## Az 1999/2000-es tanévi matematika pontversenyek különdíjas versenyzői

A KöMaL matematika szerkesztőbizottsága döntést hozott arról, kik kapják meg a lap különdíjait. A dolgozatokat a javítók javaslatai alapján választottuk ki.

A versenykiírás szerint a beküldött és kitűzött javaslatok, a megoldásokhoz tett megjegyzések, általánosítások, második megoldások beküldői közül a legjobbak kapnak különdíjat, amelyet a decemberi Téli Ankéton adunk át.

A **különdíj I. fokozatát** kapják:

**Varjú Péter** (Szeged, Radnóti M. Gimn., 11. o.t.), aki több feladatra is, közöttük az A. 222., A. 229. és A. 230-ra szép, frappáns megoldást küldött be;

**Gyenes Zoltán** (Bp., ELTE Apáczai Csere J. Gimn., 12. o.t.), akinek az A. 232. feladatra talált különleges konstrukciója komoly matematikai eredmény;

és **Kiss Gergely** (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.), az A. 234. általánosabb megoldásáért, a B. 3294. és B. 3296. feladatokhoz írt megjegyzéseiért és egy megjelent hibás megoldás felfedezéséért.

A **különdíj II. fokozatát** kapják:

**Nyul Balázs** (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 9. o.t.) pontversenyben kitűzött B. 3312. feladatáért és a B. 3302. és a B. 3327. feladatok általánosabb megoldásáért;

**Csóka Endre** (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 9. o.t.) az A. 231. közvetlen (nem indukciós) megoldásáért és több dolgozat (B. 3296., B. 3303., B. 3374.) rövid, tömör, ötletes megoldásáért;

**Máthé András** (Bp., ELTE Apáczai Csere J. Gimn., 12. o.t.) a B. 3301., B. 3310., B. 3315. feladatokban leírt gondolataiért, megjegyzéseiért, második megoldásokért.

**Külön dicséretet** kapnak több feladat második megoldásáért vagy egy megoldásban értékes megjegyzésükért:

*Ambrus Gergely* (Szeged, Radnóti M. Kís. Gimn., 11. o.t.), *Baharev Ali* (Vác, Boronkay Gy. Gimn., 12. o.t.), *Bartha Ágnes* (Kézdivásárhely, Nagy Mózes Líceum, 10. o.t.), *Csató György* (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., 11. o.t.), *Deli Lajos* (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., 11. o.t.), *Dénes Attila* (Békéscsaba, Rózsa F. Gimn., 12. o.t.), *Hablicsek Márton* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.), *Ivaskó György* (Baja, III. Béla Gimn., 12. o.t.), *Kunszenti-Kovács Dávid* (Oslo, Lycèe Français René Cassin, 9. o.t.), *Szilasi Zoltán* (Debreceni Egyetem Kossuth L. Gyak. Gimn., 11. o.t.), *Tóth Ágnes* (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., 10. o.t.).

## Közlemény

A 2000/6. számunkban megjelent végeredményt utólag az alábbiakban módosítottuk:

– Mivel májusi dolgozatai a postán elkeveredtek, és a másolatokat augusztus végén beküldte, *Karácsonyi József Sándor* (Szekszárd, Garay J. Gimn., 11. o.t.) pontszámai megnőttek, így a **B** versenyben 68 ponttal 69., a **C** versenyben 122 ponttal 78. helyezett.

– *Salát Máté* (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 9. o.t.) kitűzött feladatának megoldására tévedésből nem kapott pontott, így helyezése a **C** versenyben 184 ponttal 37–39.

– Nem változott a végeredmény a 9. osztályosok Fizika elméleti (**P**) versenyében, mivel, mint utólag kiderült, *Tóth Sándor* egyik (egyébként 4 pontos) megoldása név nélkül érkezett, ezért nem tudtuk a pontversenybe számítani. Sajnálatos, hogy az első hely sorsa múlt a versenyző apró figyelmetlenségén.

*A Szerk.*

# A 41. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása

A hagyományoknak megfelelően idén is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldását úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük, és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerk.

