Számelmélet az x^2+dy^2 alakú számok körében

I. rész

Bevezetés

Mindannyian tudjuk, hogy két négyzetszám szorzata maga is négyzetszám; ez a szorzás asszociativitásából és kommutativitásából következik. Két pozitív négyzetszám összege azonban nem mindig négyzetszám (és semmiképpen sem a két tag összegének a négyzete!). Pitagorasz tétele nyomán már több, mint kétezer éve ráterelődött a figyelem a két négyzetszám összegeként írható négyzetszámokra. A pitagoraszi számhármasok jellemzése a görög aritmetika egyik látványos eredménye. Jóval később, a XVII. században *Fermat*, aki szisztematikusan vizsgálta ezeket a mennyiségeket, kiderítette, hogy az x^2+y^2 alakú számok sok tekintetben hasonlítanak a négyzetszámokhoz: az utóbbiak prímtényezős felbontásában minden prímszám kitevője páros, ahhoz pedig, hogy egy számot föl lehessen írni két négyzet összegeként, csak a $4k+3$ alakú prímtényezőik kitevőinek kell párosnak lennie. Például a $810=2\cdot 3^4\cdot 5$ és a $45=3^2\cdot 5$ ilyen számok: prímfelbontásukban a 3 páros kitevőn szerepel (2 és 5 nem $4k+3$ alakú prím). Valóban: $810=9^2+27^2$ és $45=3^2+6^2$.

A szerkezeti rokonság viszont hasonló aritmetikai viselkedésben mutatkozik meg: ha összeszorozzuk ezt a két számot, akkor a szorzatban is páros lesz az egyetlen $4k+3$ alakú prímtényező, a 3 kitevője, így az is felírható két négyzetszám összegeként; valóban, némi próbálkozás után*

$$810\cdot 45=36\,450=189^2+27^2.$$

Ez nyilván ugyanígy igaz általában is. Magát a jelenséget úgy szokás fogalmazni, hogy az x^2+y^2 alakú számok halmaza *zárt* a szorzásra nézve.

Négyzetszámok persze el is oszthatók egymással: ha a hányados egész, akkor az maga is négyzetszám. Ebből egyébként az a közismert tény is következik, hogy nem négyzetszámok, például a 2 négyzetgyöke irracionális szám. A prímfelbontás segítségével történő jellemzésből kiderül, hogy a két négyzet összegeként felírható számoknak is megvan ez a tulajdonsága: ha a hányadosuk egész, akkor mivel az osztás megtartja a $4k+3$ alakú prímtényezők kitevőjének a páros voltát, maga is két négyzet összege. A fenti példa számaira $\dfrac{810}{45}=2\cdot 3^2=3^2+3^2$. Az, hogy a szorzatra vonatkozó eredmény simán adódott a Lagrange-azonosságból, arra bátoríthat, hogy most a fordított irányban is kísérletezzünk aritmetikai bizonyítással; így talán, a

* A két négyzetszám összegeként felírható számok aritmetikájában alapvető szerepe van az ún. Lagrange-azonosság idevonatkozó speciális esetének:

$$(u^2+v^2)(x^2+y^2)=(ux+vy)^2+(vx-uy)^2=(ux-vy)^2+(vx+uy)^2.$$

Ezzel a négyzetszámok összegeként felírható számok szorzatára vonatkozó állítás aritmetikai magyarázatát kapjuk, az azonosság ténylegesen előállítja a szorzatot két négyzetszám összegeként.

szorzatéhoz hasonlóan, megkaphatjuk a hányados felbontását is. Ez most az $\dfrac{a^2+b^2}{u^2+v^2}=x^2+y^2$ átrendezésből adódó

$$a^2+b^2=(u^2+v^2)(x^2+y^2)=(ux\pm vy)^2+(vx\mp uy)^2$$

egyenlet, illetve az innen kapott

$$\left.\begin{aligned} a&=ux+vy\\ b&=vx-uy\end{aligned}\right\}\qquad\qquad \left.\begin{aligned} a&=ux-vy\\ b&=vx+uy\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerek vizsgátatát jelenti; legalább az egyik esetben egész (x,y) értéket kellene kapnunk. A példában $(a=9,\ b=27,\ u=3,\ v=6)$ sajnos ez nem teljesül. Az első esetben $x=\dfrac{21}{5}$, $y=-\dfrac{3}{5}$, a másodikban pedig az ettől nem sokban különböző $x=\dfrac{21}{5}$, $y=\dfrac{3}{5}$ megoldást kapjuk. Az így nyert felbontásban az egész hányados nem egészek négyzetösszege, ahogy várnánk, pedig tudjuk, hogy létezik ilyen fenbontás is:

$$\frac{9^2+27^2}{3^2+6^2}=\left(\frac{21}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2.$$

Ebben a pillanatban meg kell tehát elégednünk az egzisztenciatétel állításával: a felbontás egészek négyzetösszegére létezik.

A probléma egy lehetséges általánosításaként megfogalmazhatunk hasonló kérdéseket az $x^2+d\cdot y^2$ alakú számok körében is, ahol a d adott egész szám. A Lagrange-azonosság kiterjesztése

$$(u^2+d\cdot v^2)\cdot(x^2+d\cdot y^2)=(ux\pm d\cdot vy)^2+d\cdot(uy\mp vx)^2$$

most is azonnal adja – anélkül, hogy az $x^2+d\cdot y^2$ alakú számok prímtényezős felbontásának jellemzésével kellene vesződnünk –, hogy az ilyen alakú számok halmaza is zárt a szorzásra nézve. Az eddigiek alapján a hányadosra vonatkozó megfelelő állítás vizsgálata egyáltalán nem látszik könnyűnek; a $d=0$, illetve 1 esetekben az adott alakú számok prímtényezős felbontásának jellemzéséből kaptuk meg a választ.

❄

Csörnyei Marianna, *a University College of London ösztöndíjas kutatója ezt a cikket még a Fazekas M. Fővárosi Gyakorló Gimnázium másodikos diákjaként írta egy órán fölvetett kérdés megválaszolásaként. A cikkben megfigyelhető, hogy a kétfajta megközelítés, az aritmetikai és a szerkezeti, hogyan működik együtt és vezet el a probléma megoldásához.*

JSP

❄

A cikkben azt fogjuk megvizsgálni, hogy a $d=1$-en kívül még milyen pozitív, 1-nél nagyobb d-kre teljesül, hogy ha két x^2+dy^2 alakú szám hányadosa egész, akkor a hányados is ilyen alakú.

Könnyen belátható, hogy a d nem lehet 1-nél nagyobb négyzetszám. Ugyanis $d=d_1^2$ esetén $\dfrac{d_1^2+d\cdot 1^2}{d_1^2+d\cdot 0^2}=2$, és ez $d\geq 4$ esetén nem írható fel x^2+dy^2 alakba. Tehát az állításunk biztosan nem fog minden d-re teljesülni.

Mielőtt továbbmennénk, bizonyítsuk be az alábbi tételt:

1. Tétel. *Ha két x^2+dy^2 alakú szám hányadosa egész, és az osztó prím, akkor a hányados is x^2+dy^2 alakú.***

Bizonyítás. Két x^2+dy^2 alakú szám szorzata is ilyen alakú:

$$(*)\qquad (x^2+dy^2)(z^2+dv^2)=(xz\pm dyv)^2+d(xv\mp yz)^2.$$

Vizsgáljuk most az $\dfrac{a^2+db^2}{x^2+dy^2}$ törtet, ahol x^2+dy^2 prím, és $x^2+dy^2\mid a^2+db^2$. A $(*)$ azonosság alapján elég azt megmutatni, hogy a és b felírható

$$(1)\qquad a=xz\pm dyv$$

$$(2)\qquad b=xv\mp yz$$

alakba, ahol z és v egész (mert ekkor a hányados z^2+dv^2 lesz). Az (1) és (2) egyenletekből kifejezve v-t:

$$v=\pm\frac{ay\pm bx}{x^2+dy^2},$$

így ahhoz, hogy a v egész legyen, arra van szükség, hogy

$$x^2+dy^2\mid ay+bx \qquad \text{vagy} \qquad x^2+dy^2\mid ay-bx$$

teljesüljön. Mivel az x^2+dy^2 prím, azért ehhez elég az

$$x^2+dy^2\mid (ay+bx)(ay-bx)$$

oszthatóságot megmutatnunk:

$$(ay+bx)(ay-bx)=a^2y^2-b^2x^2=a^2y^2+db^2y^2-db^2y^2-b^2x^2=$$
$$=(a^2+db^2)y^2-(x^2+dy^2)b^2.$$

Mivel $x^2+dy^2\mid a^2+db^2$, azért így valóban

$$x^2+dy^2\mid (ay+bx)(ay-bx),$$

tehát a két eset ($\pm$) közül az egyikben a v egész lesz. Az (1) és (2) egyenletekből könnyen látható, hogy a z racionális. Azt is tudjuk, hogy a z^2+dv^2 egész, így ha a v egész, akkor a z is biztosan egész.

** A tételt feladatként tűztük ki a KöMaL 2000/7. számában. A feladat száma helyesen: **B. 3400.**

A $d=2$ eset

Be fogjuk bizonyítani, hogy $d=2$ esetén az állításunk igaz, tehát ha két x^2+2y^2 alakú szám hányadosa egész, akkor a hányados is ilyen alakú.

Legyenek a Q halmaz elemei azok a p prímek, amelyekre $p \mid x^2+2y^2$-ből következik, hogy $p \mid x$ és $p \mid y$, és legyenek a P_1 halmaz elemei azok a prímek, amelyek felírhatók x^2+2y^2 alakba. Bebizonyítjuk, hogy ekkor minden prím eleme P_1-nek vagy Q-nak. A prímeknek ez a felbontása nyilván közös elem nélküli, hiszen $p=x^2+2y^2$ esetén $0<|x|<p$ és $0<|y|<p$, tehát p nem oszthatja x-et és y-t. Magát az állítást teljes indukcióval fogjuk bizonyítani.

Az állítás $p=2$ esetén igaz, mivel $2=0^2+2\cdot 1^2$, tehát $2\in P_1$. Legyen a $p>2$ prím, és tegyük fel, hogy az összes p-nél kisebb prímről már bebizonyítottuk, hogy eleme P_1-nek vagy Q-nak. Tegyük fel, hogy $p\notin Q$, és bizonyítsuk be, hogy ekkor $p\in P_1$.

Mivel $p\notin Q$, azért létezik olyan x és y, amelyre $p \mid x^2+2y^2$ és $p \nmid y$. Szorozzuk meg az x-et és az y-t egy olyan k számmal, hogy $yk\equiv 1 \pmod{p}$ legyen. Nyilván $p \mid (xk)^2+2(yk)^2$, és mivel $yk\equiv 1 \pmod{p}$, így $p \mid (xk)^2+2\cdot 1^2$. Biztos, hogy létezik olyan x_1, amelyre $x_1\equiv xk \pmod{p}$ és $|x_1|\le \dfrac{p-1}{2}$. Így $p \mid x_1^2+2\cdot 1^2$, ahol

$$x_1^2+2\cdot 1^2\le \left(\frac{p-1}{2}\right)^2<p^2.$$

Tehát találtunk egy olyan x^2+2y^2 alakú számot, amely osztható p-vel és kisebb p^2-nél. Így a prímtényezős felbontásában szerepel egy p tényező, és ezen kívül csak p-nél kisebb prímtényezői vannak, amelyekre teljesül az indukciós feltevésünk. Ha vannak Q-beli prímosztói, akkor osszuk el ezekkel az x-et és az y-t. Így egy olyan x^2+2y^2 alakú számot kapunk, amely osztható p-vel, és ezen kívül csak P_1-beli, azaz x^2+2y^2 alakú prímosztói vannak. Ezekkel az 1. Tétel alapján sorra leoszthatunk, végül p marad, és ezt a p-t x^2+2y^2 alakban fogjuk megkapni. Így valóban $p\in P_1$.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy minden prím eleme P_1-nek vagy Q-nak. Most vizsgáljuk az

$$\frac{x^2+2y^2}{z^2+2v^2}$$

törtet. Ha a (z^2+2v^2)-nek van Q-beli prímosztója, akkor azzal eloszthatjuk az x, y, z, v számokat. Így egy olyan

$$\frac{x_1^2+2y_1^2}{z_1^2+2v_1^2}$$

törtet kapunk, ahol a $z_1^2+2v_1^2$ csupa P_1-beli, azaz x^2+2y^2 alakú prím szorzata. Az 1. Tétel alapján ezekkel lehet egyszerűsíteni, így velük sorra egyszerűsítve végül egy x^2+2y^2 alakú számot fogunk kapni.

Ezzel az állításunkat $d=2$-re bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Hasonlóan bizonyíthatunk $d=1$ esetén is. Legyenek most a Q halmaz elemei azon p prímek, amelyekre $p\,|\,x^2+y^2$-ből következik, hogy $p\,|\,x$, $p\,|\,y$, és legyenek a P_1 halmaz elemei az x^2+y^2 alakú prímek. A fentiekhez hasonlóan bizonyíthatjuk, hogy minden prímszám eleme P_1-nek vagy Q-nak, majd hogy ha két x^2+y^2 alakú szám hányadosa egész, akkor az is x^2+y^2 alakú.

A bizonyítás alapján azt is könnyen megmondhatjuk, hogy mely számok írhatóak fel x^2+y^2 alakba: azok és csak azok a számok, amelyek prímfelbontásában a Q-beli prímek páros kitevőn szerepelnek. A Q-beli prímek pedig azok, amelyekre a -1 négyzetes nemmaradék modulo p, vagyis a $4k+3$ alakú prímek.

Így egy elemi és nem túl bonyolult bizonyítást kaptunk arra, hogy azok és csak azok a számok írhatóak fel két négyzetszám összegeként, amelyek prímtényezős felbontásában a $4k+3$ alakú prímek páros kitevőn szerepelnek.

Ha ugyanezt kérdezzük a most vizsgált számokról, akkor a $d=1$ esethez hasonlóan itt is annyit mondhatunk, hogy azok a számok írhatók x^2+2y^2 alakba, amelyek prímtényezős felbontásában a Q-beli prímek páros kitevőn szerepelnek. A Q-beli prímek: 5, 7, 13, 23, 29, 31, ... szerkezete azonban egyáltalán nem olyan egyszerű, mint a $d=1$ esetben.

