Az 1999–2000-es tanév fizika pontversenyének összesített eredménye

	Elméleti verseny		Mérési verseny		Összesen	
	benevezett	értékelt	benevezett	értékelt	benevezett	értékelt
1–8. osztályosok:	81	43	14	3	81	43
9. osztályosok:	284	160	61	16	301	167
10. osztályosok:	313	177	54	23	331	189
11. osztályosok:	297	162	29	24	303	171
12. osztályosok:	144	80	9	7	149	84
összesen:	1119	622	167	73	1165	654

Az alábbiakban azokat az iskolákat soroljuk fel, amelyeknek volt a 2000/7. számban közölt végeredményben felsorolt diákjuk. Az iskolanév után álló számpár(ok) az elméleti feladatok versenyében, illetve a mérési versenyben szereplő tanulók számát és az általuk szerzett összpontszámot jelzik. A számok után az előbbi tanulók szaktanárainak neve olvasható (ha az a nevezési lapon szabályosan szerepelt); az esetleges névelírásokért szíves elnézést kérünk.

Aszód: *Petőfi Sándor Gimnázium és Szakközépiskola* (1,43), Pierre-Yves Bescon; **Baja:** *III. Béla Gimn.* (5,301), (1,5), Funták Andor, Szkladányi András; **Balassagyarmat:** *Balassi Bálint Gimnázium* (1,49); **Balatonfüred:** *Lóczy Lajos Gimnázium és Idegenforgalmi Szakközépiskola* (2,123), Láng Róbert, Vastagh György; **Barcs:** *Dráva Völgye Középiskola* (3,513), Horváth Ferenc; **Bátonyterenye:** *Váci Mihály Gimnázium* (2,43), Várkonyi Bernadett; **Békéscsaba:** *Rózsa Ferenc Gimnázium* (1,93), (2,39), Pocsai Zoltán, Simon Imréné, Varga István; **Bonyhád:** *Petőfi Sándor Evangélikus Gimn.* (9,354), Erdélyesi János, Hortobágyi János, Kovács Balázsné, Wiandt Péter; **Budapest:** *Ady Endre Gimnázium* (1,22), Magyar Tamás; *Arany János Gimnázium* (1,69), Adorján Ferencné; *Árpád Gimn.* (8,166), (2,9), Demcsákné Ódor Zsuzsa, Nagy Attila, Schuszter Ferenc, Tajtiné Váradi Emőke, Vankó Péter; *Berzsenyi Dániel Gimnázium* (7,395), (1,13), Baranyai Klára, Gyenes Gábor, Istók Katalin; *ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium* (27,2076), Flórik György, Holics László, Kiss László, Kotek Gábor, Zsigri Ferenc; *ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Iskola* (5,338), (1,50), Markovits Tibor, Rácz Mihály, Szalóki Dezső, Tomcsányi Péter; *Eötvös József Gimnázium* (7,727), Varga Balázs; *Fasori Evangélikus Gimn.* (1,163), Mecseki Attila; *Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium* (33,2956), (1,51), Dvorák Cecília, Horváth Gábor, Szabó Szabolcs, Takács Lajos, Tóth László; *Hunfalvy János Közgazdasági Szakközépiskola* (1,39), (1,4), Angyal Mária; *Kodály Zoltán Magyar Kórusiskola* (3,64), Latorcai Ágnes; *Lónyay utcai Református Gimnázium* (1,12), Nyilas László; *Móricz Zsigmond Gimnázium* (3,298), Részeg Anna; *Németh László Gimn.* (1,132), Szeghő

István; *Petőfi Sándor Ált. Isk., Gimn. és Szki.* (1,91), (1,7), Sári Györgyi; *Piarista Gimn.* (2,73), Urbán János; *Szent Gellért Katolikus Ált. Isk. és Gimn.* (1,24), Varga Antal; *Szent István Gimn.* (6,627), (1,48), Moór Ágnes; *Szent László Gimn.* (1,45), Pavlyák Ferenc; *Szerb Antal Gimnázium* (1,27), Őzséné Suhaj Judit; *Táncsics Mihály Gimnázium* (1,123), Holicsné Csejk Gabriella; *Varga Márton Kertészeti és Földmérési Szakközépiskola* (1,132), Köles Gábor; *Veres Pálné Gimn.* (1,69), Horváth Pálné; *Veres Péter Gimn.* (5,568), Csaba György, Erdősi Katalin, Székely György; **Budaörs:** *Illyés Gyula Gimnázium* (5,348), (1,8), Árendás Péter, Péter László, Faragó Zsuzsanna; **Csongrád:** *Batsányi János Gimnázium* (2,179), Erdélyi Péterné, Szucsán András; **Csorna:** *Hunyadi János Gimnáziunm és Pedagógiai Szakközépiskola* (–), (1,7), Kovács Ilona; **Csurgó:** *Nagyváthy János Középisk.* (1,112), Kiss Balázs; **Debrecen:** *Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma* (20,1718), (1,10), Dudics Pál, Kopcsa József, Szegedi Ervin, Szegediné Nagy Judit; *Fazekas Mihály Gimnázium* (2,209), Adorján László, Kiszely Ildikó; *Gábor Dénes Elektronikai Műszaki Középiskola* (3,354), Gyebnárné Nagy Andrea, Hotzi Tibor, Kopcsa József; *Tóth Árpád Gimn.* (2,227), (1,35), Kovács Miklós; **Dombóvár:** *Illyés Gyula Gimnázium* (2,249), Freller Miklós; **Dunakeszi:** *Radnóti Miklós Gimnázium* (–), (1,4), Bánhegyesiné Topor Gizella; **Dunaújváros:** *Bánki Donát Gimn. és Szki.* (4,109), Kissné Sztankó Katalin, Zloch Istvánné; *Széchenyi István Gimnázium* (25,1013), (2,24), Kispál István, Kobzos Ferenc; **Eger:** *Dobó István Gimnázium* (2,89), Homolya Lajos; *Sancta Maria Leánygimnázium* (1,25), Palotás László; **Érd:** *Vörösmarty Mihály Gimnázium* (1,25), Dózsa Györgyné; **Esztergom:** *Géza Fejedelem Ipari Szakképző Iskola* (–), (1,9), Mihalovics Sándor; *Szent István Gimnázium* (2,86); **Fonyód:** *Mátyás Király Gimnázium és Szakközépiskola* (3,150), Hecz Gáborné; **Gödöllő:** *Gödöllői Református Líceum* (1,116); *Premontrei Szt. Norbert Gimnázium* (1,156), Varga Zsolt; **Győr:** *Béri Balogh Ádám Honvéd Gimn.* (1,41), Herold Istvánné; *Czuczor Gergely Bencés Gimn.* (4,227), Csonka László, Panykó János; *Révai Miklós Gimn.* (1,63), Sántha Noémi; **Gyula:** *Erkel Ferenc Gimnázium* (1,39), Székely András; **Hajdúszoboszló:** *Hőgyes Endre Gimn.* (1,113), (1,36), Oláh Józsefné; **Hatvan:** *Bajza József Gimnázium és Egészségügyi Szakközépiskola* (1,76), (1,19), Vass Joachim; **Heves:** *Eötvös József Középiskola* (11,656), Kis Tamás, Tófalusi Péter; **Hódmezővásárhely:** *Bethlen Gábor Református Gimnázium* (23,1502), (3,37), Berecz János, Kérdő Mártonné, Lakatos-Tóth István, Nagy Tibor; **Jászberény:** *Lehel Vezér Gimn.* (3,161), Lengyel Jánosné, Oltvölgyi Béla; *Liska József Erősáramú Szakközépiskola és Gimnázium* (2,197), Búzásné Tábi Gizella, Máthé Barabássy Judit; **Jászárokszállás:** *Deák Ferenc Gimnázium és Közgazdasági Szakközépiskola* (2,59), Móráné László Kornélia, Sztepa Szergej; **Kalocsa:** *Szent István Gimn.* (8,254), Szőke Imre; **Kaposvár:** *Munkácsy Mihály Gimnázium* (3,61), Gelencsér Jenő; *Táncsics Mihály Gimnázium* (3,132), Drankovics József, Gál József; **Kazincbarcika:** *Ságvári Endre Gimnázium* (1,44), (1,19); **Kecskemét:** *Bolyai János Gimnázium* (1,108), Vincze Zoltán; *Bányai Júlia Gimn.* (3,303), Bakk János, Borsos Ferenc, Varga József; *Katona József Gimnázium* (1,83), Sáró Péter; *Kecskeméti Református Kollégium Gimnáziuma* (3,248), Sikó Dezső; **Keszthely:** *Vajda János Gimnázium* (8,514), Farkas László; **Kiskunhalas:** *Bibó István Gimnázium* (3,82), (2,56), Pestality Antal, Váradi Krisztián; **Kiskőrös:** *Petőfi Sándor Gimnázium* (2,178), Suhajda János; **Kisújszállás:** *Móricz Zsigmond Gimn. Közgazdasági Szki. és Kollégium* (1,24), Juhász Zoltán; **Körmend:** *Kölcsey Ferenc Gimnázium* (2,169), Klementné Mészáros Erzsébet; **Mezőkövesd:**

