Az 1999–2000-es tanév matematika pontversenyének összesített eredménye

	A, B pontv.		C pontv.		Összesen	
	benevezett	értékelt	benevezett	értékelt	benevezett	értékelt
1–8. osztályosok:	72	43	114	31	132	57
9. osztályosok:	393	203	602	96	737	254
10. osztályosok:	416	207	424	66	608	234
11. osztályosok:	329	171	283	84	482	216
12. osztályosok:	187	114	201	72	306	158
Összesen:	1397	738	1624	349	2265	919

Az alábbiakban azokat az iskolákat soroljuk fel, amelyeknek volt a 2000/6. számban közölt végeredményben felsorolt diákja. Az iskola neve után álló két számpár az A és B pontverseny, illetve a C pontverseny végeredményében szereplő tanulók számát és az általuk szerzett összpontszámot jelzi. A számok után a felsorolt tanulók szaktanárainak neve áll, ahogyan azt a nevezési lapokról kiírtuk. Az esetleges névelírásokért szíves elnézésüket kérjük.

Ajka: *Bródy Imre Gimn.* (–), (1,164), Tulokné Mohacsek Ildikó; **Aszód:** *Petőfi Sándor Gimnázium és Szakközépiskola* (1,16), (–), Gyárfás István; **Baja:** *III. Béla Gimn.* (2,174), (2,307), Funták Andor, Királyné Nagy Éva, Sasfalvi Ildikó; *Eötvös József Főiskola Gyakorló Általános Iskolája* (–), (1,87), Cseh Gabriella; **Békéscsaba:** *10. sz. Általános Iskola* (1,164), (1,169), Pádi Zoltán; *Rózsa Ferenc Gimnázium* (8,641), (4,638), Kovács Tibor, Nagy Sándor, Szabó Zsófia, dr. Végh Lászlóné; *Savio Szent Domonkos Katolikus Általános Iskola* (–), (1,148), *Széchenyi István Közgazdasági és Külkereskedelmi Szakközépiskola* (1,20), (–), dr. Szabó Jánosné; *Tevan Andor Gimn.* (1,42), (–), Szakál Károlyné; **Bonyhád:** *Petőfi Sándor Evangélikus Gimn.* (36,2799), (–), Hohl Árpád, Jakab Tamás, dr. Katz Sándor, Klészátl Melinda, Kovács Szabolcs; **Budapest:** *Arany János Gimnázium* (1,69), (1,196), Göndör András, Spisák Andor; *Árpád Gimn.* (21,942), (2,237), Besnyőné Titter Beáta, Gyimesi Róbert, Koncz Levente, Meszlényiné Róka Ágnes, Mezei István, Mikusi Imre, Mikusi Imréné, Sedvó János, Vajda István; *BME Nemzetközi Gimnázium* (–), (1,94), Kajtár Lászlóné; *Babits Mihály Gimnázium* (1,24), (–), Lőrincz Margit; *Bartók Béla Zeneművészeti Szki.* (1,45), (1,92), –; *Baár-Madas Református Gimn.* (1,31), (1,216), Laczik István; *Berzsenyi Dániel Gimnázium* (28,2023), (4,493), Bánhegyi László, Erben Péter, Gál Györgyné, Hubert Györgyné, Kévés Rita, Nemecskó István, dr. Ökördi Péterné, dr. Urbán János; *Budai Ciszterci Szent Imre Gimn.* (2,53), (–), Barcza István, Horváth Ágnes; *Deutsche Schule* (–), (1,197), Susanne Poetke; *ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium* (16,1274), (12,1617), Drozdy Győzőné dr., Falta Zoltán, dr. Korányi Erzsébet, Pető Sándor, Sparingné Köves Ildikó, Székely Péter, Tóth Attila; *ELTE Radnóti Miklós Gyakorlóiskola* (5,399), (4,489), Fazakas Ágnes, Harró Ágota, Hegyi Györgyné, dr. Papp Györgyné, Széplaki Györgyné; *Eötvös József Gimnázium* (6,543), (2,211), Balga Attila, Gyengéné Beé Andrea, Halász

KöMaL – 2000/8 MAT0008 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 19:44 (1. lap)

Ágnes, Schmieder László Tamás; *Fasori Evangélikus Gimn.* (4,413), (2,361), Laczkó László, Nagy-Baló András, Tobisch Márta; *Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium* (96,9708), (17,2667), Beleznay Ferenc, Dobos Sándor, Fazakas Tünde, Hámori Veronika, Hraskó András, Laczkó László, Montágh Balázs, Orosz Gyula, Pataki János, Pogáts Ferenc, Pósa Lajos, Solti Lajos, Surányi László, Szászné Simon Judit, Táborné Vincze Márta, Thiry Imréné; *Hunfalvy János Közgazdasági Szakközépiskola* (1,28), (1,104), Angyal Mária; *IMNN Szent Margit Gimnázium* (3,130), (2,221), dr. Holczmann Józsefné, Kovácsné Ábrahám Mariann; *Jedlik Ányos Gimn.* (8,368), (9,663), dr. Sebestyén Zoltán, dr. Sebestyén Zoltánné; *József Attila Általános Iskola és Gimnázium* (1,20), (–), Barlainé N. Ágnes; *Karinthy Frigyes Gimn.* (1,43), (–), Magyar Bernadette; *Kispesti Deák Ferenc Gimn.* (1,123), (1,130), Fencz Györgyné; *Kölcsey Ferenc Gimnázium* (1,20), (–), Dugasz János; *Könyves Kálmán Gimnázium* (–), (1,176), Kovács Csaba; *Kürt Alapítványi Gimnázium* (1,35), (6,930), Wágner Tamás; *Móricz Zsigmond Gimnázium* (2,280), (2,405), Hegedűs Zoltánné, Varga Péter; *Nagy László Általános Iskola és Gimnázium* (1,49), (2,197), Ákos Pálné, Kovács Kálmánné; *Németh László Gimn.* (2,183), (–), Holló Gábor; *Petőfi Sándor Ált. Isk., Gimn. és Szki.* (1,53), (–), Simoncsicsné Haász Judit; *Piarista Gimn.* (1,34), (4,394), Futó Béla, dr. Urbán János, Vízhányó Zsolt; *Puskás Tivadar Hiradástechnikai Szakközépiskola* (1,48), (–), Blastik István; *Szent István Gimn.* (51,3122), (4,536), Halek Tamás, Juhász István, Lászlóné Sergyán Stefánia, Magyar Zsolt, Paróczay József, Rácz János; *Szent László Gimn.* (1,16), (–), Tóthné Virág Annamária; *Szerb Antal Gimnázium* (–), (1,167), Gyulay Éva; *Szilágyi Erzsébet Gimnázium* (–), (1,65), Horváth Eszter; *Szlovák Gimnázium* (1,23), (–), Veres Vlatislava; *Tamási Áron Általános Iskola és Gimnázium* (–), (1,167), Zombori Natasa; *Toldy Ferenc Gimnázium* (1,115), (–), Bartha Béláné; *Trefort Á. Kéttannyelvű Műsz. Szki. és Gimn.* (–), (1,88), Horváth Zsuzsa; *Veres Pálné Gimn.* (–), (2,258), Fodor Csaba, Zalán Péterné; *Veres Péter Gimn.* (17,1138), (9,1086), Kötél Tamás, Márton Gábor, Rácz Mihályné, Simon János, Számadó László, Varga Mária; *Városligeti Általános Iskola* (1,40), (–), Lórántné H. Rita; *Városmajori Gimn.* (2,150), (1,147), Kovács Károlyné, Pintér László; *Vörösmarty Mihály Gimnázium* (1,45), (–), Károly Ildikó; **Budaörs:** *I. sz. Általános Iskola* (1,16), (–), Munkácsiné Szentannai Ágota; *Illyés Gyula Gimnázium* (1,31), (1,189), Inges János, Tollner József; **Cegléd:** *Ceglédi Közgazdasági és Informatikai Szakközépiskola* (–), (2,240), Tóthné Palásti Zita; **Csongrád:** *Batsányi János Gimnázium* (3,71), (–), Bottyán István, Erdélyi Péterné; **Csorna:** *Hunyadi János Gimnázium és Pedagógiai Szakközépiskola* (–), (2,159), Wekszli Árpádné; **Csurgó:** *Nagyváthy János Középisk.* (1,169), (1,179), Kiss Balázs; **Debrecen:** *Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma* (5,665), (–), dr. Bélteky Károly, Bíró Erzsébet, Bíró Lajos, Kovács Gábor; *Debreceni Református Kollégium Gimnáziuma* (–), (2,215), dr. Bajza Istvánné; *Fazekas Mihály Gimnázium* (19,1335), (7,1099), Balázs Tivadar, Lakatos Tibor, Nagy Mária, Remeténé Orvos Viola; *Tóth Árpád Gimn.* (3,190), (4,590), Dóry Zoltánné, Kovács Ákos, dr. Makai Imréné, Palatinszky Anna; **Dombóvár:** *Illyés Gyula Gimnázium* (10,599), (–), Freller Miklós, Mesterházyné dr. Illés Ágnes, Stettner Eleonóra; **Dunaújváros:** *Széchenyi István Gimnázium* (1,27), (–), Molnár Zoltánné; **Eger:** *Dobó István Gimnázium* (2,46), (1,137), Homolyáné Nagy Irma, Kissné Szucsich Éva, dr. Pappné Balázs Judit; *Gárdonyi Géza Gimnázium* (1,115), (5,539), Csák György; *Lenkey János Általános Iskola* (1,12), (–), –; *Neumann János Közgazdasági Szakközépisk. és Gimn.* (1,28), (1,141), Verébné Sós Györgyi; *Pásztorvölgyi Általános Isk. és Gimn.* (3,88), (1,194), Hevesi Zoltán; *Szilágyi Erzsébet Gimnázium* (4,104), (–), Bíró Bálint, Gönczi Sándor; **Esztergom:** *Dobó Katalin Gimn.* (–), (3,468), Csathó Béla, Takács Anikó;

Szent István Gimnázium (–), (2,174), Posch Istvánné, dr. Vágvölgyi Károly; **Érd:** *Vörösmarty Mihály Gimnázium* (1,33), (–), Vörösné Balogh Janka; **Fehérgyarmat:** *Zalka Máté Gimnázium* (2,134), (2,341), Peterman Istvánné; **Fonyód:** *Magyar Bálint Ált. Isk.* (–), (1,106), Kasal Lászlóné; *Mátyás Király Gimnázium és Szakközépiskola* (8,330), (–), Bödör Márta, Németh László; **Gyomaendrőd:** *Kner Imre Gimnázium, Szakközépiskola és Kollégium* (–), (3,360), Hornok Tamásné, Tóthné Szakálos Margit; **Gödöllő:** *Török Ignác Gimn.* (1,29), (2,270), Balogh Nobert, Vancsóné Thuróczy Erzsébet, Veszelyné Fábri Zsuzsa; **Gyöngyös:** *Berze Nagy János Gimn.* (3,222), (1,187), Hejjel László, Kissné Császár Erzsébet; **Győr:** *Bercsényi Miklós Gimn.* (1,76), (1,84), Honti Dénes, Nagyné Szabó Jolán; *Czuczor Gergely Bencés Gimn.* (6,543), (–), Bárdos Oresztész, Csonka László, Laki Lászlóné; *Jedlik Ányos Informatikai Szakközépiskola és Gimnázium* (–), (2,165), Kovács Sándorné, Oross Tiborné; *Kazinczy Ferenc Gimnázium* (–), (2,181), Dömötörné Horváth Erzsébet, Nikházy Lászlóné; *Krúdy Gyula Gimn. és Vendéglátóipari Szki.* (–), (1,149), Csáki Katalin; *Révai Miklós Gimn.* (7,813), (3,493), Nagy Róbert, Pósa Lajos, Sántha Noémi, dr. Szijártó Miklósné, Zábrádiné Schmierer Emília, Zsebők Ottó; *Szent-Györgyi Albert Gimnázium és Szakközépiskola* (–), (1,162), Szabó Zoltán; **Gyula:** *Erkel Ferenc Gimnázium* (3,79), (2,201), dr. Tóth István; *Karácsonyi János Katolikus Gimn.* (1,18), (–), Tinger János; **Hajdúböszörmény:** *Bocskai István Gimnázium* (–), (3,439), Kissné Horváth Ágnes, Pappné Balogh Erzsébet; **Hajdúszoboszló:** *Hőgyes Endre Gimn.* (1,230), (11,1522), Balla Éva, Csatóné Király Margit, Dankó Sándor, Deli Lajos, Károlyné Teleki Anikó, Oláh Józsefné; **Hatvan:** *Bajza József Gimnázium és Egészségügyi Szakközépiskola* (2,91), (1,117), Kepics Ferenc, Nagyné Koncz Teréz; **Heves:** *Eötvös József Középiskola* (1,41), (7,796), Forgó János, Kis Tamás; **Hódmezővásárhely:** *Bethlen Gábor Református Gimnázium* (2,86), (2,269), Fejes Imréné, Kérdő Mártonné, Rischákné Kishalmi Rózsa; *Eötvös József Szakközépiskola* (1,44), (1,159), Baloghné Kovács Ágnes; **Isaszeg:** *Számítástechnikai és Informatikai Szakközépiskola* (1,21), (–), Borsa Edit; **Jászberény:** *Liska József Erősáramú Szakközépiskola és Gimnázium* (1,15), (–), Búzásné Tábi Gizella; **Kalocsa:** *Szent István Gimn.* (1,39), (2,202), Szőke Imréné; **Kaposvár:** *Nagyboldogasszony Római Katolikus Gimnázium* (1,24), (–), Veress Róbert; *Táncsics Mihály Gimnázium* (12,508), (2,274), Biczóné Lengyel Beáta, Drankovics József, dr. Iharos Csabáné, Kubatov Antal, Terlaky Edit; **Kapuvár:** *Felsőbüki Nagy Pál Gimn.* (1,39), (–), Katyi Tímea; **Kecskemét:** *Bolyai János Gimnázium* (2,105), (–), Varga József; *Bányai Júlia Gimn.* (12,449), (10,1291), Brenyó Mihály, Késmárki Andrásné, Óváriné Csabai Mária, Pálinkás Ilona, Szabó István, Varga József; *Katona József Gimnázium* (6,305), (5,618), Horti Attila, dr. Szablics Bálintné, Varga József; *Kecskeméti Református Kollégium Gimnáziuma* (2,90), (–), Gálfiné Makra Ildikó, dr. Horváth Alajosné, Szabó István; *Piarista Gimn.* (1,35), (–), Fazekas József, Varga József; **Kiskunfélegyháza:** *Móra Ferenc Gimnázium* (1,137), (–), Mohosné Kothencz Irén; **Kiskunhalas:** *Bibó István Gimnázium* (1,68), (1,101), Kállayné Vankó Erika; **Kisvárda:** *Dolgozók Bessenyei György Gimnáziuma* (1,84), (3,314), Nehéz Rudolf; **Kisújszállás:**, *Móricz Zsigmond Gimn. Közgazdasági Szki. és Kollégium* (1,20), (1,110), Ágotai László; **Körmend:** *Kölcsey Ferenc Gimnázium* (–), (1,178), Soós Istvánné; *Somogyi Béla Általános Iskola* (1,14), (–), László Zoltán; **Kunszentmárton:** *József Attila Gimnázium* (1,42), (–), Paulovics Illés; **Miskolc:** *Avasi Gimn.* (1,30), (1,131), Pabis Györgyné; *Földes Ferenc Gimn.* (15,999), (3,348), Fejér Szabolcs, Gulyás Tibor, Héjj Márta, Kéri Henriett, Kovács Attiláné, Pirkó Béla, ifj. Szabó Kálmán, Vass Iván, Veres Pál; **Monor:** *József Attila Gimnázium* (9,152), (1,114), Kozákné Székely Ildikó; **Mosonmagyaróvár:** *Kossuth Lajos*