IMO 2000 KOREA 제 41회 국제수학 올림피아드
The 41st International Mathematical Olympiad

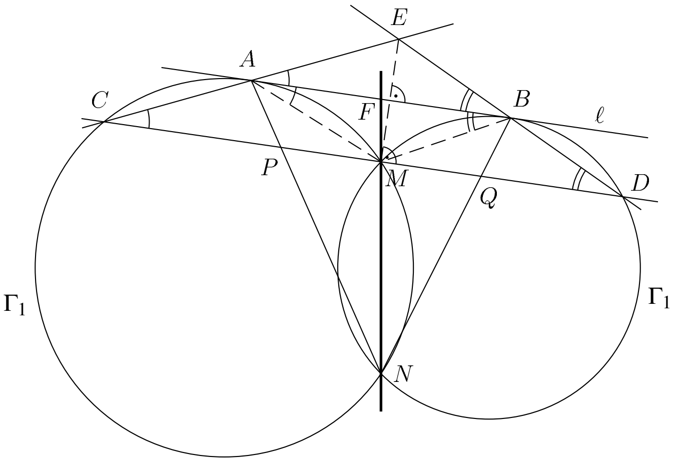
**1.** *A $\Gamma_1$ és $\Gamma_2$ körök az $M$ és $N$ pontokban metszik egymást.*

*Legyen $\ell$ a $\Gamma_1$ és $\Gamma_2$ köröknek az a közös érintője, amelyre teljesül, hogy $M$ közelebb van $\ell$-hez, mint $N$. Érintse $\ell$ $\Gamma_1$-et az $A$ és $\Gamma_2$-t a $B$ pontban. Legyen az $M$-en átmenő, $\ell$-lel párhuzamos egyenes másik metszéspontja a $\Gamma_1$ körrel $C$, a $\Gamma_2$ körrel pedig $D$.*

*A $CA$ és $DB$ egyenesek metszéspontja legyen $E$; az $AN$ és $CD$ egyenesek metszéspontja legyen $P$; a $BN$ és $CD$ egyeneseké pedig legyen $Q$.*

*Bizonyítsuk be, hogy $EP=EQ$.*

**Megoldás.** Tekintsük az *ábrát*, jelölje $F$ az $AB$ és $MN$ egyenesek metszéspontját. Mivel $F$ rajta van az $MN$ hatványvonalon, az $F$ pontból a $\Gamma_1$ és $\Gamma_2$ körökhöz húzott érintőszakaszok hossza egyenlő. Ezek az érintőszakaszok az $FA$, illetve $FB$, így $FA=FB$.




Továbbá a párhuzamos szelők tétele szerint ($PQ \parallel AB$):

$$\frac{MP}{MQ}=\frac{FA}{FB}=1, \qquad \text{vagyis} \qquad MP=MQ.$$

Másrészt, $AB \parallel CD$ miatt $EAB\sphericalangle = ECD\sphericalangle$, valamint a kerületi és érintőszárú kerületi szögek egyenlőségéből $ECD\sphericalangle = BAM\sphericalangle$. Következésképpen $EAB\sphericalangle = BAM\sphericalangle$, és hasonlóan kapjuk, hogy $EBA\sphericalangle = ABM\sphericalangle$.

Ezekből viszont az következik, hogy az $AMBE$ négyszög deltoid. Emiatt $EM \perp AB$, azaz $EM \perp PQ$. És ezzel készen vagyunk, ugyanis az $EMP$ és $EMQ$ derékszögű háromszögek $EM$ befogója közös, és a másik befogójuk is egyenlő ($MP = MQ$). Tehát egybevágó a két háromszög, amiből $EP = EQ$.

*Harangi Viktor* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10., o.t.)

**2.** *Legyenek $a$, $b$, $c$ olyan pozitív valós számok, amelyekre $abc = 1$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy*

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1.$$

**Megoldás.** Ha a 3 szorzótényező közül egy vagy három negatív, akkor a szorzat negatív, vagyis kisebb 1-nél. Ha valamelyik tényező 0, akkor a szorzat is 0, szintén kisebb 1-nél. Pontosan két tényező nem lehet negatív, mert ha például $a-1+\frac{1}{b}<0$ és $b-1+\frac{1}{c}<0$ lenne, akkor az összegük

$$0>a-1+\frac{1}{b}+b-1+\frac{1}{c}=\left(b-2+\frac{1}{b}\right)+a+\frac{1}{c}=\frac{(b-1)^2}{b}+a+\frac{1}{c}>0,$$

mert $a$, $b$, $c>0$, ez nem lehet.