Szent László Gimnázium és Szakközépiskola (12,570), Rácz György, Rácz Györgyné; **Miskolc:** *Földes Ferenc Gimn.* (6,461), Miklósi Erika, Zámborszky Ferenc, Zsúdel László; **Monor:** *József Attila Gimnázium* (9,346), (4,31), Megyeri István, Zsoldosné Várfoki Györgyi; **Mosonmagyaróvár:** *Kossuth Lajos Gimnázium* (3,314), (1,4), Józsa Attila; **Nagykanizsa:** *Batthyány Lajos Gimnázium* (3,283), (1,4), Bertók Éva, Dénes Sándor, Dénes Sándorné; **Nagykálló:** *Korányi Frigyes Gimn.* (1,81), Gáspár Ágnes; **Nyergesújfalu:** *Irinyi János Gimnázium és Műszaki Szakközépiskola* (2,38), Pászty Györgyné; **Nyíregyháza:** *BGYTF Eötvös József Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium* (1,75), Kis Szabolcs; *Bánki Donát Ipari Szki.* (–), (4,19), Zsigó Zsolt; *Nyíregyházi Evangélikus Kossuth Lajos Gimnázium* (8,385), Tófalusi Péter; **Ócsa:** *Bolyai János Gimnázium* (2,112), Jarábik Béla; **Paks:** *Energetikai Szakképzési Intézet* (–), (3,13), Nagyné Lakos Mária; *Vak Bottyán János Gimnázium* (3,75), Damjanovitsné Eke Violetta, Müller János; **Pannonhalma:** *Bencés Gimn.* (3,162), Hirka Antal, Rábai László; **Pápa:** *Pápai Református Kollégium Gimnáziuma* (4,113), Somosi István; *Türr István Gimn.* (1,43), Eppelné Csizmadia Katalin; **Pécs:** *Apáczai Csere János Nevelési Központ Gimnázium* (1,183), (1,16); *Árpád Fejedelem Gimn. és Ált. Isk.* (1,169), (1,43), Győrpál Eleméréné; *Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnáziuma* (9,441), Gadó Márta, Jéhn János, Orovica Márkné; *JPTE 2. sz. Gyak. Ált. Isk.* (1,20), Sebestyén Zoltánné; *JPTE Babits Mihály Gyak. Gimn. és Szki.* (5,509), Koncz Károly; *Janus Pannonius Gimnázium* (2,109), Keresztesné Borsos Sarolta, Sáráné Dombi Anna; *Leöwey Klára Gimn.* (17,1287), (1,35), Almási László, Kádár Gézáné, Kotek László, Simon Péter; *Magyar-német Nyelvű Iskolaközpont* (1,203), (1,29), Baumgartner Annamária; *Széchenyi István Gimn. és Szki.* (8,611), Györkő Zoltánné, Juhászné Bányai Zsuzsanna, Pesti Lívia; *Testvérvárosok Terei Ált. Isk.* (7,320), (1,26), Nagy Beáta, Sebestyén Zoltán; *Zipernowsky Károly Ipari Szki.* (7,213), Kardos Gyula, Kiss Jenő; **Putnok:** *Serényi Béla Gimnázium és Mezőgazdasági Szakközépiskola* (1,24), Szilágyi Istvánné; **Salgótarján:** *Bolyai János Gimnázium* (1,60), Tóth Géza; *Stromfeld Aurél Gépip. és Építőipari Szakközépiskola* (1,34), Kovács F. Gáborné; **Sopron:** *Széchenyi István Gimnázium* (1,72), Lang Ágota; **Sümeg:** *Kisfaludy Sándor Ált. Isk. és Gimn.* (1,35), Nagy Miklós; **Százhalombatta:** *Széchenyi István Szakközépiskola* (–), (1,16), Bereznainé Herczeg Edit; **Szeged:** *JATE Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium* (1,19), Tóth Károly; *Radnóti Miklós Kísérleti Gimn. és Ált. Isk.* (6,640), (1,4), Csányi Sándor, Dudás Zoltánné; **Székesfehérvár:** *Teleki Blanka Gimn.* (4,132), Ponácz Ferenc, Szakály Edit; **Szekszárd:** *Garay János Gimn.* (47,3376), Jurisits József, Pesti Gyula; **Szentendre:** *Ferences Gimn.* (2,44), Adolf Géza; *II. Rákóczi Ferenc Általános Iskola és Gimnázium* (1,158), Gyimesi Éva; *Móricz Zsigmond Gimnázium* (1,32), Maknics Gábor; **Szolnok:** *Széchenyi István Gimnázium* (3,78), Daróczimé Kéri Mária, Somogyi Tamás; *Tiszaparti Gimnázium és Humán Szakközépiskola* (9,198), Bózsó Zoltán; *Varga Katalin Gimn.* (5,357), Hortobágyi Zoltán, Nagy Tibor; *Verseghy Ferenc Gimn.* (29,1425), (2,13), Drávucz Anita, Lapu Béla, Pécsi István, Sebestyén István, Szécsiné Festő Hegedűs Margit; **Szombathely:** *Premontrei Szt. Norbert Gimn.* (8,210), (2,13), Barczi Péter, Valaska Ferdinánd; **Tata:** *Eötvös József Gimn.* (1,117), Maknics Gyula; **Tiszaföldvár:**, *Hajnóczy József Gimnáziun és Humán Szakközépiskola* (1,80), Mónus Zoltán; **Tiszaújváros:** *Eötvös József Gimn. és Ipari Szki.* (1,23), Magyari Árpád; **Túrkeve:** *Ványai Ambrus Gimn.* (1,55), Kórizsné Árvai Katalin; **Vác:** *Boronkay György Műsz. Szki.* (1,116); *Piarista Gimnázium* (–), (1,10) **Veszprém:** *Lovassy László*

Gimn. (6,477), (1,8) **Zalaegerszeg:** *Kölcsey Ferenc Gimnázium* (1,68), Dormán Tibor, Horváthné Szabó Anna; *Zrínyi Miklós Gimnázium* (21,1333), (1,5), Orbán Edit, Pálovics Róbert, Vadvári Tibor;

Ausztria, **Linz:** *Akademisches Gymnasium* (1,130), Gerhard Reisinger; Románia, **Kolozsvár:** *Apáczai Csere János Elméleti Líceum* (2,55), Vörös Alpár; **Kézdivásárhely:** *Nagy Mózes Líceum* (8,512), (6,73), Bartha Zsolt; **Marosvásárhely:** *Bolyai Farkas Líceum* (8,625), (12,170), Bíró Tibor, Klementisz János, László József, Máthé Márta; **Sepsiszentgyörgy:** *Mikes Kelemen Líceum* (5,491), Erdély László, Ravasz József; *Székely Mikó Kollégium* (1,45), Bodor Mária; **Temesvár:** *Bartók Béla Líceum* (–), (1,25), Benedek István; Szlovákia, **Ipolyság:** *Magyar Tanítási Nyelvű Gimnázium* (1,185), Lánczos Tamás; **Révkomárom:** *Selye János Gimn.* (15,752), Hevesi Anikó, Szabó Endre; Ukrajna, **Beregszász:** *Bethlen Gábor Gimnázium* (1,172), Győrffy István.

A 31. Nemzetközi Fizikai Diákolimpia feladatainak megoldása[1]

Elméleti forduló

1. feladat. *Néhány (egymástól független) probléma.*

A) a) A „halálugró” ember sebessége akkor csökken először nullára, amikor a gravitációs helyzeti energia csökkenése megegyezik a kötélben tárolt rugalmas energiával:

$$mgy=\frac{1}{2}k(y-L)^2.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai:

$$y=\frac{kL+mg\pm\sqrt{2mgkL+m^2g^2}}{k}.$$

Esetünkben a gyökjel előtt a negatív előjelet kell választanunk, hiszen az alacsonyabb helyzetű (nagyobb y-hoz tartozó) egyensúlyi helyzetet keressük.

b) Az ugró ember sebessége akkor maximális, amikor a gyorsulása nulla, vagyis amikor az erőegyensúly $mg=kx$ feltétele teljesül. Ebben a pillanatban a munkatétel szerint

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2=mg(L+x)-\frac{1}{2}kx^2,$$

ahonnan $x=mg/k$ felhasználásával a kérdéses sebesség

$$v_{\max}=\sqrt{2gL+\frac{mg^2}{k}}.$$

[1] A feladatok szövegét októberi számunkban közöltük.

c) Az ugró ember első megállásáig eltelő idő két tag összegeként számítható ki: a kötél megfeszüléséig a mozgás szabadesés, ennek időtartama $t_1=\sqrt{2L/g}$, majd az ezt követő harmonikus rezgőmozgás bizonyos szakaszának t_2 ideje együtt teszi ki a kérdéses időtartamot.