Csörnyei Marianna

Néhány érdekesség a Fibonacci- és a Fibonacci-típusú sorozatokról I. rész

A KöMaL 2000. szeptemberi számában tűztük ki a következő feladatot:

A. 244. *Egy számsorozatot nevezzünk Fibonacci-típusúnak, ha a harmadiktól kezdve mindegyik eleme az előző kettő összege. Bizonyítsuk be, hogy a pozitív egész számok halmaza felbontható olyan Fibonacci-típusú végtelen sorozatok uniójára, amelyek közül semelyik kettőnek nincs közös eleme.*

A cikk első részében közelebbről meg fogjuk vizsgálni a „Fibonacci-típusú” sorozatokat. Eközben a Fibonacci-sorozat néhány érdekes tulajdonságára is fény derül. A második részben, amely a KöMaL következő számában fog megjelenni, több különböző megoldást mutatunk a feladatra.

Terjedelmi okokból nem bizonyítunk precízen minden egyes állítást; lesznek olyanok, amelyek igazolását feladat formájában az Olvasóra hagyjuk. Ez azonban nem fog meggátolni minket abban, hogy a feladatként kimondott állításokat is felhasználjuk más állítások igazolásához.

A Fibonacci-sorozat

A természetes számokból álló sorozatok között az egyik legismertebb és legérdekesebb a Fibonacci sorozat. A sorozat elemei, a Fibonacci számok a legváltozatosabb és legmeglepőbb helyeken fordulnak elő, bukkannak fel nem csak a matematikában, de a természetben is. Bár a Fibonacci-sorozatot szinte minden középiskolás ismeri, nem árt újra felírni a definícióját. Különösen azért, hogy a továbbiakban az elemeket egységesen jelöljük és számozzuk.

A sorozatot a következő rekurzióval definiáljuk:

$$F_0 = 0; \quad F_1 = 1; \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \geq 2). \tag{1}$$

A rekurzióból könnyen kiszámolhatjuk az első néhány Fibonacci-számot: $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $F_8 = 21$, $F_9 = 34$, $F_{10} = 55, \ldots$

Fibonacci-típusú sorozatok

Egyelőre egyetlen Fibonacci-típusú sorozatot láttunk: magát a Fibonacci-sorozatot. Először tehát nézzük meg, hogyan készíthetünk további ilyen sorozatokat. Egy lehetséges módszer, hogy a már ismert Fibonacci-típusú sorozatokból próbálunk újabbakat készíteni.

1. lemma. *Fibonacci-típusú sorozatot kapunk minden esetben, ha*

a) Egy Fibonacci-típusú sorozatnak elhagyjuk az első néhány elemét, vagy pedig olyan elemeket írunk elé, hogy a képzési szabály érvényes maradjon;

b) Egy Fibonacci-típusú sorozat összes elemét megszorozzuk ugyanazzal a számmal;

c) Néhány Fibonacci-típusú sorozat megfelelő elemeit összeadjuk.

1. feladat. *Bizonyítsuk be az* 1. *lemmát.*

Egy másik lehetőség, hogy az (1) rekurzióban más számokat választunk a sorozat első két elemének. A leghíresebb ilyen sorozat az úgynevezett Lucas-sorozat:

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1, \quad L_2 = 3, \quad L_{n+1} = L_n + L_{n-1},$$

de az első két elem helyére nyilván tetszőleges valós számokat írhatunk.

1. definíció. *Tetszőleges a, b valós számokra „az (a, b) paraméterű Fibonacci-típusú sorozatnak” nevezzük azt a számsorozatot, amelyet a következő rekurzív képzési szabály definiál:*

$$F_0^{(a,b)} = a; \quad F_1^{(a,b)} = b; \quad F_{n+1}^{(a,b)} = F_n^{(a,b)} + F_{n-1}^{(a,b)} \quad (n \geq 1).$$

Ezzel a jelöléssel Fibonacci eredeti sorozata $F_n^{(0,1)}$, a Lucas-sorozat pedig $F_n^{(2,1)}$.

Világos, hogy az 1. definícióban felírt sorozatok az összes Fibonacci-típusú sorozatot tartalmazzák, hiszen az első két elem egyértelműen meghatározza a többit. Ennek egy másik fontos következménye, hogy ha két Fibonacci-típusú sorozatról be akarjuk bizonyítani, hogy ugyanazok, akkor elég az első két elemről ellenőrizni, hogy megegyeznek.

Ha elkezdjük formálisan felírni az $(F_n^{(a,b)})$ sorozat elemeit, érdekes dolgot vehetünk észre:

$$F_2^{(a,b)} = F_1^{(a,b)} + F_0^{(a,b)} = 1a + 1b$$
$$F_3^{(a,b)} = F_2^{(a,b)} + F_1^{(a,b)} = 1a + 2b$$

$$F_4^{(a,\,b)}=F_3^{(a,\,b)}+F_2^{(a,\,b)}=2a+3b$$
$$F_5^{(a,\,b)}=F_4^{(a,\,b)}+F_3^{(a,\,b)}=3a+5b$$
$$F_6^{(a,\,b)}=F_5^{(a,\,b)}+F_4^{(a,\,b)}=5a+8b$$

Ezekből már megsejthetjük a következő tételt:

1. tétel. *a) A Fibonacci-sorozatból kiindulva, az 1. lemmában felsorolt lépésekkel bármelyik Fibonacci-típusú sorozatot előállíthatjuk.*

b) Tetszőleges a, b valós számokra az (a,b) paraméterű Fibonacci-típusú sorozat elemei felírhatók a következő alakban:

(2) $$F_n^{(a,\,b)}=F_{n-1}\cdot a+F_n\cdot b\quad (n\ge 1).$$

Bizonyítás. Legyenek a és b tetszőleges valós számok. Ha a Fibonacci-sorozat elejére odaírjuk az 1-et, akkor az 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Fibonacci-típusú sorozatot kapjuk. Ha ennek a-szorosához hozzáadjuk a Fibonacci-sorozat b-szeresét, akkor a kapott sorozat az $a\cdot F_{n-1}+b\cdot F_n$ sorozat lesz. Ennek 0. eleme $a\cdot 1+b\cdot 0=a$, 1. eleme $a\cdot 0+b\cdot 1=$ $=b$, vagyis a sorozat nem más, mint az (a,b) paraméterű Fibonacci-típusú sorozat. Az $(F_n^{(a,\,b)})$ sorozatot tehát elő tudtuk állítani az 1. lemmában leírt lépésekkel, az előállítást formálisan a (2) képlet írja le.

Fibonacci-típusú mértani sorozatok

A Fibonacci-sorozat nem mértani sorozat. Ha kiszámítjuk a szomszédos Fibonacci-számok hányadosát, láthatjuk, hogy a hányadosok különbözők:

$$\frac{1}{1}=1;\quad \frac{2}{1}=2;\quad \frac{3}{2}=1{,}5;\quad \frac{5}{3}\approx 1{,}667;\quad \frac{8}{5}=1{,}6;$$
$$\frac{13}{8}=1{,}625;\quad \frac{21}{13}\approx 1{,}615;\quad \frac{34}{21}\approx 1{,}6190;\quad \frac{55}{34}\approx 1{,}6176;\quad \dots$$

Azt is láthatjuk azonban, hogy a hányadosok egyre közelebb vannak egy számhoz, amelynek tizedestört alakja 1,618-del kezdődik.

Ugyanezt az eredményt kapjuk sok más Fibonacci-típusú sorozat esetében. Például a Lucas-sorozatra

$$\frac{3}{1}=3;\quad \frac{4}{3}\approx 1{,}333;\quad \frac{7}{4}=1{,}75;\quad \frac{11}{7}\approx 1{,}571;\quad \frac{18}{11}\approx 1{,}636;$$
$$\frac{29}{18}\approx 1{,}611;\quad \frac{47}{29}\approx 1{,}621;\quad \frac{76}{47}\approx 1{,}617;\quad \frac{123}{76}\approx 1{,}6184;\quad \dots$$

A Fibonacci-típusú sorozatok tehát bizonyos értelemben hasonlítanak egy olyan mértani sorozatra, amelynek hányadosa ez a titokzatos $q=1{,}618\dots$ szám.

A q szám pontos kiszámításához keressünk olyan mértani sorozatot, amelyik Fibonacci-típusú is. Legyen a sorozat első eleme a_1, hányadosa q. Ekkor tetszőleges n-re

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n,$$

$$a_1 q^{n+1} = a_1 q^n + a_1 q^{n-1},$$

azaz

$$q^2 = q + 1. \tag{3}$$

Ennek az egyenletnek két irracionális valós gyöke van: $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618034$ és $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}618034$. Tehát a keresett szám: $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Érdekesség, hogy egy másik Fibonacci-típusú mértani sorozatot is találtunk; ennek hányadosa a negatív $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. A q_2 hányadosú sorozatban egyre kisebb abszolút értékű számok szerepelnek, váltakozó előjellel.

Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

2. tétel. *Kétféle Fibonacci-típusú mértani sorozat létezik; ezeknek a hányadosa* $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, *illetve* $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Azt még nem tisztáztuk, hogy a Fibonacci-sorozat milyen értelemben hasonlít erre a q hányadosú mértani sorozatra; erre később, a 3. tételben térünk majd vissza.

A Fibonacci-sorozat és a $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ szám hatványai

Játsszunk most el egy kicsit a q számmal úgy, hogy csak a $q^2 = q + 1$ azonosságot használjuk fel. A q magasabb hatványait felírhatjuk $aq + b$ alakban:

$$\begin{aligned}
q^3 &= q^2 \cdot q = (q+1)q = q^2 + q = (q+1) + q = 2q + 1;\\
q^4 &= q^3 \cdot q = (2q+1)q = 2q^2 + q = 2(q+1) + q = 3q + 2;\\
q^5 &= q^4 \cdot q = (3q+2)q = 3q^2 + 2q = 3(q+1) + 2q = 5q + 3;\\
q^6 &= q^5 \cdot q = (5q+3)q = 5q^2 + 3q = 5(q+1) + 3q = 8q + 5;
\end{aligned}$$

2. lemma. *Tetszőleges n pozitív egészre*

$$q^n = F_n q + F_{n-1}. \tag{4}$$

1. bizonyítás. Mivel (4) mindkét oldalán Fibonacci-típusú sorozat áll, ezért elég az első két elemre ellenőrizni.

$$\begin{aligned}
n = 1: &\qquad q = F_1 q + F_0 = q,\\
n = 2: &\qquad q^2 = F_2 q + F_1 = q + 1.
\end{aligned}$$

2. bizonyítás. Az $1, q, q^2, \ldots$ sorozat nem más, mint az $(1, q)$ paraméterű Fibonacci-típusú sorozat, ezért a 1. tétel szerint $n \geq 1$ esetén

$$q^n = F_n^{(1,\,q)} = F_{n-1} \cdot 1 + F_n \cdot q.$$

2. feladat. *Bizonyítsuk be a 2. lemmát teljes indukcióval is.*

Most már bebizonyíthatjuk, hogy a szomszédos Fibonacci-számok hányadosa q-hoz tart, sőt ennél kicsit többet.

3. feladat. *Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy $n \geq 1$ esetén*

$$\frac{1}{3}q^n < F_n < \frac{1}{2}q^n.$$

3. tétel. *Tetszőleges n pozitív egészre*

$$\left|\frac{F_{n+1}}{F_n} - q\right| < \frac{1}{2F_n^2}.$$

Bizonyítás. A 2. lemma akkor is igaz marad, ha a q helyére a q_2 számot írjuk, tehát

$$F_{n+1}q_2 + F_n = q_2^{n+1}. \tag{5}$$

Akár a Viète-képletekből, akár közvetlenül könnyen ellenőrizhető, hogy $q_2 = \dfrac{-1}{q}$. Ezt beírva (5)-be és rendezve,

$$-\frac{F_{n+1}}{q} + F_n = \frac{(-1)^{n+1}}{q^{n+1}},$$

$$\left|\frac{F_{n+1}}{F_n} - q\right| = \left|\frac{(-1)^n}{q^n F_n}\right| = \frac{1}{q^n \cdot F_n} < \frac{1}{2F_n^2}.$$

(Az utolsó lépésben a 3. feladat felső becslését használtuk fel.)

A 3. tétel nem csak annyit mond, hogy az $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ értéke „körülbelül” q; azt is állítja, hogy ez a becslés nagyon pontos: a hiba $\dfrac{1}{2F_n^2}$-nél kisebb. *

---

* Ismeretes, hogy tetszőleges α irracionális számhoz végtelen sok olyan pozitív egész P, Q számpár létezik, amelyre $\left|\dfrac{P}{Q} - \alpha\right| < \dfrac{1}{2Q^2}$. Akik erről a témáról többet szeretnének tudni, azoknak ajánljuk, hogy olvassák el *Gyarmati Edit–Turán Pál:* Számelmélet c. jegyzetének *Diofantikus approximáció* c. fejezetét vagy *Erdős Pál–Surányi János:* Válogatott fejezetek a számelméletből c. könyvének *Racionális és irracionális számok. Számok megközelítése racionális számmal. (diofantoszi approcimáció)* c. fejezetét.

Hogyan készítsünk végtelen sok azonosságot a Fibonacci-számokkal?

A 2. lemma állítását felhasználhatjuk arra, hogy olyan azonosságokat gyártsunk, amelyekben a Fibonacci-számok szerepelnek. Ehhez először is szükség van a következő lemmára:

3. lemma. *Ha egy valós számot fel lehet írni $aq+b$ alakban alkalmas a, b egész számokkal, akkor ez a felírás egyértelmű. Más szóval, ha valamely a, b, c, d egész számokra $aq+b=cq+d$, akkor $a=c$ és $b=d$.*

Bizonyítás. Az egyenletet átrendezve $(a-c)q=d-b$. Mivel q irracionális, ez csak úgy lehetséges, ha $d-b=0$ és $a-c=0$.

