c}{b} \quad \text{és} \quad \frac{CO}{C_1O}=\frac{a+b}{c}.$$

Ismert, hogy $R=\dfrac{abc}{4T}$, $r=\dfrac{T}{s}$ és $T^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$. Ezeket az összefüggéseket felhasználva a $4R/r$ hányadost is kifejezhetjük az oldalakkal:

$$\frac{4R}{r}=\frac{\frac{abc}{T}}{\frac{T}{s}}=\frac{abc\cdot\frac{a+b+c}{2}}{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}}=\frac{8abc}{(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

A bizonyítandó egyenlőtlenségek tehát az oldalakkal kifejezve:

$$8\le\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{abc}\le\frac{8abc}{(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}. \tag{3}$$

A számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenség szerint $2\sqrt{ab}\le a+b$, $2\sqrt{bc}\le b+c$ és $2\sqrt{ac}\le a+c$. Ezeket összeszorozva éppen a bizonyítandó bal oldali egyenlőtlenséggel ekvivalens

$$8abc\le(a+b)(b+c)(a+c)$$

egyenlőtlenséget kapjuk.

A jobb oldali egyenlőtlenséget is három egyenlőtlenség összeszorzásával kaphatjuk. Ezek:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{a+b}{c} &\le \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{(b+c-a)(a-b+c)}}, \\ \frac{b+c}{a} &\le \frac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)}} \quad \text{és} \\ \frac{c+a}{b} &\le \frac{2\sqrt{ac}}{\sqrt{(b+c-a)(a+b-c)}}. \end{aligned}$$

Az oldalak szerepe a három egyenlőtlenségben szimmetrikus, ezért közülük elég csak egyet bebizonyítanunk. Az elsőt négyzetre emelve és átszorozva:

$$(a+b)^2(b+c-a)(a-b+c) \le 4abc^2, \qquad \text{azaz}$$
$$(a+b)^2\left(c^2-(a-b)^2\right) \le 4abc^2.$$

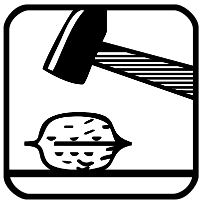
Ezt rendezve:

$$c^2\left((a+b)^2-4ab\right) \le (a+b)^2(a-b)^2, \qquad \text{vagyis}$$
$$c^2(a-b)^2 \le (a+b)^2(a-b)^2$$

adódik, ami nyilván igaz, mert a háromszög-egyenlőtlenség miatt $c^2<(a+b)^2$; $(a-b)^2$ pedig nemnegatív. Tehát teljesülnek a (4) egyenlőtlenségek, s így az összeszorzásukkal kapható, (3) jobb oldalán lévő egyenlőtlenség is.

Könnyen látható, hogy mindkét bizonyított egyenlőtlenségben pontosan akkor van egyenlőség, ha $a=b=c$, azaz ha az ABC háromszög szabályos.

58 dolgozat érkezett. 5 pontos 16, 4 pontos 12, 3 pontos 3, 2 pontos 6, 1 pontos 12, 0 pontos 3. Nem versenyszerű 6 dolgozat.



Nehezebb feladatok megoldása

A. 231. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább* 3*, akkor tartalmaz olyan kört, amelynek éleit elhagyva a gráf összefüggő marad.*

Javasolta: *Kiss Tamás,* Budapest

Megoldás. Az állítás nyilván nem igaz az üres gráfra; ezért továbbiakban feltételezzük, hogy a gráfnak van legalább egy csúcsa. Mivel ennek a csúcsnak legalább 3 szomszédja van, a csúcsok száma legalább 4.