A harmonikus rezgőmozgás periódusideje $T=2\pi\sqrt{m/k}$, körfrekvenciája $\omega=$ $=\sqrt{k/m}$. A sebesség időbeli változása

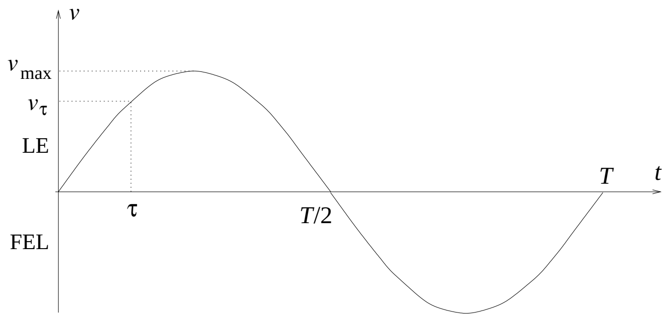
$$v(t)=v_{\max}\sin(\omega t)$$

alakban írható fel, kezdetét pedig az a τ időpillanat jellemzi, melynél a rezgő test sebessége éppen megegyezik a szabadesés végsebességével, vagyis a $v_\tau=gt_1=\sqrt{2gL}$ mennyiséggel (*1. ábra*). Innen

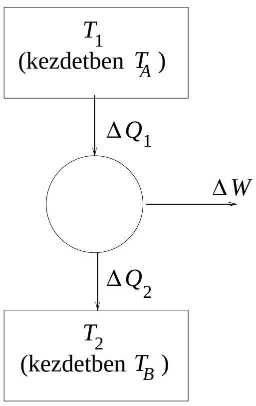
$$\tau=\frac{1}{\omega}\arcsin\frac{\sqrt{2gL}}{v_{\max}},$$

az esés teljes ideje pedig az első megállásig

$$t_{\text{teljes}}=t_1+t_2=t_1+\left(\frac{T}{2}-\tau\right)=\sqrt{\frac{2L}{g}}+\sqrt{\frac{m}{k}}\left(\pi-\arcsin\frac{\sqrt{2gL}}{\sqrt{2gL+mg^2/k}}\right).$$



1. ábra



2. ábra

B) Jelöljük az A test által leadott hőt ΔQ_1-gyel, a B test által felvett hőt pedig ΔQ_2-vel. Ezeket a mennyiségeket kifejezhetjük a megfelelő hőmérsékletváltozásokkal:

$$\Delta Q_1=-ms\Delta T_1,\qquad \Delta T_1 \text{ negatív},$$
$$\Delta Q_2=ms\Delta T_2,\qquad \Delta T_2 \text{ pozitív}.$$

a) A hőerőgép akkor végzi a lehető legtöbb munkát, ha Carnot-gépként működik. Ilyenkor

$$\frac{\Delta Q_1}{T_1}=\frac{\Delta Q_2}{T_2},$$

vagyis

$$-ms\frac{\Delta T_1}{T_1}=ms\frac{\Delta Q_2}{T_2}.$$

Ez az összefüggés

$$T_1 \cdot \Delta T_2 + T_2 \cdot \Delta T_1 = \Delta (T_1 \cdot T_2) = 0,$$

tehát $T_1 \cdot T_2 =$ állandó alakba is írható. Eszerint a végső (közös) hőmérséklet: $T_0 = \sqrt{T_A T_B}$.

Ugyanez az eredmény integrálszámítással is megkapható:

$$-ms \int_{T_A}^{T_0} \frac{dT_1}{T_1} = ms \int_{T_B}^{T_0} \frac{dT_2}{T_2},$$

ahonnan $\ln(T_A/T_0) = \ln(T_0/T_B)$, vagyis $T_0 = \sqrt{T_A T_B}$ következik.

b) A munkavégzés a leadott és a felvett hő különbségéből számítható:

$$W = Q_1 - Q_2 = ms\,(T_A - T_0) - ms\,(T_0 - T_B) =$$
$$= ms\,(T_A + T_B - 2T_0) = ms\left(\sqrt{T_A} - \sqrt{T_B}\right)^2.$$

c) A megadott számadatokkal $W = 20$ MJ.

C) a) A kezdetben N_0 darab ^{238}U izotópból t idő múlva már csak $N = N_0\,e^{-\lambda t}$ marad, tehát a bomlástermékének száma $n = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right) = N\left(e^{\lambda t} - 1\right)$. Mivel a λ bomlásállandó és a T felezési idő közötti kapcsolat: $\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0{,}693}{T}$, az ^{238}U atomok pillanatnyi ^{238}N száma és a bomlása során keletkező ^{206}Pb atomok pillanatnyi ^{206}n száma közötti kapcsolat (ha az időt milliárd év egységekben mérjük):

$$^{206}n = {}^{238}N\left(e^{0{,}154\,t} - 1\right) = {}^{238}N\left(2^{t/4{,}50} - 1\right).$$

b) Hasonlóan az előbbi pontban leírtakhoz

$$^{207}n = {}^{235}N\left(e^{0{,}976\,t} - 1\right) = {}^{235}N\left(2^{t/0{,}710} - 1\right).$$

c) Az urán-ólom keverékben (ahol a radioaktív bomlások során folyamatosan keletkeznek ólom atomok), a különböző tömegszámú ólomizotópok számának aránya:

$$204 : 206 : 207 \qquad \Rightarrow \qquad 1{,}00 : 29{,}6 : 22{,}6.$$

A tiszta ólomban a megfelelő arányok:

$$204 : 206 : 207 \qquad \Rightarrow \qquad 1{,}00 : 17{,}9 : 15{,}5.$$

A fenti arányszámok különbségét képezve látható, hogy a radioaktív bomlásokból származó ólomizotópok aránya:

$$206 : 207 \qquad \Rightarrow \qquad 11{,}7 : 7{,}1.$$

Az a) és a b) alkérdések megoldásában szereplő egyenlőségek hányadosát képezve:

$$\frac{{}^{206}n}{{}^{207}n} = \frac{{}^{238}N}{{}^{235}N}\,\frac{e^{0{,}154\,t}-1}{e^{0{,}976\,t}-1},$$

ahonnan a Föld T életkorára a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{11{,}7}{7{,}1} = 137\,\frac{e^{0{,}154\,T}-1}{e^{0{,}976\,T}-1},$$

vagyis

$$0{,}012\,\left(e^{0{,}976\,T}-1\right) = \left(e^{0{,}154\,T}-1\right).$$

d) Feltételezve, hogy $T \gg 4{,}5\cdot 10^9$ év, a fenti formulában a zárójelekben az 1-eseket elhanyagolhatjuk, s T-t könnyen kifejezhetjük (milliárd években):

$$T = \frac{\ln 0{,}012}{-0{,}822} = 5{,}38.$$

e) Láthatjuk, hogy ez a közelítő érték nem sokkal nagyobb, mint a hosszabb felezési idő (tehát a kiszámítása során alkalmazott elhanyagolás nem volt jogos!), de felhasználható egy pontosabb T érték meghatározására. Jelöljük a Föld életkorára durva közelítésben kapott 5,38 milliárd évet T^*-gal, s az eredeti egyenlet helyett tekintsük a

$$0{,}012\,\left(e^{0{,}976\,T}-1\right) = \left(e^{0{,}154\,T^*}-1\right)$$

egyenletet. Ez zárt alakban megoldható, s T-re $4{,}80\cdot 10^9$ év adódik. Ha ezen értéket írjuk T^* helyébe, T-re még jobb közelítést, $4{,}62\cdot 10^{10}$ évet kapunk. Ezt a (fokozatosan közelítő) eljárást tovább folytatva az eredmények $4{,}52\cdot 10^9$ évhez konvergálnak. (Ezt a gyököt természetesen más módszerekkel, pl. az eredeti exponenciális egyenlet grafikus megoldásával is megkaphatjuk.)

D) A homogén töltéseloszlású gömb elektromos töltéssűrűsége:

$$\varrho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \qquad (\text{ha}\quad r < R).$$

a) Az elektromos térerősség a gömb középpontjától mért r távolságban $r \le R$ esetén az r sugarú gömbben levő töltések Coulomb-terével, $r \ge R$ esetben pedig a teljes Q töltés Coulomb-terével egyezik meg:

$$E = \begin{cases} \dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3\varrho}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}, & \text{ha } r \le R; \\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & \text{ha } r \ge R. \end{cases}$$

b) A teljes elektromos mező W energiája az elektromos mező térerősségének ismeretében gömbhéjak energiájából integrálható össze:

$$W=\int_0^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\cdot 4\pi r^2\,dr=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R^6}\int_0^R r^4\,dr+\int_R^\infty \frac{1}{r^2}\,dr\right)=\frac{3}{20}\,\frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 R}.$$

A teljes energiát úgy is ki lehet számítani, hogy meghatározzuk, mekkora munkavégzéssel lehet vékony, egyenletesen töltött gömbhéjakban található töltéseket nagyon messziről (a „végtelenből") r sugárnak megfelelő helyzetbe hozni, miközben r fokozatosan nő 0-tól R-ig. Mivel r sugarú homogénen töltött gömb felületén az elektromos potenciál

$$U(r)=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3\varrho}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{r^2\varrho}{3\varepsilon_0},$$

így a teljes munka

$$W=\int_0^R \frac{r^2\varrho}{3\varepsilon_0}\cdot 4\pi r^2\varrho\,dr=\frac{4\pi\varrho^2}{3\varepsilon_0}\int_0^R r^4\,dr=\frac{4\pi\varrho^2}{3\varepsilon_0}\,\frac{R^5}{5}=\frac{3}{20}\,\frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 R}.$$

E) A mágneses indukcióvektor vízszintes komponense

$$B=44{,}5\ \mu\mathrm{T}\cdot\cos 64^\circ,$$

amely az a sugarú, θ szöggel jellemezhető síkban álló rézgyűrűn keresztül

$$\Phi=Ba^2\pi\sin\theta$$

mágneses fluxust eredményes. Ha a gyűrű ω szögsebességgel (közel egyenletesen) forog, a benne indukálódó pillanatnyi feszültség (elektromotoros erő)

$$U(t)=\frac{d\Phi}{dt}=Ba^2\pi\,\frac{d}{dt}\sin\omega t=Ba^2\pi\omega\cos\omega t.$$

Ez a változófeszültség a hőhatását tekintve

$$U_{\text{eff}}=\frac{1}{\sqrt2}U_{max}=\frac{Ba^2\pi\omega}{\sqrt2}$$

effektív feszültséggel egyenértékű, tehát az R ellenállású rézgyűrűben átlagosan

$$P=\frac{U_{\text{eff}}^2}{R}=\frac{B^2\pi^2a^4\omega^2}{2R}$$

teljesítménnyel termel hőt, s ugyanilyen mértékben csökkenti időegységenként az m tömegű, az átmérőjére vonatkoztatva $\Theta=\frac{1}{2}ma^2$ tehetetlenségi nyomatékú gyűrű mechanikai (forgási) energiáját:

$$P=-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4}ma^2\omega^2\right)=-\frac{1}{2}ma^2\omega\,\frac{d\omega}{dt}.$$

Ezek szerint a szögsebesség (lassú) változását megadó egyenlet:

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\lambda \cdot \omega(t),$$

ahol $\lambda = B^2\pi^2a^2/(mR)$ állandó, amely a réz s sűrűségével és ϱ fajlagos ellenállásával is kifejezhető: $\lambda = B^2/(4s\varrho)$. Ez az egyenlet (differenciálegyenlet) alakilag megegyezik a radioaktív bomlások egyenletével, tehát a megoldása is azokéval egyező:

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\lambda t}.$$

A szögsebesség felezési ideje (tehát az a $T_{1/2}$ idő, amikor $\omega(t) = \omega_0/2$: $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{4\ln 2\, s\varrho}{B^2}$, ami a megadott számadatokkal $1{,}10 \cdot 10^6$ s ≈ 306 óra≈ 13 napnak adódik.