Írjunk most fel egy tetszőleges azonosságot q hatványaival, például azt, hogy $q^{n+k}= q^n\cdot q^k$, és helyettesítsük be a 2. lemmában látott kifejezéseket a hatványok helyére:

$$\begin{aligned}
q^{n+k}&=q^n\cdot q^k,\\
F_{n+k}\cdot q+F_{n+k-1}&=(F_n\cdot q+F_{n-1})\cdot(F_k\cdot q-F_{k-1}),\\
F_{n+k}\cdot q+F_{n+k-1}&=F_nF_k\cdot q^2+(F_nF_{k-1}+F_{n-1}F_k)q+F_{n-1}F_{k-1},\\
F_{n+k}\cdot q+F_{n+k-1}&=F_nF_k\cdot(q+1)+(F_nF_{k-1}+F_{n-1}F_k)q+F_{n-1}F_{k-1},\\
F_{n+k}\cdot q+F_{n+k-1}&=(F_nF_k+F_nF_{k-1}+F_{n-1}F_k)q+(F_nF_k+F_{n-1}F_{k-1}),
\end{aligned}$$

amiből az egyértelműség miatt például

$$F_{n+k-1}=F_nF_k+F_{n-1}F_{k-1}. \tag{6}$$

4. feladat. *Bizonyítsuk be teljes indukcióval a* (6) *azonosságot.*

A Fibonacci-típusú sorozatok explicit alakja

Most a Fibonacci-típusú sorozatokat egy explicit, rekurzió nélküli formában fogjuk felírni. Ehhez az 1. lemma lépéseit fogjuk alkalmazni, de nem a Fibonacci-sorozatra, hanem az $1, q, q^2, \ldots$ és a $1, q_2, q_2^2, \ldots$ sorozatokra.

4. lemma. *Tetszőleges a, b valós számokhoz léteznek olyan c, d valós számok, amelyekre $a=c+d$ és $b=cq+dq_2$.*

Bizonyítás. A c és d kiszámításához csupán meg kell oldanunk a lineáris egyenletrendszert. Mint könnyen ellenőrizhető,

$$c=\frac{b-q_2a}{q-q_2} \quad \text{és} \quad d=\frac{qa-b}{q-q_2}. \tag{7}$$

4. tétel. *Tetszőleges a, b valós számokra az (a,b) paraméterű Fibonacci-típusú sorozat n-edik eleme felírható a következő alakban:*

$$F_n^{(a,b)}=cq^n+dq_2^n, \tag{8}$$

KöMaL – 2000/9 MAT0009 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 19:45 (10. lap)

ahol $c=\dfrac{b-q_2a}{q-q_2}$ *és* $d=\dfrac{qa-b}{q-q_2}$.

Bizonyítás. A (8) mindkét oldalán Fibonacci-típusú sorozat áll. Az egyenlőség az $n=0$ és $n=1$ esetekben a 4. lemma szerint teljesül.

A Fibonacci-sorozat paraméterei $(0,1)$. Egy kis számolással kapjuk, hogy ezekre a számokra $c=\dfrac{1}{\sqrt5}$ és $d=\dfrac{-1}{\sqrt5}$. Ezzel máris bebizonyítottuk a Fibonacci-sorozat explicit felírását:

5. tétel. *Tetszőleges n nem-negatív egész számra*

$$F_n=\frac{q^n-q_2^n}{\sqrt5}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n}{\sqrt5}.$$

5. feladat. *Írjuk fel explicit alakban az n-edik Lucas-számot.*

6. feladat. *Az 1. tétel szerint, ha a Fibonacci-sorozatból indulunk ki, akkor az 1. lemma lépéseivel az összes Fibonacci-típusú sorozatot előállíthatjuk, nincs szükség több sorozatra. A 4. tételben miért nem volt elég csak az egyik sorozat? Magyarázzuk meg!*

A Fibonacci-számok és Fibonacci-típusú sorozatok explicit felírásának ismeretében nagyon sok azonosság bizonyítása egyszerűvé válik: csupán be kell helyettesítenünk az explicit képletet a bizonyítandó azonosságba. A számelméleti és kombinatorikus tulajdonságok bizonyításában, így az **A. 244.** feladat megoldásában azonban további ötletekre van szükség.

Énekes Béla, Kós Géza

Mérőlap felvételire készülőknek II.

Párkányi László tanár úr emlékére

1. Egy üzem egy év alatt 26,5%-kal növelte termelését. Ez a növekedés két forrásból származott. Egyrészt növekedett a munkások száma, másrészt növekedett az egy főre jutó termelés. Az egy főre jutó termelésnövekedés 1,5-szer annyi százalékkal volt nagyobb, mint a munkások számának növekedése. Hány százalékos volt az egyik, illetve a másik növekedés?

2. Az ABC háromszögben $AB=10$ egység, $A(0;6)$, a B pont az x tengelyen van, a háromszög súlypontja $S(4;6)$. Számítsa ki a háromszög területét.

3. Mely valós x számokra pozitív a következő kifejezések értéke?

a) $\dfrac{x^4-16}{x^2-4}$; *b)* $|x+2|-|x-2|-x$; *c)* $1+\log_2\sin 2x$.

4. Az (a_n) sorozat első n tagjának összege $S_n = 2n^2 + 3n$, $n \in \mathbf{Z}^+$. A (b_n) sorozat n-edik tagja $b_n = 4n - 1$, $n \in \mathbf{Z}^+$.

a) Igazolja, hogy (a_n) és (b_n) számtani sorozatok. Írja fel az (a_n) sorozat n-edik tagját n függvényeként.

b) Fejezze ki n-nel a (b_n) sorozat első n tagjának összegét.

c) határozza meg a $(c_n) = (a_n + b_n)$ sorozat első n tagjának összegét.

5. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\cos x - \sin x = \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x}$$

egyenletet!

6. Egy háromszög egyik szöge 75°, a szög csúcsából kiinduló magasságvonal a szemközti oldalt $\sqrt{6}$, illetve $\sqrt{2}$ hosszúságú részre osztja. Számítsa ki a háromszög másik két szögét!

7. Határozza meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy az

$$x^2 + 4px + 2p^2 + 3p - 1 = 0$$

egyenlet

a) két valós gyöke egyenlő legyen;

b) két valós gyöke egymás reciproka legyen;

c) egyik valós gyöke a másik valós gyökének kétszerese legyen;

d) a valós gyökök szorzata minimális legyen.

8. Egy tepsi sült tésztát a tepsiben darabolunk fel, ennek két szélével párhuzamos, széltől szélig haladó vágásokkal. Nevezzük a szélek mentén keletkezett darabokat „rosszak”-nak, a többit „jó”-nak. Hány vágás esetén sikerül a süteményt úgy adagolni, hogy minden adag két „jó” és egy „rossz” darabból álljon? Hány adag állítható így össze?

Rábai Imre

A novemberi szakköri feladatok megoldásvázlatai, eredményei

1. Vezessünk be új változót. Legyen $x(x-1) = u$, $2x + 3y = v$. Ekkor $u \cdot v = 26$ és $u + v = 15$. Innen $u = 2$, $v = 13$ vagy $u = 13$, $v = 2$, azaz $x(x-1) = 2$, $2x + 3y = 13$ vagy $x(x-1) = 13$, $2x + 3y = 2$. Az egyenletrendszer megoldásai: $x_1 = 2$, $y_1 = 3$; $x_2 = -1$, $y_2 = 5$; $x_3 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{53})$, $y_3 = \frac{1}{3}(12 - \sqrt{53})$; $x_4 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{53})$, $y_4 = \frac{1}{3}(12 + \sqrt{53})$.

2. Legyen $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{DA} = \mathbf{d}$, ekkor $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$ $(\mathbf{a} + \mathbf{c} = -\mathbf{b} - \mathbf{d})$.

Ha az $ABCD$ négyszög paralelogramma, akkor $\mathbf{c} = -\mathbf{a}$ és $\mathbf{d} = -\mathbf{b}$, tehát $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = \mathbf{a}(-\mathbf{d}) + (-\mathbf{a})\mathbf{b} + (-\mathbf{b})\mathbf{c} + \mathbf{d}(-\mathbf{c}) = \mathbf{ab} - \mathbf{ab} + \mathbf{ab} - \mathbf{ab} = 0$.

Ha $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=0$, akkor $\mathbf{a}(-\mathbf{d})+(-\mathbf{a})\mathbf{b}+(-\mathbf{b})\mathbf{c}+\mathbf{d}(-\mathbf{c})=$ $=0$, tehát $(\mathbf{a}+\mathbf{c})(-\mathbf{b}-\mathbf{d})=0$. Mivel $-\mathbf{b}-\mathbf{d}=\mathbf{a}+\mathbf{c}$, azért $(\mathbf{a}+\mathbf{c})^2=0$; $((\mathbf{b}+\mathbf{d})^2=0)$, $\mathbf{a}=-\mathbf{c}$; $(\mathbf{b}=$ $=-\mathbf{d})$, azaz a négyszög paralelogramma.

3. Az egyenlet $(\mathrm{tg}\,x)$-re másodfokú. A diszkriminánsra $D=4(\sin y+\cos y)^2-4\cdot 2\geq 0$ kell, hogy teljesüljön, tehát $1+\sin 2y\geq 2$, $\sin 2y\geq 1$, azaz $\sin 2y=1$, $y=\dfrac{\pi}{4}+2n\pi$ vagy $y=\dfrac{5\pi}{4}+2n\pi$.

Ha $y_{1,n}=\dfrac{\pi}{4}+2n\pi$, akkor $\mathrm{tg}\,x=-\sqrt{2}$, $x_{1,k}\approx 2{,}186+k\pi$, ha $y_{2,n}=\dfrac{5\pi}{4}+2n\pi$, akkor $\mathrm{tg}\,x=$ $=\sqrt{2}$, $x_{2,k}\approx 0{,}955+k\pi$, $k,\ n\in\mathbf{Z}$.

4. Jelölje a trapéz hegyesszögét $2x$ $(0<x<\dfrac{\pi}{4})$. Ekkor a hosszabb párhuzamos oldal $2\mathrm{ctg}\,x$, a rövidebb párhuzamos oldal $2\mathrm{tg}\,x$, a trapéz szára $\mathrm{ctg}\,x+\mathrm{tg}\,x$, a trapéz magassága 2 egység.

A forgástest felszínét két egybevágó kúppalást és egy hengerpalást alkotja, a forgástest térfogata két forgáskúp és egy forgáshenger térfogatának az összege.

Az $A(x)$ felszín:

$$A(x)=2\cdot 2\pi(\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x)+2\cdot 2\pi\cdot 2\mathrm{tg}\,x,$$

$$A(x)=4\pi(3\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x),\qquad 0<x<\frac{\pi}{4}.$$

A $V(x)$ térfogat:

$$V(x)=2\cdot\frac{4\pi(\mathrm{ctg}\,x-\mathrm{tg}\,x)}{3}+4\pi\cdot 2\mathrm{tg}\,x,$$

$$V(x)=\frac{8\pi}{3}(2\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x),\qquad 0<x<\frac{\pi}{4}.$$

Ismeretes, hogy ha $a>0$ és $b>0$, akkor $a+b\geq 2\sqrt{ab}$, az egyenlőség $a=b$ esetén teljesül.

$$A(x)=4\pi(3\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x)\geq 4\pi\cdot 2\sqrt{3}=8\sqrt{3}\pi.$$

A minimális felszín $8\sqrt{3}\pi$ területegység; ez akkor jön létre, ha $3\mathrm{tg}\,x=\mathrm{ctg}\,x$ és $(0<x<$ $<\dfrac{\pi}{4})$, $\mathrm{tg}\,x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $2x=\dfrac{\pi}{3}$, $(2x=60^\circ)$. A minimális térfogat $V(x)=\dfrac{8\pi}{3}(2\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x)\geq\dfrac{8\pi}{3}\cdot 2\sqrt{2}=$ $=\dfrac{16\pi\sqrt{2}}{3}$ térfogategység; ez akkor jön létre, ha $2\mathrm{tg}\,x=\mathrm{ctg}\,x$, $\mathrm{tg}\,x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\approx 0{,}707$, ahonnan $x\approx$ $\approx 35^\circ 15'$, tehát $2x\approx 70^\circ 30'$.

Rábai Imre

Matematika gyakorlatok megoldása

C. 576. *Adjuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amellyel az* 1999*-et megszorozva a kapott szám utolsó* 4 *jegye* 2001*.*

Braun Melinda ötlete, Szeged

Megoldás. Legyen n egy olyan pozitív egész, amelyre $1999n$ 2001-re végződik. Ekkor különbségük

$$1999n - 2001 = \ldots 0000 \tag{1}$$

4 nullára végződik, és így osztható – többek között – 2000-rel.

Alakítsuk át az (1) különbséget a következőképpen:

$$1999n - 2001 = 2000(n-1) - (n+1).$$

Mivel a bal oldal osztható 2000-rel, a jobb oldalnak is oszthatónak kell lennie, azaz

$$2000 \mid n+1.$$

Az n szóbajöhető értékei: 1999, 3999, 5999, $\ldots$ Ezeket rendre megszorozva 1999-cel $5999 \cdot 1999 = 11992001$ az első olyan, amelyik 2001-re végződik, tehát 5999 a legkisebb n.

Hablicsek Márton (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.)

365 dolgozat érkezett. 5 pontos 227, 4 pontos 81, 3 pontos 28, 2 pontos 21, 1 pontos 4, 0 pontos 3, nem versenyszerű 1,

C. 577. *Egy fiók mélyén három pár zokni van, amelyek kissé különböznek egymástól. A fiókból egyesével kihalászva a zoknikat, mennyi annak a valószínűsége, hogy három húzás után még nem lesz a kivett zoknik között összetartozó pár?*

Megoldás. A fiókban található 6 db zokni közül az első húzásra valamelyik pár egyik darabját kihúzzuk. Annak a valószínűsége, hogy másodjára nem ennek a másik felét húzzuk ki: $\frac{4}{5}$, mivel 5 darab zokni maradt, és közülük 4 darab nem párja az elsőnek.

Harmadszorra a fiókban 4 zokni maradt, egy pár és 1-1 félpár, s most is az előzőktől eltérő zoknit kell húzni. Ez úgy lehetséges, ha a maradék pár egyikét húzzuk ki. Ennek valószínűsége: $\frac{2}{4}$.

Annak a valószínűsége tehát, hogy 3 húzás után még nem lesz összetartozó pár: $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{5}$.

Pajna Gabriella (Debrecen, Tóth Á. Gimn., 10. o.t.)