Gimnázium (2,185), (2,341), Gulyás Ferencné, Józsáné Purgai Csilla, Kovács Zsuzsanna, Nagy Lajos, Vizkeleti Józsefné; **Nagykanizsa:** *Batthyány Lajos Gimnázium* (7,413), (4,531), Erdős Gábor, Martonné Németh Mária, dr. Pintér Ferenc, Zsovár Anita; **Nyergesújfalu:** *Irinyi János Gimnázium és Műszaki Szakközépiskola* (–), (1,133); **Nyíregyháza:** *Jókai Mór Református Általános Iskola* (1,61), (–), Szabó Katalin; **Ócsa:** *Bolyai János Gimnázium* (1,217), (1,184), Vigh Gyöngyi Noémi; **Orosháza:** *Táncsics Mihály Gimnázium és Szakközépiskola* (–), (1,99), Nagyné Dömötör Márta; **Paks:** *Energetikai Szakképzési Intézet* (1,23), (–), Árokszállási Tibor; *Móra Ferenc Általános Iskola* (1,19), (–), Fodor Árpádné; *Vak Bottyán János Gimnázium* (1,105), (1,164), dr. Müller János; **Pannonhalma:** *Bencés Gimn.* (5,187), (4,447), Binzberger Ákos, Feith Péter; **Pápa:** *Pápai Református Kollégium Gimnáziuma* (4,138), (4,528), Bárdos Zoltán, Varga Mária; *Türr István Gimn.* (1,37), (1,123), Erdélyi Andrea; **Pécs:** *Árpád Fejedelem Gimn. és Ált. Isk.* (1,22), (–), Porkoláb Tamás, dr. Poronyi Gábor; *Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnáziuma* (1,165), (–), Tornyos Tivadarné; *Janus Pannonius Gimnázium* (1,149), (1,204), Kárpáti Ágnes, Polcz Katalin; *Leöwey Klára Gimn.* (1,90), (–), Kiss Zoltán; **Putnok:** *Serényi Béla Gimnázium és Mezőgazdasági Szakközépiskola* (1,43), (1,127), Szilágyi Istvánné; **Salgótarján:** *Bolyai János Gimnázium* (1,68), (–), Kelemen Gábor; *Táncsics Mihály Közgazdasági és Kereskedelmi Szakközépiskola* (–), (2,173), Jakubovicsné Kozma Margit, Petróczy Mária; **Sárvár:** *Tinódi Sebestyén Gimnázium és Idegenforgalmi, Vendéglátói Szakközépiskola* (1,220), (2,285), Tóth Jánosné; **Siófok:** *Perczel Mór Gimn.* (–), (6,955), Schutzbach Mártonné; **Sopron:** *Széchenyi István Gimnázium* (3,168), (2,250), Lang Ágota, Vass Béláné; **Szeged:** *JATE Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium* (7,675), (9,1622), dr. Dobi János, Konfárné Nagy Klára, Kovács István, dr. Némethné Varga Éva, Tarcsay Tamás, Vargáné dr. Nádházi Ágnes; *Radnóti Miklós Kísérleti Gimn. és Ált. Isk.* (17,1717), (5,777), Ábrahám Gábor, Kosztolányi József, Lancsa Jánosné, Mike János, Schultz János, Vincze István; *Tömörkény István Gimn.* (1,20), (–), Rauscher Alexandra; **Székesfehérvár:** *Ciszterci Szent István Gimnázium* (2,117), (–), Wolkensdorfer János; *Teleki Blanka Gimn.* (11,839), (5,789), Buday Endre, Mihályi Gyula, Ponácz Ferenc, Ponáczné Csuthy Márta, Sipos Imre, Siposné Tóth Krisztina; *Tóparti Gimnázium és Művészeti Szakközépiskola* (1,106), (1,141), Nyeste János; **Szekszárd:** *5. Sz. Általános Iskola* (1,17), (1,89), Honti Zoltánné; *I. Béla Gimn. és Műszaki Szki.* (–), (1,94), dr. Pápáné Greszler Cecília; *Garay János Gimn.* (28,2636), (28,3708), Bayer József, Kertes Lázár, Pesti Gyula, Varjas Lászlóné; **Szentendre:** *Ferences Gimn.* (3,116), (–), Adolf Géza, Luchterhand Irén, Tábiné Mikácsy Katalin; *Móricz Zsigmond Gimnázium* (3,199), (3,521), Herczeg Katalin; **Szentes:** *Horváth Mihály Gimnázium* (1,92), (1,178), Volosin Vlagyimir; **Szolnok:** *Tiszaparti Gimnázium és Humán Szakközépiskola* (3,253), (–), Doroszlai Ágnes, Mátyási Józsefné, Veres Dénesné; *Varga Katalin Gimn.* (7,398), (6,790), Dalmadiné Nagy Ilona, Kiss László, Kovács Anita, Nagy Tibor, Szabó Győző; *Verseghy Ferenc Gimn.* (10,524), (4,620), Béres Jenő, Pécsi István, Pécsiné Röhri Zsuzsanna, Pogány Gyula, Szécsiné Festő Hegedűs Margit, Veres Dénes; **Szombathely:** *Bolyai János Gyak. Ált. Isk. és Gimn.* (1,109), (1,155), Hollerné Gazdag Ilona; *Gépipari és Informatikai Műszaki Szakközépiskola* (–), (1,92), László Sándor; *Nagy Lajos Gimn.* (2,134), (–), Farkas Gellért, Peresztegi László; *Premontrei Szt. Norbert Gimn.* (–), (3,268), Valaska Ferdinánd; **Tamási:** *Béri Balogh Ádám Gimn.* (5,139), (2,253), Kovács Zsuzsanna, Kurucz Gézáné, Witzlné Ulrich Anikó; **Tata:** *Eötvös József Gimn.* (7,630), (–), Kovács Mária, Weszelovszky Éva; **Tatabánya:** *Árpád Gimnázium és Pedagógiai Szakközépiskola* (7,764), (6,839), Hajnal Károlyné, Kovácsné Schandl Ágnes, Lábszkiné Tatai Ilona, Magyariné Sárdinek Zsuzsanna, dr. Németh Imréné, Szabó Józsefné;

Bárdos László Gimn. (1,97), (1,157), Kozmáné Tegez Rita; **Törökbálint:** *Törökbálint Nagyközség Általános Iskola, Gimnázium és Szakközépiskola* (1,25), (–), Szomju László; **Túrkeve:** *Ványai Ambrus Gimn.* (1,22), (–), Kórizsné Árvai Katalin; **Vác:** *Boronkay György Műsz. Szki.* (2,298), (2,283), Békesi Gábor, Fábián Gábor; **Vásárosnamény:** *II. Rákóczi Ferenc Gimn.* (1,30), (–), Herczeg Péter; **Veszprém:** *Ipari Szki.* (–), (1,195), Di Giovanni Szilárd; *Lovassy László Gimn.* (4,285), (3,447), Arnhoffer Mihály, Békefi Zsuzsa, Pálffy Zoltán, Varga Vince; *Vetési Albert Gimn.* (–), (1,89), Kristóf Gábor; **Zalaegerszeg:** *Zrínyi Miklós Gimnázium* (26,1405), (1,154), Csiszár Mária, Horváth Attila, Kiss Zsolt, Németh László, Orbán Edit, Pálovics Róbert, Pálovicsné Tusnády Katalin, Vadvári Tibor, dr. Vajda István;

Ausztria, **Linz:** *Akademisches Gymnasium* (1,183), (1,154), Josef Holzmann; Norvégia, **Oslo:** *Lycée Francais René Cassin* (1,278), (–), M. Mistral, M. Vianney; Románia, **Kézdivásárhely:** *Nagy Mózes Líceum* (3,166), (3,356), Egyed Géza, Nyáguly László; **Sepsiszentgyörgy:** *Székely Mikó Kollégium* (4,279), (3,472), Bíró Judit; **Székelyudvarhely:** *Tamási Áron Gimnázium* (3,179), (–), Deák Imre, Kovács Lajos; Szlovákia, **Dunaszerdahely:** *Magyar Tannyelvű Gimnázium* (3,166), (–), Bíró Gizella, Németh Mária, Penzinger Iván; **Ipolyság:** *Magyar Tanítási Nyelvű Gimnázium* (2,128), (1,127), Gubis Mária; **Révkomárom:** *Selye János Gimn.* (5,270), (2,252), Bukorné Both Emőke, Horváth Katalin, Keszegh István; **Zseliz:** *Magyar Tannyelvű Gimn.* (1,36), (–), Kuczmann Imre; USA, **Alexandria, Burden:** *Alexandria Monroe High-School* (–), (1,97), Mr. Lustig; **Naperville:** *Waubonsic Valley High School* (–), (1,130); Ukrajna, **Beregszász:** *Bethlen Gábor Gimnázium* (2,285), (4,695), Balázsi Borbála, Hubenkó Erzsébet.

(Tan)könyvajánló

középiskolásoknak is – felsőfokon

Két, a felsőoktatásban „alapmű”-nek tekinthető könyvet ajánlok azoknak a középiskolásoknak, akik az iskolai tananyagban is érintett kérdések alapjait, miértjét szeretnék megérteni. Mindazoknak, akik felsőfokú tanulmányaik során matematikát fognak tanulni, meg kell ismerniük az *analízis* és az *algebra* alapfogalmait. Erre kiváló lehetőség a most ismertetésre kerülő könyvek tanulmányozása.

Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei

A mű eredetileg az 1930-as években, nem sokkal a mai klasszikus analízis kialakulása után íródott. A második kiadás 1951-ben jelent meg, a mostani, 3. kiadás ettől csak méretében és formájában tér el. (Remélhetőleg a puha kötés ellenére a használat során is egyben marad a hétszáz oldalas könyv.)

Szász Pál (1901–1978), az Eötvös Loránd Tudományegyetem egykori professzora, *Fejér Lipót* tanítványa és munkatársa volt. Könyvét évtizedeken át tanárok, mérnökök, matematikusok és fizikusok ezrei forgatták. A kétkötetes mű 1. részét adta ki 2000-ben a TypoTEX Kiadó.

Részletesen, példák során át vezeti el az olvasót a racionális számoktól a valós számokig, tárgyalja a számtani, a harmonikus és a mértani közepeket, a kör kerületének –

KöMaL – 2000/8 MAT0008 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 19:44 (5. lap)

területének meghatározását, a sorozatokat, a függvények hátárértékét, folytonosságát, a differenciálhányados és a határozott, illetve határozatlan integrál fogalmát, a függvényvizsgálat alapelveit, majd részleteit. A további fejezetek mélyebben megismertetnek a terület- és felszínszámítással, a komplex számokkal, a végtelen sorokkal, a hatványsorba fejtéssel.

A könyv a 60-as években divatossá vált absztraktabb tárgyalásmód előtt jelent meg, de remélhetőleg a mai olvasó számára is élményszerző módon mutatja meg, hogy a matematika a konkrét helyzetekben konkrét módon hatékony és leleményes. Az absztrakciót megelőzi a problémamegoldó gondolkodás; a szellemi konstrukciókat lezáró elegáns fogalomalkotásnál pedig gyakran izgalmasabb és mindenképpen valóságosabb a matematika hétköznapi arca.

Fried Ervin: Algebra I.

Elemi és lineáris algebra

Az ELTE elsőéves matematikus hallgatóinak készült tankönyv – amely a szerző 1977-ben megjelent *Klasszikus és lineáris algebra* c. könyvének átdolgozása – sokkal szélesebb olvasóközönségnek ajánlható. *Fried Ervin* professzor több, mint négy évtizede oktatja tanítványait az Eötvös Loránd Tudományegyetem Algebra és Számelmélet Tanszékén: könyve egyben gondolkodni tanít és magyaráz.

Az első rész első fejezete a középiskolában tanult számfogalom átismétlése után a komplex számok bevezetését tartalmazza. Ezután a mátrixok és a mátrixok determinánsa következik. A további két fejezet az egy-, illetve többhatározatlanú polinomok algebrai vizsgálatával foglalkozik. Itt található a lineáris egyenletrendszereknek az a megoldási eljárása, amely átvezet a második részbe, a lineáris algebrába.

A második rész a vektorterek absztrakt definíciójával kezdődik, majd ezek vizsgálata után a lineáris leképezések következnek. A könyv a tenzorok algebrai elméletének alapjaival zárul.

Az egyes fejezeteket feladatsorok egészítik ki, amelyek lehetőséget adnak a fogalmak megértésének ellenőrzésére és a tanult anyag önálló alkalmazására.

A mű nemrég jelent meg a Nemzeti Tankönyvkiadó gondozásában.

O.V.

Az 1999–2000. évi Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny feladatai

KEZDŐK

Első forduló

Mindhárom kategória

1. Mi lehet az a természetes szám, amely négyzetszám lesz, ha hozzáadunk 5-öt, de négyzetszám lesz akkor is, ha elveszünk belőle 11-et?

2. Egy $ABCD$ trapézban az alapok összege 10, a szárak összege pedig 6 hosszúságegység. Tudjuk, hogy van két olyan kör, amelyek érintik egymást, az alapokat és egy-egy szárat is. Számítsa ki a körök sugarát!

3. Bizonyítsa be, hogy három egymást követő pozitív egész szám szorzata nem lehet egy egész szám harmadik hatványa!

4. Határozza meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amely (a tízes számrendszerben) csak 0 és 1-es számjegyekből áll, és osztható 792-vel!

5. Adott az ABC szabályos háromszög. Melyek azok az egyenesek, amelyek ezt a háromszöget két olyan síkidomra bontják, amelyeknek kerülete és területe is egyenlő?

Második (döntő) forduló

I. kategória: Szakközépiskolások

1. Az ABC hegyesszögű háromszög AE magassága a B csúcsnál lévő β szög szögfelezőjét a P pontban metszi. Bizonyítsa be, hogy ha a β szög a másik két szög számtani közepe, akkor: $2 \cdot AE = 3 \cdot BP$.

2. Oldja meg a természetes számok halmazán a következő egyenletet:

$$ab + ac + bc = 2 + abc.$$

3. Egy derékszögű háromszög oldalainak hossza egész szám. Az átfogó hossza nem osztható 5-tel. Bizonyítsa be, hogy a háromszög területének mérőszáma 10 többszöröse.

II. kategória: Általános matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Azonos az I. kategória 3. feladatával.

2. Igazolja, hogy ha egy hegyesszögű háromszögben a, b és c jelöli az oldalakat, m_a az a oldalhoz tartozó magasságot, akkor

$$1 < \frac{a + 2m_a}{b + c} < \sqrt{2}.$$

3. Határozza meg a következő összeg pontos értékét:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \ldots + \sqrt{1 + \frac{1}{1999^2} + \frac{1}{2000^2}}.$$

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Adott két közös kezdőpontú, egymásra merőleges szakasz. Mindkettő hossza 2000 egység. Mindkét szakaszon adott 2001-2001 belső pont. Bizonyítsa be, hogy ebből a 4002 pontból kiválasztható három, nem egy egyenesbe eső pont úgy, hogy az általuk meghatározott háromszög területe legfeljebb 250 területegység!

2. Az n pozitív egész számról azt tudjuk, hogy 5-tel nem osztható, 128-cal osztva 96 maradékot ad, a tízes számrendszerben k jegyű, továbbá az n minden jegye páros, jegyeinek összege $2k - 4$, jegyeinek négyzetösszege $4k$. Mi lehet az n?

3. Egy hegyesszögű háromszögben a, b és c jelöli az oldalakat, m_a az a oldalhoz tartozó magasságot. Határozza meg a K és L pozitív valós számokat úgy, hogy bármely hegyesszögű háromszögre igaz legyen

$$K < \frac{a+2m_a}{b+c} < L,$$

de ha $K_1 > K$ vagy $L_1 < L$, akkor

$$K_1 < \frac{a+2m_a}{b+c} < L_1$$

már ne teljesüljön minden hegyesszögű háromszögre!

HALADÓK

Első forduló

I. kategória: Szakközépiskolai tanulók

1. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sqrt[4]{16+x}+\sqrt[4]{16-x}=4$$

2. Melyek azok a p, q pozitív prímszámok, amelyekre $7p+q$ és $pq+11$ is prím?

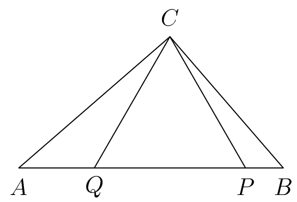
3. A c átfogójú derékszögű háromszög súlyvonalainak négyzetösszege d. Igazoljuk, hogy ha c és d egész szám, akkor $d \geq 6$.

4. Hét ember néhány napos kirándulásra készül. Mindennap egy kör alakú asztal köré ülve ebédelnek. Elhatározzák, hogy úgy ülnek le az ebédekhez, hogy ugyanaz a két ember ne kerüljön kétszer egymás mellé. Maximum hány naposra tervezhetik a kirándulást?

5. Adott egy négyzet és kilenc egyenes úgy, hogy az egyenesek mindegyike metszi a négyzet két szemben lévő oldalát, és levágja területének negyedét. Bizonyítsuk be, hogy lesz három olyan egyenes, amelyik egy pontra illeszkedik.

II. kategória: Általános tantervű gimnáziumi tanulók

1. Azonos az I. kategóriában kitűzött 2. feladattal.



2. Az ABC derékszögű háromszögben úgy helyezkedik el a QPC szabályos háromszög, hogy a PQ oldal illeszkedik az AB átfogóra az ábrán látható módon, továbbá teljesül, hogy a BCP háromszög területe fele az AQC háromszög területének. Határozzuk meg a $PQ:BA$ arányt!

3. Az (a_n) számsorozat képzési szabálya $a_{n+1}=2a_n-1$, ahol a_1 egy tetszőlegesen választott pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat 1999-edik és harmadik tagjának különbsége osztható 30-cal!

4. Azonos az I. kategóriában kitűzött 5. feladattal.

5. Tekintsük azokat az x egész számokat és p pozitív prímszámokat, amelyekre a $\sqrt{x+p}-\sqrt{x}$ különbség értéke egész szám! Igazoljuk, hogy bármely adott páratlan prímszám esetén pontosan egy megfelelő x értékre lesz egész értékű a különbség.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Bizonyítsuk be, hogy ha p, q és r olyan valós számok, amelyekre $p=q+r+1$, akkor az

$$(x^2+px+q)(x^2+px+r)=0$$

egyenletnek legalább két különböző valós megoldása van.