Először bebizonyítjuk, hogy ha egy nem üres gráfban minden csúcs foka legalább 2, akkor a gráf tartalmaz kört. Képezzük csúcsok egy A_0, A_1, $\ldots$ sorozatát a következőképpen. Legyen A_0 és A_1 két szomszédos csúcs. Ha valamely $n \geq 1$-re A_n-et már definiáltuk, akkor legyen A_{n+1} az A_n-nek az egyik, A_{n-1}-től különböző szomszédja. Ilyen mindig létezik, mert A_n-nek a feltétel szerint legalább két szomszédja van. Mivel a gráfnak csak véges sok csúcsa van, bizonyos csúcsok a sorozatban többször szerepelnek. Legyen A_m az első olyan eleme a sorozatnak, ami korábban már szerepelt: $A_m = A_k$ valamely $k < m$-re. Ekkor nyilván $m > k+2$ (a gráf egyszerű), és így az A_k, A_{k+1}, $\ldots$, A_{m-1} csúcsok egy kört alkotnak.

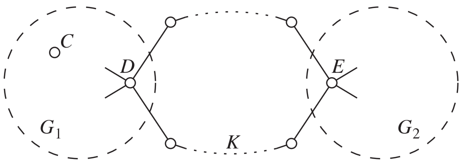
Válasszuk ki most a gráf egy tetszőleges C csúcsát. A gráf tartalmaz olyan kört, amely nem megy át C-n. Ha ugyanis a C csúcsot a belőle induló élekkel együtt elhagyjuk, a megmaradó gráf legalább 3 csúcsot tartalmaz, és mindegyik csúcs foka legalább 2; az előbbiek szerint ez a gráf tartalmaz kört.

Ha egy C-n át nem menő kör éleit elhagyjuk, a gráf esetleg több komponensre esik szét. Legyen K az egyik C-n át nem menő kör, amelyre a C-t tartalmazó komponens maximális számú csúcsot tartalmaz. Megmutatjuk, hogy K éleit elhagyva a gráf összefüggő marad.

Tegyük fel, hogy K éleit elhagyva a gráf legalább két komponensre esik szét. Az eredeti gráfbeli utakkal bármelyik két komponens pontjai összeköthetők. A K éleinek elhagyása után ezekből az utakból csupán K élei hiányozhatnak; ebből látható, hogy minden komponensnek van közös csúcsa a K körrel.

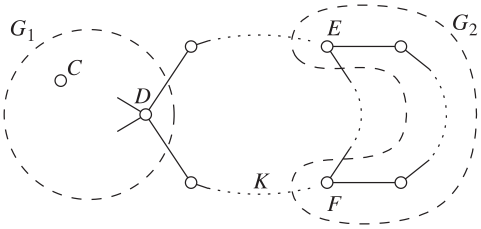
Legyen G_1 az a komponens, amely C-t tartalmazza, G_2 pedig egy ettől különböző komponens. Mindkét komponensnek van legalább egy közös csúcsa a K körrel; legyen egy-egy ilyen csúcs D, illetve E. Két esetet fogunk vizsgálni aszerint, hogy G_2-nek és K-nak van-e E-kívül más közös csúcsa.

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor G_2-nek és K-nak az E az egyetlen közös csúcsa (*1. ábra*). Mivel E-nek legalább három szomszédja van, és ezek közül csak kettő tartozik a K körhöz, legalább egy szomszédja G_2-ben van; a G_2 komponens tehát legalább még egy csúcsot tartalmaz. Tekintsük most azt a gráfot, amelyet úgy kapunk, hogy G_2-ből elhagyjuk E-t és a belőle induló éleket. Ez a gráf nem üres, és minden csúcsa legalább másodfokú. A gráf tehát tartalmaz egy K' kört. Ha eredetileg a K kör helyett ennek a K' körnek az éleit hagytuk volna el, akkor a C-t tartalmazó komponensnek része lenne a G_1 gráf és az E csúcs is; ez ellentmond annak, hogy a G_1 komponens éleinek száma maximális.



1. ábra

Most vizsgáljuk azt az esetet, amikor G_2-nek és K-nak E-n kívül még legalább egy közös csúcsa van; legyen egy ilyen csúcs F. Feltételezzük, hogy a K körnek a D-t nem tartalmazó EF ívén a G_2 komponensnek nincs több csúcsa; ezt mindig elérhetjük úgy, hogy az E és F csúcsot a K és G_2 más, megfelelő közös csúcsaira cseréljük (*2. ábra*).