Az eredmény a szögsebesség változását megadó egyenletből integrálszámítással is megkapható:

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\lambda \cdot \omega(t) \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{\omega_0}^{\omega_0/2} \frac{d\omega}{\omega} = -\lambda \int\limits_0^{T_{1/2}} dt \quad \Rightarrow \quad \ln 2 = \lambda T_{1/2}.$$

A rézgyűrű fékeződése más módszerrel, pl. a gyűrűre ható átlagos forgatónyomaték kiszámításával, majd a forgómozgás dinamikai egyenletének felírásával és megoldásával is meghatározható.

2. feladat. *Az elektron fajlagos töltésének meghatározása.*

a) Az elektron sebessége V gyorsítófeszültség esetén $v = \sqrt{2eV/m}$, ahol e/m a kérdéses fajlagos töltés. (Felhasználtuk, hogy az elektron gyorsítása során szerzett eV energia sokkal nagyobb, mint az elektron kezdeti mozgási energiája, de sokkal kisebb, mint az elektron nyugalmi energiája, így nincs szükség relativisztikus mozgástörvények használatára.)

Az elektronok a katód és az anód közötti D távolságot $T = D\cos\beta/v \approx D/v$ idő alatt teszik meg, miközben a mágneses tér miatt a tengelyre merőleges síkban $\omega = eB/m$ szögsebességgel (az ún. ciklotronfrekvenciával) körmozgást végeznek. A különböző irányban induló elektronok akkor fókuszálódnak az ernyőn (akkor csapódnak be közel azonos helyen), ha a T repülési idő alatt a ciklotronfrekvenciájú körmozgásban éppen egész számú kört tesznek meg. A legkisebb fókuszáló mágneses mezőben 1 kör megtételére van idő, vagyis $T = 1 \cdot (2\pi/\omega)$. Ennek feltétele:

$$\frac{D}{\sqrt{2eV/m}} = 2\pi\frac{m}{eB}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{e}{m} = \frac{8\pi^2V}{B^2D^2}.$$

b) Az elektronok akkor juthatnak csak ki az egymáshoz igen közeli lemezek közül (akkor nem ütköznek bele egyikbe sem), ha a lemezekre merőleges irányban ható eredő erő (az elektromos mezőből és a mágneses mezőből származó erők összege) éppen nulla.

Tekintsük azt az esetet, amikor $V > 0$ és $B > 0$. Ilyenkor a felső lemez pozitív, tehát a negatív töltésű elektronokra az elektromos mező *felfele* mutató erőt fejt ki. Az A

tartományban (az óramutató járásával ellentétesen kanyarodó elektronoknál) a Lorentz-erő ugyancsak *felfele* mutat, ezek az elektronok tehát a felső lemezbe ütköznek, nem érhetik el a filmet.

A B tartományban az elektromos mező és a mágneses mező ellentétes irányú erőt fejt ki, ezek tehát (megfelelő nagyságú sebességgel mozgó elektronoknál) kiejtheti egymást. A film tehát az B tartományban készült. Ugyanezt állíthatjuk akkor is, ha B és V előjele negatív, hiszen ilyenkor mind az elektromos, mind pedig a mágneses erő az előzőhöz képest ellentétes irányú.

c) Itt is az elektromos és a mágneses erők egyenlőségét kell megkövetelnünk. Az elektromos mező által kifejtett erő nagysága: eV/t, a mágneses mezőé pedig $evB\sin\varphi$, ahol v az elektron sebessége. Az erőegyensúly feltétele:

$$v=\frac{V}{tB\sin\varphi}.$$

A legnagyobb részecskesebesség a legkisebb megfigyelt szögnek, $\varphi_{\mathrm{min}}=23^\circ$-nak felel meg:

$$v_{\mathrm{max}}=2{,}687\cdot 10^8\ \mathrm{m/s}=0{,}896\,c.$$

Ez már a fénysebességgel összemérhető, a mozgási energiát tehát a

$$W_{\text{mozgási}}=W_{\text{teljes}}-W_{\text{nyugalmi}}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-mc^2$$

relativisztikus képletekből kell számítanunk. Numerikusan: $W_{\text{mozgási}}=641\ \mathrm{keV}$.

d) A lemezek közötti térrészt elhagyva az elektronokra már csak a mágneses mezőtől származó (jó közelítéssel függőleges irányúnak tekinthető), $evB\sin\varphi$ nagyságú Lorentz-erő hat. Az ettől származó gyorsulás (a relativisztikus tömegnövekedést is figyelembe véve)

$$a=evB\sin\varphi\cdot\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{m},$$

a függőleges elmozdulás tehát (a feladat szövegében megadott 3. és 5. ábrák jelöléseit használva)

$$\frac{y}{2}=\frac{a}{2}\tau^2,$$

ahol $\tau=s/v$ a repülés ideje. Másrészt viszont v kifejezhető a φ szöggel (lásd az előző alkérdést), így végül y és φ között az alábbi összefüggést kapjuk:

$$y^2=\left(\frac{esB\sin\varphi}{m}\right)^2\left[\left(\frac{Bst\sin\varphi}{V}\right)^2-\left(\frac{s}{c}\right)^2\right].$$

Ezek után ha ábrázoljuk milliméterpapíron $\left(\frac{y}{Bs\sin\varphi}\right)^2$-t $\left(\frac{Bst\sin\varphi}{V}\right)^2$ függvényében, közelítőleg egyenest kell kapjunk, melynek meredeksége $(e/m)^2$, tengelymetszete pedig $-\left[es/(mc)\right]^2$. Mindkét mennyiség leolvasható a grafikonról, és a keresett fajlagos töltésre a meredekségből $e/m = 1{,}70 \cdot 10^{11}$ C/kg, a tengelymetszetből pedig $e/m = 1{,}68 \cdot 10^{11}$ C/kg adódik. (Az elektron fajlagos töltését elsőként *J.J.Thomson* angol fizikus mérte meg 1897-ben, mai „hivatalosan elfogadott” értéke $e/m = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ C/kg.)

3. feladat. *Gravitációs hullámok és a gravitáció hatása a fényre.*

A) a) A rudak szabad végeinek rezgését leíró $\Delta x_t \propto e^{-\mu t}$ függvényben az exponenciális faktor 50 s alatt 20 %-kal csökken, tehát $0{,}8 = e^{-\mu \cdot 50\,\mathrm{s}}$, ahonnan $\mu = 4{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{s}^{-1}$.

b) A longitudinális hullámok sebessége az alumínium megadott anyagi állandóiból számítható: $v = \sqrt{E/\varrho} = 5100$ m/s. Tudjuk továbbá, hogy az egyik végén rögzített, a másik végén szabadon mozgó rúd longitudinális alaprezgésénél a rúd hossza a hullámhossz negyede, vagyis $\lambda_{\text{rúd}} = 4\ell = 4$ m, alaprezgés frekvenciája tehát $f = v/\lambda = 1{,}3$ kHz, körfrekvenciája pedig $\omega = 2\pi f = 8{,}1 \cdot 10^3\ \mathrm{s}^{-1}$.

c) A rudak hossza és a rezgések frekvenciája fordítottan arányos egymással: $\ell \cdot f = v/4 =$állandó, vagyis

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = -\frac{\Delta f}{f} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{1{,}3 \cdot 10^3} = 3{,}8 \cdot 10^{-6}.$$

A két (közelítőleg 1 méteres) rúd hosszának különbsége tehát 3,8 mikron.

d) A gravitációs térerősség (gravitációs gyorsulás) hatására egy ℓ hosszúságú, ϱ sűrűségű rúd rögzített végénél $\sigma = \ell g \varrho$ rugalmas feszültség ébred, a szabad végénél nulla a feszültség, az átlagos feszültség tehát $\overline{\sigma} = \frac{1}{2}\ell g \varrho$. Ennek hatására a rúd deformációja

$$\frac{\ell\,\overline{\sigma}}{E} = \frac{\ell^2 \varrho}{2E} \cdot g,$$

amelynek kicsiny megváltozása a gravitációs térerősség kicsiny Δg megváltozásának hatására

$$\Delta\ell = \frac{\ell^2 \varrho}{2E} \cdot \Delta g.$$

e) A $\Delta\ell = 656\ \mathrm{nm} \cdot 10^{-4} = \frac{\ell^2\varrho}{2E} \cdot \Delta g$ összefüggésből a megadott számadatokkal a szükséges rúd hosszára $\ell \approx 2 \cdot 10^8$ m adódik. Ilyen hosszú (csillagászati méretű) rúd nyilvánvalóan nem készíthető! A számítás eredménye mindenesetre tanulságos, rávilágít arra a tényre, hogy a gravitációs hullámok kísérleti kimutatása technikailag igen nehéz feladat, nem csoda, hogy mind ez ideig még nem sikerült.