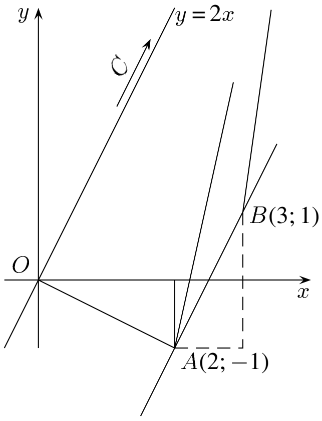
339 dolgozat érkezett. 5 pontos 225, 4 pontos 6, 3 pontos 5, 2 pontos 53, 1 pontos 50.

C. 578. *Egy háromszög csúcsainak koordinátái:* $A(2;-1)$, $B(3;1)$, $C(2^{1999};2^{2000})$. *Számítsuk ki az* ABC *háromszög területét.*

Megoldás. Vegyük észre, hogy $2^{2000} = 2 \cdot 2^{1999}$, ezért a C pont x, y koordinátáira $y = 2x$, azaz C rajta van az $y = 2x$ egyenesen.

Az AB egyenes meredeksége: $m = \dfrac{1-(-1)}{3-2} = 2$, így az párhuzamos az $y = 2x$ egyenessel.

Az ABC háromszög területének meghatározásához ismernünk kell a háromszög magasságát, ami megegyezik a fenti két párhuzamos egyenes távolságával. Bocsássunk az origóból merőlegest az AB egyenesre. Ennek egyenlete $y=-\frac{1}{2}x$, ezért tartalmazza az A pontot. Így a két egyenes távolsága



$$\overline{AO}=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}.$$

A háromszög alapja: $\overline{AB}=\sqrt{(1-(-1))^2+(3-2)^2}=$ $=\sqrt{5}$. Az ABC háromszög területe:

$$T=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{2}=2{,}5 \text{ területegység.}$$

Németh Miklós (Budapest, Könyves K. Gimn., 8. o.t.)

313 dolgozat érkezett. 5 pontos 222, 4 pontos 66, 3 pontos 16, 2 pontos 3, 1 pontos 4, nem versenyszerű 2.

C. 581. *Négy jármű egyszerre indul el A-ból, és egymást követően egyenlő időközönként érkezik meg B-be. A leggyorsabb és a leglassúbb jármű sebessége v_1, ill. v_4. Mekkora a másik két jármű sebessége?*

Megoldás. Ha a leggyorsabb jármű t_1 idő alatt teszi meg az $AB=s$ távolságot, akkor $t_1=\frac{s}{v_1}$. A leglassúbb jármű ezt a távolságot t_4 idő alatt teszi meg, $t_4=\frac{s}{v_4}$.

Mivel a járművek egyenlő időközönként érkeznek B-be, a t_4-t_1 időtartamot 3 egyenlő részre kell osztani, hogy megkapjuk az egyes járművek beérkezése között eltelt időt.

$$\frac{t_4-t_1}{3}=\frac{\frac{s}{v_4}-\frac{s}{v_1}}{3}=\Delta t.$$

A 2. jármű menetideje tehát

$$t_2=t_1+\Delta t=\frac{s}{v_1}+\frac{\frac{s}{v_4}-\frac{s}{v_1}}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{2s}{v_1}+\frac{s}{v_4}\right);$$

sebessége azért

$$v_2=\frac{s}{t_2}=\frac{s}{\frac{1}{3}\left(\frac{2s}{v_1}+\frac{s}{v_4}\right)}=\frac{3v_1v_4}{2v_4+v_1}.$$

A 3. jármű menetideje hasonlóan

$$t_3=t_4-\Delta t=\frac{s}{3}\left(\frac{2}{v_4}+\frac{1}{v_1}\right);$$

sebessége pedig

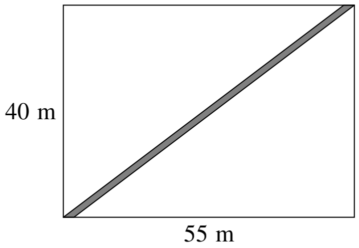
$$v_3 = \frac{s}{t_3} = \frac{3v_1v_4}{v_4+2v_1}.$$

Megjegyzés. A feladat általánosítható n járműre. Ekkor az időközök nagysága $\Delta t = \dfrac{t_n - t_1}{n-1} = \dfrac{\frac{s}{v_n} - \frac{s}{v_1}}{n-1}$, a k-adik jármű sebessége pedig

$$v_k = \frac{s}{t_k} = \frac{(n-1)v_1v_n}{(n-1)v_n + (k-1)v_1 - (k-1)v_k} = \frac{(n-1)v_1v_n}{(n-k)v_n + (k-1)v_1}.$$

Gajdos Béla (Beregszász, Bethlen G. Gimn., 12. o.t.)

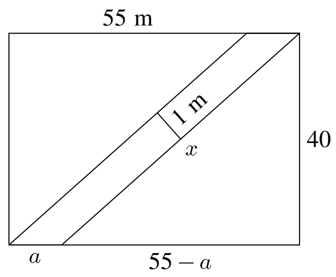
258 dolgozat érkezett. 5 pontos 198, 4 pontos 8, 3 pontos 8, 2 pontos 22, 1 pontos 10, 0 pontos 11, nem versenyszerű 1.



C. 582. *Az ábrán látható sáv szélessége* 1 m. *Mekkora a területe?*

Javasolta: *Nagy Zoltán* 9. o.t., Budapest

Megoldás. A sáv egy paralelogramma. Rövidebbik oldalát jelölje a, hosszabbik oldala Pitagorasz tételével $x = \sqrt{40^2 + (55-a)^2}$. paralelogramma területét felírhatjuk kétféleképpen: $t = x\cdot 1 = a\cdot 40$. Az x értékét behelyettesítve és a műveleteket elvégezve, a-ra másodfokú egyenletet kapunk:



$$1599a^2 + 110a - 4625 = 0.$$

Innen $a = \dfrac{5}{3}$ (a másik gyök negatív).

A paralelogramma területe:

$$t = 40\cdot\frac{5}{3} = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}\ \mathrm{m}^2.$$

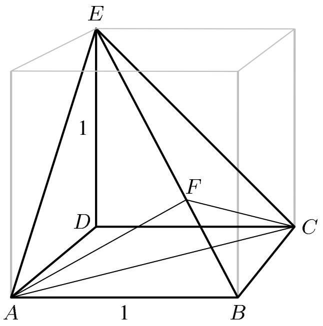
Kegyes Tamás (Budapest, Baár-Madas Gimn., 12. o.t.)

285 dolgozat érkezett. 5 pontos 197, 4 pontos 29, 3 pontos 8, 2 pontos 2, 1 pontos 4, 0 pontos 45.

C. 583. *Egy gúla alapja egység oldalú négyzet. Egyik oldaléle szintén egységnyi hosszú és egybeesik a gúla magasságával. Mekkora a legnagyobb lapszöge?*

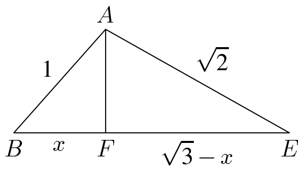
Javasolta: *Salát Máté* 9. o.t., Budapest

Megoldás. A gúla alaplapja $ABCD$, magassága ED. A gúlát egy egység oldalú kockából származtattuk; $AE = EC = \sqrt{2}$, a kocka lapátlója, $EB = \sqrt{3}$ pedig a kocka testátlója. Az AED és CED lapsíkok az alapsíkra és egymásra merőlegesek, az AEB és BEC síkok az alapsíkkal 45°-os szöget zárnak be, az AED, illetve CED lapokkal pedig hegyesszöget.



1. ábra

Ezért az AEB és BEC lapok által meghatározott szög a gúla legnagyobb lapszöge. Kiszámításához állítsunk merőlegest A-ból és C-ből az EB élre, ezek mérik a két sík hajlásszögét. A kocka szimmetriájából következik, hogy a két merőleges ugyanabban az F pontban metszi az EB élt.



2. ábra

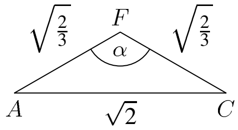
Először az AEB háromszögben kiszámítjuk az AF szakasz hosszát az AFB és AFE derékszögű háromszögekből:

$$AF^2 = 1 - x^2 \qquad AF^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{3} - x\right)^2.$$

Innen $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ és $AF = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Az AFC háromszögre felírjuk a koszinusztételt:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - 2}{2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}} = -\frac{1}{2},$$



3. ábra

ahonnan $\alpha = 120°$, ez tehát a legnagyobb lapszög.

Megjegyzés. Három ilyen egybevágó gúlát összeilleszthetünk egy kockává. A kocka testátlója körül elhelyezkedő 3 egybevágó lapszög hézagtalanul kitölti a teret, vagyis egyre éppen 360° harmada, azaz 120° jut. A gúla többi lapszöge mind kisebb 120°-nál.

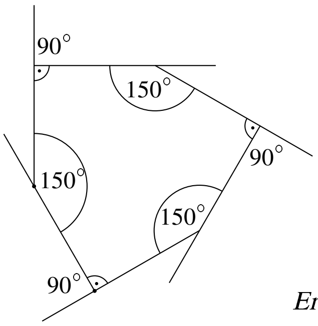
Salát Máté (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 9. o.t.)

200 dolgozat érkezett. 5 pontos 152, 4 pontos 1, 3 pontos 7, 2 pontos 4, 1 pontos 20, 0 pontos 16.

C. 586. *Legfeljebb hány oldalú az a konvex sokszög, amelynek nincs két szomszédos tompaszöge?*

Megoldás. Tudjuk, hogy egy konvex sokszög külső szögeinek összege 360°, azaz legfeljebb 4 olyan külső szög lehet, amely 90°-nál nem kisebb, mert különben az összegük meghaladná a 360°-ot.

Ha a sokszögnek 4 darab 90°-os külső szöge van, akkor téglalap. Ez megfelel a feltételnek, hiszen egyáltalán nincsen tompaszöge.



Más esetben tehát a sokszögnek legfeljebb 3 olyan külső szöge lehet, amely nem kisebb 90°-nál, s ennek megfelelően legfeljebb 3 belső szöge kisebb vagy egyenlő 90°-kal. Ennek a 3 belső szögnek kell elválasztania a tompaszögeket egymástól. Két ilyen hegyesszög között legfeljebb egy tompaszög lehet, ezért a tompaszögek száma is 3.

Tehát a konvex sokszög legfeljebb hat oldalú lehet. Egy ilyen látható az *ábrán.*

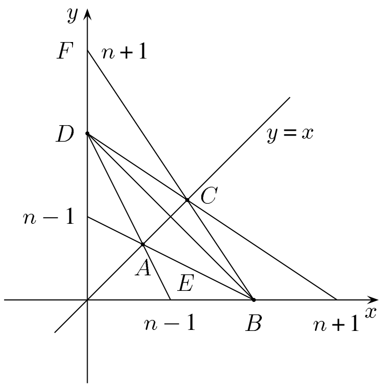
Erdei Zsuzsa (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., 10. o.t.)

149 dolgozat érkezett. 5 pontos 53, 4 pontos 40, 3 pontos 18, 2 pontos 11, 1 pontos 4, 0 pontos 23.

C. 587. *Legyen n pozitív egész. Az x-tengely n abszcisszájú pontját összekötjük az y-tengely $n-1$ és $n+1$ ordinátájú pontjaival, továbbá az y-tengely n ordinátájú pontját összekötjük az x-tengely $n-1$, illetve $n+1$ abszcisszájú pontjaival. Mekkora területű négyszöget zár közre ez a négy szakasz?*

Megoldás. Jelöljük a négyszög csúcsait A, B, C és D-vel az *ábra* szerint. Mivel $B(n;0)$ és $D(0;n)$, a $BD=n\sqrt{2}$.

A szerkesztés szimmetriájából következik, hogy az A és C pontok rajta vannak az x és y tengelyek szögfelezőjén, az $y=x$ egyenesen, ami merőleges a BD átlóra. Így a keresett terület az átlók szorzatának a fele.



Az AC távolság meghatározásához először A és C koordinátáit írjuk fel.

A $D(0;n)$, $E(n-1;0)$ pontokon átmenő egyenes egyenlete:

$$y=\frac{-n}{n-1}x+n.$$

Az A pont koordinátáit ezen egyenesnek az $y=x$ egyenessel való metszéspontja adja.

$$A\left(\frac{n(n-1)}{2n-1};\frac{n(n-1)}{2n-1}\right).$$

A C pont koordinátáit az $F(0;n+1)$, $B(n;0)$ koordinátájú pontokon átmenő egyenesnek az $y=x$ egyenessel való metszéspontja adja.

Az FD egyenes egyenlete:

$$y=\frac{n+1}{-n}x+n+1 \qquad \text{és így} \qquad C\left(\frac{n(n+1)}{2n+1};\frac{n(n+1)}{2n+1}\right).$$

A két pont távolsága:

$$AC=\sqrt{\left(\frac{n(n+1)}{2n+1}-\frac{n(n-1)}{2n-1}\right)^2+\left(\frac{n(n+1)}{2n+1}-\frac{n(n-1)}{2n-1}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{2\left(\frac{2n^2}{4n^2-1}\right)^2}=\sqrt{2}\frac{2n^2}{4n^2-1}.$$

Végül a négyszög területe:

$$T=\frac{BD\cdot AC}{2}=\frac{1}{2}n\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\frac{2n^2}{4n^2-1}=\frac{2n^3}{4n^2-1}.$$

135 dolgozat érkezett. 5 pontos 95, 4 pontos 2, 3 pontos 16, 2 pontos 3, 1 pontos 11, 0 pontos 4, nem versenyszerű 4.

Matematika feladatok megoldása

B. 3336. *Egy szabályos háromszöget a középpontja körül pozitív irányba elforgatunk először* 3°*-kal, azután tovább forgatjuk* 9°*-kal, majd* 27°*-kal, a* k*-adik lépésben* 3^k *fokkal. Hányféle helyzetet vehet fel a háromszög az elforgatások eredményeképpen?*
(*3 pont*)

Megoldás. Az első három transzformáció eredménye rendre 3°-os, $3+9=12^\circ$-os, $3+9+27=39^\circ$-os elforgatás; ezek a szabályos háromszöget különböző helyzetekbe viszik, amelyek a kiindulási helyzettől is különböznek. Négy egymás utáni transzformáció eredménye viszont (a k-adik elforgatás utáni helyzethez képest)

$$3^{k+1}+3^{k+2}+3^{k+3}+3^{k+4}=3^k(3+9+27+81)=3^k\cdot 120$$

fokos elforgatás, ami 120° többszöröse lévén, a szabályos háromszög helyzetét nem változtatja meg. A $(k+4)$-edik forgatás utáni helyzet tehát megegyezik a k-adik forgatás utánival (minden k-ra), így a háromszög a mozgatások során összesen 4 különböző helyzetet vesz fel.