2. ábra

Mivel a G_2 komponens összefüggő, az E és F pontok összeköthetők G_2-beli élekkel. Ez az út a K körnek a D-t nem tartalmazó EF szakaszával együtt egy K' kört alkot. Ha a K helyett a K' kör éleit hagytuk volna el, akkor a C-t tartalmazó komponens ismét tartalmazná G_1 valamennyi pontját, és K megmaradó élei révén tartalmazná a DE és a DF íveknek legalább egy-egy további pontját is. Ez ismét ellentmond annak, hogy G_1 maximális.

Tehát a K kör éleinek elhagyása után a gráf valóban összefüggő marad.

Csóka Endre (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 9. o.t.)

8 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Csóka Endre, Gyenes Zoltán, Kiss Gergely, Varjú Péter és Zábrádi Gergely. 1 pontos 1, 0 pontos 2 dolgozat.

A. 243. *Határozzuk meg mindazokat a p és q prímszámokat, amelyekre alkalmas $n>1$ esetén*

$$\frac{p^{2n+1}-1}{p-1}=\frac{q^3-1}{q-1}. \tag{1}$$

Fried Ervin, Budapest

Megoldás. A jobb oldalon egyszerűsítve és mindkét oldalból 1-et kivonva,

$$\frac{p^{2n+1}-1}{p-1}-1=(q^2+q+1)-1$$

$$p^{2n+1}-p=(p-1)(q^2+q)$$

$$p(p^n-1)(p^n+1)=(p-1)q(q+1). \tag{2}$$

A bal oldalon valamelyik tényező osztható a jobb oldalon szereplő q prímszámmal; ez a tényező legalább q. Mivel a legnagyobb tényező a p^n+1, $p^n+1\ge q$ minden esetben teljesül. Ezt a becslést alkalmazzuk (2) jobb oldalán:

$$p(p^n-1)(p^n+1)\le(p-1)(p^n+1)(p^n+2)$$

$$p\cdot(p^n-1)\le(p-1)(p^n+2)$$

$$p^n+2\le 3p. \tag{3}$$

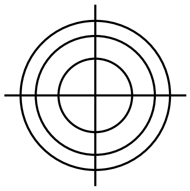
Ha p vagy n legalább 3, akkor $p^n=p^{n-1}\cdot p\ge 3p$, vagyis (3) nem teljesülhet. Tehát csak $p=n=2$ lehetséges. Ezt behelyettesítve (2)-be $q(q+1)=30$, azaz $q=5$.

A feladat egyetlen megoldása tehát $p=2$, $q=5$ és $n=2$.

Csóka Endre (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 10. o.) dolgozata alapján

33 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Ambrus Gergely, Bartha Ferenc, Csikvári Péter, Csóka Endre, Garab Ábel, Gerencsér Balázs, Hablicsek Márton, Harangi Viktor, Koch Dénes, Pach Péter Pál, Szalai Attila, Varjú Péter, Vígh Viktor és Vörös László. 3 pontos 3, 1 pontos 1, 0 pontos 15 dolgozat.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (610–614.)



C. 610. Az ábrán látható céltábla három koncentrikus körből és két egymásra merőleges egyenesből áll, amelyek átmennek a körök középpontján. Az így keletkezett 12 rész területe egyenlő. Adjuk meg a három kör sugarának arányát.

C. 611. Határozzuk meg az a, b, c, d, e számjegyeket úgy, hogy a velük felírt két ötjegyű számra teljesüljön az $\overline{abcde}\cdot 9=\overline{edcba}$ egyenlőség.

Reményi Gusztáv, Budapest

C. 612. Az ABC háromszög C csúcsánál derékszög van. Jelölje D a C csúcsból az AB átfogóra bocsátott magasság talppontját. A D-ből a befogókra bocsátott merőlegesek talppontja legyen P és Q. Bizonyítsuk be, hogy a DP és a DQ szakaszok összege legfeljebb akkora, mint a befogók hosszainak harmonikus közepe.*

Varga István, Békéscsaba

C. 613. Messe az ABC háromszög BC oldalával párhuzamos egyenes az AB oldal egyenesét a D, az AC oldal egyenesét az E pontban. Legyen M a BC oldal tetszőleges belső pontja. Mekkora az $ADME$ négyszög területe, ha az ABC háromszög területe T, és az ADE háromszög területe t?