Megjegyzés. A fenti becslésnél azt tételeztük fel, hogy a gravitációs térerősség egy igen kicsit megváltozik, majd stabilan a megváltozott érték marad; emiatt az egyik rúd szabad vége kicsit elmozdul. A reálisan várható mérési elrendezésben Δg csak egy nagyon rövid ideig különbözik nullától (hiszen a gravitációs hullámok fénysebességgel terjednek), s csak „meglökik” a rudat, amely (kicsiny csillapítás esetén) az alaprezgés frekvenciájával hosszú ideig tartó rezgésbe kezd. A tervezett mérésekben ennek a rezgésnek közvetett hatásait szeretnék kimutatni.

B) *Gravitációs mező hatása a fény terjedésére az űrben*

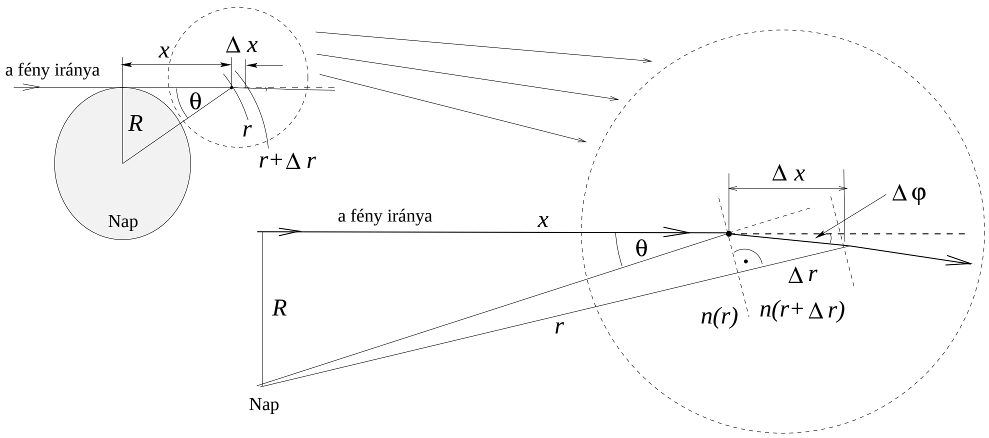
a) A $hf = mc^2$ összefüggésből az f frekvenciájú foton „ekvivalens tömege” $m = hf/c^2$. A Nap felszínéről induló és onnan nagyon messze eltávolodó foton mozgási energiája a gravitációs helyzeti energia változása miatt $hf' = hf - GmM/R$ értékű lesz, ahonnan a bizonyítandó $f' = f(1 - GM/Rc^2)$ formulát kapjuk.

b) Ha a gravitációs mező jelenléte a Nap középpontjától r távolságban a frekvenciákat és a távolságokat $(1 - GM/Rc^2)$ arányban csökkenti, az időtartamokat pedig ugyanilyen mértékben növeli, akkor ez a fény terjedési sebességének $(1 - GM/Rc^2)^2$ arányú csökkenéséhez vezet. Ezek szerint az effektív törésmutató

$$n_r = \frac{c}{c'} = \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-2} \approx 1 + 2 \cdot \frac{GM}{rc^2},$$

vagyis a kérdéses α állandó számértéke 2.

c) A Nap szélét éppen érintő fénysugár a gravitáció hatására – a fentebb kiszámított, helyről helyre változó effektív törésmutató miatt – fokozatosan elgörbül. Osszuk



3. ábra

fel a fénysugár pályáját a Napot érintő pontjától mért x távolság függvényében kicsiny szakaszokra. Az x és $x + \Delta x$ radiális távolsággal jellemzett pontok közötti gömbhéjat tekintsük optikailag homogén, $n(r + \Delta r)$ törésmutatójú közegnek, az alatta levő réteget pedig $n(r)$ törésmutatójúnak (lásd a *3. ábrát*)! A réteg alsó határfelületére eső fénysugár a Snellius–Descartes-törvénynek megfelelően megtörik, eredeti irányához képest igen kicsiny $\Delta\varphi$ szöggel eltérül:

$$\frac{\sin\theta}{\sin(\theta + \Delta\varphi)} = \frac{n(r + \Delta r)}{n(r)}.$$

Használjuk ki, hogy $\Delta\varphi$ és $\Delta r = \Delta x \cos\theta$ kicsiny mennyiségek, továbbá hogy $n(r) \approx 1$ miatt a fény pályája alig tér el az egyenestől, így

$$\sin(\theta + \Delta\varphi) \approx \sin\theta + \Delta\varphi\cos\theta$$

és

$$n(r+\Delta r)-n(r)=\frac{2GM}{c^2}\left(\frac{1}{r+\Delta r}-\frac{1}{r}\right)\approx-\frac{2GM}{r^2c^2}\Delta r,$$

ahonnan a szögeltérülésre

$$\Delta\varphi=\frac{2GM}{r^2c^2}\operatorname{tg}\theta\cdot\Delta r=\frac{2GMR}{c^2}\cdot\frac{\Delta x}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

adódik. Összegezve (integrálva) ezt az összefüggést (az x változóra teljes tartományára) megkapjuk a fény teljes eltérülését:

$$\varphi=\frac{2GMR}{c^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+R^2)^{3/2}}=\frac{4GM}{Rc^2}\approx 8{,}4\cdot 10^{-6}\ \text{radián}.$$

Megjegyzés. A feladat megoldása során követett gondolatmenet a klasszikus newtoni gravitációelmélet fogalmait használja (némi relativisztikus korrekcióval). Ez a leírás nem minden esetben tükrözi helyesen a kísérletileg megfigyelt tényeket; erre mai tudásunk szerint csak az Einstein-féle általános relativitáselmélet képes, melynek matematikai apparátusa és fogalomrendszere azonban sokkal bonyolultabb annál, semhogy középiskolás versenyfeladatok között felhasználható volna. A diákolimpián szereplő (a gravitációs fényelhajlást tárgyaló) feladatban a „félklasszikus” gondolatmenettel kapott formula megegyezik az általános relativitáselmélet (kísérletek által is pontosan igazolt) jóslatával, a gravitációs hullámok Einstein-féle elmélete azonban sokkal összetettebb, mint azt a versenyfeladat megoldása alapján vélhetnénk.

Gnädig Péter

Kísérleti forduló

CD-ROM spektrométer.

Ebben a feladatban a versenyzőknek egy pontosan lépésekre tagolt, részletesen leírt mérést kellett végrehajtaniuk. A kihívás inkább a mérés gyors és pontos elvégzése volt. A meghajlított CD-darabbal könnyen elő lehetett állítani az elsőrendű spektrumot, és a fotóellenállás fókuszsíkban való mozgatásával a karakterisztikát (a vezetőképességet a hullámhossz függvényében) sem volt nehéz kimérni. A hullámhosszakat a megadott rácsállandóból és a geometriai adatokból lehetett kiszámítani. Bár csak a látható tartományban kellett mérni, és így a színek támpontot adtak a hullámhosszak körülbelüli értékére, mégis előfordult nagyságrendi hiba is a hullámhosszak meghatározásánál.

A mérés másik felében ezt a kimért, elsődleges karakterisztikát kellett korrigálni, hiszen a spektrum létrehozásához használt izzó nem azonos intenzitással sugároz a különböző hullámhosszakon. Először azt kellett igazolni, hogy az izzó abszolút fekete testként viselkedik: ehhez az izzólámpa feszültsége és árama között fennálló $U^3\propto I^5$ összefüggés kísérleti igazolására volt szükség.

Ezután az izzó „meleg-” és „hideg-ellenállása” alapján meg kellett mérni az izzószál hőmérsékletét. (A volfrám fajlagos ellenállásának hőmérsékletfüggését megadták.) A feladatot az tette bonyolultabbá, hogy az izzó ellenállása szobahőmérsékleten olyan

KöMaL – 2000/8 FIZ0008 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 20:45 (13. lap)

kicsi, hogy a rendelkezésre álló műszerekkel nem lehetett elegendő pontossággal megmérni. Ezért egy „közvetítő” izzót használhattak a versenyzők: egy közbülső hőmérsékleten, ahol a vizsgált izzó még jól mérhető ellenállású, a szín alapján (vizuálisan) azonos hőmérsékletűre kellett beállítani egy nagyobb ellenállású izzót. Ennek viszont a hidegellenállását is meg lehetett mérni, amiből a közbülső hőmérséklet, és így az eredeti izzó eredeti hőmérséklete is számolható volt. Ezután már csak ki kellett választani a megadott Planck-görbékből az izzószál hőmérsékletének megfelelőt, ezzel korrigálhatták a kimért karakterisztikát.

Mágneses korong.