2. Egy 2 egység átfogójú derékszögű háromszög belső szögfelezői a háromszög köréírt körét a P, Q, R pontokban metszik. Mutassuk meg, hogy a PQR háromszög területe legfeljebb $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$ területegységnyi.

3. A 2-nek melyik legnagyobb pozitív egész kitevőjű hatványával osztható $1999^{2000}-1$?

4. Az $f(x)=ax^2+bx+c$ függvényre teljesül, hogy ha $0\le x\le 1$, akkor $|f(x)|\le 1$. Bizonyítsuk be, hogy $|a|+|b|+|c|\le 17$.

5. Egy iskolába 1999 diák jár. Minden nebulónak a többi 1998 közül pontosan k szimpatikus. Mely k esetén lehetünk biztosak benne, hogy a diákok között van kettő, akik kölcsönösen szimpatikusak egymásnak, vagy kölcsönösen nem szimpatizálnak?

Második forduló

I. kategória: Szakközépiskolai tanulók

1. Határozzuk meg az

$$\left||x+1|+|x-2|-x^2\right|=2$$

egyenletet kielégítő valós x értékeket!

2. Határozzuk meg azt a legkisebb törtet, amelynek számlálója és nevezője is pozitív egész szám, a tört és a tört négyzetének összege nagyobb, mint 6, továbbá számlálójának és nevezőjének összege kisebb, mint 100.

3. Legyen az ABC háromszög A csúcsból induló szögfelezője AK, B csúcsból induló szögfelezője BL (K a BC oldalra, L az AC oldalra illeszkedik). A szögfelezők metszéspontja legyen O.

Bizonyítsuk be, hogy ha $OK = OL$, akkor a háromszögnek vagy van 60°-os szöge, vagy egyenlő szárú.

4. Bizonyítsuk be, hogy 2000 darab páratlan pozitív egész szám reciprokának összege nem lehet 1, de van olyan 2000 darab páronként különböző pozitív egész szám, amelyek reciprokának összege 1.

II. kategória: Általános tantervű gimnáziumi tanulók

1. Megegyezik az I. kategória 1. feladatával.

2. Legyen P az ABC szabályos háromszög köré írható körének egy olyan pontja, amire az AP szakasz a BC oldalt egy belső Q pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{PQ}.$$

3. A 2-nek melyik legnagyobb pozitív egész kitevőjű hatványával osztható $1999^{2000} - 1$?

4. Egy 1999-szer 2000-es téglalap alakú táblázat minden mezőjében a (-1) vagy az 1 szám áll. Egy-egy alkalommal bármelyik sorban vagy oszlopban megváltoztathatjuk az összes szám előjelét.

Bizonyítsuk be, hogy az adott „művelet” véges sokszori alkalmazásával elérhető,

a) hogy a táblázatban lévő számok összege legalább 2000 legyen;

b) hogy minden sorban és minden oszlopban a számok összege nemnegatív legyen.

Harmadik (döntő) forduló

I. kategória: Szakközépiskolások

1. Hány valós megoldása van a

$$19[x] + 99\{x\} = 2000$$

egyenletnek? ($[x]$ az x egész részét, $\{x\}$ pedig x törtrészét jelenti).

2. Milyen maradékot ad 72-vel osztva a p prímszám, ha $p = n^2 + 2n + 3$ alakú, ahol n természetes szám?

3. Egy paralelogramma belső szögfelezői az N_1 négyszöget zárják közre. Az N_1 négyszög belső szögfelezői az N_2 négyszöget határolják. Mekkorák az eredeti paralelogramma szögei, ha az N_1 és N_2 négyszögek területe egyenlő?

II. kategória: Általános tantervű gimnáziumi tanulók

1. Azonos az I. kategória 2. feladatával.

2. Egy raktárban az árukészletet legfeljebb 1 tonnás csomagokban tárolják. Van egy 1 és egy 2 tonnás teherautónk. Szerződést akarunk kötni, amelyben vállaljuk, hogy egy fuvarral legalább M tonna árut szállítunk el. Mekkora M legnagyobb értéke?

3. Az egységnyi átfogójú ABC derékszögű háromszög oldalaira $AC < BC < AB$ teljesül. Rajzoljuk meg az A ponton átmenő, a BC egyenest B-ben érintő kört, majd a B ponton átmenő, a CA egyenest C-ben érintő kört, végül pedig a C ponton átmenő és az AB egyenest az A-ban érintő kört.

a) Igazoljuk, hogy a három körnek van közös pontja!

b) A közös pontot P-vel jelölve, mutassuk meg, hogy

$$\frac{11}{16} < PA^2 + PB^2 + PC^2 < 1.$$

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Az $ABCD$ négyzet belsejében úgy vettük fel a P pontot, hogy $AP : BP : CP = 1 : 2 : 3$. Mekkora az $APB\sphericalangle$?

2. Határozzuk meg az

$$\left(1000 + \sqrt{1000^2 + 1}\right)^{1000}$$

szám tizedesvesszőt követő kétezredik számjegyét.

3. Egy raktárban az árukészletet legfeljebb 1 tonnás csomagokban tárolják. Van egy 3 és egy 4 tonnás teherautónk. Szerződést akarunk kötni, amelyben vállaljuk, hogy egy fuvarral legalább M tonna árut szállítunk el. Mekkora M legnagyobb értéke?

Az 1999–2000. évi Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny eredményei

KEZDŐK

I. kategória: Szakközépiskolások

A versenybizottság **I. díjat** nem adott ki.

II. díj: **Kodlecsik Zoltán**, Paks, Energetikai Szakképzési Intézet, tanára: Árokszállási Tibor
Pintér Balázs, Paks, Energetikai Szakképzési Intézet, tanára: Árokszállási Tibor

III. díj: **Tihon Tibor**, Budapest, Neumann János Számítástechnikai Szakközépiskola, tanára: Hutter Lajosné
Regály Gyula, Budapest, Puskás Tivadar Távközlési Technikum, tanára: Jeneiné Horváth Kinga

Dicséret: *Fehér Tamás*, Eger, Neumann János Közgazdasági Szakközépiskola, tanára: Szakaliné Haraszti Éva; *Gombos András*, Ajka, Bánki Donát Szakközépiskola, tanára: Ivánfai Erzsébet; *Simon Tamás*, Budapest, Puskás Tivadar Távközlési Technikum, tanára: Beregszászi Zoltán; *Tóth Gergely*, Miskolc, Berzeviczy Gergely Kereskedelmi és Vendéglátóipari Szakközépiskola, tanára: Turóczi Aranka; *Bakos Gergely*, Cegléd, Közgazdasági és Informatikai Szakközépiskola, tanára: Bere Lászlóné; *Pásztor Károly*, Debrecen, Mechwart András Gépipari és Informatikai Szakközépiskola, tanára: Gál Annamária; *Zámbó Miklós*, Pápa, Jókai Mór Közgazdasági Szakközépiskola, tanára: Kormerné Pethő Katalin; *Báthory Péter*, Budapest, Kalmár László Számítástechnikai Szakközépiskola, tanára: Fazekas József.

II. kategória: Általános matematika tantervű gimnáziumi tanulók

I. díj: **Blastik Márta**, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium, tanárai: Szászné Simon Judit és Hraskó András

Fehér Ádám, Győr, Révai Miklós Gimnázium, tanára: Sántha Noémi és Zábrádiné Shmierer Emília

II. díj: **Komjáthy Júlia**, Szekszárd, Garay János Gimnázium, tanára: Kertes Lázár

Szalay Gergely, Budapest, Veres Péter Gimnázium, tanára: Simon János

III. díj: **Lang Péter**, Győr, Révai Miklós Gimnázium, tanárai: dr. Szíjártó Miklósné és Zábrádiné Schmierer Emília

Nagy Gábor, Kaposvár, Táncsics Mihály Gimnázium, tanárai: Biczóné Lengyel Beáta és Terlaky Edit

I. dicséret: *Gáthy Lajos*, Fehérgyarmat, Zalka Máté Gimnázium, tanára: Peterman Istvánné *Gregó Kinga*, Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, tanárai: ifj. Szabó Kálmán és Gregó Miklósné; *Rácz Judit*, Szekszárd, Garay János Gimnázium, tanára: Kertes Lázár;

II. dicséret: *Kovács István*, Gyöngyös, Berze Nagy János Gimnázium, tanára: Kiss Miklós; *Lócsi Levente*, Celldömölk, Berzsenyi Dániel Gimnázium, tanára: Tinger Vendel; *Nguyen Phuong Anh*, Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyakorlóiskola, tanára: Marcsek Gábor; *Vehovszky Balázs*, Budapest, Piarista Gimnázium, tanára: Vízhányó Zsolt.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

I. díj: **Csóka Endre**, Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium, tanára: Balázs Tivadar

Jankó András, Szeged, Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium, tanárai: Dr Dobi János és Kovács István

Nagy Zoltán, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium, tanárai: Dobos Sándor, Thiry Imréné és Pósa Lajos

II. díj **Prekopcsák Zoltán**, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium, tanárai: Dobos Sándor és Pataki János

III. díj: **Balaton Attila**, Szolnok, Verseghy Ferenc Gimnázium, tanárai: Béres Jenő és Pogány Gyula

Fülöp Anita, Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimnázium, tanárai: Budai Endre és Ponácz Ferenc

Pálvögyi Dénes, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium, tanárai: Dobos Sándor és Thiry Imréné

Ruppert László, Pécs, Jánus Pannonius Gimnázium, tanárai: Polcz Katalin és Kárpáti Ágnes

I. dicséret: *Backhausz Ágnes*, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium, tanárai: Dobos Sándor és Thiry Imréné; *Bergman Gábor*, Budapest, Berzsenyi Dániel Gimnázium, tanárai: Hubert Györgyné és Kévés Rita; *Lajkó Miklós*, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium, tanárai: Dobos Sándor és Thiry Imréné; *Malakuczi Viktor*, Budapest, Szent István Gimnázium, tanárai: Lászlóné Sergyán Stefánia és Rácz János;

II. dicséret: *Kalcsú Áron*, Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimnázium, tanárai: Németh László és Pálovics Róbert; *Kormos Attila*, Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium, tanára: Balázs Tivadar; *Neudold Soma*, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium, tanárai: Dobos Sándor és Thiry Imréné; *Pelládi Gábor*, Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, tanárai: Gulyás Tibor és Szabó Kálmán.

HALADÓK

I. kategória: Szakközépiskolások

I. díj: **Pszota Zsolt**, Vác, Boronkay György Műszaki Szakközépiskola, tanára: Fábián Gábor

II. díj: **Csorba Zoltán**, Eger, Neumann János Közgazdasági Szakközépiskola és Gimnázium, tanára: Pótáné Márton Mária

III. díj: **Sipos Barnabás**, Budapest, Trefort Ágoston Kéttannyelvű Szakközépiskola, tanára: Dunajszky Zsuzsa

I. dicséret: *Biczó Béla*, Pécs, Zipernovszky Károly Ipari Szakközépiskola, tanárai: Ivasivka Mátyásné és Németh József; *Ambach Balázs*, Paks, Energetikai Szakképzési Intézet, tanára: Árokszállási Eszter; *Mészáros Zoltán*, Pécs, Zipernovszky Károly Ipari Szakközépiskola, tanárai: Ivasivka Mátyásné és Németh József; *Sánta János*, Nyíregyháza, Széchenyi István Közgazdasági Szakközépiskola, tanára: Vágvölgyi Mária;

II. dicséret: *Flaskár Anett*, Nyíregyháza, Széchenyi István Közgazdasági Szakközépiskola, tanárai: Zsíros Andrea és Filetóth István; *Juhász Csaba*, Dunaújváros, Rudas Közgazdasági Szakközépiskola, tanára: Keszlerné Szumzer Ilona; *Juhász Gábor*, Vác, Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium, tanára: Fábián Gábor; *Mendli Bálint*, Budapest, Puskás Tivadar Távközlési Technikum, tanára: Blastik István.

II. kategória: Általános matematika tantervű gimnáziumi tanulók

I. díj: **Tóth Ágnes**, Hajdúszoboszló, Hőgyes Endre Gimnázium,
tanára: Deli Lajos

II. díj: **Jesch Dávid**, Nagykanizsa, Batthány Lajos Gimnázium,
tanára: Dr. Pintér Ferenc

Farkas Viktor, Szolnok, Varga Katalin Gimnázium,
tanárai: Molnár László és Nagy Tibor

A bizottság **III. díjat** nem adott ki.

Dicséret: *Erdei Zsuzsa*, Hajdúszoboszló, Hőgyes Endre Gimnázium, tanára: Deli Lajos; *Hamar Gergő*, Dombóvár, Illyés Gyula Gimnázium, tanára: Mesterházyné dr. Illés Ágnes; *Nagy Márton*, Budapest, Piarista Gimnázium, tanára: Urbán János; *Balogh János*, Kaposvár, Táncsics Mihály Gimnázium, tanárai: dr. Iharos Csabáné és Kubatov Antal; *Reiss Attila*, Kecskemét, Bányai Júlia Gimnázium, tanárai: Óváriné Csabai Mária, Óvári Lajos és Varga József; *Spanczér Ilona*, Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimnázium, tanára: dr. Pintér Ferenc; *Nagy Ferenc*, Budapest, Evangélikus Gimnázium, tanára: Tobisch Márta; *Szalai Bence*, Veszprém, Lovassy László Gimnázium, tanára: Arnhoffer Mihály; *Csáky Attila*, Kecskemét, Katona József Gimnázium, tanárai: dr. Szablics Bálintné és Varga József; *Várnai Csilla*, Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gimnázium, tanára: Pető Sándor.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

A bizottság **I. díjat** nem adott ki.

II. díj: **Siroki László**, Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium,
tanára: Remeténé Orvos Viola

Béky Bence, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium,
tanárai: Fazakas Tünde és Táborné Vincze Márta

III. díj: **Kovács Erika Renáta**, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium,
tanárai: Fazakas Tünde, Táborné Vincze Márta, Surányi László és Pósa Lajos

Péterfalvi Ferenc, Pécs, Janus Pannonius Gimnázium,
tanárai: Polcz Katalin és Sáráné Dombi Anna

I. dicséret: *Kevei Péter*, Szeged, Radnóti Miklós Gimnázium; *Horváth Illés*, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium; *Csikvári Péter*, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium; *Pallos Péter*, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium; *Gerencsér Balázs*, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium; *Harangi Viktor*, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium;

II. dicséret: *Csordás Hunor*, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium; *Devecsery Ágnes*, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium; *Koreck Ferenc*, Szeged, Radnóti Miklós Gimnázium; *Zsbán Ambrus*, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium.

Az 1999–2000. évi Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny feladatai

I. kategória: Szakközépiskolák

Első (iskolai) forduló

1. Az $x^2+ax+1-b=0$ egyenletben az a és a b paraméterek valós számok. Igazolja, hogy ha az egyenlet gyökei pozitív egész számok, akkor a^2+b^2 összetett szám.

2. Az ABC háromszög AC oldalának A-hoz közelebbi harmadolópontja B_1, az AB oldal A-hoz közelebbi harmadolópontja C_1. Legyen a D pont a BB_1 szakasz, az E pont pedig a CC_1 szakasz felezőpontja, továbbá az ABC háromszög területe T. Bizonyítsa be, hogy a $DBCE$ négyszög területe $\dfrac{4}{9}T$.

3. Az $ABCD$ négyzet oldalai 10 cm hosszúak. Legyen az AB oldal felezőpontja E, a BC oldal felezőpontja F, az EF szakasz felezőpontja M. A DA szakaszon felveszünk egy N, az DC szakaszon egy P pontot úgy, hogy $DN=DP$ teljesüljön. Hogyan kell az N és a P pontokat megválasztani, hogy az MNP háromszög területe a lehető legnagyobb legyen, és mekkora ez a terület?

4. Egy egyenlő szárú háromszög szögei α, β, γ. Mekkorák ezek a szögek, ha

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin\gamma.$$

5. Az ABC háromszög köré írható körhöz a B csúcsban érintőt húzunk, amely az A csúcstól 9 cm, a C csúcstól 25 cm távolságra halad. Milyen messze van a B csúcs az AC egyenestől?

6. Igazolja, hogy akárhogyan választunk is ki az első 1999 pozitív egész szám közül 1414 darabot, a kiválasztottak összege nem lehet egyenlő a ki nem választottak összegével!

Második forduló

1. Hányféleképpen kaphatunk összegül 2000-et, ha néhány darab (legalább 2) közvetlenül egymást követő pozitív egész számot adunk össze?

2. Az $ABCD$ paralelogrammában $AB:BC=3:2$. A paralelogramma AB oldalát hosszabbítsuk meg a B csúcson túl AB-vel, a kapott pontot jelöljük E-vel. Hasonlóképpen a BC oldalt hosszabbítsuk meg a C-n túl BC-vel, a CD oldalt D-n túl CD-vel, a DA oldalt pedig A-n túl DA-val. A kapott pontokat jelöljük rendre F-fel, G-vel, H-val. Meg lehet-e választani az $ABCD$ paralelogramma szögeit úgy, hogy az $EFGH$ négyszög téglalap legyen? Ha igen, akkor mekkorák ezek a szögek?