Besenyei Ádám, Tatabánya

C. 614. Az m valós paraméter mely értékeire nincs megoldása az

$$m\sin^2 x+(m-1)\sin x+m-2=0$$

egyenletnek?

Reményi Gusztáv, Budapest

❄

Beküldési határidő: 2001. február 15.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest, Pf. 47. 1255

❄

* Az a és b számok harmonikus közepe a reciprokaik átlagának reciproka, azaz $\dfrac{2ab}{a+b}$.

A B pontversenyben kitűzött feladatok (3422–3431.)

B. 3422. Igazoljuk, hogy $7^{2001}-3^{3335}$ osztható 100-zal.

(*3 pont*)

B. 3423. Alkothatnak-e egy háromszög beírt körének az oldalakon levő érintési pontjai tompaszögű háromszöget?

(*3 pont*)

B. 3424. Egy szabályos háromszögbe négyzetet írunk, amelynek minden csúcsa a háromszög kerületén van. A négyzet egyik oldala egy kisebb szabályos háromszöget metsz le; ebbe hasonló módon ismét négyzetet írunk, és így tovább. A háromszög hányadrészét fedi le a négyszögek végtelen sorozata?

(*3 pont*)

B. 3425. A $3+4+5+6=3\cdot 6$; $15+16+17+\ldots+34+35=15\cdot 35$ egyenlőségek azt sugallják, hogy a természetes számokból ki lehet választani néhány egymás követőt úgy, hogy összegük egyenlő a legkisebb és a legnagyobb kiválasztott szám szorzatával. Mutassuk meg, hogy végtelen sok ilyen tulajdonságú sorozat van!

(*5 pont*) *Kiss Sándor,* Nyíregyháza

B. 3426. Mit kapunk maradékul, ha az x^{2001} polinomot elosztjuk $(x+1)^2$-nel?

(*4 pont*)

B. 3427. Tükrözzük a hegyesszögű ABC háromszög oldalegyeneseit a rájuk nem merőleges magasságvonalakra. Az így kapott hat tükörkép közül három az ABC háromszög belsejében fekvő $A_1B_1C_1$ háromszöget, míg a másik három az $A_2B_2C_2$ háromszöget határolja. Ez utóbbi háromszögnek van egy 20°-os és egy 70°-os szöge. Számítsuk ki az $A_1B_1C_1$ háromszögek szögeit.

(*4 pont*) *Bakonyi Gábor,* Budapest

B. 3428. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges háromszögben érvényes az alábbi összefüggés:

$$\frac{r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c}{R^4}\le\frac{27}{16}.$$

(R a háromszög köré írt, r a háromszögbe írt, r_a, r_b, r_c pedig a hozzáírt körök sugarát jelentik.)

(*4 pont*) *Tőricht Pál* és *Árokszállási Tibor,* Paks

B. 3429. Legyen $q=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, és legyen $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ egy olyan függvény, amelyre tetszőleges pozitív egész n esetén

$$\left|f(n)-qn\right|<\frac{1}{q}.$$

Igazoljuk, hogy $f\big(f(n)\big)=f(n)+n$.

(*4 pont*)

B. 3430. Adottak a síkon a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontok. Kiválasztunk egy olyan $1\le i\le\le n$ indexet, amelyre a P_i, P_{i+1}, P_{i+2} pontok nincsenek egy egyenesen, és a $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ háromszög negatív körüljárású. (Az indexelés ciklikus). A P_{i+1} pontot kicseréljük arra a pontra, amit úgy kapunk, hogy P_{i+1}-et tükrözzük a P_iP_{i+2} szakasz felezőpontjára. Ezt mindaddig ismételjük, amíg csak létezik megfelelő i index. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pontokból kiindulva az eljárás véges sok lépés után véget ér.