Koch Dénes (Linz, Akad. Gymn., 11. o.t.)

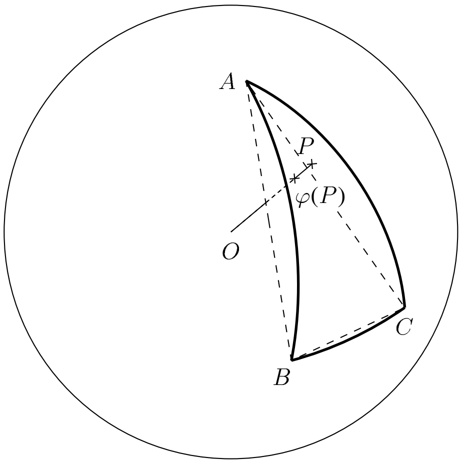
Megjegyzés. Sokan észrevették ugyan, hogy a negyedik forgatás önmagába viszi a háromszöget, de nem bizonyították be, hogy a továbbiakban is csak ez a négyféle helyzet állhat fenn. Ők 1 pontot kaptak megoldásukra.

393 dolgozat érkezett. 3 pontos 142, 2 pontos 24, 1 pontos 150, 0 pontos 77.

B. 3339. *Bizonyítsuk be, hogy egy gömbháromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást. (Egy gömb felszínén lévő A és B pontok gömbi összekötő egyenesének az A-t és B-t tartalmazó nem hosszabb főkörívet nevezzük.)*

(*4 pont*)

Megoldás. Jelöljük a gömbháromszög csúcsait A, B, C-vel, a gömb középpontját pedig O-val. Tekintsük azt a φ leképezést, amely a gömbháromszög egy tetszőleges P pontjához hozzárendeli az OP egyenes és az ABC sík $\varphi(P)$ metszéspontját. φ nyilván kölcsönösen egyértelmű. A gömbháromszög mindegyik csúcsának képe önmaga, gömbi oldalainak képe a két-két csúcs által meghatározott gömbi húr. Az O-n átmenő húrfelező merőleges sík a gömbháromszög megfelelő oldalát is felezi, tehát a gömbháromszög oldalfelező pontjának képe éppen a megfelelő húr felezőpontja. Egy ív képe megegyezik a két végpontja képét összekötő szakasszal, ezért a gömbi súlyvonalak képei megegyeznek a síkbeli ABC háromszög súlyvonalaival. Ezek egy ponton mennek át, s mivel φ bijektív, ez a pont egy gömbi pontnak a φ-képe. Ezen a gömbi ponton a gömbháromszög mindhárom súlyvonala átmegy, ami éppen a bizonyítandó állítás.



Gömöri Péter (Budapest, Szent István Gimn., 12. o.t.)

75 dolgozat érkezett. 4 pontos 64, 3 pontos 4, 2 pontos 2, 1 pontos 2, 0 pontos 2, nem versenyszerű 1.

B. 3355. *Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög pontosan akkor derékszögű, ha valamelyik két hozzáírt kör sugarának szorzata egyenlő a háromszög területével.*

(*4 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint,* Eger

Megoldás. Közismert, hogy ha egy háromszög oldalai a, b, c. kerülete $2s$, területe T, beírt körének sugara ϱ, a hozzáírt kör sugarai pedig ϱ_a, ϱ_b és ϱ_c, akkor

$$(1)\qquad \varrho\cdot s=\varrho_a(s-a)=\varrho_b(s-b)=\varrho_c(s-c)=T=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

(A képletek bizonyításának vázlata a megoldás utáni *megjegyzésben* olvasható.)

Elegendő megmutatnunk, hogy a $\varrho_a\cdot\varrho_b=T$ és az $a^2+b^2=c^2$ egyenlőségek ekvivalensek. Az (1) összefüggések szerint

$$\varrho_a\cdot\varrho_b=\frac{T}{s-a}\cdot\frac{T}{s-b}=\frac{T^2}{(s-a)(s-b)}=s(s-c).$$

Látható, hogy $\varrho_a \cdot \varrho_b = T$ pontosan akkor teljesül, ha $s(s-c) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, azaz ha

$$s(s-c) = (s-a)(s-b).$$

Mivel $2s = a+b+c$, azért ez ekvivalens az

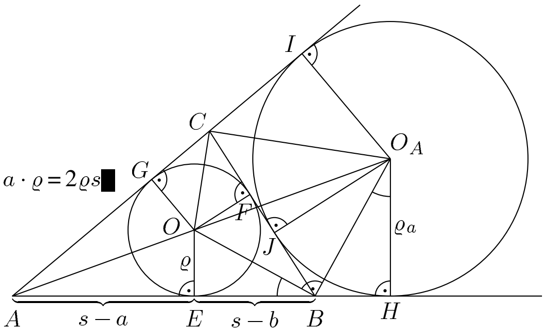
$$(a+b+c)(a+b-c) = (c-a+b)(c+a-b)$$

egyenlőséggel. Elvégezve a szorzásokat

$$(a+b)^2 - c^2 = c^2 - (a-b)^2$$

adódik, amit rendezve és 2-vel osztva kapjuk az $a^2+b^2=c^2$ összefüggést. Ez éppen az, amit bizonyítani akartunk, hiszen egy háromszög pontosan akkor derékszögű, ha két oldalhosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével.

Megjegyzés. A képletek bizonyításához használjuk az *ábra* jelöléseit. Az ABC háromszög területe megegyezik az OAB, OBC és OCA háromszögek területének összegével. A három kis háromszög mindegyikében ϱ az O-ból induló magasság, amiből $2T = c\cdot\varrho + b\cdot\varrho + a\cdot\varrho = 2\varrho s$ adódik. Ha az O_AAB és az O_AAC háromszögek területének összegéből kivonjuk az O_ABC háromszög területét, akkor szintén az ABC háromszög területét kapjuk. Az O_A-ból húzott mindhárom magasság ϱ_a, ezért $2T = c\cdot\varrho_a + b\cdot\varrho_a - a\cdot\varrho_a = 2\varrho_a(s-a)$. Ugyanígy látható be, hogy $\varrho_b(s-b) = T = \varrho_c(s-c)$.



Az OB egyenes az ABC háromszög B-hez tartozó belső-, O_AB pedig egyik külső szögfelezője, ezért $OBO_A\sphericalangle = 90^\circ$. Tehát $OBE\sphericalangle = BO_AH\sphericalangle$, mert merőleges szárú hegyesszögek. Így az OBE és a BO_AH derékszögű háromszögek hasonlóak, mert megfelelő szögeik egyenlők. Ezért a megfelelő oldalaik aránya is megegyezik:

$$\frac{\varrho}{EB} = \frac{BH}{\varrho_a}. \tag{2}$$

Mivel egy körhöz egy külső pontból húzható két érintőszakasz hossza egyenlő, azért $AE=AG$, $BE=BF$ és $CF=CG$. Másrészt $AE+BE=c$, $BF+CF=a$ és $CG+AG=b$, amiből adódik, hogy pl. $BE=s-b$. Az $AI=AH$, $BH=BJ$, $CJ=CI$ és az $AH-BH=c$, $AI-CI=b$ és $BJ+CJ=a$ egyenlőségekből pedig pl. $BH=s-c$ következik. Vagyis a (2) egyenlőség szerint

$$\frac{\varrho}{s-b} = \frac{s-c}{\varrho_a}.$$

Felhasználva a $\varrho = \dfrac{T}{s}$ és a $\varrho_a = \dfrac{T}{s-a}$ összefüggéseket kapjuk, hogy

$$\frac{T}{s(s-b)} = \frac{(s-c)(s-a)}{T},$$

amiből már egyszerűen adódik *Héron képlete:*

$$T=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

208 dolgozat érkezett. 4 pontos 109, 3 pontos 18, 2 pontos 75, 1 pontos 2, 0 pontos 3, nem versenyszerű 1.

B. 3356. *Mutassuk meg, hogy két szomszédos egész szám negyedik hatványának különbsége végtelen sok esetben bontható fel két négyzetszám összegére.*
(*4 pont*)

Megoldás. Nyilván

$$d=(a+1)^4-a^4=\left((a+1)^2-a^2\right)\left((a+1)^2+a^2\right)=(2a+1)\left((a+1)^2+a^2\right).$$

Ha a egy négyzetszám kétszerese, akkor tehát $a=2k^2$ mellett

$$d=\left((2k)^2+1\right)\left((a+1)^2+a^2\right)=(2k(a+1)+a)^2+(2ka-(a+1))^2.$$

Pallos Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzések. 1. A fenti példán kívül még sok más olyan pozitív egész a szám létezik, amelyre $(a+1)^4-a^4$ két négyzetszám összege. Ilyenek például: $a=\dfrac{n^2-1}{2}$, ha n páratlan (*Birkner Tamás,* Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 7. o.t.), illetve $a=n(n+1)$, tetszőleges n egészre (*Boros Vazul,* Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 10. o.t.).

2. Ismeretes, bár e feladat megoldásához nem használható, hogy pontosan azok a természetes számok írhatók fel két négyzetszám összegeként, amelyeknek a prímtényezős felbontásában minden $4k+3$ alakú prím páros kitevőn szerepel.

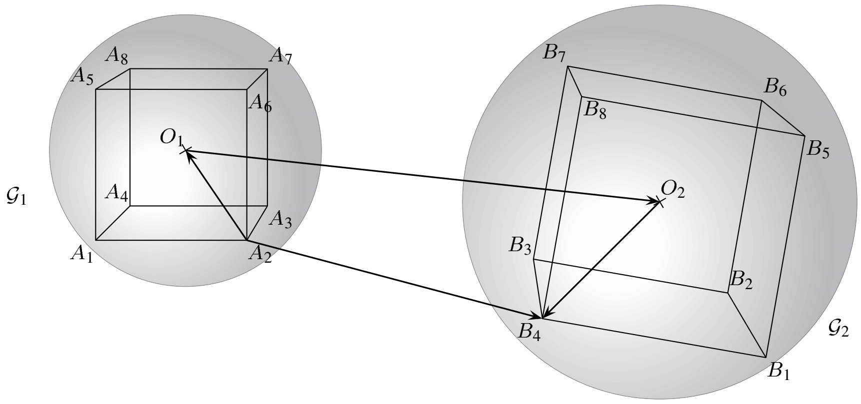
144 dolgozat érkezett. 4 pontos 120, 3 pontos 5, 2 pontos 2, 0 pontos 16, nem versenyszerű 1 dolgozat.

B. 3361. *Adottak a $\mathcal{G}_1$ és a $\mathcal{G}_2$ gömbök. Legyen K_1 a $\mathcal{G}_1$ gömbbe, K_2 a $\mathcal{G}_2$ gömbbe írt kocka. Mutassuk meg, hogy annak a 64 vektornak az összege, amelynek kezdőpontja a K_1 egyik csúcsa, végpontja pedig a K_2 egyik csúcsa, nem függ a kockák helyzetétől.*
(*3 pont*)

Megoldás. A kocka csúcsaiból a kocka köré írt gömb középpontjába vagy a középpontból a csúcsokba mutató vektoroknak az összege **0**. Valóban, hiszen a kocka szimmetriaközéppontja megegyezik a köré írt gömb középpontjával, így csúcsból és az átellenes párjából a középpontba mutató két-két vektor összege **0**, vagy fordítva, a középpontból egy csúcsba és az átellenes párjába mutató két-két vektor összege **0**.

Legyenek a K_1 csúcsai $A_1, A_2, \ldots, A_8$, középpontja O_1, a K_2 csúcsai $B_1, B_2, \ldots, B_j$, középpontja pedig O_2. Az $\overrightarrow{A_iB_j}$ vektor felírható

$$\overrightarrow{A_iB_j}=\overrightarrow{A_iO_1}+\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2B_j}$$



alakban, tehát a 64 vektor összege:

$$8 \cdot \sum_{i=1}^{8} \overrightarrow{A_iO_1} + 64\overrightarrow{O_1O_2} + 8 \cdot \sum_{j=1}^{8} \overrightarrow{O_2B_j}.$$

Viszont $\sum_{i=1}^{8} \overrightarrow{A_iO_1} = \sum_{j=1}^{8} \overrightarrow{O_2B_j} = \mathbf{0}$, ezért a 64 vektor összege $64\overrightarrow{O_1O_2}$, ami valóban nem függ a kockák helyzetétől, csak a gömbközéppontok távolságától.

Somogyi Dávid (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t.)

105 dolgozat érkezett. 3 pontos 95, 2 pontos 6, 1 pontos 2, 0 pontos 2.

B. 3365. *Bizonyítsuk be, hogy ha* $abc = 1$ *és* $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, *akkor az* a, b, c *számok közül legalább az egyik* 1*-gyel egyenlő.*

(*3 pont*) Javasolta: *Gyanta Nándor,* Budapest

I. megoldás. A második egyenlőség mindkét oldalát megszorozzuk $abc = 1$-gyel:

$$a + b + c = bc + ac + ab.$$

Mindkét oldalhoz hozzáadhatunk $0 = (1 - abc)$-t:

$$a + b + c = 1 + bc + ac + ab - abc.$$

Rendezéssel:

$$0 = 1 - a - b - c + bc + ac + ab - abc,$$

$$0 = (1 - a)(1 - b)(1 - c).$$

Mivel a szorzat valamelyik tényezője 0, a, b, c valamelyike 1.

II. megoldás. A második egyenletet $abc=1$-gyel szorozva $a+b+c=ab+bc+ca$ adódik. Ezt a közös értéket u-val jelölve, az a, b, c számok mindegyike gyöke az $f(x)=x^3-ux^2+ux-1=0$ egyenletnek, sőt az egyenletnek nincs is más gyöke, hiszen

$$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-ux^2+ux-1.$$

Mivel $f(1)=1-u+u-1=0$, azért az a, b, c valamelyike valóban 1.

Papp Dávid (Budapest, Szent István Gimn., 12. o.t.)