3. Az x_1 és az x_2 a $[0;12]$ intervallum olyan valós számai, amelyekre teljesül, hogy

$$x_1x_2=(12-x_1)^2\cdot(12-x_2)^2.$$

Határozza meg az x_1x_2 szorzat legnagyobb értékét!

KöMaL – 2000/8 MAT0008 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 19:44 (15. lap)

4. Bizonyítsa be, hogy

$$\lg 1 - \lg 2 + \lg 3 - \lg 4 + \ldots + \lg 99 - \lg 100 < -1.$$

5. Az $ABCD$ egy olyan négyzet, amelynek oldalai 2 egység hosszúságúak. Az AB oldalon van egy E pont, az AD oldalon egy F pont úgy, hogy az AEF háromszög területe $\frac{2}{3}$ területegységnyi, és az AEF háromszög kerülete pozitív egész szám. Mekkorák az AEF háromszög oldalai?

Harmadik (döntő) forduló

1. Milyen valós számok tesznek eleget az alábbi egyenletnek?

$$\sin\left[\frac{\pi}{2}\cos(\pi x)\right] = \cos\left[\pi \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right] \tag{1}$$

2. Határozza meg az összes olyan tízes számrendszerbeli háromjegyű számot, amelynek számjegyeire fennáll a

$$\sqrt[3]{\frac{3a-b}{2c}} - \sqrt[3]{\frac{250c}{3a-b}} = 4\sqrt[3]{\left(\frac{3a-b}{2c}\right)^2}$$

egyenlőség!

3. Az $ABCD$ konvex négyszög AB és CD szemközti oldalegyeneseinek metszéspontját jelöljük P-vel, az AD és a BC oldalegyeneseinek metszéspontját jelöljük Q-val. Az $APD\sphericalangle$ szögfelezője a BC oldalt az F, az AD oldalt a H pontban metszi. A $BQA\sphericalangle$ szögfelezője a CD oldalt a G, az AB oldalt az E pontban metszi.

Bizonyítsa be, hogy az $EFGH$ négyszög akkor és csak akkor rombusz, ha az $ABCD$ négyszög húrnégyszög!

II. kategória: Általános tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Adjuk meg azokat az a és b természetes számokat, amelyekre teljesülnek a következő feltételek:

$$90 < a + b < 100, \tag{1}$$

$$0{,}9 > \frac{a}{b} < 0{,}91. \tag{2}$$

2. Legyen $a_n = 5^n + 7^n$ (n pozitív egész). Határozzuk meg a_{1999}-nek 216-tal való osztásakor kapott maradékát.

3. Az A és a B helységek között a távolság 200 km. Egy egyenes vonalú vasútvonal A-n megy át, és a B-hez legközelebbi pontja a B-től 87 km-re levő C állomásnál van. A B helységet egy egyenes műútszakasszal akarják összekötni az AC vonalszakasz egy

M pontjával úgy, hogy az áruszállítás A-ból M-be vasúton, onnan B-be pedig műúton a lehető legolcsóbb legyen; figyelembe véve, hogy a szállítás költsége kilométerenként a vasúton csak feleannyi, mint a műúton. Az A-tól milyen távolságra kell lennie ilyen feltételek mellett az M pontnak?

4. Legyen P az $ABCD$ négyzet köré írt kisebbik AB ívének tetszőleges pontja. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\frac{PA+PB}{PC+PD}$$

hányados értéke minden P pontra $(\sqrt{2}-1)$-gyel egyenlő.

5. Adott az a élhosszúságú $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka; $ABCD$ az alapnégyzete, és az AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 élek párhuzamosak. Felveszünk az AA_1 él A_1-en túli meghosszabbításán egy P pontot és a BC él C-n túli meghosszabbításán egy Q pontot úgy, hogy a PQ szakasz a C_1D_1 élt egy R belső pontban metszi. Mekkora a PQ szakasz lehetséges legkisebb hossza?

Második forduló

1. Mely n egészekre lesz az

$$n^4-4n^3+14n^2-20n+10$$

kifejezés értéke négyzetszám?

2. Egy négyzet alapú egyenes gúla alapélének és magasságának a hossza egész szám. Mekkora a gúla térfogata, ha felszínének és térfogatának azonos a mérőszáma?

3. Igazoljuk, hogy az 1-nél kisebb a, b, c pozitív számokra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\log_a \frac{3abc}{ab+bc+ca}+\log_b \frac{3abc}{ab+bc+ca}+\log_c \frac{3abc}{ab+bc+ca} \geq 3.$$

4. A T területű derékszögű háromszög beírt körébe egy t területű derékszögű háromszöget írunk be.

Mekkora lehet $\dfrac{T}{t}$ legkisebb értéke?

Harmadik (döntő) forduló

1. Készítsünk egy 2000 darab valós számból álló H halmazt, amelynek egyik eleme sem nulla. Jelöljük k-val a H-ból kiválasztható olyan négyelemű részhalmazok számát, amelyekben a négy elem szorzata negatív. A H elemei közül hányat kell negatívnak választanunk ahhoz, hogy k értéke a lehető legnagyobb legyen?

2. Az ABC háromszög nem egyenlő szárú; a BC, CA, AB oldal felezőpontját jelölje rendre A_1, B_1, C_1. A háromszög oldalain a C-ből az A-ba és onnan a B-be vezető út felezőpontja legyen A_2, az A-ból a B-be és onnan a C-be vezető út felezőpontját jelölje B_2, végül a B-ből a C-be és onnan az A-ba vezető út felezőpontja legyen C_2. Bizonyítsuk be, hogy az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egyenesek egy ponton mennek át.

3. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $b_1, b_2, \ldots, b_k$ pozitív egészek; az $a_1+a_2+\ldots+a_n$ és a $b_1+b_2+\ldots+b_k$ összegek egyenlők, és kisebbek nk-nál ($n>1$, $k>1$). Bizonyítsuk be, hogy az

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=b_1+b_2+\ldots+b_k$$

egyenlőségben szereplő mindkét összegből elhagyható néhány (de nem az összes) tag úgy, hogy az egyenlőség továbbra is fennálljon.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok

Első forduló

1. Az ABC háromszögnek van 60 fokos szöge, továbbá a félkerülete felírható

$$\frac{a^2+b^2+c^2-2s_c^2}{c}$$

alakban, ahol s_c a c oldalhoz tartozó súlyvonal. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög szabályos.

2. Jelöljük a_n-nel a $\sqrt{n}$-hez legközelebbi egész számot. Számítsuk ki az

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\ldots+\frac{1}{a_k}$$

összeget, ahol $k=1999\cdot 2000$.

3. Adjuk meg az összes olyan (pozitív) prímszámot, amelynek alkalmas (pozitív egész kitevős) hatványa felírható két pozitív egész szám köbének az összegeként.

4. Tegyük fel, hogy az $ABCP$ tetraéderben a PA, PB és PC élek páronként merőlegesek. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a P csúcs rajta van azon az ellipszoidon, amely az ABC háromszög körülírt körére mint főkörre emelt gömbből az ABC síkra vonatkozó $\frac{1}{\sqrt{2}}$ arányú merőleges affinitással keletkezik. (Ezen transzformáció során a tér bármely pontja az ABC síkra merőleges irányban mozdul eI úgy, hogy a síktól mért távolsága $\frac{1}{\sqrt{2}}$-szeresére változik.)

5. Van-e olyan $f(x)$ egész együtthatós, 1999-edfokú polinom, amelyre bármely n egész szám esetén az

$$f(n),\quad f(f(n)),\quad (f(f(f(n))),\quad \ldots$$

számok páronként relatív prímek?

Második (döntő) forduló

1. Mutassuk meg, hogy egy páratlan fokú, egész együtthatós polinomfüggvény grafikonjában csak véges sokszor fordulhat elő, hogy két (különböző) egész abszcisszájú pont távolsága egész szám.

2. Tekintsük azt a kört, amely áthalad azon a három ponton, ahol egy adott háromszög szögfelezői metszik a szemközti oldalakat. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög oldalegyenesei ebből a körből három olyan húrt metszenek ki, amelyek közül valamelyiknek a hossza egyenlő a másik kettő hosszának az összegével. (Ha a kör a háromszög oldalegyenesét nem metszi, hanem érinti, akkor a megfelelő húrt 0 hosszúságúnak vesszük.)

3. Legyenek k és t 1-nél nagyobb, relatív prím egészek. Az 1, 2, $\dots$, n számok $12\dots n$ természetes sorrendjéből kiindulva tetszőleges két olyan elemet felcserélhetünk, amelyek különbsége k vagy t. Bizonyítsuk be, hogy ilyen lépések egymásutánjával akkor és csak akkor juthatunk el minden permutációhoz, ha $n \geq k+t-1$.

Az 1999–2000. évi Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny eredményei

I. kategória
Szakközépiskolások

I. díj: **Novák Ádám** 11. o., Eger, Neumann János Közgazd. Szki. és Gimn.
Felkészítő tanár: Szakaliné Haraszti Éva

II. díj: **Temesi Dániel** 13. o., Győr, Krúdy Gyula Gimn., Vendéglátóipari Szki és Szakmunkásképző Isk.
Felkészítő tanár: Babarczi Imréné

III. díj: **Perge István** 11. o., Eger, Neumann János Közgazd. Szki. és Gimn.
Felkészítő tanár: Szakaliné Haraszti Éva

4. **Márton Albert** 11. o., Eger, Neumann János Közgazd. Szki. és Gimn.
Felkészítő tanár: Szakaliné Haraszti Éva

5. **Kapás Katalin** 12. o., Dunaújváros, Rudas Közgazd. Középisk. és Koll.
Felkészítő tanár: Kácsor László

6. **Bodó Katalin** 12. o., Szeged, Kőrösy József Közgazd. és Külker. Szki.
Felkészítő tanár: Stanzelné Szalai Éva

7. **Rátosi Róbert** 12. o., Pápa, Jókai Mór Közgazd. Szki.
Felkészítő tanár: Völfinger Sándor

8. **Farkas Pál László** 12. o., Békéscsaba, Széchenyi I. Közgazd. és Külker. Szki.
Felkészítő tanár: Dr. Rókáné Rózsa Anikó

9. **Belicza András** 12. o., Budapest, Puskás Tivadar Távközl. Technikum
Felkészítő tanár: Blastik István

10. **Miklecz Szabolcs** 12. o., Vác, Boronkay György Műszaki Középisk. és Gimn.
Felkészítő tanár: Szász Csilla, Mindáné Kolostori Nóra

További helyezettek:

11. *Horváth Tamás* 12. o., Pécs, Zipernowsky Károly Ipari Szki.; **12.** *Gyurcsek Tamás* 12. o., Szolnok, Pálfy J. Műszeripari és Vegyipari Szki.; **13.** *Lestár Miklós* 12. o., Budapest, II. Rákóczi Ferenc Fővárosi Gyak. Közgazd. Középisk.; **14.** *Gál Péter* 12. o., Eger, Neumann János Közgazd. Szki. és Gimn.; **15.** *Tamás Katalin* 12. o., Békéscsaba, Széchenyi István Közgazd. és Külkeresk. Szki.; **16.** *Tomon Sándor* 12. o., Budapest, Puskás Tivadar Távközlési Technikum; **17.** *Tóth Edit* 12. o., Makó, Erdei Ferenc Keresk. és Közgazd. Szki.; **18.** *Csikós Tamás* 12. o., Eger, Neumann János Közgazd. Szki. és Gimn.; **19.** *Hegedűs Zoltán Csaba* 12. o., Miskolc, Andrássy Gyula Műszaki Középisk.; **20.** *Arany Kamill* 12. o., Eger, Neumann János Közgazd. Szki. és Gimn.; **21.** *Kiss Bálint* 12. o., Vác, Boronkay György Műszaki Középisk. és Gimn.; **22.** *Oláh Gusztáv* 12. o., Debrecen, Mechwart András Gépipar és Informatikai Középisk.; **23.** *Pócza Zsuzsanna* 12. o., Győr, Deák Ferenc Közgazd. Szki.; **24.** *Germán András* 12. o., Budapest, Puskás Tivadar Távközlési Technikum; **25.** *Magyari Máté* 12. o., Vác, Boronkay György Müszaki Középisk. és Gimn.; **26.** *Lajter László* 12. o., Debrecen, Bethlen Gábor Közgazd. és Postaforg. Szki.; **27.** *Peresztegi Nagy Zoltán* 12. o., Budapest, Trefort Ágoston Kéttannyelvű Műszaki Szki. és Gimn.; **28.** *Sánta Tibor* 11. o., Miskolc, Berzeviczy Gergely Keresk. és Vendéglátóip. Szki.; **29.** *Tolnai Linda* 12. o., Ajka, Bródy Imre Gimn. és Szki.; **30.** *Győrfi Gábor* 12. o., Budapest, Hunfalvy János Külkeresk., Közgazd. Szki. és Gimn.

II. kategória
Általános matematika tantervű gimnáziumi tanulók

I. díj: **Zábrádi Gergely** 12. o., Győr, Révai Miklós Gimn.
Felkészítő tanár: dr. Szíjártó Miklósné, Zsebők Ottó, Pósa Lajos

II. díj: **Gyenes Zoltán** 12. o., Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gyak. Gimn.
Felkészítő tanár: Drody Győzőné dr.

III. díj: **Vörös László** 11. o., Győr, Révai Miklós Gimn.
Felkészítő tanár: Zábrádiné Schmierer Emília, Zsebők Ottó, Pósa Lajos

4. **Ivaskó György** 12. o., Baja, III. Béla Gimn.
Felkészítő tanár: Királyné Nagy Éva

5. **Bohák András** 11. o., Budapest, Budapesti Evangélikus Gimn.
Felkészítő tanár: Laczkó László, Nagy-Baló András

6. **Iván Szabolcs** 12. o., Kecskemét, Bolyai János Gimn.
Felkészítő tanár: Varga József

7. **Szentpéteri Róbert** 12. o., Pannonhalma, Bencés Gimn.
Felkészítő tanár: Pintér Ambrus

8. **Zalán Péter** 11. o., Budapest, Budapesti Evangélikus Gimn.
Felkészítő tanár: Laczkó László

9. **Máthé András** 12. o., Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimn.
Felkészítő tanár: Tóth Attila

10. **Babos Attila** 11. o., Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyak. Gimn.
Felkészítő tanár: Hegyi Györgyné

További helyezettek:

11. *Molnár László Milán* 12. o., Miskolc, Földes Ferenc Gimn.; **12.** *Buruzs Ádám* 12. o., Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimn.; **13.** *Móczó Péter* 12. o., Budapest, Jedlik Ányos Gimn.; **14.** *Bakó Dániel* 11. o., Mosonmagyaróvár, Kossuth Lajos Gimn.; **15.** *Baka Nóra* 11. o., Kaposvár, Táncsics Mihály Gimn.; **16.** *Oláh István* 12. o., Nyíregyháza, Krúdy Gyula Gimn.; **17.** *Koczka Gergely* 12. o., Budapest, Szent Margit Gimn.; **18.** *Kiss Sándor* 12. o., Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimn.; **19.** *Árvay Eszter* 11. o., Szekszárd, Garay János Gimn.; **20.** *Deli Lajos* 11. o., Hajdúszoboszló, Hőgyes Endre Gimn. és Szki.; **21.** *Antók Péter* 12. o., Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Gimn.; **22.** *Besenyei Ádám* 12. o., Tatabánya, Árpád Gimn. és Pedagógiai Szki.; **23.** *Kiss Árpád* 11. o., Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimn.; **24.** *Cseh Barnabás* 12. o., Baja, III. Béla Gimn.; **25.** *Varga Gergely* 12. o., Szombathely, Bolyai János Gyakorló Ált. Isk. és Gimn.; **26.** *Harmath Árpád* 12. o., Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimn. és Egészségügyi Szki.; **27.** *Friedl Zita* 12. o., Sopron, Széchenyi István Gimn.; **28.** *Hegedűs Ákos* 12. o., Pécs, A Ciszterci Rend Pécsi Nagy Lajos Gimnáziuma; **29.** *Varga Szilvia* 12. o., Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimn.; **30.** *Pesti Gábor* 11. o., Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimn. és Egészségügyi Szki.