(*5 pont*)

B. 3431. OKOSBANK páncélszekrényén több különböző zár van. A bankban n pénztáros dolgozik, mindegyiknek kulcsa van a zárak némelyikéhez. (Egy pénztárosnak több kulcsa is lehet, és egy zárhoz többüknek is lehet kulcsa.) Tudjuk, hogy bármelyik k pénztáros együtt mindig ki tudja nyitni a páncélszekrényt, de $k-1$ pénztáros soha. Legalább hány zár van a páncélszekrényen?

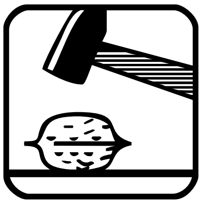
(*5 pont*) *Vígh Viktor*, Szeged

❄

Beküldési határidő: 2001. február 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (254–256.)



A. 254. Adottak a síkon a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontok. Ezekkel a pontokkal a következő műveletet végezhetjük: Kiválasztunk egy olyan $1\le i\le n$ indexet, amelyre a P_i, P_{i+1}, P_{i+2} pontok nincsenek egy egyenesen, és a $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ háromszög negatív körüljárású. A P_{i+1} pontot kicseréljük arra a pontra, amit úgy kapunk, hogy P_{i+1}-et tükrözzük a P_iP_{i+2} szakaszra. Ezt a műveletet mindaddig ismételjük, amíg csak létezik megfelelő i index. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pontokból kiindulva, az eljárás véges sok lépés után véget ér.

A. 255. Legyen $q=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, és definiáljuk a pozitív egészeken értelmezett f függvényt a következőképpen.

1. Legyen $f(1)=2$;
2. Ha $f(1), \ldots, f(n-1)$-et már definiáltuk, és az n nem szerepel ezek között, akkor legyen $f(n)=f(n-1)+1$;
3. Ha $f(1), \ldots, f(n-1)$-et már definiáltuk, és az n szerepel ezek között, akkor legyen k a legkisebb pozitív egész, amelyre $f(k)=n$, és legyen $f(n)=n+k$. Igazoljuk, hogy tetszőleges n pozitív egészre

$$qn-\frac{1}{q}<f(n)\le qn+\frac{1}{q^2}.$$

A. 256. Van n golyó, mindegyiknek szeretnénk megtudni a súlyát. Ehhez rendelkezésünkre áll egy olyan egykarú mérleg, amellyel egyszerre egy vagy két golyó súlyának összegét lehet meghatározni. Arra is fel kell készülnünk, hogy esetleg az egyik mérés pontatlan lesz. Jelöljük $f(n)$-nel azt a minimális mérésszámot, amellyel az összes golyó súlya minden esetben biztosan meghatározható. Igazoljuk, hogy

$$f(n)<n+\log_3 n+3.$$

Surányi László és *Virág Bálint* ötletéből

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS

(Volume 51. No. 1. January 2001)

New exercises for practice – competition C (see page 37): **C. 610.** The target on the diagram consists of three concentric circles and two perpendicular lines crossing at the common centre of the circles. Given that the respective areas of the twelve regions are equal find the ratios of the radii of the circles. **C. 611.** Find the decimal digits a, b, c, d, e if the two numbers formed by these digits satisfy the equality $9\overline{abcde}=\overline{edcba}$. **C. 612.** Triangle ABC is right angled at C. The foot of the altitude from C is D and the feet of the perpendiculars from D on the legs are P and Q respectively. Show that $DP+DQ$ does not exceed the harmonic mean of the legs.[1] (*I. Varga,* Nagyszalonta) **C. 613.** The line parallel to the side BC of the triangle ABC intersects the lines AB and AC at the points D and E respectively. Let M be an arbitrary point interior to the side BC. Given that the areas of the triangle ABC and ADE are T and t respectively, find the area of the quadrilateral $ADME$. **C. 614.** Find those values of the real parameter m for which the following equation has no solution. $m\sin^2 x+(m-1)\sin x+m-2=0$. (*G. Reményi,* Budapest)