Ez a mérés, az előző ellentéteként, a versenyzőknek szinte teljes szabadságot adott abban, hogy mit és hogyan mérnek. Célszerű volt először csak játszani az eszközzel: különböző szögeknél, különböző magasságokból lecsúsztatni a korongot (hol egyik, hol másik – gyengébben mágneses – oldalán), és közben figyelni a mozgást. Az rögtön látszott, hogy az örvényáramú fékezés miatt a test sebessége előbb-utóbb állandó lett. (Sajnos ezt a magyar versenyzők nyilvánvalónak tekintették, és nem ellenőrizték mérésekkel, hogy különböző esetekben mekkora út megtétele után lesz a sebesség tényleg állandó.) A feladat szerint fel kellett állítani egy elméleti hipotézist arra, hogyan függ a mágneses fékezőerő a korong állandósult sebességétől és a lejtő szögétől. (Természetesen ez a két mennyiség se független egymástól.) Ezután ezt a hipotézist kellett megfelelő mérésekkel igazolni!

A mérés elvégzése közben persze érdemes volt néhány „apró” dologra figyelni (például az időmérő szerkezet telepe feszültségének folyamatos ellenőrzése), de a feladat lényege a jó koncepció – hipotézis és mérési eljárás – megtalálása volt. Volt aki tudta vagy ráérzett a fékezőerő és a sebesség közti lineáris kapcsolatra, másvalaki $F \propto v^n$ alakú erőt feltételezett, és n értékét mérte. Olyan (magyar) versenyző is volt, aki $F \propto v^2$ kapcsolatot feltételezett, ezt próbálta igazolni, és amikor az eredményei nem egyeztek a várakozásával, akkor módosította a hipotézisét (és így aranyérmet nyert).

Természetesen ennek a feladatnak nem volt könnyű a javítása és a pontozása, hiszen nem lehetett előre látni, milyen utakat választanak a versenyzők. Ezzel együtt sokan örömmel fogadtuk ezt az elmúlt évek olimpiáihoz képest szokatlan, gondolkodtató, „nyitott” feladatot.

Vankó Péter

Fizika gyakorlatok és feladatok megoldása

P. 3296. *Van* N *darab különféle rugónk. Ha ezeket sorba kapcsoljuk,* $52\ \mathrm{N/m}$ *direkciós erejű rugót kapunk. Ha párhuzamosan kapcsoljuk a rugókat, akkor az eredő direkciós erő* $1872\ \mathrm{N/m}$ *lesz. Legfeljebb mekkora lehet* N *értéke?*

(*4 pont*) Közli: *Münz Márton,* Budapest, Alternatív Közgazdasági Gimn.

Megoldás. A párhuzamosan kapcsolt rugók eredő direkciós ereje:

$$d_p=\sum_{i=1}^{N} d_i,$$

a sorba kapcsolt rugóké pedig

$$d_s=\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{d_i}\right)^{-1}.$$

Tekintsük a

$$P(x)=\sum_{i=1}^{N}\left(\sqrt{d_i}-\frac{x}{\sqrt{d_i}}\right)^2=ax^2+bx+c\ge 0$$

polinomot! Ennek legfeljebb 1 gyöke lehet ($x=d_1=d_2=\ldots=d_N$), a diszkriminánsa tehát nem pozitív: $b^2\le 4ac$, azaz

$$1\le\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d_i\right)\cdot\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{d_i}\right).$$

Ez a számtani és a harmonikus közepekre vonatkozó egyenlőtlenség, melyből következik, hogy a rugók száma:

$$N\le\sqrt{\frac{d_p}{d_s}}=\sqrt{\frac{1874}{52}}=6.$$

Szamosújvári Ilona (Bp., ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 11. o.t.) és
Varjú Péter (Szeged, Radnóti M. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A számtani és a harmonikus közepek akkor egyenlőek, ha valamennyi d_i megegyezik, tehát a rugók egyforma erősek. Ha a feladat szövegében szereplő „különféle rugó" kifejezést úgy értjük, hogy a rugók adatai határozottan különböznek, akkor N „matematikailag" legfeljebb 5 lehet. Vegyük figyelembe azonban azt a tényt is, hogy a fizikai mennyiségek nagysága mindig valamilyen pontossággal megadott, kerekített számérték, s a rugók (vagy más jellemző adatok) egyenlőségét vagy különbözőségét csak a megadott pontosságon belül szabad vizsgálnunk. Pl. a 309, 310, 311, 313, 314 és 315-ös számok összege 1872, a reciprokaik összegének reciproka pedig $51{,}997\approx 52{,}00$, ezek a számok tehát eleget tesznek a feladat követelményeinek, jóllehet nincs közöttük két egyforma.

Békási Sándor (Budapest, Veres Péter Gimn., 11. o.t.)

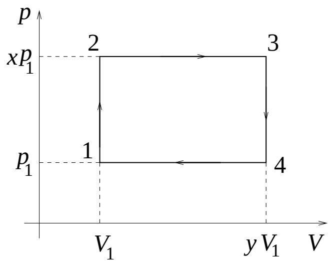
228 dolgozat érkezett. Helyes 118 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 4, hiányos (1–2 pont) 79, hibás 14, nem versenyszerű 13 dolgozat.

P. 3298. *Kezdetben* 7 *liter térfogatú,* 10^5 Pa *nyomású,* $0\ ^\circ\mathrm{C}$*-os levegővel egy hőerőgépben olyan körfolyamatot végeztetünk, amely két izobár és két izochor szakaszból áll. A körfolyamat során a levegő sohasem hidegebb* $0\ ^\circ\mathrm{C}$*-nál, és a gép által végzett munka* 500 J. *Legfeljebb mekkora lehet ennek a gépnek a termodinamikai hatásfoka?*

(*5 pont*) Közli: *Varga István,* Békéscsaba

Megoldás. Tekintsük a levegőt homogén kétatomos gáznak, amelynek fajhőhányadosa

$$\varkappa = \frac{c_p}{c_V} = \frac{7}{5}.$$



Ha a körfolyamat során a térfogat a kezdeti $V_1 = 7 \cdot 10^{-3}$ m^3 érték x-szeresére, a nyomás pedig a kezdeti $p_1 = 10^5$ Pa érték y-szorosára nő (lásd az *ábrát*), akkor a végzett munka

$$L = p_1 V_1 (x-1)(y-1) = 500 \text{ J},$$

ahonnan

(1) $$y - 1 = \frac{5}{7(x-1)}.$$

A levegő által egy ciklus során felvett hő:

(2)
$$Q = Q_{1\to2} + Q_{2\to3} = mc_V(T_2 - T_1) + m\varkappa(T_3 - T_2) = mc_VT_1 \cdot [(x-1) + \varkappa x(y-1)]\,.$$

A körfolyamat hatásfoka: $\eta = L/Q$, amely (az adott nagyságú L miatt) akkor a legnagyobb, amikor Q a lehető legkisebb értékű. Ez akkor teljesül, ha a szögletes zárójelben álló kifejezés minimális.

Fejezzük ki (1)-ből y-t és helyettesítsük a (2)-beli szögletes zárójeles kifejezésbe, így visszavezettük a feladatot az

$$f(x) = x - 1 + \frac{5\varkappa}{7}\,\frac{x}{x-1} = x - 1 + \frac{x}{x-1} = x - 1 + \frac{1}{x-1} + 1 \qquad (x > 1)$$

függvény minimumának megkeresésére. Alkalmazva a számtani és a mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenséget

$$f(x) \ge 1 + 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}} = 3,$$

a hatásfokra tehát fennáll

$$\eta = \frac{L}{Q} \le \frac{500 \text{ J}}{3mc_VT_1} = \frac{2}{21} \approx 9{,}5\,\%.$$

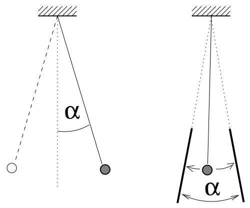
Az utolsó lépésnél kihasználtuk a gáztörvény $p_1V_1 = (m/M)RT_1$ alakját, továbbá azt, hogy a levegő állandó térfogaton vett $C_V = Mc_V$ mólhője $5R/2$-vel egyenlő.

Czompó Sz. Csaba (Sepsiszentgyörgy, Mikes K. Líceum, 10. o.t.) és
Ballók István (Gödöllő, Premontrei Szt. Norbert Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Az optimális hatásfokhoz $x=2$ és $y=\frac{12}{7}$ arányszámok tartoznak. Érdekes, hogy sem ezek a számok, sem pedig a maximális termikus hatásfok nem függ a levegő kezdeti hőmérsékletétől, hanem csak a p_1V_1 szorzat és a megadott L munkavégzés arányától, továbbá a fajhőhányadostól.

2. Ha a levegő fajhőhányadosát nem az „elméleti” $\frac{7}{5}$-ös értéknek vesszük, hanem a ténylegesen mért értékekkel számolunk, a maximális hatásfokra 10,6 %-ot kapunk.

110 dolgozat érkezett. Helyes 56 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 14, hiányos (1–3 pont) 33, hibás 7 dolgozat.



P. 3307. *Egy fonálinga kezdetben α szögamplitúdóval leng. Hogyan módosul a lengésideje, ha szimmetrikusan két olyan rugalmas fallal fogjuk közre, amelyek szögtávolsága α?*

(*4 pont*) *Nemzetközi becslési verseny,* Sárospatak

Megoldás. Kis kitérések esetén az inga lengése harmonikus rezgőmozgással írható le:

$$\varphi(t)=\alpha\sin\omega t.$$

Amikor az inga α szögamplitúdóval leng, a legmélyebb helyzetből a T lengésidő $\frac{1}{4}$-e alatt éri el a legnagyobb kitérésnek megfelelő helyzetet, a $\varphi=\alpha/2$ szögkitérésig pedig ennek harmadrészére, $\frac{1}{12}T$ időre van szükség.