III. kategória
Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

I. díj: **Kiss Gergely** 12. o., Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimn.
Felkészítő tanár: Surányi László, Hraskó András, Reiman István

II. díj: **Pálvölgyi Dömötör** 12. o., Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimn.
Felkészítő tanár: Surányi László, Hraskó András, Pataki János, Beleznay Ferenc

III. díj: **Keszegh Balázs** 12. o., Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimn.
Felkészítő tanár: Surányi László, Hraskó András

4. **Gáspár Merse Előd** 12. o., Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimn.
Felkészítő tanár: Surányi László, Hraskó András

5. **Győri Nikolett** 12. o., Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimn.
Felkészítő tanár: Surányi László, Hraskó András

6. **Vígh Viktor** 11. o., Szeged, SZTE Ságvári Endre Gyakorló Gimn.
Felkészítő tanár: Konfárné Nagy Klára, dr. Dobi János

7. **Horváth György** 11. o. Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimn.
Felkészítő tanár: Laczkó László

8. **Papp Dávid** 12. o. Budapest, Szent István Gimn.
Felkészítő tanár: Juhász István, Rácz János

9. **Dezső Balázs** 12. o., Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimn.
Felkészítő tanár: Popáczné Csuthy Márta, Sipos Imre

10. **Varjú Péter** 11. o., Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimn.
Felkészítő tanár: Mike János, Schultz János

További helyezettek:

11. *Gelencsér Gábor* 11. o., Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimn.; **12.** *Rokob András*

11. o., Miskolc, Földes Ferenc Gimn.; **13.** *Vértesi Vera* 12. o., Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimn.; **14.** *Vizer Máté* 12. o., Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimn.; **15.** *Zempléni Márton* 12. o., Budapest, Szent István Gimn.; **16.** *Tillinkó Zsanett* 12. o., Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimn.; **17.** *Vágvölgyi Bálint* 12. o., Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimn.; **18.** *Schlotter Ildikó* 12. o., Budapest, Szent István Gimn.; **19.** *Kiss Norbert* 11. o., Budapest, Szent István Gimn.; **20.** *Kiss Norbert* 12. o., Debrecen, Fazekas Mihály Gimn.; **21.** *Kajtár Márton* 12. o., Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimn.; **22.** *Bachraty Gergely* 12. o., Budapest, Szent István Gimn.

Nemes Tihamér OKSzTV 1999/2000

A Nemes Tihamér OKSzTV-n az 1999/2000-es tanévben az első fordulóban 4545 tanuló vett részt 351 iskolából, közülük 321-en Erdélyből, 9-en Szlovákiából. A második, regionális fordulót, amelyen 1193 tanuló indult, az ország 30 városában rendeztük. A harmadik forduló, az országos döntő Budapesten került megrendezésre két helyszínen, amelyen 223 tanuló vett részt. Az eredmények:

I. kategória:

1–2. **Ritzinger Péter**, Győr, Apor Vilmos Iskolaközpont, 8. o.t.
Sztupák Szilárd, Miskolc, Herman Ottó Gimnázium, 8. o.t.

3. **Bauer Péter**, Szombathely, Bolyai János Gyak. Ált. Iskola és Gimn., 8. o.t.

4. **Rácz Béla András**, Fazekas Mihály Főv. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 8. o.t.

5. **Gruber László**, Debrecen, KLTE Arany János Gyakorló Általános Iskola, 8. o.t.

6–7. **Fehér Gábor**, Budapest, Berzsenyi Dániel Gimnázium, 8. o.t.
Paulin Roland, Fazekas Mihály Főv. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 6. o.t.

8–10. **Juhász Máté**, Fazekas Mihály Főv. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 8. o.t.
Rák Ádám, Miskolc, Fényi Gyula Jezsuita Gimnázium, 8. o.t.
Újhelyi Zoltán, Vác, Petőfi Sándor Általános Iskola, 8. o.t.

II. kategória

1. **Pallos Péter**, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium, 10. o.t.
2. **Pszota Zsolt**, Vác, Boronkay György Szakközépiskola, 10. o.t.
3. **Zavarkó Gábor**, Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, 10. o.t.
4. **Hargitai Gábor**, Ócsa, Bolyai János Gimnázium, 10. o.t.
5. **Szabó András**, Győr, Kazinczy Ferenc Gimnázium, 10. o.t.
6. **Siroki László**, Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium, 10. o.t.

7. **Szebenyi Zoltán**, Szeged, Ságvári Endre Gimnázium, 10. o.t.

8. **Szeredi Dániel**, Budapest, Veres Péter Gimnázium, 10. o.t.

9–11. **Marton József**, Szeged, Ságvári Endre Gimnázium, 10. o.t.
Balogh János, Kaposvár, Táncsics Mihály Gimnázium, 10. o.t.
Barta Gábor, Eger, Neumann János Közgazd. Szakközépiskola és Gimn., 9. o.t.

III. kategória

1. **Rokob András**, Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, 11. o.t.

2. **Dezső Balázs**, Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimnázium, 12. o.t.

3. **Gyebnár Gábor**, Szeged, Ságvári Endre Gimnázium, 11. o.t.

4. **Novák Ádám**, Eger, Neumann János Közgazd. Szki. és Gimn., 11. o.t.

5. **Soós István**, Szombathely, Kanizsai Dorottya Gimnázium, 12. o.t.

6. **Ritter Ádám**, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium, 11. o.t.

7. **Csillag Kristóf**, Püspökladány, Karacs Ferenc Gimnázium, 12. o.t.

8. **Flach Attila**, Szeged, Ságvári Endre Gimnázium, 12. o.t.

9. **Sáfár Szilveszter**, Szeged, Ságvári Endre Gimnázium, 12. o.t.

10–11. **Pataki Gergely**, Eger, Neumann János Közgazd. Szki. és Gimn., 11. o.t.
Máthé András, Budapest, Apáczai Csere János Gimnázium, 12. o.t.

12. *Pozsgay Balázs*, Pécs, Magyar–Német Iskolaközpont, 11. o.t. **13.** *Kecskeméti Balázs*, Szeged, Ságvári Endre Gimnázium, 11. o.t. **14.** *Herendi Gergely*, Dunakeszi, Radnóti Miklós Gimnázium, 12. o.t. **15.** *Herczegh Géza*, Szolnok, Varga Katalin Gimnázium, 12. o.t. **16–17.** *Gunda Lénárd*, Debrecen, KLTE Gyakorló Gimnázium, 12. o.t.; *Varga Kornél*, Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, 12. o.t. **18.** *Földényi Tamás*, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium, 11. o.t. **19–20.** *Siroki Péter*, Debrecen, Mechwart András Gépipari és Informatikai Szki., 11. o.t.; *Sebestyén Csaba*, Pécs, Árpád fejedelem Gimnázium, 12. o.t.

A III. kategória 1–10. helyezettje jogosult az érettségi, illetve felvételi kedvezmény igénybevételére (egyes intézményekben az 1–20. helyezett).

A II–III. kategória 11 legjobb 10–11. osztályos helyezettje számára olimpiai válogatóversenyt rendeztünk, amelynek alapján kiválasztottuk az idei Közép-Európai Informatikai Diákolimpián, Kolozsvárott résztvevő magyar csapat tagjai:

Gyebnár Gábor, Novák Ádám, Pallos Péter és **Rokob András.**

A Nemes Tihamér OKSzTV III. kategóriájának 1–20. helyezettje számára olimpiai válogatóversenyt rendeztünk, amelynek eredményeképpen az idei Nemzetközi Informatikai Diákolimpián, Pekingben (Kína) az alábbi tanulók indultak:

Csillag Kristóf, Flach Attila, Rokob András, és **Soós István**.

Zsakó László

Matematika Határok Nélkül | Mathématiques Sans Frontieres

Versenyfelhívás

A 2000/2001-es tanévben is meghirdetjük a „Mathématiques Sans Frontieres – Matematika Határok Nélkül" nemzetközi vetélkedő magyarországi fordulóját budapesti, Békés megyei, Hajdú-Bihar megyei és Borsod-Abaúj-Zemplén megyei

középiskolák 9. évfolyamos osztályai számára.

A verseny szülőhazája a franciaországi Elzász tartomány. A fokozatosan nemzetközivé terebélyesedő erőpróbán hagyományosan már hazánk is részt vesz.

A „Matematika Határok Nélkül" osztályok közötti erőpróba, tehát csak **teljes osztályok** jelentkezését várjuk, ezen belül is csak a nem speciális matematika tagozatos osztályokét. (Versenyen kívül az utóbbiak is részt vehetnek a játékban.) A feladatokat az osztályok csoportmunkában oldhatják meg, tevékenységüket önállóan szervezve. A feladatok jellege, szövegezése lehetővé teszi, hogy a matematikában kevésbé eredményes tanulók is hatékonyan hozzájáruljanak osztályuk teljesítményéhez. A feladatok közül az egyik idegen nyelven – angol, német, francia, olasz, spanyol – lesz megfogalmazva, s a megoldást is a felsoroltak közül választott nyelven kell megadni. Természetesen a többi feladat szövege magyar nyelvű, és a megoldást is magyar nyelven várjuk.

A verseny felügyeletét a versenyző osztályok tanárai látják el egy konkurens osztálynál. Ezért csak olyan jelentkezést fogadunk el, ahol a tanár – vagy az általa felkért kollégája – vállalja az egyszeri ügyeletet.

A verseny időpontja: 2001. március 13. (csütörtök) 15 órától 16 óra 30 percig.

A versenyt megelőzi egy próba-forduló. Ennek eredménye nem számít a végeredménybe, kizárólag az osztály felkészülését szolgálja, megszervezése az osztály szaktanárának feladata. (A próba-forduló feladatait néhány példányban a jelentkezők rendelkezésére bocsátjuk.)

A győztes osztályok jutalma – az előző évekhez hasonlóan – 1 napos kirándulás a gänsendorfi Safari-parkba. A helyezett osztályok díja a jelentkező osztályok számától és a szponzori támogatások nagyságától függ.

A jelentkezési lapon a következő adatokat kérjük feltüntetni:

1. Iskola neve, típusa, címe, telefonszáma, e-mail címe.
2. Az osztály jele, létszáma, továbbá, hogy 4, 6 vagy 8 osztályos képzésben vesz-e részt az osztály.
3. A matematika heti óraszáma, a matematikatanár(ok) neve.
4. A felügyeletet vállaló tanár neve (benevezett osztályonként egy fő).

A jelentkezési határidő: 2000. november 30.

A jelentkezéseket az alábbi címre kérjük:

Budapesten: „Matematika Határok Nélkül", Berzsenyi Dániel Gimnázium,
1133 Budapest, Kárpát u. 49–53. msf@s2.berzsenyi.isk.tvnet.hu

Békés megyében: Szabó Zsófia, Rózsa Ferenc Gimnázium, Békéscsaba, Andrássy út 56.

Borsod-Abaúj-Zemplén megyében: Kiss István, Ságvári Endre Gimnázium,
3700 Kazincbarcika, Jószerencsét út 2.

Miskolcon: Héjj Márta, Földes Ferenc Gimnázium, 3525 Miskolc, Hősök tere 7.

Hajdú-Bihar megyében: Deli Lajos, Hőgyes Endre Gimn. és Szakközépiskola,
4200 Hajdúszoboszló, Rákóczi út 44.

További információ a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium honlapján található:

http://berzsenyi.tvnet/hu

Feladatok felvételi előkészítő szakkörre I.

Budó Ágoston professzor úr emlékére

1. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán.

$$x(x-1)(2x+3y)=26,$$
$$x^2+x+3y=15.$$

2. Igazolja, hogy az $ABCD$ konvex négyszög pontosan akkor (akkor és csak akkor) paralelogramma, ha

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=0.$$

3. Oldja meg a valós számpárok halmazán a

$$\operatorname{tg}^2 x+2(\sin y+\cos y)\operatorname{tg} x+2=0$$

kétismeretlenes egyenletet!

4. Tekintsük az egység sugarú kör köré írt – nem négyzet – húrtrapézokat. Forgassuk meg a trapézt 360°-kal a hosszabb párhuzamos oldala körül. Számítsa ki e forgástestek közül a legkisebb felszínű, illetve a legkisebb térfogatú forgástest felszínét, illetve térfogatát. Mekkora ezekben az esetekben a trapéz hegyesszöge?

Rábai Imre

Megoldásvázlatok, eredmények az I. mérőlap (2000/7. sz.) feladataihoz

1. Legyen a sorozat első tagja a, hányadosa pedig q. Ekkor $a(1+q^2+q^4)=126$ és $q(a(1+q^2)-30)=0$. Ha $q=0$, akkor $a=126$. Ha $q\neq 0$, akkor $\dfrac{1+q^2+q^4}{1+q^2}=\dfrac{126}{30}$, ahonnan $5q^4-16q^2-16=0$, $q^2=4$ ($q^2=-\dfrac{4}{5}$ nem ad megoldást). Ha $q=2$, akkor $a=6$, ha $q=-2$, akkor is $a=6$.

2. Mivel $a>0$, azért $\sqrt{4a+1}<\sqrt{4a^2+4a+1}=2a+1$. Hasonlóan $\sqrt{4b+1}<2b+1$ és $\sqrt{4c+1}<2c+1$, tehát valóban

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<2a+1+2b+1+2c+1=2(a+b+c)+3=9.$$

(A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alkalmazásával $\sqrt{4a+1}=\sqrt{1\cdot(4a+1)}\le$ $\le\dfrac{1+4a+1}{2}=2a+1$. Az egyenlőség most nem állhat fenn, hiszen $1=4a+1$ akkor teljesül, ha $a=0$, de a feladatban a pozitív.)

3. A P pont a BD átlóra illeszkedik, hiszen $BPA\sphericalangle+DPA\sphericalangle=180^\circ$. Az ABP, az ADP és az ABD derékszögű háromszögek hasonlóak. A befogó- és a magasságtételt alkalmazva

$$10^2=PD\cdot BD,\qquad 20^2=PB\cdot BD\quad \text{és}\quad PA^2=PB\cdot PD.$$

Mivel $BD=10\sqrt5$, azért $PD=2\sqrt5$, $PB=8\sqrt5$ és $PA=4\sqrt5$.

A PC távolságot a PDC háromszögből a koszinusztétel alkalmazásával számíthatjuk ki. Legyen $PDC\sphericalangle=\delta$, $\cos\delta=\dfrac{20}{10\sqrt5}=\dfrac{2}{\sqrt5}$. $PC^2=\left(2\sqrt5\right)^2+20^2-2\cdot2\sqrt5\cdot20\cdot\dfrac{2}{\sqrt5}$, $PC=2\sqrt{65}$.

4. *a*) $x\ne1$, $x\ne-2$ és $(x-1)^2(x+2)^2=4$, vagyis $(x-1)(x+2)=-2$ vagy $(x-1)(x+2)=2$. A kapott $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$, $x_4=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$ számok az adott egyenletnek megoldásai.

b) $x\ne1$ és $x>-2$. Ennek az egyenletnek x_1, x_2 és x_3 a gyökei.

c) és *d*) $x>1$. Ekkor x_3 az egyetlen megoldás.

5. A koszinusztétel alkalmazásával $c^2-a^2-b^2=-2ab\cos\gamma$, a háromszög területe pedig $T=\dfrac12ab\sin\gamma$. A feltétel szerint

$$\frac12ab\sin\gamma=-2\cdot\frac{\sqrt3}{4}ab\cos\gamma,$$

ahonnan $\operatorname{tg}\gamma=-\sqrt3$, $\gamma=120^\circ$. Most $c^2=a^2+b^2-2ab\cos120^\circ$, $c=\sqrt{a^2+b^2+ab}$.

Mivel $c=2r\sin\gamma$, azért $\sqrt{a^2+b^2+ab}=2r\cdot\dfrac{\sqrt3}{2}$. A háromszög köré írt kör sugara

$$r=\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}.$$

6. Az $x^2+3ax-\dfrac43b=0$ egyenlet gyökei legyenek x_1, x_2, az $x^2-a^2x-2ab=0$ egyenlet gyökei ekkor x_1+2, x_2+2. A gyökök és az együtthatók összefüggései alkalmazásával

$$\begin{aligned} x_1+x_2&=-3a,\\ x_1x_2&=-\frac43b\end{aligned}\qquad\text{és}\qquad \begin{aligned}(x_1+2)+(x_2+2)&=a^2,\\ (x_1+2)(x_2+2)&=-2ab.\end{aligned}$$

Innen $-3a+4=a^2$, tehát $a=1$ vagy $a=-4$ és $-\dfrac43b-6a+4=-2ab$, ahonnan $(3a-2)(b-3)=0$. Innen $b=3$. Az első esetben az egyenletek $x^2-x-6=0$, illetve $x^2+3x-4=0$, a gyökök $x_1=-2$, $x_2=3$, illetve -4, 1; a második esetben az egyenletek $x^2-16x+24=0$, illetve $x^2-12x-4=0$, a gyökök $x_1=8+2\sqrt{10}$, $x_2=8-2\sqrt{10}$, illetve $6+2\sqrt{10}$ és $6-2\sqrt{10}$.

7. Az egyenleteket $2\cos^3 x = -\sin y$, illetve $2\sin^3 x = -\cos y$ alakban írhatjuk. Emeljük négyzetre az egyenletek mindkét oldalát, majd adjuk össze az egyenleteket. Ekkor a $4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 1$ egyenletet kapjuk. Mivel $(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 = 1$, $\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$ és $\sin^2 2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 4\alpha)$, ezért $4(\sin^6 x + \cos^6 x) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\cos 4x$, tehát $\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\cos 4x = 1$, $\cos 4x = -1$, $4x = \pi + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

a) Ha $x_1 = \frac{\pi}{4}$, akkor $\sin y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $\cos y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y_1 = \frac{5\pi}{4}$;

b) ha $x_2 = \frac{3\pi}{4}$, akkor $\sin y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ és $\cos y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y_2 = \frac{5\pi}{4}$;

c) ha $x_3 = \frac{5\pi}{4}$, akkor $y_3 = \frac{\pi}{4}$;

d) ha $x_4 = \frac{7\pi}{4}$, akkor $y_4 = \frac{7\pi}{4}$.