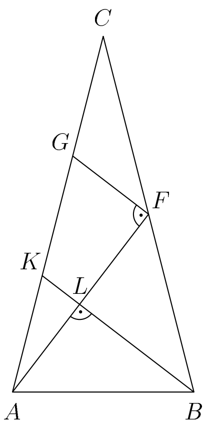
231 dolgozat érkezett, közülük 3 pontos 211, 2 pontos 5, 1 pontos 10, 0 pontos 4, nem versenyszerű 1.

B. 3367. *Egy egyenlő szárú háromszög alakú papírlapot összehajtottunk úgy, hogy az alap A csúcsa a BC szár felezőpontjába került. Ekkor a hajtás élének egyik végpontja az AC szárat $p:q$ arányban osztja. Milyen arányban osztja a hajtás élének másik végpontja az AB alapot?*

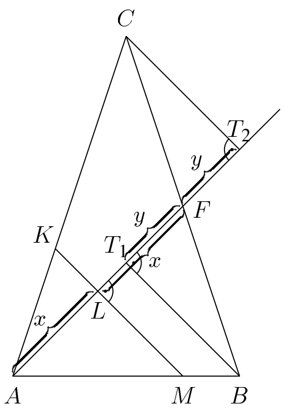
(*5 pont*) A *Magyar Hírlap* nyomán

Megoldás. A hajtás során az A csúcs a BC szár F felezőpontjába kerül, ezért a hajtás éle megegyezik az AF szakasz – vagyis a BC szárhoz tartozó súlyvonal – felező merőlegesével. Jelöljük ennek a felező merőlegesnek és az AC, AF, AB szakaszoknak a metszéspontját rendre K, L, M-mel.

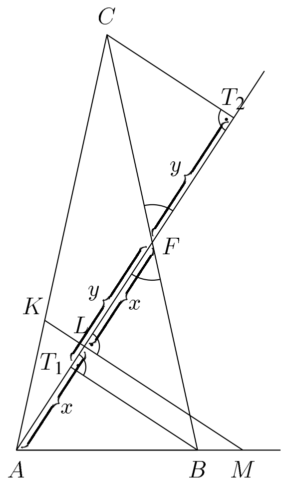
Először vizsgáljuk meg, hogy milyen $p:q$ arányok esetén lesz M az AB alap belső pontja. Ha a KL egyenes átmegy B-n (*1. ábra*), akkor – G-vel jelölve az F-en átmenő, KL-lel párhuzamos egyenes és AC metszéspontját – a párhuzamos szelők tétele miatt $AK:KG=AL:LF=1:1$ és $KG:GC=BF:FC=1:1$. Tehát $p:q=AK:KC=$ $=AK:(KG+GC)=1:2$. Ha a $p:q$ arány csökken, vagyis rögzített AB esetén a C csúcs távolodik az alaptól, akkor a KL egyenes az AB szakaszon kívül – annak B-n túli meghosszabbításán – metszi az AB egyenest.



1. ábra



2. ábra



3. ábra

Feltehetjük tehát, hogy $q<2p$. Jelöljük a B-ből, illetve C-ből az AF egyenesre bocsájtott merőlegesek talppontját T_1, illetve T_2-vel (*2. ábra*). Ekkor a BFT_1 és a CFT_2 derékszögű háromszögek egybevágóak, mert megfelelő szögeik egyenlők, és $BF=CF$. Ezért $T_1F=FT_2$. Legyen ez a távolság y, $AL=LF$ pedig x. A párhuzamos szelők tétele szerint

(1) $$\frac{p}{q}=\frac{AK}{KC}=\frac{AL}{LT_2}=\frac{AL}{LF+FT_2}=\frac{x}{x+y} \qquad \text{és}$$

(2) $$\frac{AM}{MB}=\frac{AL}{LT_1}=\frac{AL}{LF-FT_1}=\frac{x}{x-y}.$$

Az (1) egyenletből $y=\frac{q-p}{p}x$ adódik, amit (2)-be helyettesítve

$$\frac{AM}{MB}=\frac{x}{x-\frac{q-p}{p}x}=\frac{p}{2p-q}.$$

Tehát a hajtás élének másik végpontja $p:(2p-q)$ arányban osztja a háromszög AB alapját.

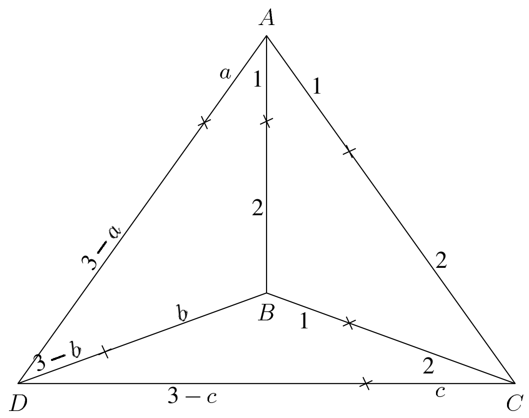
Somogyi Dávid (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Ha előjeles szakaszokkal számolunk, akkor $q>2p$ esetén is igazak az (1) és (2) egyenlőségek, s így a végeredmény is ugyanaz. Ennek bizonyítása leolvasható a *3. ábráról.*

96 dolgozat érkezett. 5 pontos 62, 4 pontos 20, 3 pontos 3, 2 pontos 6, 1 pontos 2, 0 pontos 3.

B. 3369. *Egy tetraéder mindegyik élén kijelöljük az egyik harmadolópontot. Mekkora lehet az ezek által meghatározott konvex test és a tetraéder térfogatának hányadosa?* (*4 pont*)

Megoldás. Ha egy tetraéder egy csúcsából kiinduló három éle közül az egyiket λ-szorosára változtatjuk, a másik kettőt pedig változatlanul hagyjuk, akkor a keletkezett új tetraéder térfogata az eredeti tetraéder térfogatának λ-szorosa lesz, mert a két tetraédernek lesz egy közös lapja, az ahhoz tartozó magasság pedig a párhuzamos szelők tétele miatt szintén λ-szorosra változik.



A harmadolópontok által meghatározott test térfogatát úgy kaphatjuk meg, hogy az eredeti tetraéder térfogatából levonjuk annak a négy kis tetraédernek a térfogatát, amelyeket a nagy tetraéder egy-egy csúcsa, valamint az abból a csúcsból kiinduló három-három

élen lévő harmadolópontok alkot-
nak. Legyen az eredeti tetraéder térfogata 27 egység. Ha megjelölünk egy élen egy harmadolópontot, akkor az él közelebbi végpontjához írjunk 1-est, a távolabbi végponthoz pedig 2-est. Így a tetraéder minden csúcsához összesen három szám kerül, s e számok szorzata az első bekezdésben leírtak alapján éppen az ott levágott kis tetraéder térfogatát adja.

A tetraéder 4 csúcsához összesen 6 db 1-est írtunk, ezért feltehetjük, hogy az $ABCD$ tetraéder AB és AC élén is 1-et írtunk A-hoz. B-t és C-t választhatjuk úgy, hogy a BC élen B-nél legyen 1. Jelöljük a DA, DB és DC élen D-hez írt számokat rendre $(3-a)$, $(3-b)$, $(3-c)$-vel. Ekkor a levágott kis tetraéderek térfogata A-nál a, B-nél $2b$, C-nél $4c$, D-nél pedig $(3-a)(3-b)(3-c)$. Mivel a, b és c egymástól függetlenül 1 vagy 2 lehet, azért a következő nyolc eset lehetséges:

a	b	c	levágott tetraéderek össztérfogata
1	1	1	15
1	1	2	15
1	2	1	13
1	2	2	15
2	1	1	12
2	1	2	14
2	2	1	12
2	2	2	15

Tehát a harmadolópontok által meghatározott konvex test, azaz a levágások után megmaradó test térfogata $27-15=12$, $27-13=14$, $27-12=15$ vagy $27-14=13$ lehet, vagyis a keresett hányados értéke $\frac{12}{27}$, $\frac{13}{27}$, $\frac{14}{27}$ vagy $\frac{15}{27}$.

Béky Bence (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján

61 dolgozat érkezett. 4 pontos 41, 3 pontos 13, 2 pontos 4, 1 pontos 2, 0 pontos 1.

B. 3370. *A és B két véletlen esemény. Igazoljuk, hogy*

$$|P(A\cdot B)-P(A)\cdot P(B)|\le\frac{1}{4}.$$

(*5 pont*)

Megoldás. Feltehető, hogy például $P(A)\le P(B)$. Mivel nyilván $P(AB)\le P(A)$, azért

$$P(AB)-P(A)P(B)\le P(A)-P(A)P(B)=$$

$$P(A)(1-P(B))\le P(B)(1-P(B))\le\left(\frac{P(B)+(1-P(B))}{2}\right)^2=\frac{1}{4},$$

a (kéttagú) számtani és mértani középre fennálló egyenlőtlenség szerint. Jelölje másrészt $\bar{A}$ az A esemény tagadását; ekkor $P(\bar{A})=1-P(A)$. Alkalmazzuk a már bebizonyított

$P(XY) - P(X)P(Y) \le \frac{1}{4}$ egyenlőtlenséget az $X = B$, $Y = \bar{A}$ eseményekre:

$$P(B\bar{A}) - P(B)P(\bar{A}) \le \frac{1}{4}. \tag{1}$$

A $B\bar{A}$ és BA egymást kizáró események, és $B\bar{A} + BA = B$, ezért $P(B\bar{A}) = P(B) - - P(BA)$. Így (1) szerint

$$\frac{1}{4} \ge P(B\bar{A}) - P(B)P(\bar{A}) = (P(B) - P(AB)) - (P(B) - P(B)P(A)) =$$
$$= P(A)P(B) - P(AB),$$

amit átrendezve:

$$P(AB) - P(A)P(B) \ge -\frac{1}{4},$$

bizonyítva a kívánt egyenlőtlenség másik felét.

Hablicsek Márton (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.)

Megjegyzés. A bizonyított egyenlőtlenség éles: ha például $A = B$ az az esemény, hogy egy érmét feldobva „fejet" kapunk, akkor $P(AB) - P(A)P(B) = P(A) - P(A)^2 = \frac{1}{4}$. Ha B-nek viszont az A tagadását választjuk, akkor $P(AB) - P(A)P(B) = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ teljesül.

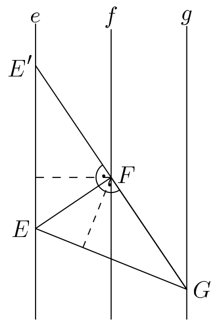
Papp Dávid (Budapest, Szent István Gimn., 12. o.t.)

81 dolgozat érkezett, 5 pontot kapott 59, 4 pontot 4, 3 pontot 8, 2 pontot 5, 0 pontot 5 beküldő.

B. 3373. *Az f egyenes két oldalán, tőle egységnyi távolságra megrajzoljuk az e és g egyeneseket. Legyenek E, F és G a megfelelő egyenesek megfelelő pontjai úgy, hogy az általuk meghatározott háromszögben F-nél derékszög van. Mekkora a háromszög F-ből induló magassága?*

(*3 pont*) Javasolta: *Pap Gyula,* Debrecen

Megoldás. Hosszabbítsuk meg az FG szakaszt úgy, hogy az e egyenessel való metszéspontja E' legyen. Mivel az e és f egyenesek távolsága megegyezik az f és g egyenesek távolságával, valamint e, f és g párhuzamosak, ezért $GF = FE'$. Így az EFG és az EFE' háromszögek egymásnak az EF egyenesre vonatkozó tükörképei. Az EFE' háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság éppen az e és f egyenesek távolsága, vagyis egységnyi. Ezért az EFG háromszögben az F-ből induló magasság is egységnyi.



Tóth Szilveszter (Tata, Eötvös J. Gimn., 11. o.t.)

Megjegyzés. A példa a következő ötletből keletkezett: Vegyünk egy papírcsíkot. Hajtsuk be az egyik oldalát tetszőleges szögben, majd hajtsuk mellé a másik oldalát úgy, hogy a papírcsík szélei egymáshoz illeszkedjenek. A keletkező derékszögű háromszög magassága a papírcsík szélességével lesz egyenlő.

167 dolgozat érkezett. 3 pontos 141, 2 pontos 10, 1 pontos 2, 0 pontos 5. Nem versenyszerű 9 dolgozat.

KöMaL – 2000/9 MAT0009 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 19:45 (28. lap)

Szimultán háromszög-egyenlőtlenségekről

B. 3394. *Bizonyítsuk be, hogy pontosan akkor szerkeszthető a, b és c hosszúságú oldalakkal háromszög, ha az a, b, c pozitív valós számokra teljesül, hogy*

$$(a^2+b^2+c^2)^2>2(a^4+b^4+c^4).$$

(*3 pont*)

Megoldás. Tudjuk, hogy az a, b és c hosszúságú oldalakkal pontosan akkor szerkeszthető háromszög, ha

$$a+b>c; \qquad b+c>a \qquad \text{és} \qquad a+c>b.$$

Ezért, ha a, b és c egy háromszög oldalai, akkor

$$a+b-c>0, \qquad b+c-a>0 \quad \text{és} \quad a+c-b>0,$$

és ekkor nyilván

$$(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)>0 \tag{2}$$

is teljesül.

Megmutatjuk, hogy ha három pozitív valós számra fennáll a (2) egyenlőtlenség, akkor teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek is:

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük ugyanis, hogy $a\ge b\ge c$. Ha (2) igaz, akkor a bal oldal három tényezője közül vagy egy pozitív és a két másik negatív, vagy pedig mindhárom tényező pozitív. Az első esetben, mivel az $a+b-c$ tényező a legnagyobb, csak ez lehet a pozitív, és

$$\begin{aligned} b+c-a&<0,\\ c+a-b&<0,\\ \text{összeadva}\qquad 2c&<0, \end{aligned}$$

így $c<0$ volna, ami ellentmondás. Tehát valóban csak az az eset állhat fenn, amikor

$$a+b>c, \qquad b+c>0, \qquad a+c>b.$$

A (2) egyenlőtlenséggel azonban ekvivalens a következő:

$$(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0, \tag{3}$$

hiszen a (2) egyenlőtlenség mindkét oldalát egy pozitív tényezővel, $a+b+c>0$-val szoroztuk.