Ha az inga mozgását rugalmas falakkal korlátozzuk (méghozzá úgy, hogy eközben az energiája ne változzék meg), akkor a mélyponttól az $\alpha/2$ szögig ugyanúgy fog mozogni, mint eredetileg. A falnál a test rugalmasan visszapattan, majd az ütközés előtti mozgás „tükörképének” megfelelően mozog tovább. A teljes mozgás periódusideje

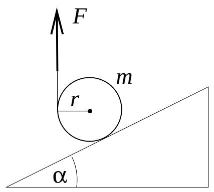
$$T'=4\cdot\frac{T}{12}=\frac{T}{3},$$

tehát az eredeti periódusidő harmada lesz.

Dömötör Piroska (Hódmezővásárhely, Bethlen G. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

90 dolgozat érkezett. Helyes 57 megoldás. Hiányos (1–3 pont) 22, hibás 7, nem versenyszerű 4 dolgozat.

P. 3345. *Egy $\alpha=30^\circ$-os hajlásszögű lejtőn lévő, $m=6$ kg tömegű, $r=0{,}1$ m sugarú tömör hengert a palástjához rögzített fonál segítségével tartunk egyensúlyban. A henger a lejtőn nem csúszik meg.*



a) *Mekkora F erővel tudjuk egyensúlyban tartani a hengert, ha a fonalat függőlegesen tartjuk?*

b) *Milyen irányban kell húzni a fonalat, hogy a lehető legkisebb erővel tarthassuk a hengert? Mekkora ez az erő?*

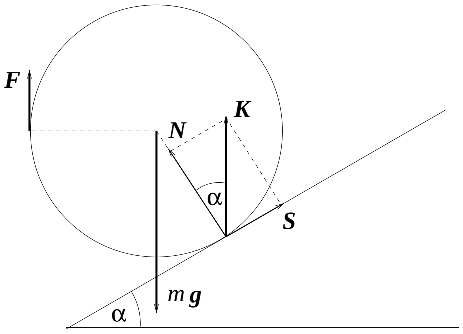
c) *Legalább mekkorának kell lennie a súrlódási együtthatónak az a), illetve b) esetben?*

(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

KöMaL – 2000/8 FIZ0008 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 20:45 (17. lap)

Megoldás. Az erők és a forgatónyomatékok egyensúlyának feltételét felírva, majd az egyenleteket megoldva megkaphatjuk a választ a feltett kérdésekre. A feladat másképp, geometriai megfontolásokkal (szerkesztéssel) is megoldható.

a) Függőleges fonál esetén az $m\mathbf{g}$ nehézségi erő és az **F** fonálerő eredője függőleges, tehát a henger és a lejtő között ható **K** erő is függőleges kell legyen (*1. ábra*). A minimális súrlódási együttható az érintkező felületek normálvektora és a közöttük ható erő által bezárt szögnek (tehát α-nak) a tangense, jelen esetben $\mu_{\min} = \operatorname{tg} 30^\circ = 0{,}577 \approx 0{,}6$. Az *1. ábráról* az is leolvasható, hogy a súlyerő **F** és **K** közötti távolságot $1:2$ arányban osztja, a fonálerő tehát a súly $\frac{1}{3}$-a, általános esetben pedig

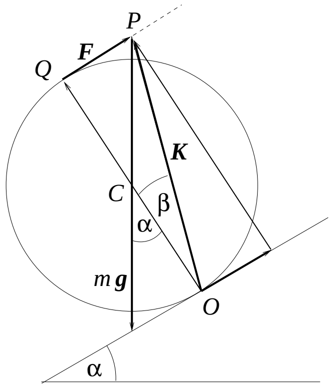


1. ábra

$$F = mg\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + 1}.$$

b) A henger és a lejtő O érintkezési pontjára vonatkoztatva csak a nehézségi erőnek és a fonálerőnek van forgatónyomatéka (*2. ábra*). Az előbbi adott érték, tehát a fonálerő forgatónyomatéka is meghatározott nagyságú. A fonálerő akkor a legkisebb, ha az erőkarja a lehető legnagyobb, nevezetesen $2r$, s ez akkor érhető el, ha a fonál párhuzamos a lejtő síkjával.

A lejtő által kifejtett **K** erő hatásvonalának át kell mennie a nehezségi erő és a fonálerő hatásvonalainak P metszéspontján, s ebből a feltételből leolvasható a minimális súrlódási együttható :



2. ábra

$$\mu_{\min} = \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha = 0{,}289 \approx 0{,}3.$$

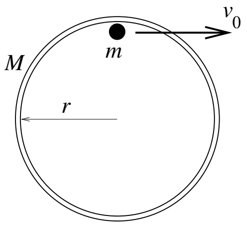
A *2. ábra* alapján a fonálerő nagyságát is kiszámíthatjuk. Az erővektorok léptékét az ábrán akkorára választottuk, hogy a **K** kényszererő éppen az OP szakasz hosszával megegyező nagyságú legyen. Ekkor a következő arányt írhatjuk fel:

$$\frac{F}{mg} = \frac{QP}{2\cdot PC} = \frac{1}{2}\sin\alpha, \qquad \text{ahonnan} \qquad F = \frac{1}{2}mg\sin\alpha = \frac{1}{4}mg.$$

(G. P.)

151 dolgozat érkezett. Helyes 93 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 27, hiányos (1–3 pont) 26, hibás 5 dolgozat.

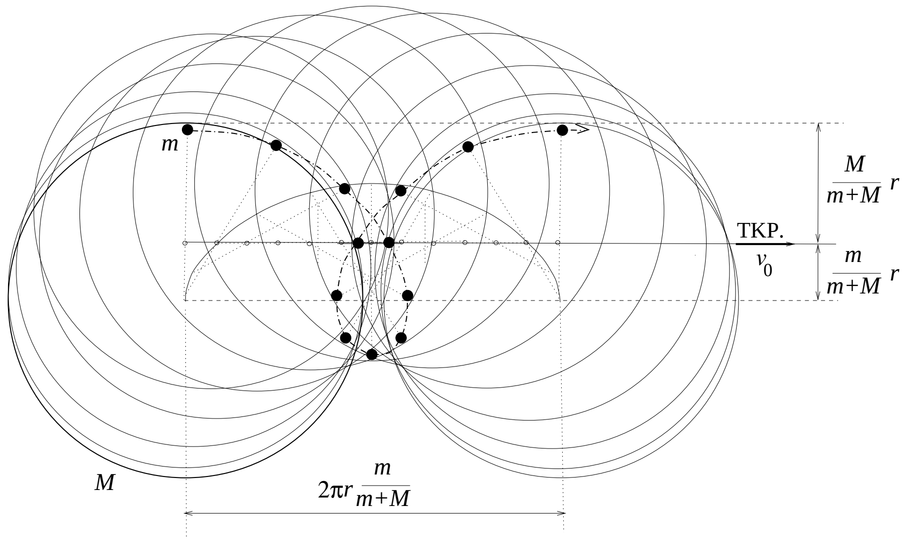
KöMaL – 2000/8 FIZ0008 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 20:45 (18. lap)



P. 3350. *Vízszintes asztallapon fekvő M tömegű, r sugarú vékony, keskeny abroncs belsejében, az abroncshoz érintkezve áll egy m tömegű kis test. Hogyan fog mozogni az abroncs középpontja, ha a kis testet érintő irányú, v_0 nagyságú kezdősebességgel elindítjuk? Mennyi idő múlva és hol lesz újra zérus az abroncs sebessége? (A súrlódás mindenütt elhanyagolható.)*

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Budapest

Megoldás. A rendszerre nem hat eredő külső erő, emiatt a tömegközéppont, amely a kis test és az abroncs középpontja közötti távolságot $M:m$ arányban osztja, egyenletes $v_{\text{TKP}}=\frac{mv_0}{m+M}$ sebességgel halad. A kis test és az abroncs középpontja állandó nagyságú szögsebességgel, $Mr/(m+M)$ illetve $mr/(m+M)$ sugarú körön kering a tömegközéppont körül. (A körmozgás azért egyenletes, mert a tömegközéppontra vonatkoztatva sem a kis testre, sem pedig az abroncsra nem hat forgatónyomaték.) A szögsebesség nagysága a kezdeti feltételek szerint $\omega=v_0/r$. (Ezt legegyszerűbben úgy láthatjuk be, hogy észrevesszük: a kis testet az abroncs középpontjával összekötő egyenes kezdetben az asztal vonatkoztatási rendszerében v_0/r szögsebességgel forog, s ugyanekkora kell legyen a szögsebesség a tömegközépponttal együtt mozgó koordináta-rendszerben is.)



Az abroncs az indulást követően legközelebb $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi r}{v_0}$ idő múlva lesz nyugalomban (pillanatnyi sebessége ekkor válik nullává), miközben a középpontjának elmozdulása

$$s=v_{\text{TKP}}\cdot T=\frac{m}{m+M}\cdot 2\pi r.$$

Az abroncs középpontjának pályája egy $mr/(m+M)$ sugarú, csúszásmentesen gördülő kör valamely kerületi pontjának pályájával egyezik meg, tehát *ciklois.*

A kis test is az abroncs középpontjáéhoz hasonló jellegű pályán mozog. Ez a pálya $m > M$ esetén egy *nyújtott ciklois*, vagyis egy gördülő kör belső pontjának pályája, $m < < M$ esetén *hurkolt ciklois*, tehát egy csúszásmentesen gördülő körlaphoz erősített külső pont pályája (ez az eset látható az *ábrán*), ha pedig $m = M$, akkor az abroncs pályája a kis testével egybevágó, csak ahhoz képest eltolt helyzetű ciklois.