New problems – competition B (see page 38): **B. 3422.** Show that $7^{2001}-3^{3335}$ is divisible by 100. (*4 points*) **B. 3423.** Is it possible that the points of tangency of the incircle of a triangle form an obtuse triangle? (*3 points*) **B. 3424.** A square is inscribed in an equilateral triangle in such a way that its vertices are on the perimeter of the triangle. One side of the square is the side of

[1] The harmonic mean of two numbers a and b is the reciprocal of the average of their reciprocals, i.e., $H(a,b)=\dfrac{2ab}{a+b}$

a smaller equilateral triangle where there is a smaller square inscribed similarly to the first one. Proceeding endlessly with smaller and smaller squares what is the ratio of the total area covered by the squares and that of the triangle. (*3 points*) **B. 3425.** Consider the following equalities: $3+4+5+6=3\cdot 6$; $15+16+\ldots+34+35=15\cdot 35$. They provide examples for sequences of consecutive integers whose sum is equal to the product of the first and the last terms. Prove that there are infinitely many finite sequences of this property. (*5 points*) (*S. Kiss,* Nyíregyháza) **B. 3426.** Find the remainder when the polynomial x^{2001} is divided by $(x+1)^2$. **B. 3427.** Reflect each side of the acute angled triangle ABC through the two altitudes that are not perpendicular to the respective sides. Three of the six mirror images thus produced form a triangle $A_1B_1C_1$ in the interior of the triangle ABC while the remaining three lines form the triangle $A_2B_2C_2$. The measures of two angles of the latter triangle are 20° and 70° respectively. Find the angles of the triangle $A_1B_1C_1$. (*4 points*) (*G. Bakonyi,* Budapest) **B. 3428.** Show that the following relation holds in any triangle: $\frac{r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c}{R^4}\le\frac{27}{16}$. ($R$ is the circumradius, r is the inradius and r_a, r_b and r_c denote the radii of the excircles respectively.) (*4 points*) (*P. Tőricht* and *T. Árokszállási,* Paks) **B. 3429.** Let $q=\frac{1+\sqrt5}{2}$ and let $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ be a function satisfying $|f(n)-qn|<\frac{1}{q}$ for every $n\in\mathbf{N}$. Prove that $f(f(n))=f(n)+n$. (*4 points*) **B. 3430.** Given are the points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ in the plane. Subscript i is called wrong if the corresponding point P_i is not incident to the line connecting its neighbours P_{i-1} and P_{i+1} and, additionally, the orientation of the triple P_{i-1}, P_i, P_{i+1} in this order is negative. For any wrong subscript i the point P_{i+1} can be replaced by its mirror image through the midpoint of the segment P_iP_{i+2}. This operation can be performed as long as there are wrong subscripts. (The subscripts are used in the usual cyclic manner, i.e. $P_{n+1}=P_1$, $P_0=P_n$, etc.) Show that no matter how the points are given the above procedure terminates. (*5 points*) **B. 3431.** The supersafe of *TweedleBank* is furnished with several locks. There are n tellers working in the Bank and each of them is holding some keys for the safe. Any teller can have more than one keys and there might also be locks for which there are more than one tellers are provided with a key. Given that any k tellers are able to open the safe together but there are no $k-1$ of them who can do this find the minimum number of locks on the safe. (*5 points*) (*V. Vígh,* Szeged)