8. Mivel $AB = 10$, azért a hozzá tartozó m_c magasság 8 egység, hiszen $\frac{10m_c}{2} = 40$. Az AB egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}(8;6)$, egy normálvektora $\mathbf{n}(3;-4)$. A keresett C csúcspont a B ponttól $4\sqrt{5}$ egységre van, így rajta van az $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 80$ egyenletű körön, és a BC egyenestől 8 egység távolságra van, így rajta van a $3x - 4y + k = 0$ egyenletű egyenesen is, amely a $B(-1;3)$ ponttól 8 egységre van. Így $8 = \frac{|-3-12+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}$, ahonnan $k = 55$ vagy $k = -25$.

A feltételeknek négy C pont felel meg.

A $3x - 4y + 55 = 0$ egyenletű egyenes és az $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 80$ egyenletű kör metszéspontjai: $C_1(-9;7)$, $C_2(-2{,}6;11{,}8)$, a $3x - 4y - 25 = 0$ egyenletű egyenes és az $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 80$ egyenletű kör metszéspontjai: $C_3(7;-1)$, $C_4\left(\frac{3}{5};-\frac{29}{5}\right)$.

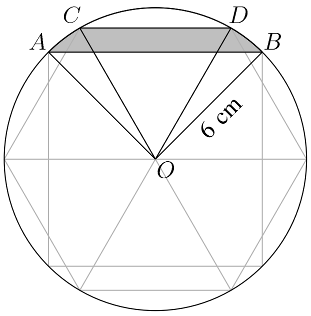
Rábai Imre

Matematika gyakorlatok megoldása

C. 572. *A* 6 cm *sugarú körbe írt szabályos hatszög és beírt négyzet egy-egy oldala párhuzamos. Számítsuk ki a kör azon részének területét, amely a hatszög és a négyzet párhuzamos oldala között van és nem tartalmazza a kör középpontját.*

Megoldás. Jelöljük a kör középpontját O-val, a négyzet oldalának a körrel való metszéspontját A-val és B-vel, a négyzet oldalával párhuzamos hatszögoldal végpontjait pedig C-vel és D-vel. Ha az $\overset{\frown}{AB}$ körszelet területéből kivonjuk a $\overset{\frown}{CD}$ körszelet területét, megkapjuk a keresett területet.

A körszelet területe: $T=\frac{1}{2}r^2(\widehat{\alpha}-\sin\alpha)$, ahol r azon kör sugara, amelyből a körszeletet lemetszettük, α a középponti szög és $\widehat{\alpha}$ ennek mérőszáma radiánban.



A négyzet oldala a középpontból 90°-os szög alatt látszik, ami $\frac{\pi}{2}$ radián, a szabályos hatszög oldala 60°-os szög alatt látszik, ami $\frac{\pi}{3}$ radián.

A két terület különbsége:

$$\frac{1}{2}6^2\left[\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\approx 7{,}01332\ \mathrm{cm}^2.$$

Megjegyzés. A körben két egybevágó ilyen síkidom van, értelmezhetjük úgy is a feladatot, hogy e két síkidom együttes területét kell kiszámolnunk. A válasz a kérdésre ekkor a megoldásban kapott érték kétszerese, azaz $\approx 14{,}03\ \mathrm{cm}^2$.

467 dolgozat érkezett. 5 pontos 331, 4 pontos 9, 3 pontos 15, 2 pontos 80, 1 pontos 10, 0 pontos 19, nem versenyszerű 3 dolgozat.

C. 573. *Határozzuk meg mindazokat az n pozitív egész számokat, amelyekre*

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=1+2+\ldots+(2n-1)+2n.$$

Megoldás. A bal oldalon a négyzetszámok összege áll 1-től n-ig, amely felírható a következő zárt alakban:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

A jobb oldalon viszont az egész számok összege áll 1-től $2n$-ig, ami $\frac{2n(2n+1)}{2}=$ $=n(2n+1)$.

Ezek felhasználásával a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=n(2n+1),$$

ahonnan rendezve és $n(2n+1)\neq 0$-val egyszerűsítve: $n+1=6$, $n=5$.

Valóban,

$$1+4+9+16+25=55=1+2+3+\ldots+9+10.$$

A feladat feltételeinek csak az $n=5$ pozitív egész szám tesz eleget.

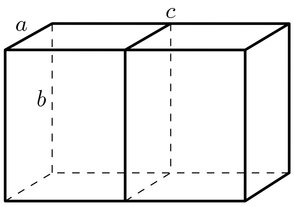
Pach Péter Pál (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.)

428 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 309, 4 pontot 78, 3 pontot 20, 2 pontot 6, 1 pontot 4, 0 pontot 3 versenyző. Nem versenyszerű 8 dolgozat.

C. 574. *Milyen összefüggésnek kell fennállnia egy téglatest élei között ahhoz, hogy kettévágható legyen két egybevágó, az eredetihez hasonló téglatestre?*

Megoldás. A téglatest élei legyenek $a \le b \le c$. Tegyük fel, hogy a téglatestet kettévágtuk két egybevágó, az eredetihez hasonló téglatestre. A részek egybevágósága miatt a metsző sík nyilván merőlegesen felezi a téglatest valamelyik élét.

Tudjuk, hogy hasonló testek térfogatának aránya – esetünkben 2 – egyenlő a hasonlóság arányának köbével. Így a fél téglatestek éleinek hossza:



$$\frac{a}{\sqrt[3]{2}} \le \frac{b}{\sqrt[3]{2}} \le \frac{c}{\sqrt[3]{c}}.$$

Az eredeti téglatest élei közül a leghosszabb nem szerepelhet a fél téglatestek élei között, tehát erre merőleges vágással feleztük el a téglatestet. Az $\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$ sem szerepelhet az eredeti téglatest élei között, hiszen ez kisebb az eredeti téglatest legkisebb élénél is, tehát csak $\frac{a}{\sqrt[3]{2}} = \frac{c}{2}$ lehetséges.

A további élekre $a = \frac{b}{\sqrt[3]{2}}$ és $b = \frac{c}{\sqrt[3]{2}}$. Az élekre a következő arányt kaptuk:

$$a : b : c = a : \sqrt[3]{2}a : \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 a = 1 : \sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{4}.$$

Egy téglatest eszerint pontosan akkor vágható szét két egybevágó, az eredetihez hasonló téglatestre, ha éleinek aránya $1 : \sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{4}$.

283 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 196, 4 pontot 32, 3 pontot 11, 2 pontot 18, 1 pontot 4, 0 pontot 19 beküldő. Nem versenyszerű 3 dolgozat.

C. 579. *Egy körlapot két sugara mentén két darabra vágunk. A kapott körcikkekből kúp alakú tölcséreket formálunk. Akkor lesz-e legnagyobb a tölcsérek össztérfogata, ha félkörökből indulunk ki?*

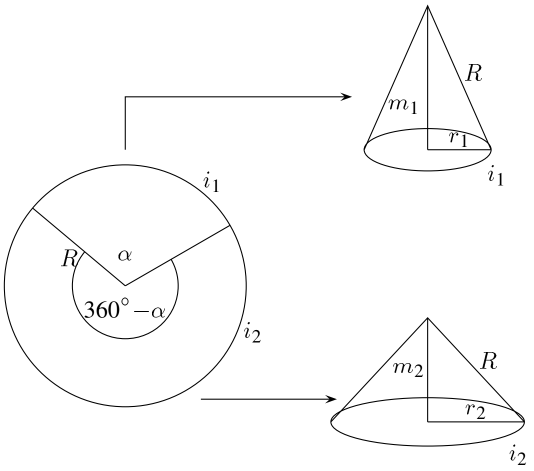
I. megoldás. Legyen a körlap sugara R. Ha egy átmérő mentén vágjuk ketté a kört, akkor a kúp alapkörének kerülete egyenlő a félkör kerületével, vagyis $2r\pi = R\pi$, ahonnan $r = \frac{R}{2}$ az alapkör sugara, a kúpok magassága pedig

$$m = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R}{2}\sqrt{3}.$$

A kúp kétszeres térfogata

$$V = 2\frac{\left(\frac{R}{2}\right)^2 \pi \frac{R}{2}\sqrt{3}}{3} = \frac{R^3\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}4330127 \cdot \frac{R^3\pi}{3}.$$

Vágjuk fel ezután két tetszőleges sugár mentén a körlapot, és készítsük el a két tölcsért. A két kúp alapkörének sugara r_1 és r_2.



$i_1 = \dfrac{R\pi\alpha}{180^\circ}$, ahonnan

$$r_1 = \frac{R\alpha}{360^\circ}$$

$i_2 = 2R\pi - i_1$, ahonnan

$$r_2 = R\left(1 - \frac{\alpha}{360^\circ}\right)$$

Legyen $\dfrac{\alpha}{360^\circ} = x$ $(0 < x < 1)$, és írjuk fel a térfogatok összegét x függvényként.

$$r_1 = Rx, \qquad m_1 = \sqrt{R^2 - (Rx)^2} = R\sqrt{1 - x^2},$$

$$V_1 = \frac{(Rx)^2\pi \cdot R\sqrt{1-x^2}}{3} = \frac{R^3\pi}{3}\left(x^2\sqrt{1-x^2}\right),$$

$$r_2 = R(1-x), \qquad m_2 = \sqrt{R^2 - R^2(1-x)^2} = R\sqrt{1-(1-x)^2} = R\sqrt{2x - x^2}.$$

$$V_2 = \frac{R^2(1-x)^2\pi \cdot R\sqrt{2x-x^2}}{3} = \frac{R^3\pi}{3}\left((1-x)^2\sqrt{2x-x^2}\right).$$

$$V_1 + V_2 = \frac{R^3\pi}{3}\left(x^2\sqrt{1-x^2} + (1-x)^2\sqrt{2x-x^2}\right).$$

$\dfrac{R^3\pi}{3}$ pozitív állandó, így a maximum keresésekor elegendő vizsgálni az

$$f(x) = x^2\sqrt{1-x^2} + (1-x)^2\sqrt{2x-x^2}$$

függvényt.

Láttuk, hogy az $f(x)$ függvény értéke az $\alpha = 180^\circ$, azaz $x = 0{,}5$ értékére 0,4330127.

Azt kell eldöntenünk, van-e a függvénynek a $(0, 1)$ intervallumban ennél nagyobb értéke. A függvény ábrázolásához készíthetünk táblázatot, s ha a 0,5 környezetét vizsgáljuk, hamarosan találni fogunk nagyobb értéket.

Legyen például $x = 0{,}3$, azaz $\alpha \approx 108^\circ$, ekkor

$$f(0{,}3) = 0{,}3^2\sqrt{1 - 0{,}3^2} + (1 - 0{,}3)^2\sqrt{0{,}6 - 0{,}3^2} \approx 0{,}435779,$$

ami azt jelenti, hogy a körcikkekből formált tölcsérek össztérfogata <u>nem</u> félkörök esetén lesz a legnagyobb.

Megjegyzés. A feladat kérdésére tagadó választ adhatunk akkor, ha találunk egy olyan szétvágást, amelynél a keletkezett térfogatok összege nagyobb, mint a felezéskor kapott kúpok térfogatának összege. A megoldók nagy része ezt az utat választotta.

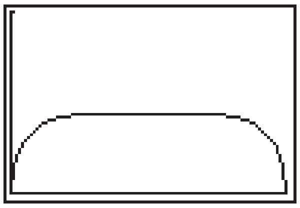
Többen azonban abba a hibába estek, hogy kiválasztottak egy felosztást, majd a kapott térfogatok összegét kisebbnek találva a felezéskor kapott térfogatnál, kijelentették, hogy valóban a felezéskor kapott térfogatok összege a legnagyobb. Látható a különbség: az állítás cáfolatához egyetlen példa elegendő, a bizonyításhoz azonban egyáltalán nem.

II. megoldás. A feladatot úgy is befejezhetjük, hogy az I. megoldás $f(x)$ függvényének megkeressük a maximumát. Csakhogy középiskolában tanult módszerekkel nemigen tudunk mit kezdeni a fenti $f(x)$ függvénnyel.

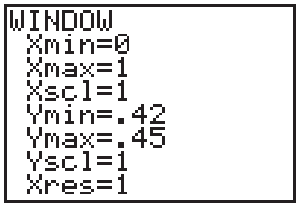
Nézzük meg, hogyan oldható meg a feladat a **Texas Instruments** TI83 típusú grafikus számológépének segítségével:

Az *1. ábra* standard koordináta-rendszerben mutatja a függvény kirajzolt grafikonját. Látható, hogy az $x=\frac{1}{2}$ igen nagy környezetében mintha azonos lenne a függvényérték. Ha az $\left(\frac{1}{2}; f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ pontra „zoom”-olunk, akkor egy lényegében vízszintes görbeszakaszt kapunk, a függvény olyan keveset változik, hogy ez nem elegendő a döntéshez: vajon $\frac{1}{2}$-nél van-e a maximum?

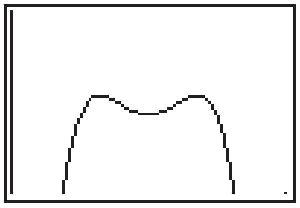
A grafikus megoldás kulcslépése a *2. ábrán* látható: változtassuk meg az y koordinátatengely skálázását! Ekkor egyetlen gombnyomás után leolvasható a tagadó válasz (*3. ábra*), kiderül, hogy a függvény „középen behorpad”, a függvény nem az egyenlő sugarak esetén maximális.



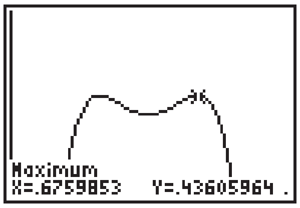
1. ábra



2. ábra



3. ábra



4. ábra

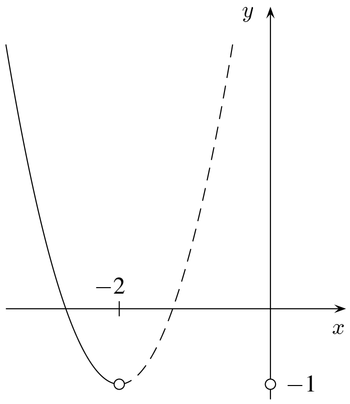
Az már csak ráadás, hogy a kalkulátor a lokális maximumok értékét is meg tudja adni, ez látható a *4. ábrán.*

Mivel a számológép kerekítési hibáit is figyelembe kell vennünk, ajánlatos számolással újra ellenőriznünk, hogy $x=0{,}5$ esetén valóban kisebb a függvényérték, mint $x=$ $=0{,}675$ közelében.

KöMaL – 2000/8 MAT0008 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 19:44 (31. lap)

179 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Baur Eszter, Bérces Péter, Bérczi Kristóf, Bertus-Barcza Tímea, Besenyei Ádám, Birkner Tamás, Blastik Márta, Csató György, Csornai Gyula, Döme Botond, Erdei Zsuzsa, Fehér Ádám, Gajdos Béla, Hablicsek Márton, Klausz Ferenc, Kolláth Endre, László L. András, Németh 864 Márk, Nyul Balázs, Pach Péter Pál, Patay Gergely, Sarusi Annamária, Tóth 370 Ágnes és Varga 123 Áron. 4 pontos 58, 3 pontos 28, 2 pontos 20, 1 pontos 4, 0 pontos 45 dolgozat.

C. 588. *Írjuk fel az* $f:(-\infty,\,-2)\to\mathbf{R}$, $x\mapsto 2x^2+8x+7$ *függvény inverzét.*



1. ábra

I. megoldás. A valós számokra kiterjesztett $\tilde f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\tilde f(x)=2x^2+8x+7$ másodfokú függvény szigorúan monoton fogyó a $(-\infty,-2)$ intervallumon. Ugyanis például teljes négyzetté alakítás után adódik, hogy $\tilde f$ a minimumát az $x_0=-2$ helyen veszi föl, így az f függvény értelmezési tartományában minden x-hez pontosan egy $f(x)$, és minden $f(x)$ függvényértékhez pontosan egy x érték tartozik: az f kölcsönösen egyértelmű, így létezik az f^{-1} inverz (*1. ábra*).

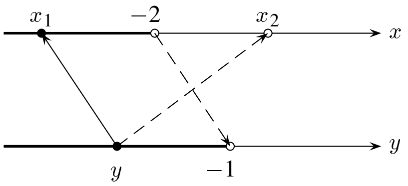
Az inverz kapcsolat meghatározásához az

$$y=2x^2+8x+7$$

összefüggésből kell az x értékét az y segítségével kifejezni az x-nek a -2-nél kisebb értékeire. Kézenfekvő a másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazni, eszerint nullára rendezés után

$$x_{1,2}=-2\pm\sqrt{\frac{1+y}{2}}.$$

Innen is látszik, hogy csak $y\ge -1$ esetben létezik olyan x, amelyre $\tilde f(x)=y$, az f értékkészlete a $(-1,\,+\infty)$ intervallum, ami f^{-1} értelmezési tartománya. Ilyen y értékek esetén viszont két olyan x van, amelyre $\tilde f(x)=y$, el kell döntenünk, hogy ezek közül melyik van f^{-1} értékkészletében, azaz f értelmezési tartományában, a $(-\infty,\,-2)$ intervallumban.