Jurányi Zsófia (Pécs, Leőwey K. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

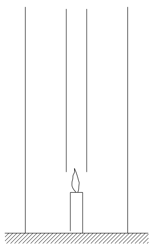
30 dolgozat érkezett. Helyes 11 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 10, hiányos (1–3 pont) 6, hibás 3 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 219. Egyensúlyozzunk különböző hosszúságú egyenes vonalzókat (lécdarabokat) egy hengeren, a henger tengelyére merőleges helyzetben! Állapítsuk meg, hogyan függ a vonalzók kis billegéseinek periódusideje a vonalzók hosszától!

(*6 pont*) Közli: *Bakonyi Gábor,* Budapest

P. 3374. Széles, magas üvegcső áll az asztalon. A cső közepén alul egy gyertya ég, a gyertya felett pedig egy keskeny, hosszú üvegcső helyezkedik el, az *ábrán* látható módon.



a) Mi történik, ha a belső üvegcsövet eltávolítjuk?

b) Mi történik, ha a külső üvegcsövet távolítjuk el?

(*3 pont*) *Becslési verseny,* Sárospatak

P. 3375. Egy bizonyos folyadék a hajszálcsőben csak félannyira emelkedik fel, mint a víz. Mi történik, ha a vizen úszó zsilettpenge mellé cseppentünk ebből a folyadékból a penge egyik oldalán?

(*3 pont*) Közli: *Kovács Ádám,* Budapest, Balassi B. Gimn

P. 3376. Egy kirándulócsoport egyik tagja, András, kissé gyorsabban halad, mint a korábban induló, de lassabb Béla. András megfigyeli, hogy mikor halad el Béla egy jellegzetes fa mellett, s karórája segítségével megméri, hogy ő t_1 idő múlva ér a fához, majd ezután t_2 idő múlva éri utól Bélát. Azt állítja, hogy e két időadat segítségével ki tudja számítani sebességeik v_A/v_B arányát. Hogyan?

(*3 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Budapest

P. 3377. Egy 80 kg tömegű súlylökő álló helyzetből a vízszintessel 45°-os szöget bezáró irányban, egyenletesen gyorsítva 0,1 másodperc alatt löki el a 6 kg-os vasgolyót. A golyó a talajtól 2 méterre van akkor, amikor elhagyja a súlylökő kezét, és 2 másodperc múlva ér földet. Legalább mekkora a tapadási súrlódási együttható, ha a súlylökő nem csúszik meg dobás közben?

(*5 pont*) Közli: *Farkas László,* Keszthely

P. 3378. Feltöltött síkkondenzátor lemezei 3 cm-re vannak egymástól. Betolunk közéjük egy 3 mm vastag, töltetlen fémlemezt. Megváltozik-e a kondenzátor feszültsége és energiája? Kell-e munkát végezni a lemez betolása közben?

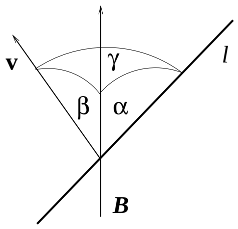
(*4 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 3379. A 100 Ω, 200 Ω, 300 Ω és 400 Ω ellenállású fogyasztókat úgy kapcsoljuk össze, hogy összesen 100 W teljesítményt vesznek fel, ha 100 V-ra kapcsoljuk a rendszert. Mekkora teljesítményt vesznek fel ekkor a fogyasztók külön-külön?

(*4 pont*) Közli: *Varga István,* Békéscsaba

P. 3380. Pontszerűnek tekinthető fényforrást helyezünk el egy 8,4 mm vastag üvegtábla mellett. A fényforrás oldaláról, az üvegre majdnem merőlegesen nézve több tükörképet is látunk, melyek egymástól 12 – 12 mm-re vannak. Határozzuk meg az üveg törésmutatóját!

(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

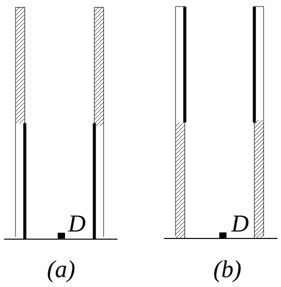


P. 3381. B indukciójú homogén mágneses mezőben l hosszúságú, **v** sebességű egyenes vezető mozog. Mekkora feszültség keletkezik a vezeték két vége között, ha a vezeték a mágneses indukcióval α, az indukció a sebességgel β, a sebesség a vezetékkel γ szöget zár be? (Legyen pl. $\alpha=30°$, $\beta=40°$, $\gamma=50°$, $l=0{,}5$ m, $v=2\mathrm{m/s}$ és $B=0{,}5$ mT.)

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 3382. Szilárd Leó és Walter Zinn megmérte, hogy az ^{235}U-ból hasadásonként átlagosan 2,5 neutron keletkezik. Tekintsünk egy képzeletbeli reaktorban 100 maghasadást. Az ezekből létrejött neutronok közül 10 kiszökik a reaktorból, 8 befogódik az ^{238}U-ban, valamennyit elnyelnek a szabályozórudak, a többi pedig ismét hasít. A neutronok hány százalékát kell elnyelniük a szabályozórudaknak, hogy a neutronok száma időben ne változzék?

(*3 pont*) Szilárd Leó országos nukleáris verseny, Paks



P. 3383. Egy vékony, hosszú üvegcső belseje a hosszának felében kormozott, másik fele pedig tükröző. A csövet függőlegesen, fekete felével lefelé az asztalra állítjuk (lásd az *(a) ábrát*). Az asztalon, a cső tengelyénél pontszerűnek tekinthető D fotodetektor van. Hányszor nagyobb értéket mutat a fotodetektor, ha a csövet a *(b) ábrán* látható helyzetbe fordítjuk?

(*5 pont*) Román versenyfeladat

A fizika feladatok megoldásai a következő címre küldendők:
Eötvös Loránd Fizikai Társulat, KöMaL feladatok
Budapest, Pf. 433. 1371
A beküldési határidő: **2000. december 11.**

Physics

M. 219. Balance straight rulers (laths) of different lengths on top of a cylinder, in a position perpendicular to the axis of the cylinder. Investigate how the period of the small oscillations of the rulers depends on the length of the ruler.

P. 3374. A broad, high glass tube stands on a table. A candle burns at the centre of the bottom of the tube and there is a long, narrow glass tube above the candle as shown in the figure. a) What happens when the inner glass tube is removed? b) What happens when the outer glass tube is removed? **P. 3375.** A certain liquid in a capillary tube rises half as high as water. What happens when some of this liquid is dripped next to one side of a razor blade floating on top of water? **P. 3376.** One member of a group of tourists, Andrew, walks a little faster than Brian, who started off earlier but walks more slowly. Andrew observes when Brian passes a certain tree and measures (using his watch) that he reaches the same tree time t_1 later than Brian, then catches up with Brian after another lapse of time t_2. He says that he can work out the proportion v_A/v_B of their respective speeds using these two time data. How? **P. 3377.** A shot putter with a mass of 80 kg pushes the iron ball with a mass of 6 kg from a standing position, at an angle of 45° with the horizontal, accelerating it evenly during a time interval of 0.1 seconds. The ball leaves his hand when it is 2 m high above the ground and hits the ground 2 seconds later. What is the minimum value of the static coefficient of friction if the shot putter does not slip during the shot? **P. 3378.** The plates of a charged plane capacitor are at 3 cm from each other. A 3 mm thick, uncharged metal plate is pushed between them. Do the pd. and energy of the capacitor change? Is any work done while pushing the plate into position? **P. 3379.** Consumers with respective resistances of 100 Ω, 200 Ω, 300 Ω and 400 Ω are connected in such a way that they take up a total power of 100 W when connected to a pd. of 100 V. What power does each consumer take up in this situation? **P. 3380.** A light source that can be considered as point-like is placed next to a 8.4 mm thick glass panel. Looking at the glass from the side of the light source, at almost right-angles to the glass, several images can be seen at distances of 12 mm from each other. Determine the refractive index of the glass. **P. 3381.** A straight conductor of length l moves at velocity v in a homogeneous magnetic field of induction B. What is the pd. between the ends of the conductor if the angle between the wire and the magnetic induction is α, that between the induction and the velocity is β and that between the velocity and the conductor is γ? (E.g. let $\alpha=30^\circ$, $\beta=40^\circ$, $\gamma=50^\circ$, $l=0.5$ m, $v=2$ m/s and $B=0.5$ mT.) **P. 3382.** Leó Szilárd and Walter Zinn measured that the average number of neutrons produced in the course of the fission of ^{235}U is 2.5. Consider 100 nuclear fissions in an imaginary reactor. Among the neutrons produced in these fissions, 10 escape from the reactor, 8 are captured in ^{238}U, some are absorbed by the control rods and the rest induce further fissions. How many percents of the neutrons have to be absorbed by the control rods in order to sustain a constant number of neutrons in time? **P. 3383.** Half of the inner surface of a glass tube is covered with soot, the other half with some reflecting material. The tube is placed vertically onto the table with its black half downward as shown in figure (a). There is a point-like photo-detector D on the table, on the axis of the tube. How many times is the value read by the photo-detector higher when the tube is turned as shown in figure (b)?