New advanced problems – competition A (see page 39): **A. 254.** Given are the points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ in the plane. Subscript i is called wrong if the corresponding point P_i is not incident to the line connecting its neighbours P_{i-1} and P_{i+1} and, additionally, the orientation of the triple P_{i-1}, P_i, P_{i+1} in this order is negative. For any wrong subscript i the point P_{i+1} can be replaced by its mirror image through the segment P_iP_{i+2}. This operation can be performed as long as there are wrong subscripts. (The subscripts are used in the usual cyclic manner, i.e. $P_{n+1}=P_1$, $P_0=P_n$, etc.) Show that no matter how the points are given the above procedure terminates. **A. 255.** Let $q=\frac{1+\sqrt5}{2}$ and define the function f on the set of positive integers as follows. Start with $f(1)=2$ and let $n>1$. If the values $f(1), \ldots, f(n-1)$ have already been defined and n is not among these values then set $f(n)=f(n-1)+1$; otherwise consider k, the smallest positive integer, for which $f(k)=n$ and let $f(n)=n+k$. Prove that $qn-\frac{1}{q}<f(n)\le qn+\frac{1}{q^2}$ for any positive integer n. **A. 256.** n marbles are to be measured with the help of a one-armed balance. We are allowed to measure one or two marbles at a time. It may happen, however, that one of the results is misread. Denote by $f(n)$ the minimum number of weighings neccessary to determine the weight of each marble. Prove that $f(n)<n+\log_3 n+3$.

ÉRETTSÉGIZŐK, FIGYELEM!

MEGÚJULT MATEMATIKUS-KÉPZÉS A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEMEN

Új szakirányok:
gazdaságmatematikus (közgazdász-matematikus, pénzügyi matematikus)
informatikai matematikus

A gazdaságirányítás, a bankok és biztosító társaságok egyre több olyan szakembert igényelnek, akik igen alapos matematikai tudással rendelkeznek. Ez abból is kitűnik, hogy egyre többen helyezkednek el matematikus diplomával ilyen intézményekben. Ezt kívánjuk megkönnyíteni a gazdaságmatematikus szakirány bevezetésével, amelyen közgazdász-matematikusi, illetve pénzügyi matematikusi ismeretek szerezhetők. Hasonlóan szükség van olyan szakemberekre is, akik az informatika, a számítástudomány és számítástechnika terén felmerülő, a mindennapi programozási gyakorlaton túlmutató elméleti jellegű modelleket is kezelni tudják. Ilyen szakemberek képzését biztosítja az informatikai matematikus szakirány.

A két szakirány hároméves közös matematikai alapképzésre épül, de már a második évtől szerepelnek speciális tárgyak is. Ezt követően a matematikai tárgyak mellett a választott szakiránynak megfelelően megjelennek olyan tárgyak is, mint mikro- és makroökonómia, marketing, vállalati pénzügyek, menedzsment, banküzemtan, pénzügypolitika, biztosítás-gazdaságtan, gazdasági informatika, illetve algoritmusok és adatstruktúrák, adatbázisok, számítógéphálózatok.

A két új szakirány mellett változatlanul megmarad a már nagy múltra visszatekintő matematikus szakunk is: azok, akik az elméleti matematika iránt érdeklődnek, tiszta matematikai tárgyak tanulásával folytatják tanulmányaikat az első három év után, és szereznek matematikus diplomát.

Mi az előnye az új képzésnek?

- Hallgatóink a harmadik év végén dönthetnek szakirányukról, miután alaposan tájékozódtak a különböző képzésekről (még bele is kóstolhatnak azokba egy-egy tárgy korábbi felvételével).
- A matematikus diploma által megkövetelt magas szintű matematikai ismereteken túl hallgatóink szert tehetnek olyan szakirányú alapműveltségre is, amely megkönnyíti, felgyorsítja a gazdasági-pénzügyi-irányítási szférában elhelyezkedni kívánók számára a megfelelő szaktudás megszerzését.
- Az új képzés nagymértékben megkönnyíti végzett hallgatóink elhelyezkedését.

A felvétel részleteiről a Felsőoktatási Felvételi Tájékoztatóban olvashatnak, de bármilyen további információért közvetlenül hozzánk is fordulhanak a következő címen:

SZTE TTK Bolyai Intézet
6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.
Tel.: (62)-544-073; (62)-544-548
E-mail: szabol@math.u-szeged.hu
Dr. Szabó László egyetemi docens

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Matematika Intézetének közleménye pályaválasztóknak