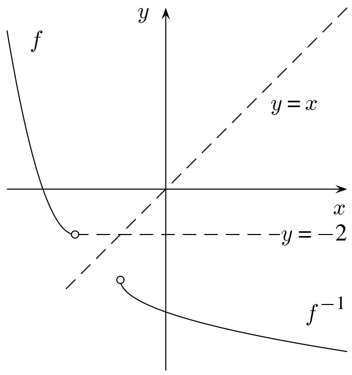
2. ábra

x_1 és x_2 a -2-re szimmetrikusan helyezkednek el (*2. ábra*). A két szám közül a kisebbik $x_1=-2-\sqrt{\frac{1+y}{2}}<-2$. Így az f inverze az $f^{-1}:(-1;+\infty)\to\mathbf{R}$, $f^{-1}:y\mapsto -2-\sqrt{\frac{1+y}{2}}$ függvény.

Megjegyzések. 1. A megoldásban f^{-1} megadásakor kényelmi szempontok miatt az y változót használtuk. Ennek természetesen semmi jelentősége, az utasításban épp így szerepelhetett volna a szokásos x, de bármilyen más változó is.

2. Bár nem tartozik a feladathoz, most az inverz függvény értékkészlete is rendelkezésre áll, így $f^{-1}:(-1;+\infty)\to(-\infty;-2)$.

II. megoldás. Annak tisztázása után, hogy az f inverze létezik, grafikusan is megoldható a feladat. Ismeretes, hogy egy – kölcsönösen egyértelmű – f függvény inverzének a grafikonja az f grafikonjának a tükörképe az $y=x$ egyenesre. f és f^{-1} grafikonja látható a *3. ábrán.*



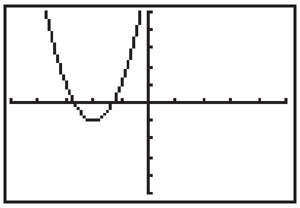
3. ábra

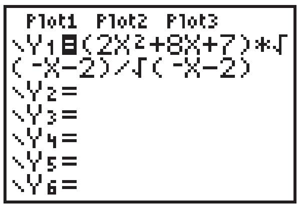
Az $\tilde{f}$ függvény grafikonjának, a teljes parabolának az egyenlete $y=2x^2+8x+7$. Ismeretes, hogy egy görbének az $y=x$ egyenesre vonatkozó tükörképének az egyenletét a változók $x\leftrightarrow y$ cseréjével kapjuk: $x=2y^2+8y+7$. Az inverz függvény grafikonja e görbének az $y=-2$ egyenes alatti része, ennek egyenlete:

$$y=-2-\sqrt{\frac{1+x}{2}}.$$

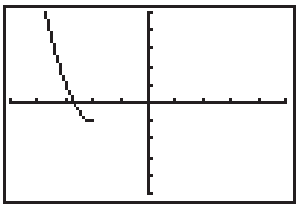
Az f függvény inverze tehát $f^{-1}:(-1;+\infty)\to\mathbf{R}$, $f^{-1}:x\mapsto -2-\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$.

A *3. ábra* grafikonját, a függvénynek és inverzének képét legegyszerűbben grafikus számológéppel rajzolhatjuk fel. Ha beírjuk az $y=2x^2+8x+7$ függvényt, a **TI83** grafikus kijelzőjén az alábbi látható (*1. ábra*):


1. ábra

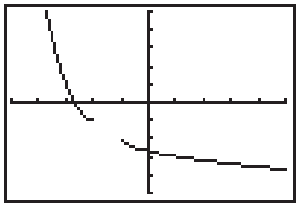


2. ábra


3. ábra

Kis trükkel elérhető, hogy az értelmezési tartományt leszűkítsük: beszoroztunk $\dfrac{\sqrt{-x-2}}{\sqrt{-x-2}}$-vel: a gyökjel alatt csak $x<-2$ esetén áll pozitív szám, egyébként a függvény nem értelmezett (*2–3. ábra*).

Ezután csak egy gombnyomás: DrawInv Y1 , és megkaptuk a függvény inverzének a képét is (*4. ábra*).


4. ábra

III. megoldás. Ismeretes, hogy ha f_1 és f_2 két kölcsönösen egyértelmű függvény, akkor az $f_1 \circ f_2$ összetett függvény is kölcsönösen egyértelmű, és az inverze a komponensek inverzeiből kapható, ha azokat fordított sorrendben fűzzük össze:

$$(f_1 \circ f_2)^{-1} = f_2^{-1} \circ f_2^{-1}.$$

Hétköznapibb nyelven ez azt jelenti, hogy egy több lépésből álló műveletsor megfordítását a legutolsó művelet megfordításával kell elkezdenünk. Ez az ún. „zokni–cipő-elv"; az elnevezés remélhetőleg nem szorul magyarázatra.

Tekintsük most az alábbi függvényeket:

$$f_1(x) = x + 2; \qquad f_2(x) = -x; \qquad f_3(x) = x^2, \quad x > 0; \qquad f_4(x) = 2x - 1.$$

Mivel az f függvényutasítás teljes négyzet alakja $f(x) = 2[-(x+2)]^2 - 1$, így

$$f : x \xmapsto{f_1} x + 2 \xmapsto{f_2} -(x+2) \xmapsto{f_3} [-(x+2)]^2 \xmapsto{f_4} 2[-(x+2)]^2 - 1,$$

azaz $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

A komponensekről látható, hogy kölcsönösen egyértelműek, inverzeik rendre

$$f_1^{-1}(x) = -2 + x; \qquad f_2^{-1}(x) = -x; \qquad f_3^{-1}(x) = \sqrt{x}, \quad x > 0; \qquad f_4^{-1} = \frac{x+1}{2}.$$

Az f inverze így $f^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ f_3^{-1} \circ f_4^{-1}$, azaz

$$f^{-1} : x \xmapsto{f_4^{-1}} \frac{x+1}{2} \xmapsto{f_3^{-1}} \sqrt{\frac{x+1}{2}} \xmapsto{f_2^{-1}} -\sqrt{\frac{x+1}{2}} \xmapsto{f_1^{-1}} -2 + \left(-\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right),$$

tehát $f^{-1}(x) = -2 - \sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$. A függvény értelmezési tartománya pedig az f értékkészlete, a $(-1; +\infty)$ intervallum.

Megjegyzés. A feladatra sok hibás és hiányos megoldás érkezett. Eltekintve a szóhasználat felületességétől – többen a függvényt vélték tükrözni, nem pedig a grafikont – a legkirívóbb hiba az I. megoldás másodfokú egyenletének formális, hibás eredménye, $-2 \pm \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$ mint az inverz függvényutasítás. A feladat megoldásainak áttekintése jó alkalom lehet minden olvasónknak a függvényekkel kapcsolatos fogalmak: értelmezési tartomány, értékkészlet, összetett függvény, egyenlet, grafikon, inverz stb. átgondolására.

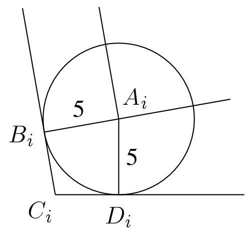
147 dolgozat érkezett. 5 pontos 70, 4 pontos 31, 3 pontos 15, 2 pontos 9, 1 pontos 15, 0 pontos 5, nem versenyszerű 2.

Matematika feladatok megoldása

B. 3328. *Egy konvex sokszög minden oldalegyenesét az oldalra merőleges irányban kifelé eltoltuk* 5 cm*-rel. Mutassuk meg, hogy az így kapott sokszög kerülete több, mint* 30 cm*-rel nagyobb az eredeti sokszög kerületénél.*

(*3 pont*) Javasolta: *Magyar Zsolt,* Budapest

Megoldás. Legyen $A_1A_2\dots A_n$ egy konvex n-szög ($n\ge 3$). Vizsgáljuk meg, mi történik az A_i csúcsnál a transzformáció után. Legyenek A_i merőleges vetületei az eltolt oldalegyeneseken B_i és D_i, az egyenesek metszéspontja pedig C_i. Mivel A_iB_i és A_iD_i is 5 cm, azért B_i és D_i rajta van az A_i körüli 5 cm sugarú körön, továbbá C_iB_i és C_iD_i a kör érintői, hiszen $A_iB_iC_i$ és $A_iD_iC_i$ derékszög.



1. ábra

Vizsgáljuk a $B_iA_iD_i$ szögek összegét. Ezek a konvex sokszög A_i-nél lévő belső szögeinek kiegészítő szögei (a két derékszög miatt). Így

$$\sum_{i=1}^{n} B_iA_iD_i = n\cdot 180^\circ-(n-2)\cdot 180^\circ = 360^\circ.$$

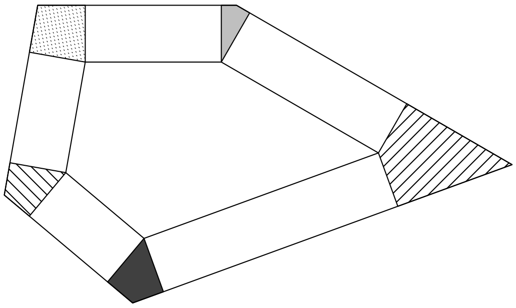
Emiatt az $A_iB_iC_iD_i$ négyszögeket az egyenlő hosszú, 5 cm-es oldalaiknál összeillesztve egy n oldalú érintősokszöget kapunk, amelynek beírt köre az 5 cm sugarú kör.

Állítjuk, hogy az érintősokszög K kerülete nagyobb a beírt kör kerületénél. Ez azért igaz, mert a sokszöget felbonthatjuk olyan háromszögekre, amelyek egyik oldala a sokszög oldala, ezzel szemközti csúcsa pedig a kör középpontja. Ezek közös magassága r, a kör sugara. A háromszögek területének összege tehát $\dfrac{Kr}{2}$. Ez nagyobb, mint a kör területe, tehát $r^2\pi<\dfrac{Kr}{2}$. Ebből pedig valóban $2r\pi<K$. A feladatban $r=5$ cm. Ezt behelyettesítve: $2\cdot 5\cdot\pi<K$, ahonnan $30<K$ következik.

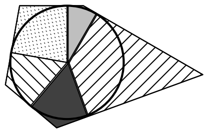
Vegyük még észre, hogy az érintősokszög kerülete éppen annyi, amennyivel az eredeti sokszög kerülete nőtt a transzformáció után, és így a növekedés értéke valóban több, mint 30 cm.

Hablicsek Márton (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.)

Megjegyzés. A fenti megoldás szemléltethető a következőképpen (*2.*, *3. ábra*):



2. ábra



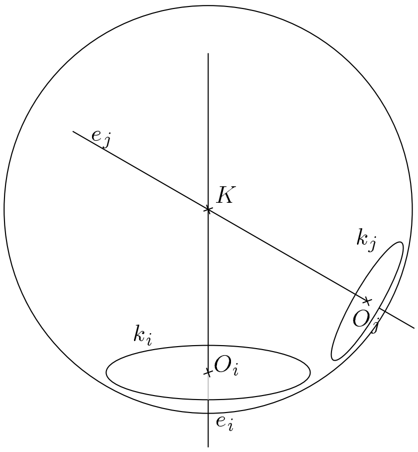
3. ábra

212 dolgozat érkezett. 3 pontos 63, 2 pontos 36, 1 pontos 33, 0 pontos 80.

B. 3351. *Adott a térben legalább négy körvonal úgy, hogy középpontjaik közül semelyik* 4 *nincs egy síkban. Igaz-e, hogy ha bármely két körvonalhoz létezik őket tartalmazó gömbfelület, akkor létezik olyan gömbfelület is, amelyik mindegyik körvonalat tartalmazza?*

(*5 pont*)

Megoldás. Belátjuk, hogy a feladat kérdésére igenlő a válasz. Gömbfelület helyett az egyszerűség kedvéért gömbről beszélünk majd. Jelölje a körvonalakat k_1, k_2, $\ldots$, k_n, középpontjaikat rendre O_1, O_2, $\ldots$, O_n. Ekkor a k_i körvonalat tartalmazó gömbök középpontjainak mértani helye a k_i síkjára merőleges, O_i-n átmenő e_i egyenes.



1. ábra

Az e_i egyenesek közül bármely kettőnek van közös pontja, mert bármely két körvonalra létezik őket tartalmazó gömb. Az egyenesek közül semelyik 4 nincs egy síkban, mert különben a rajtuk levő gömbközéppontok is egy síkban lennének. Ebből az is következik, hogy az egyenesek közül legfeljebb kettő eshet egybe. Ha viszont a térben véges sok egyenes közül bármely kettő metszi egymást, akkor ezek az egyenesek vagy egy ponton mennek át, vagy pedig egy síkban vannak (lásd pl. *Geometriai feladatok gyűjteménye* I. kötet, 1710. feladat). Esetünkben tehát az e_i egyeneseknek egy ponton kell átmenniük. Legyen ez a pont K.

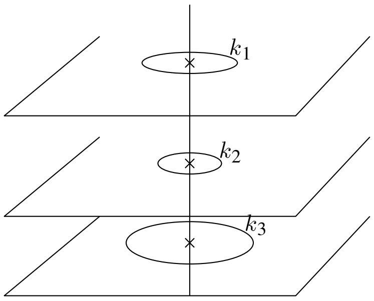
Megmutatjuk, hogy van olyan K középpontú gömb, amely valamennyi k_i körvonalat tartalmazza. Ha az e_i egyenesek közt van két egybeeső, akkor válasszuk úgy a jelölést, hogy e_1 és e_2 essenek egybe. Mivel k_1 és k_3 köré gömb írható, azért annak középpontja csak e_1 és e_3 metszéspontja, azaz K lehet, vagyis K-tól k_1 és k_3 pontjai egyenlő távolságra vannak. Hasonlóan látható be, hogy k_2 és k_3 pontjai egyenlő távolságra vannak K-tól. Ugyanez elmondható k_1 és k_3 rögzítése mellett k_2 helyett tetszőleges k_i $(i > 3)$ körvonalról is, vagyis valamennyi k_i körvonal pontjai K-tól egyenlő távolságra vannak.

KöMaL – 2000/8 MAT0008 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 19:44 (36. lap)

Tehát a feladat feltételeinek teljesülése esetén valóban van olyan gömb, amely az összes körvonalat tartalmazza.

Bálint Gergely (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Három körvonal könnyen megadható úgy, hogy bármelyik kettőhöz létezik őket tartalmazó gömb, de a körvonalak nincsenek egy gömbön. Ilyen pl. a *2. ábrán* látható három, párhuzamos síkokban lévő körvonal.



2. ábra

79 dolgozat érkezett. 5 pontos Andrássy Zoltán, Antal István, Babos Attila, Bálint Gergely, Balka Richárd, Béky Bence, Bérczi Kristóf, Besenyei Ádám, Boros Vazul, Csaszny Tamás, Csikvári Péter, Csóka Endre, Deli Lajos, Gerencsér Balázs, Győri Nikolett, Hablicsek Márton, Hargitai Gábor, Kovács Erika Renáta, Kunszenti-Kovács Dávid, Malakuczi Viktor, Máthé András, Nagy 469 Ambrus, Pacz Bence Tamás, Pallos Péter, Papp Dávid, Simon 812 Győző, Siroki László, Somogyi Dávid, Soproni Péter, Ta Vinh Thong, Tolvaj Nándor, Tolvaj Nóra, Vajda Péter, Vígh Viktor, Vitéz Ildikó, Zalán Péter és Zavarkó Gábor megoldása. 4 pontot kapott 16, 3 pontot 15, 2 pontot 2, 1 pontot 3, 0 pontot 6 beküldő.

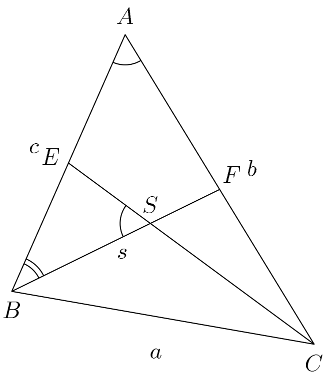
B. 3360. *Az ABC háromszög súlypontja S, az AB és AC oldalak felezőpontja E, illetve F. Igazoljuk, hogy az $AESF$ négyszög pontosan akkor húrnégyszög, ha $AB^2+AC^2=2BC^2$.*

(*4 pont*) Javasolta: *Kiss Sándor,* Szatmárnémeti

Megoldás. Az $AESF$ négyszög pontosan akkor húrnégyszög, ha $EAF\sphericalangle=180^\circ-ESF\sphericalangle=ESB\sphericalangle$. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha a BAF és a BSE háromszögek hasonlóak, mert a két háromszögnek a B-nél lévő szöge közös. Emiatt a háromszögek hasonlóságának szükséges és elégséges feltétele, hogy a B-nél lévő oldalaik aránya megegyezzék, azaz teljesüljön a

(1) $$\frac{BE}{BS}=\frac{BF}{BA}$$

összefüggés.