(3) pedig a szorzások elvégzése után némi átalakítással az ekvivalens

$$(a^2+b^2+c^2)^2>2(a^4+b^4+c^4)$$

alakra hozható. Tehát pontosan akkor szerkeszthető az a, b, c hosszúságú oldalakkal háromszög, ha az a, b, c pozitív valós számokra teljesül az (1) egyenlőtlenség.

A B. 3394. feladat egy általánosítása

A feladatban azt kellett bizonyítani, hogy a pozitív a, b, c számokhoz pontosan akkor létezik a, b, c oldalú háromszög, ha

$$(a^2+b^2+c^2)^2>2(a^4+b^4+c^4). \tag{1}$$

M. S. Klamkin egy általánosítási lehetőséget vizsgált [1] cikkében:

Tétel. *Ha az $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív számokra ($n\ge 3$ egész szám) teljesül az*

$$(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)^2>(n-1)(a_1^4+a_2^4+\dots+a_n^4) \tag{2}$$

egyenlőtlenség, akkor közülük bármely három a_i, a_j és a_k hosszúságú szakaszból szerkeszthető háromszög. ($i\ne j\ne k$, $1\le i,\ j,\ k\le n$, $i,\ j,\ k\in\mathbf{N}$)

Figyeljük meg, hogy ez a tétel csak egyik irányban általánosítása az (1) egyenlőtlenségnek: elegendő feltételt ad arra, hogy n darab szakasz közül tetszőlegesen kiválasztott háromból lehessen háromszöget szerkeszteni. A (2) egyenlőtlenség nem szükséges, ezt mutatja például az $a_1=5$, $a_2=5$, $a_3=5$, $a_4=9$ számnégyes. E számokra nem teljesül a (2) egyenlőtlenség, míg az 5, 5, 5 és 9 egység hosszúságú szakaszok közül bármely háromból szerkeszthető háromszög.

Nézzük most, hogyan bizonyította *M. S. Klamkin* a fenti tételt:

Teljes indukcióval bizonyítunk. $n=3$-ra éppen a **B. 3394.** feladat állítását kapjuk. Legyen most $n>3$, és tegyük fel, hogy fennáll (2). Azt mutatjuk meg, hogy (2)-ből következik az

$$(a_2^2+a_3^2+\dots+a_n^2)^2>(n-2)(a_2^4+a_3^4+\dots+a_n^4) \tag{3}$$

egyenlőtlenség. Elemi algebrai lépések és teljes négyzetté alakítás után (2)-ről látható, hogy ekvivalens az alábbi egyenlőtlenséggel:

$$0>\left(a_1^2-\frac{S_2}{n-2}\right)^2-\frac{\left(S_2^2-(n-2)S_4\right)(n-1)}{(n-2)^2}, \tag{4}$$

ahol $S_m=a_2^m+a_3^m+\dots+a_n^m$. Így (2)-ből valóban következik (3). Az indukciós feltevés szerint így bármely három szakaszból szerkeszthető háromszöög, ha a szakaszok egyike sem a_1. De a_1-et tetszőlegesen választottuk, így a tételt igazoltuk.

A továbbiakban megvizsgáljuk a bizonyításban említett elemi algebrai lépéseket. A (2) egyenlőtlenségben az $a_2, a_3, \dots, a_n$ számok m-edik hatványösszegét S_m-mel jelölve ($m=2$, illetve 4)

$$(a_1^2+S_2)^2>(n-1)(a_1^4+S_4).$$

Négyzetre emelés és rendezés után

$$a_1^4+2a_1^2S_2+S_2^2>(n-1)a_1^4+(n-1)S_4$$

$$0>(n-2)a_1^4-2a_1^2S_2-S_2^2+(n-1)S_4 \tag{5}$$

adódik. A továbbiakban elosztjuk az egyenlőtlenséget a pozitív $(n-2)$ számmal, majd ígéretünk szerint teljes négyzetté alakítunk.

$$0 > a_1^4 - \frac{2a_1^2 S_2}{n-2} - \frac{S_2^2}{n-2} + \frac{(n-1)S_4}{n-2},$$

$$0 > \left(a_1^4 - \frac{2a_1^2 S_2}{n-2} + \frac{S_2^2}{(n-2)^2}\right) - \frac{S_2^2}{(n-2)^2} - \frac{S_2^2}{n-2} + \frac{(n-1)S_4}{(n-2)}$$

$$0 > \left(a_1^2 - \frac{S_2}{n-2}\right)^2 - \frac{n-1}{(n-2)^2}(S_2^2 - (n-2)S_4).$$

Ez pedig valóban a (4) egyenlőtlenség.

A megfordításhoz írjuk (4)-et az alábbi alakba:

$$\frac{n-1}{(n-2)^2}(S_2^2 - (n-2)S_4) > \left(a_1^2 - \frac{S_2}{n-2}\right)^2.$$

Innen
$$\frac{n-1}{(n-2)^2}(S_2^2 - (n-2)S_4) > 0$$

és így valóban
$$S_2^2 - (n-2)S_4 > 0.$$

Megkaptuk a (3)-as egyenlőtlenséget; (3) és (4) tehát valóban ekvivalensek. Feltételezhetően *M. S. Klamkin* körülbelül erre a levezetésre gondolt.

Klamkin [1] cikkében megemlíti, hogy ha $n > 3$, akkor megoldatlan probléma olyan polinom-egyenlőtlenség megadása, amely szükséges és elegendő ahhoz, hogy n darab adott szakasz közül bármely hármat kiválasztva háromszöget lehessen szerkeszteni belőlük.

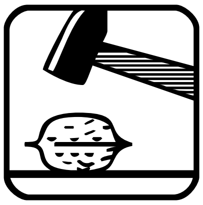
Klamkin másik nyitott problémája az, hogy adjuk meg polinom-egyenlőtlenség formájában annak szükséges és elegendő feltételét, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_r$ pozitív számokból bárhogyan kiválasztva r darabot $(3 < r < n)$ ezek egy r oldalú sokszög oldalainak hosszai legyenek.

Irodalom

[1] Klamkin, Murray S., Simultaneous Triangle Inequalities, *Mathematics Magazine*, **60** (1987), No. 4., 236–237.

Köszönöm szépen dr. Pintér Lajos tanár úrnak (JATE, Bolyai Intézet, Szeged), hogy elküldte az [1] *cikket.)*

Csete Lajos
Markotabödöge



Nehezebb feladatok megoldása

Helyesbítés

Több olvasónk is felhívta a figyelmünket, hogy a szeptemberi szám 354. oldalán, az **A. 229.** feladat megoldásában az utolsó előtti bekezdés hibásan jelent meg. A bekezdés szövege helyesen a következő:

Legyen B-nek az az oldala, amit b nem metsz, d. Ez az oldal metszi A-nak 4 oldalát, tehát metszi a-t és c-t is; hasonlóképpen b is metszi B-nek a többi 4 oldalát. Mivel a és c a b egyenes ellentétes oldalain vannak, a d szakasz metszi a b egyenest. Így azonban a b egyenes a B ötszög valamennyi oldalát metszi, ez pedig ellentmond a 2. segédtételnek. A metszéspontok száma tehát tényleg nem lehet 20.

A. 234. *Az A, B, és C betűk felhasználásával szavakat (véges hosszúságú betűsorozatokat) készítünk. Egy szóval a következő műveleteket végezhetjük:*

a) *A szóban kiválasztunk néhány egymás utáni betűt – esetleg csak egyetlen egyet, vagy akár a teljes szót –, és „megduplázzuk”, például $B\underline{BCA}C \to BBCABCAC$;*

b) *Az* a) *lépés visszafelé: Ha valahol a szóban két egymás utáni részlet megegyezik, akkor az egyiket elhagyjuk: $\underline{ABCABC}BC \to ABCBC$.*

Igazoljuk, hogy ilyen lépések sorozatával bármelyik szóból eljuthatunk egy legfeljebb 8-betűs szóhoz.

Megoldás. Nevezzük az u és v szavakat ekvivalensnek, ha átalakíthatók egymásba egymásba a megadott lépésekkel, és jelöljük ezt $u \sim v$-vel. Ezen kívül jelentse uv az u és v szavak egyszerű egymás után írását.

Lemma. Ha az u szó mindhárom betűt tartalmazza, v pedig tetszőleges szó, akkor $uvu \sim u$.

A lemmát a v hossza szerinti indukcióval igazoljuk. Ha v az üres szó, akkor $uvu = uu \sim u$. Ha v egyetlen betűből áll, akkor ezt a feltétel szerint u tartalmazza: $u = u_1vu_2$ alkalmas u_1 és u_2 szavakkal. Ekkor

$$uvu = u_1vu_2vu_1\underline{vu_2} \sim \underline{u_1vu_2vu_1vu_2}vu_2 \sim u_1\underline{vu_2vu_2} \sim u_1vu_2 = u.$$

Tegyük most fel, hogy a lemma igaz k-nál rövidebb v esetén ($k \ge 2$), és legyen v hossza k. Írjuk fel v-t v_1v_2 alakban, ahol v_1 és v_2 k-nál rövidebb szavak. Az indukciós feltevést alkalmazva az u és v_2, illetve v_2u és v_1 szavakra $uv_2u \sim u$, $(v_2u)v_1(v_2u) \sim v_2u$ és

$$uvu = uv_1v_2u \sim (uv_2u)v_1v_2u = u(v_2u)v_1(v_2u) \sim u(v_2u) \sim u.$$

Ezzel a lemmát igazoltuk.

Ezután bebizonyítjuk a feladat állítását. Nyilván elég igazolni, hogy minden legalább 9 hosszúságú szó ekvivalens egy nála rövidebbel. Tekintsünk egy legalább kilencbetűs szót. Írjuk fel ezt uvw alakban, ahol u és w a szó első, illetve utolsó 4 betűjéből áll. Ha u vagy w valamelyike csak kétféle betűt tartalmaz, akkor vagy van benne egymás után két egyforma betű, vagy pedig kétféle betűt tartalmaz váltakozva. A szó mindkét esetben triviálisan rövidíthető: az első esetben az ismétlődő betűk egyikét hagyhatjuk el, a másik esetben a négybetűs szó két fele ugyanaz, ezért az egyik fele elhagyható. Feltételezhetjük tehát, hogy u és w is mindhárom fajta betűből tartalmaz legalább egyet. Ebben az esetben a lemma alapján $uwu \sim u$ és $wuvw \sim w$, ezért

$$uvw \sim uwuvw \sim uw.$$

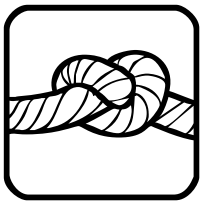
Az uvw szó tehát ekvivalens a nála rövidebb uw szóval.

Kiss Gergely (Fazekas M, Főv. Gyak. Gimn., 11. o.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Nem minden kilencbetűs szó rövidíthető triviálisan. Az AB-vel kezdődő kilencbetűs szavak között 18 olyan van, amiben nincs két egymás utáni megegyező részlet. A megoldók többsége ezekre az esetekre egy-egy egyedi megoldást adott.

7 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Csóka Endre, Harangi Viktor, Kiss Gergely és Varjú Péter, 4 pontot Gyenes Zoltán és Zábrádi Gergely. 0 pontos 1 dolgozat.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (605–609.)



C. 605. Oldjuk meg az alábbi egyenletet.

$$\frac{1}{[x]}+\frac{1}{\{x\}}=x$$

($[x]$ az x szám egész részét és $\{x\}$ a tört részét jelöli.)

C. 606. Az udvaron egy téglalap alakú részt egyforma négyzetlapokkal lebetonoztak. Pontosan 20 sort raktak le, s minden sorban 35 lap van. Egy csiga elindul a téglalap egyik csúcsából az átló mentén. Hány négyzetlap belsején halad át, mire a szemközti csúcsba ér?

C. 607. Egy 12 cm oldalú négyzetet a P pont körül 90°-kal elforgatunk. A két négyzet együttesen 211 cm^2 területet fed le. Az elforgatott négyzetet a P körül ismét elforgatjuk 90°-kal, így egy harmadik négyzetet kapunk. A három négyzet által lefedett terület 287 cm^2. Határozzuk meg a P pont helyzetét.

Javasolta: *Bakonyi Gábor,* Budapest

C. 608. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy KENO sorsolás alkalmával az 1-től 80-ig terjedő egész számok közül kisorsolt 20 szám egyikében sem fordul elő a 8-as számjegy?

C. 609. Bizonyítsuk be, hogy a $3x-4y+4=0$ egyenletű egyenes a sík bármely rácspontjától racionális távolságra van.

❄

Beküldési határidő: 2001. január 15.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest, Pf. 47. 1255

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (3412–3421.)

B. 3412. Mutassuk meg, hogy két kivétellel minden pozitív egész q számhoz létezik olyan p egész, hogy $\sqrt{56} < p/q < \sqrt{58}$.

(*3 pont*) Az NRICH Online Maths Club feladata: `http://nrich.maths.org`

B. 3413. A tavaly még professzionálisnak nevezett magyar labdarúgó bajnokság egy csoportjában az idén 8 csapat szerepel. Minden meccs egyik résztvevője otthon, a másik idegenben játszik. Egy idényben, amikor minden csapat minden másikkal pontosan egyszer játszik, egy csapat sorsolását igazságosnak nevezzük, ha felváltva játszik otthon és idegenben. Lehet-e olyan sorsolást készíteni, amelyben mind a 8 csapat sorsolása igazságos?

(*4 pont*)

B. 3414. Egy húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra, oldalhosszai négyzetének összege 8 egység. Határozzuk meg a körülírt körének sugarát.

(*3 pont*) Javasolta: *Besenyei Ádám,* Tatabánya

B. 3415. A p paraméter mely értékeire van az

$$x+1=\sqrt{px}$$

egyenletnek pontosan egy valós gyöke?

(*4 pont*)

B. 3416. Egy négyszöglapokkal határolt konvex poliéder felszíne A, éleinek négyzetösszege Q. Bizonyítsuk be, hogy $Q \ge 2A$.

(*4 pont*) Javasolta: *Besenyei Ádám,* Tatabánya

B. 3417. Tekintsük a síkon az összes olyan kört, amelynek egyenlete felírható

$$\alpha\left((x-2)^2+y^2-1\right)+\beta\left((x+2)^2+y^2-1\right)=0$$

alakban, ahol α és β valós számok. Hol vannak azok a pontok, amelyek egyik ilyen körön sincsenek rajta?