MATEMATIKUS KÉPZÉS A BME-N

A világ rangos műszaki egyetemeinek gyakorlatát követve és saját jó hagyományát felelevenítve, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Természettudományi Kara 1997-ben beindította a **matematikus képzést**. A képzést a Kar Matematika Intézete gondozza. Olyan szakembereket képezünk, akik érzékenyek a gyakorlati problémák iránt és képesek alkotó módon felhasználni ismereteiket; akik, amellett, hogy a matematika elvont területein otthonosan mozognak, kommunikálni és együttműködni tudnak a matematikán kívüli szakemberekkel is. Előreláthatóan az Európához csatlakozó, fejlődő magyar gazdaságnak nagy szüksége lesz ilyen szakemberekre. Matematikus képzésünk szervesen illeszkedik a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen folyó *alkalmazás-orientált* tudományos képzés széles spektrumába, mely a klasszikus mérnökképzés mellett magában foglal olyan matematika-igényes új területeket is, mint informatika, közgazdaságtudomány, anyagtudomány, gazdasági tervezés-elemzés, műszaki menedzsment, rendszerelmélet stb.

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem matematikus szakát elsősorban azoknak a végzős gimnazistáknak ajánljuk, akik, amellett, hogy szeretik és tudják a matematikát, indíttatást éreznek magukban a **matematika alkalmazásai** iránt is. A matematikai **modellalkotás** és **elemzés** egyre inkább szerves részét képezi a műszaki, gazdasági és természettudományos tevékenység kreatív ágainak. E tevékenység jól felkészült, invenciózus, mozgékony elméjű fiatal matematikusokat igényel. Az ilyen szakemberek iránti társadalmi igény látványosan növekszik.

Ha e kihívásokban látsz fantáziát, jelentkezz a BME matematikus szakára!

A szak felvételi rendszere megegyezik a műszaki felsőoktatás felvételi rendszerével, amelynek részletes leírása megtalálható a hivatalos *Felsőoktatási felvételi tájékoztatóban.* A középiskolai matematika és/vagy fizika versenyeken kimagaslóan jó eredményt elért jelentkezők mentesülnek a felvételi kötelezettség alól. Az 1999-es és 2000-es felvételi ponthatárunk egyaránt a legmagasabb volt az ország matematikus szakjai között.

A szak képzési rendje nagy vonalakban a következő: Az 1–5. félévben a modern matematika alapismereteinek elsajátítása folyik, a tudományegyetemi matematikus képzéssel lényegében azonos tematikával. A 6–10. félévben a hallgatók **szakirányú** képzést kapnak. A választható négy fő szakirány:

- *Algebra és számítástudomány:* számítógéptudomány logikai alapjai, kriptográfia, kódelmélet, computer algebra;
- *Analízis és alkalmazásai:* dinamikai rendszerek, differenciálegyenletek, biomatematika, matematikai fizika
- *Operációkutatás és alkalmazásai:* lineáris, nemlineáris és sztochasztikus programozás, kombintorikus optimalizálás;
- *Sztochasztikus matematika és alkalmazásai:* pénzügyi és tőzsdei folyamatok matematikája, biztosítási matematika, statisztika, információelmélet.

A választott fő szakirány tárgyai mellett a hallgatók mellékszakirányok és témacsoportok keretében a matematika egyéb területein is alapos tájékozottságot nyernek.

Végzett hallgatóink számára folyamatban van a BME Gazdaság- és Társadalomtudományi Karán folyó műszaki menedzser szak gyorsított elvégzése rendjének kidolgozása is.

Kollégiumi elhelyezkedés: vidéki diákjaink részére a BME kollégiumaiban elhelyezés biztosítható.

Posztgraduális matematikus képzés a BME-n: végzett diákjaink, a műszaki vagy gazdasági életben való elhelyezkedés mellett természetesen részt vehetnek az egyetemünkön folyó doktorandusz (PhD) képzésben is, a Matematika Intézet Doktori Iskolájának keretében.

Bővebb információ szerezhető a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Természettudományi Kar Matematika Intézet titkárságán, a 463 2762 budapesti telefonszámon, illetve intézetünk internetes honlapján: `http://www.math.bme.hu`

Szeretettel várjuk kedves leendő diákjainkat.

BME TTK Matematika Intézet