Jelöljük az ABC háromszög oldalait a szokásos módon a, b, c-vel, a B-ből induló súlyvonal pedig legyen s. Ekkor $BE=\frac{c}{2}$ és $BS=\frac{2}{3}s$, tehát (1) így írható:

$$\frac{\frac{c}{2}}{\frac{2}{3}s}=\frac{s}{c},\qquad \text{azaz}\qquad \frac{3}{4}c^2=s^2.$$

KöMaL – 2000/8 MAT0008 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 19:44 (37. lap)

Ismert (lásd pl. *Geometriai feladatok gyűjteménye* II. kötet, 292. feladat), hogy

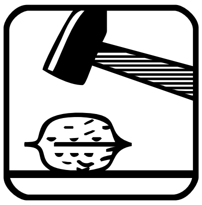
$$s^2=\frac{1}{4}(2a^2+2c^2-b^2).$$

Tehát $AESF$ pontosan akkor húrnégyszög, ha

$$\frac{3}{4}c^2=\frac{1}{4}(2a^2+2c^2-b^2).$$

Ezt átrendezve $b^2+c^2=2a^2$ adódik, ami éppen a bizonyítandó állítás.

79 dolgozat érkezett. 4 pontos 46, 3 pontos 21, 2 pontos 3, 1 pontos 4, 0 pontos 5.



Nehezebb feladatok megoldása

A. 230. *Határozzuk meg azokat az a egész számokat, amelyekre*

$$\frac{a^{2000}-1}{a-1} \tag{1}$$

négyzetszám.

Megoldás. Ha $a<-1$, akkor (1) negatív, tehát nem lehet négyzetszám. Ha $a=-1$ vagy $a=0$, akkor (1) értéke 0 illetve 1, vagyis négyzetszám. Ha $a=1$, akkor a nevező 0, és (1) nem értelmes. A továbbiakban feltételezzük, hogy $a\ge 2$.

$$\frac{a^{2000}-1}{a-1}=\left(a^{1000}+1\right)\cdot\left(a^{500}+1\right)\cdot\frac{a^{500}-1}{a-1}.$$

A három tényezőt rendre A, B, C-vel jelölve B és C osztója $A-2=\left(a^{1000}-1\right)$-nek, továbbá C osztója $B-2=\left(a^{500}-1\right)$-nek. Ebből következik, hogy az A, B és C közül bármelyik kettő legnagyobb közös osztója legfeljebb 2.

Három ilyen szám szorzata csak úgy lehet négyzetszám, ha mindegyikük külön-külön is négyzetszám vagy négyzetszám kétszerese. Az A és a B éppen 1-gyel nagyobbak az a^{1000} illetve a^{500} pozitív négyzetszámoknál, ezért nem lehetnek négyzetszámok.

Ha A és B is egy-egy négyzetszám kétszerese, akkor $4AB=4a^{1500}+4a^{1000}+4a^{500}+4$ négyzetszám. Ez azonban nem lehetséges, mert

$$4a^{1500}+4a^{1000}+4a^{500}+4>4a^{1500}+4a^{1000}+a^{500}=\left(2a^{750}+a^{250}\right)^2$$

és

$$4a^{1500}+4a^{1000}+4a^{500}+4<4a^{1500}+4a^{1000}+4a^{750}+a^{500}+2a^{250}+1=(2a^{750}+a^{250}+1)^2,$$

vagyis $4AB$ két szomszédos négyzetszám közé esik.

Az $a>1$ esetben tehát (1) nem lehet négyzetszám. Összesen két megoldás van tehát: $a=-1$ és $a=0$.

Több dolgozat alapján

Megjegyzés. Azt, hogy $a^{1000}+1$ és $a^{500}+1$ nem lehet egyszerre egy-egy négyzetszám kétszerese, ha $a>1$, másképpen is bizonyíthatjuk. Tegyük fel, hogy $a^{1000}+1=2x^2$ és $a^{500}+1=2y^2$. Ekkor

$$a^{250}y=\sqrt{\frac{a^{1000}+a^{500}}{2}}>\sqrt{\frac{a^{1000}+1}{2}}=x.$$

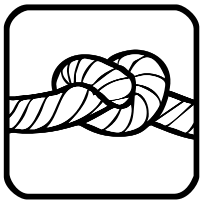
Mivel egész számokról van szó, ebből következik, hogy

$$\sqrt{\frac{a^{1000}+a^{500}}{2}}\geq\sqrt{\frac{a^{1000}+1}{2}}+1>\frac{a^{500}}{\sqrt{2}}+1.$$

Négyzetre emelés és rendezés után azt kapjuk, hogy $a^{500}<-\dfrac{2}{2\sqrt{2}-1}<0$.

Varjú Péter (Szeged, Radnóti M. Gimn., 11. o.t.)

10 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Csóka Endre, Gyenes Zoltán, Harangi Viktor, Varjú Péter és Zábrádi Gergely. 4 pontot kapott Kiss 345 Gergely. 3 pontos 2, 1 pontos 1, 0 pontos 1 dolgozat.



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (600–604.)

C. 600. Személygépkocsival utazunk Budapestről Kassa felé állandó sebességgel. Meglátunk egy kilométert jelző táblát, amin egy kétjegyű szám van. Fél óra múlva olyan táblához érünk, amelyen az előbbi számjegyek állnak fordított sorrendben. Újabb 30 perc múlva olyan táblához érünk, amelyen a két eddigi számjegyen kívül még egy 0 is van. Mekkora sebességgel haladunk?

C. 601. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$x^2+x+\sqrt{x^2+x+7}=5.$$

Javasolta: *Gyanta Nándor,* Budapest

C. 602. Legkevesebb hány egységkockából lehet összerakni egy nagy kockát úgy, hogy belül legyen a kis kockáknak több, mint a fele?

C. 603. Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ függvény értékkészletét.

C. 604. Az ABC háromszög beírt körének középpontja O, területe pedig t. Mutassuk meg, hogy

$$2t = AO^2 \sin\alpha + BO^2 \sin\beta + CO^2 \sin\gamma.$$

Javasolta: *Mihalovics Sándor,* Esztergom

❄

Beküldési határidő: 2000. december 15.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest, Pf. 47. 1255

❄

Figyelem! Az októberi számban a 426. oldalon kitűzött B. 3399. utáni feladat sorszáma helyesen **B. 3400.**

A B pontversenyben kitűzött feladatok (3402–3411.)

B. 3402. Két iskola diákjai egy teszten a következő eredményt érték el:
Az első iskolába járó diákok átlaga 74 pont, ebből a fiúké 71, a lányoké pedig 76 pont.
A másik iskolába járó diákok átlaga 84 pont, ebből a fiúké 81, a lányoké pedig 90 pont.
Ha a két iskolában a fiúk átlaga összesen 79 pont volt, mennyi volt a lányoké?
(*3 pont*)

B. 3403. Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c valós számokra $\frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ teljesül, akkor $\frac{1}{a^5+b^5+c^5} = \frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5} + \frac{1}{c^5}$.
(*3 pont*) Javasolta: *Székelyhidi Tamás,* Ercsi

B. 3404. Egy 10 egység élű kocka egyik csúcsából kiinduló három élének végpontja A, B és C. Az ABC síkkal párhuzamos $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ síkok a kockát három részre osztják, melyek térfogatának aránya $251:248:251$. Mekkora a két sík távolsága?
(*5 pont*)

B. 3405. Van öt golyónk. Kilenc mérést hajthatunk végre egy egykarú mérlegen, amelyen egyszerre egy vagy két golyó súlyát mérhetjük meg. Megtörténhet azonban, hogy a kilenc mérés egyikének az eredményét tévesen jegyezzük föl. Megtudhatjuk-e ennek ellenére mind az 5 golyó súlyát?
(*4 pont*) Javasolta: *Surányi László,* Budapest

KöMaL – 2000/8 MAT0008 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 19:44 (40. lap)

B. 3406. Egy sokszög csúcsainak halmaza olyan (x, y) koordinátájú pontokból áll, amelyekre x és y pozitív egészek, továbbá $x \mid 2y+1$ és $y \mid 2x+1$. Mekkora lehet legfeljebb a sokszög területe?

(*4 pont*) Javasolta: *Mihalovics Sándor,* Esztergom

B. 3407. Arnold, Bendegúz, Cézár, Dorottya, Egon és Ferdinánd szerepjátékhoz készülődik. Még nem döntötték el, melyikük legyen a kalandmester. (Ebben a játékban egyikük a kalandmester, a többiek alkotják a csapatot.) A kalandmester személyéről sorsolással kívánnak dönteni, ehhez a játékban használt 10 oldalú „dobókockával” dobnak a következőképpen:

Előre meghatározott sorrendben mindenki egyszer dob a kockával. Az lesz a kalandmester, aki először 1-est, vagy 2-est dob. Ha a kör végére nincs meg a kalandmester, akkor újra kezdik ugyanebben a sorrendben a dobásokat mindaddig, amíg valaki 1-est vagy 2-est nem dob.

Dorottya még sohasem vezetett ebben a társaságban játékot, és most nagyon szeretne. A fiúk udvariasak és megengedik neki, hogy megválassza azt, hogy hányadiknak dob. Te mit javasolnál Dorottyának?

(*3 pont*) Javasolta: *Pogány Gyula,* Szolnok

B. 3408. Egy szabályos $2n$ oldalú sokszög minden csúcsára egy-egy egész számot írunk úgy, hogy a szomszédos csúcsokra írt számok különbsége 1. Nevezzük hegyszámnak azokat a számokat, amelyek nagyobbak mindkét szomszédjuknál és völgyszámnak azokat, amelyek kisebbek mindkét szomszédjuknál. Bizonyítsuk be, hogy a hegyszámok összegéből a völgyszámok összegét levonva n-et kapunk.

(*5 pont*) Javasolta: *Hraskó András,* Budapest

B. 3409. Tükrözzük az $y=x^2$ parabolát az $(1; 1)$ pontra. Mi a tükörkép egyenlete?

(*3 pont*)

B. 3410. Egy három méter magas nagy festmény függ a falon, alsó széle egy méterrel van a néző szemmagassága felett. A kép látványa annál élvezhetőbb, minél nagyobb az a függőleges szög, amelyben látszik. Milyen távolságból nézve lesz ez a szög a lehető legnagyobb?

(*4 pont*)

B. 3411. Legalább hány oldalú az a szabályos sokszög, amely körülírt körének területét 1 ezreléknél kisebb hibával közelíti?

(*4 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2000. december 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (248–250.)

A. 248. Hányféleképpen lehet egy n-elemű halmaz hatványhalmazát két diszjunkt részre: az I és H halmazokra bontani úgy, hogy a következő feltételek egyszerre teljesüljenek?

a) tetszőleges a, $b \in I$ esetén $a \cup b \in I$ és $a \cap b \in I$;

b) tetszőleges a, $b \in H$ esetén $a \cup b \in H$ és $a \cap b \in H$;

c) tetszőleges $a \in I$, $b \in H$ esetén $a \cup b \in I$ és $a \cap b \in H$.

(Egy halmaz *hatványhalmazának* az összes részhalmazainak halmazát nevezzük.)

Javasolta: *Csirmaz Előd,* Budapest

A. 249. Legyenek a, b, c, t pozitív számok és $abc=1$. Igazoljuk, hogy

$$\left(a+\frac{1}{b}-t\right)\left(b+\frac{1}{c}-t\right)\left(c+\frac{1}{a}-t\right)\le(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(1-t)^2+4-3t.$$

A. 250. Tekintsük a *Hanoi tornyai* néven közismert játék négytornyos változatát: n darab különböző méretű korong egymásra van helyezve nagyság szerint sorban úgy, hogy alul van a legnagyobb, felül a legkisebb. A korongokat egy másik helyre kell áthelyezni a következő szabályok betartásával:

– Egy lépésben csak egy korongot helyezhetünk át;
– Nem tehetünk nagyobb korongot kisebb korongra;
– Egyszerre összesen legfeljebb négy tornyot alkothatnak a korongok.

Bizonyítsuk be, hogy a szükséges minimális lépésszám legalább $2^{\sqrt{n}-1}$ és kisebb, mint $2^{2\sqrt{n}+2}$.

Énekes Béla (Tolna) ötletéből

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS

(Volume 50. No. 8. November 2000)

New exercises for practice – competition C (see page 487): **C. 600.** We are travelling in a car by constant velocity from Budapest to Košice. Passing by a kilometre mark we notice a two-digit number on it. After half an hour we reach at another mark which shows the same two digits in the reverse order. After another 30 minutes of travelling we notice the same two digits again, but this time there is also a 0 digit on the sign. Determine the velocity of the car. **C. 601.** Solve the equation $x^2+x+\sqrt{x^2+x+7}=5$. (Proposed by *N. Gyanta,* Budapest) **C. 602.** A large solid cube is built of identical smaller cubes such that more than half of the small cubes are not visible from outside. At least how many small cubes are used to build the large cube? **C. 603.** Determine the range of the function $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$. **C. 604.** Given a triangle ABC whose incenter is O, and its area is t. Prove that $2t=AO^2\sin\alpha+BO^2\sin\beta+CO^2\sin\gamma$. (Proposed by *S. Mihalovics,* Esztergom)

New problems – competition B (see page 488): **B. 3402.** The students of two schools were sitting the same test. The students attending the first school scored 74 on average; within this the average scores of the boys and the girls were 71 and 76, respectively. The corresponding scores in the other school were 84, 81 and 90, respectively. If the average score of all boys was 79, what did the girls score on average? (*3 points*) **B. 3403.** Given that the real numbers a, b, c satisfy $\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, prove that $\frac{1}{a^5+b^5+c^5}=\frac{1}{a^5}+\frac{1}{b^5}+\frac{1}{c^5}$. (*3 points*) (Proposed by *T. Székelyhidi,* Ercsi) **B. 3404.** In a cube with ten-unit long edges, let A, B and C denote the endpoints of three edges starting from the same vertex. Two planes $\mathcal{S}_1$ and $\mathcal{S}_2$, parallel to the plane ABC, divide the cube into three parts whose volumes are in the ratio $251:248:251$. Calculate the distance between the two planes. (*5 points*) **B. 3405.** Five marbles are to be measured with the help of a one-armed balance. We are allowed to perform nine weighings and each time we may put either one or two marbles on the scale. It may happen, however, that one of the results is misread. Is it still possible to determine the weight of each marble? (*4 points*) (Proposed by *L. Surányi,* Budapest) **B. 3406.** For each vertex (x,y) of a polygon x and y are positive integers such that $x\mid 2y+1$ and $y\mid 2x+1$. Find the maximum area of such a polygon. (*4 points*) (Proposed by *S. Mihalovics,* Esztergom) **B. 3407.** Arnold, Bob, Chris, Dorothy, Eric and Frank are to play Dungeons and Dragons again. They have not appointed the Dungeon Master yet. The following method is used to select the Dungeon Master. They throw the 10 sided die used in the game one by one in a given order. The one who throws the first 1 or 2 is the Dungeon Master. If, by the end of the round, they still do not have the Dungeon Master, they start again in the same order until someone finally throws 1 or 2. Dorothy has never been a Dungeon Master yet, and now she is really excited about that. The guys are really polite and let her choose her position in the order of throws. What would you advise Dorothy? (*3 points*) (Proposed by *Gy. Pogány,* Szolnok) **B. 3408.** An integer is assigned to each vertex of a regular $2n$-gon such that numbers assigned to neighbouring vertices always differ by 1. Numbers that are larger than both of their neighbours are called *mountains* and the ones which are smaller than their neighbours are called *valleys*. Prove that the sum of the mountains minus the sum of the valleys is n. (*5 points*) (Proposed by *A. Hraskó,* Budapest) **B. 3409.** Reflect the parabola $y=x^2$ in the point $(1,1)$ and determine the equation of its image. (*3 points*) **B. 3410.** A large painting, three metres in height, hangs on a vertical wall and the lower edge is one metre above the observer's eye level. The best view of the painting is assumed to be when the angle subtended by the painting at the observer's eye is a maximum. Calculate how far from the wall the observer should stand to maximize this angle. (*4 points*) **B. 3411.** A regular polygon approximates the area of its circumcircle with a relative error less than one thousandth. Find the minimum number of sides such a polygon should have. (*4 points*)

New advanced problems – competition A (see page 490): **A. 248.** Consider partitions of the power set of an n-element set into two parts I and H such that the following conditions are simultaneously satisfied: *a*) $a\cup b\in I$ and $a\cap b\in I$ for any a, $b\in I$; *b*) $a\cup b\in H$ and $a\cap b\in H$ for any $a,b\in H$; *c*) $a\cup b\in I$ and $a\cap b\in H$ for any $a\in I$, $b\in H$. How many such partitions are there? (The *power set* of a set is the set of all its subsets.) (Proposed by *E. Csirmaz,* Budapest) **A. 249.** Let a, b, c, t be positive numbers such that $abc=1$. Prove that

$$\left(a+\frac{1}{b}-t\right)\left(b+\frac{1}{c}-t\right)\left(c+\frac{1}{a}-t\right)\le(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(1-t)^2+4-3t.$$

A. 250. A horizontal board is a support for four vertical pegs. One of the pegs passes through holes in n disks of increasing size, the largest disk being at the bottom, the smallest one on the top. We may take disks off a peg, always one at a time, and put each disk on another peg, but never in such a way that a disk is put on top of a smaller disk. Prove that the minimum number of transfers one should make to transfer all the disks to another peg is at least $2^{\sqrt{n}-1}$ but less than $2^{2\sqrt{n}+2}$. (Based on a problem proposed by *B. Énekes*, Tolna)