(*4 pont*)

B. 3418. Az ABC háromszögben az A, B, illetve C csúcsokból induló súlyvonalak a háromszög köré írt kört rendre az A_1, B_1, illetve C_1 pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy $t_{A_1BC}+t_{B_1CA}+t_{C_1AB} \ge t_{ABC}$.

(*5 pont*) Javasolta: *Varga István,* Békéscsaba

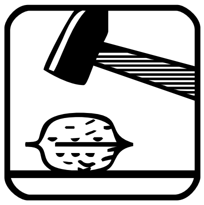
B. 3419. A sík mely pontjaiból húzható az $y=x^3$ egyenletű görbéhez három érintő?
(*4 pont*)

B. 3420. Keressünk olyan $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ nem konstans függvényt, amelynek grafikonja 3-szoros nagyítással kapható a függvény négyzetének grafikonjából.
(*5 pont*) Javasolta: *Lóczi Lajos,* Budapest

B. 3421.[*] Bizonyítsuk be, hogy ha x, y, u és v olyan egész számok, amelyekre $\dfrac{x^2+3y^2}{u^2+3v^2}$ egész, akkor alkalmas a, b egészekkel ez a hányados is felírható a^2+3b^2 alakban.
(*5 pont*) Javasolta: *Csörnyei Marianna,* London

❄

Beküldési határidő: 2001. január 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (251–253.)

A. 251. Adott a térben egy gömb. Ha a P pont illeszkedik a gömbre, a Q pont pedig nem, akkor jelölje P_Q a PQ egyenes és a gömb P-től különböző metszéspontját. Ha a PQ egyenes érinti a gömböt, akkor legyen $P_Q=P$.

Igazoljuk, hogy ha a gömb A, B, C, D pontjai nincsenek egy síkban, akkor legfeljebb két olyan Q pont létezik, amelyre az $A_QB_QC_QD_Q$ tetraéder egyenlő oldalú. (Egy tetraédert egyenlő oldalúnak nevezünk, ha a lapjai egybevágóak.)

A. 252. Igazoljuk, hogy ha az $a_1,\ldots,a_n$ egész számok $(n+k)$-val osztva összesen legalább $k+1$ különböző maradékot adnak, akkor kiválasztható közülük néhány (lehet, hogy csak egy; lehet, hogy az összes), amelyek összege osztható $(n+k)$-val.
Javasolta: *Károlyi Gyula* és *Podoski Károly,* Budapest

A. 253. Keressük meg az összes olyan $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ függvényt, amelyre tetszőleges x, y pozitív valós számok esetén

$$f(x)f\,(yf(x))=f(x+y).$$

IMC[**] 2000, London

[*] A megoldáshoz ajánljuk az 513. oldalon kezdődő, *Számelmélet az* x^2+dy^2 *alakú számok körében* című cikk elolvasását.

[**] Egyetemi hallgatók nemzetközi matematika versenye

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS

(Volume 50. No. 9. December 2000)

New exercises for practice – competition C (see page 544): **C. 605.** Solve the equation $\frac{1}{[x]}+\frac{1}{\{x\}}=x$, where $[x]$ and $\{x\}$ denote the integer and the fractional part of x, respectively. **C. 606.** A rectangular yard is tiled with identical square tiles. The tiles are arranged in 20 rows, each row containing 35 tiles. A snail is moving along a diagonal of the rectangle, starting at one vertex. Find the number of tiles crossed by the snail before it reaches the opposite vertex. **C. 607.** A square of side 12 cm is rotated about a point P through an angle of 90°. The two squares cover an area of 211 cm^2 altogether. A third square is obtained rotating the square further about P, again through 90°. Given also that the three squares cover an area of 287 cm^2 together, determine the position of P. (Proposed by *G. Bakonyi,* Budapest) **C. 608.** In the course of a KENO drawing, 20 winning numbers are drawn from the lot of the first 80 positive integers. Calculate the probability that none of the winning numbers contain the digit 8. **C. 609.** Prove that the distance between the line $3x-4y+4=0$ and a lattice point in the plane is always a rational number.

New problems – competition B (see page 545): **B. 3412.** Prove that for all but two positive integers q there is an integer p such that $\sqrt{56}<p/q<\sqrt{58}$. (*3 points*) (NRICH Online Maths Club; `http://nrich.maths.org`) **B. 3413.** In the Hungarian Soccer League, last year still called 'professional', one group comprises 8 teams. At each match one of the participating teams plays away while the other plays at home. During a season, when each team plays exactly one game with any other team, the draw of a team is called balanced if it plays alternately at home and away. Is it possible to arrange that each of the 8 teams has a balanced draw? (*4 points*) **B. 3414.** In a cyclic quadrilateral whose diagonals are perpendicular, the sum of the squares of the edges is 8. Determine the circumradius of the quadrilateral. (*3 points*) (Proposed by *Á. Besenyei,* Tatabánya) **B. 3415.** Determine all values of the parameter p for which the equation $x+1=\sqrt{px}$ has exactly one root. (*4 points*) **B. 3416.** Each face of a convex polyhedron is a quadrilateral. The surface area of the polyhedron is A, the sum of the squares of its edges is Q. Prove that $Q\geq 2A$. (*4 points*) (Proposed by *Á. Besenyei,* Tatabánya) **B. 3417.** Consider all circles in the plane whose equation can be written in the form $\alpha\left((x-2)^2+y^2-1\right)+\beta\left((x+2)^2+y^2-1\right)=0$ with suitable real numbers α, β. Determine the locus of points which do not lie on any of these circles. (*4 points*) **B. 3418.** In a triangle ABC, the medians starting at vertices A, B, C intersect the circumcircle at points A_1, B_1, C_1, respectively. Prove that $t_{A_1BC}+t_{B_1CA}+t_{C_1AB}\geq t_{ABC}$. (*5 points*) (Proposed by *I. Varga,* Békéscsaba) **B. 3419.** Find those points in the plane through which 3 different tangents can be drawn to the curve $y=x^3$. (*4 points*) **B. 3420.** Find a non-constant function $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ whose graph can be obtained from the graph of the square of the function by an enlargement of ratio 3. (*5 points*) (Proposed by *L. Lóczi,* Budapest) **B. 3421.** * Assume that $\frac{x^2+3y^2}{u^2+3v^2}$ is an integer number for certain integers x, y, u and v. Prove that this fraction can also be written in the form a^2+3b^2 with suitable integers a and b. (*5 points*) (Proposed by *M. Csörnyei,* London)

New advanced problems – competition A (see page 546): **A. 251.** Given a sphere and a point P on it, let P_Q denote, for any point Q not on the sphere, the second intersection of line PQ

* A possible solution is based on the article beginning on page 513.

with the sphere. In the degenerate case when PQ is tangent to the sphere, let $P_Q = P$. Prove that if points A,B,C,D of the sphere are not coplanar, then there are at most two different points Q such that the tetrahedron $A_Q B_Q C_Q D_Q$ is equilateral. (A tetrahedron is called equilateral if all its faces are congruent.) **A. 252.** The integers $a_1,\ldots,a_n$ give at least $k+1$ different remainders when they are divided by $n+k$. Prove that some of them add up to an integer divisible by $n+k$. (Proposed by *Gy. Károlyi* and *K. Podoski,* Budapest) **A. 253.** Find all functions $f:\ (0,\infty)\to(0,\infty)$ for which each pair of positive numbers x and y satisfy $f(x)f\,(y\,f(x)) = f(x+y)$. (*IMC*** 2000, London)

❄

Negyedikesek figyelem! Alkalmazott matematikus képzés az Eötvös Loránd Tudományegyetemen

A mai ipar és gazdaság termékeinek értékét jelentős mértékben meghatározza a bennük rejlő szellemi munka. Ezért a modern ipar igényli a matematika professzionális, nagy számítógépes háttér melletti alkalmazását új termékek kifejlesztésére, meglévő technológiák optimalizálására, marketing stratégiák kidolgozására. Nyugati egyetemeken képeznek ilyen célra szakembereket. A szak neve „technomatematikus”, és az itt végzetteket az ipar szívesen alkalmazza. Az ELTE Természettudományi Karán 1996-ban újra megindult

alkalmazott matematikus szak

ezen követelményeket kielégítő, teljesen új tematikával. A szakon belül modern banki, biztosítási és tőzsdei, valamint műszaki és természettudományi folyamatok korszerű matematikai és számítástechnikai kezelésével ismertetjük meg a hallgatókat. Az ECMI (European Consortium for Mathematics in Industry) tapasztalataival támogatja ezt a szakot.

A szak olyan alkalmazott matematikusok képzését tűzi ki célul, akik: 1. mérnökökkel, közgazdászokkal és természettudományos szakemberekkel közösen tudnak dolgozni műszaki és gazdasági problémák megoldásán, ezen szakemberek nyelvét beszélik; 2. modern matematikai eljárások alkalmazásában gyakorlatuk van, képesek ezeket a mindenkori feladathoz illeszteni; 3. maguk is tudnak új matematikai módszereket és modelleket kifejleszteni; 4. a modern számítógépes eszközöket biztosan és célirányosan alkalmazzák.

Az alkalmazott matematikus szak anyaga négy részből áll: matematika, informatika, műszaki-mérnöki, valamint közgazdasági ismeretek. A matematika alapozása ezen képzésen belül azért különösen széleskörű, mert a jövendőbeli ipari fejlődésre csak így lehet felkészülni. A képzés fontos része az **ipari gyakorlat**, amely a 7–8. félévben teljesíthető.

Az érettségizett fiatalok az ELTE Természettudományos Karának felvételi eljárási rendjében (amely azonos a matematikus szakéval) nyerhetnek felvételt az alkalmazott matematikus szakra.

Érdeklődni lehet a kövekező címen: Dr. Stoyan Gisbert, ELTE TTK, 1117 Budapest, Pázmány P. sétány 1/D. Tel.: 463-3914, Fax: 463-1648.

e-mail: `stoyan@cs.elte.hu`, internet: `http://valerie.inf.elte.hu/~stoyan`

** International Mathematical Competition for University Students

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Matematika Intézetének közleménye pályaválasztóknak

MATEMATIKUS KÉPZÉS A BME-N

A világ rangos műszaki egyetemeinek gyakorlatát követve és saját jó hagyományát felelevenítve, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Természettudományi Kara 1997-ben beindította a **matematikus képzést**. A képzést a Kar Matematika Intézete gondozza. Olyan szakembereket képezünk, akik érzékenyek a gyakorlati problémák iránt és képesek alkotó módon felhasználni ismereteiket; akik, amellett, hogy a matematika elvont területein otthonosan mozognak, kommunikálni és együttműködni tudnak a matematikán kívüli szakemberekkel is. Előreláthatóan az Európához csatlakozó, fejlődő magyar gazdaságnak nagy szüksége lesz ilyen szakemberekre. Matematikus képzésünk szervesen illeszkedik a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen folyó *alkalmazás-orientált* tudományos képzés széles spektrumába, mely a klasszikus mérnökképzés mellett magában foglal olyan matematika-igényes új területeket is, mint informatika, közgazdaságtudomány, anyagtudomány, gazdasági tervezés-elemzés, műszaki management, rendszerelmélet stb.

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem matematikus szakát elsősorban azoknak a végzős gimnazistáknak ajánljuk, akik, amellett, hogy szeretik és tudják a matematikát, indíttatást éreznek magukban a **matematika alkalmazásai** iránt is. A matematikai **modellalkotás** és **elemzés** egyre inkább szerves részét képezi a műszaki, gazdasági és természettudományos tevékenység kreatív ágainak. E tevékenység jól felkészült, invenciózus, mozgékony elméjű fiatal matematikusokat igényel. Az ilyen szakemberek iránti társadalmi igény látványosan növekszik.

Ha e kihívásokban látsz fantáziát, jelentkezz a BME matematikus szakára!

A szak felvételi rendszere megegyezik a műszaki felsőoktatás felvételi rendszerével, amelynek részletes leírása megtalálható a hivatalos *Felsőoktatási felvételi tájékoztatóban.* A középiskolai matematika és/vagy fizika versenyeken kimagaslóan jó eredményt elért jelentkezők mentesülnek a felvételi kötelezettség alól. Az 1999-es és 2000-es felvételi ponthatárunk egyaránt a legmagasabb volt az ország matematikus szakjai között.

A szak képzési rendje nagy vonalakban a következő: Az 1–5. félévben a modern matematika alapismereteinek elsajátítása folyik, a tudományegyetemi matematikus képzéssel lényegében azonos tematikával. A 6–10. félévben a hallgatók **szakirányú** képzést kapnak. A választható négy fő szakirány:

- *Algebra és számítástudomány:* számítógéptudomány logikai alapjai, kriptográfia, kódelmélet, computer algebra;
- *Analízis és alkalmazásai:* dinamikai rendszerek, differenciálegyenletek, biomatematika, matematikai fizika
- *Operációkutatás és alkalmazásai:* lineáris, nemlineáris és sztochasztikus programozás, kombintorikus optimalizálás;
- *Sztochasztikus matematika és alkalmazásai:* pénzügyi és tőzsdei folyamatok matematikája, biztosítási matematika, statisztika, információelmélet.

A választott fő szakirány tárgyai mellett a hallgatók mellékszakirányok és témacsoportok keretében a matematika egyéb területein is alapos tájékozottságot nyernek.

Végzett hallgatóink számára folyamatban van a BME Gazdaság- és Társadalomtudományi Karán folyó műszaki menedzser szak gyorsított elvégzése rendjének kidolgozása is.

Kollégiumi elhelyezkedés: vidéki diákjaink részére a BME kollégiumaiban elhelyezés biztosítható.

Posztgraduális matematikus képzés a BME-n: végzett diákjaink, a műszaki vagy gazdasági életben való elhelyezkedés mellett természetesen részt vehetnek az egyetemünkön folyó doktorandusz (PhD) képzésben is, a Matematika Intézet Doktori Iskolájának keretében.

Bővebb információ szerezhető a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Természettudományi Kar Matematika Intézet titkárságán, a 463 2762 budapesti telefonszámon, illetve intézetünk internetes honlapján: `http://www.math.bme.hu`

Szeretettel várjuk kedves leendő diákjainkat.

BME TTK Matematika Intézet