Tehát az az eset marad, amikor mindhárom szorzótényező pozitív.

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)=ab-a+\frac{a}{c}-b+1-\frac{1}{c}+1-\frac{1}{b}+\frac{1}{bc}=$$

$$=\frac{1}{c}-a+\frac{a}{c}-b+1-\frac{1}{c}+1-\frac{1}{b}+a=\frac{a}{c}-b+2-\frac{1}{b}=\frac{a}{c}-\frac{(b-1)^2}{b}\le\frac{a}{c},$$

ugyanígy a másik 2-2 tényezőre. Mindhárom tényező pozitív, tehát

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1\frac{1}{a}\right)=$$

$$=\sqrt{\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)}\sqrt{\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)}\sqrt{\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\left(a-1+\frac{1}{b}\right)}\le$$

$$\le\sqrt{\frac{a}{c}}\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{c}{b}}=1,$$

ezt akartuk bizonyítani.

*Győri Nikolett* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

**3.** *Legyen $n \geq 2$ pozitív egész szám. A kiinduló állásban $n$ bolha ül egy vízszintes egyenesen, nem mind ugyanabban a pontban.*

*Egy $\lambda$ pozitív valós számra definiáljunk egy lépést a következőképpen:*

*válasszunk ki két bolhát, amelyek az $A$ és $B$ pontokban ülnek, ahol $A$ balra van $B$-től;*

*ugorjon az $A$-n lévő bolha az egyenesnek abba a $C$ pontjába, ami jobbra van $B$-től, és amelyre $BC/AB = \lambda$ teljesül.*

*Határozzuk meg az összes olyan $\lambda$ értéket, amelyre teljesül, hogy akárhogyan választva az $M$ pontot az egyenesen, és akárhogyan választva az $n$ bolha kiindulási pozícióját, létezik lépéseknek egy olyan véges sorozata, amelyek végrehajtása után az összes bolha $M$-től jobbra helyezkedik el.*

**Megoldás.** Az egyszerűség kedvéért nevezzük a bolhákat pontoknak. Először azt mutatjuk meg, hogy $\lambda \geq \dfrac{1}{n-1}$-re az állítás mindig igaz. Azt mutatjuk meg, hogy akármilyen messzire eljuthatnak a pontok, ha mindig a legbalra esővel átugorjuk a legjobbra esőt. Ebben az esetben egy mohó algoritmus eljuttatja a pontokat $M$-en túlra. Az első $n-1$ lépésben minden pont különböző helyre kerül, ezt tekinthetjük a továbbiakban kiindulóhelyzetnek. Jelölje itt a szomszédos pontok közötti távolságot rendre $d_1, d_2, \ldots$ $\ldots, d_{n-1}$. Egy ugrás után az új távolságok: $d_2, d_3, \ldots, d_{n-1}, (d_1+d_2+\ldots+d_{n-1})\cdot\lambda$. Mivel

$$(d_1+d_2+\ldots+d_{n-1})\cdot\lambda \geq \frac{d_1+d_2+\ldots+d_{n-1}}{n-1} \geq \min(d_1, \ldots, d_{n-1}),$$

azért a legkisebb távolság változatlan marad. Jelölje ezt $d$. A legjobbra fekvő pont így minden lépésben legalább $d$-vel jobbra kerül. Mivel $d>0$, azért egy idő után akármilyen messzire eljut. Ezután $n-1$ lépésben a többi pont is $M$-en túlra jut, és ezt akartuk bizonyítani.

Most megmutatjuk, hogy ha $\lambda < \dfrac{1}{n-1}$, akkor semelyik kiindulóhelyzetből sem lehet akármilyen messzire eljutni. Minden ponthoz rendeljünk hozzá ugyanis egy számot úgy, hogy az egyenest a számegyenesnek tekintjük. Legyen $s_k$ a $k$-adik lépés után a pontoknak megfelelő számok összege, $w_k$ pedig a számok legnagyobbika. Nyilván $s_k \leq$ $\leq n\cdot w_k$. Ha bebizonyítanánk, hogy $w_k$ korlátos, akkor készen lennénk, mert így egy pont sem juthatna át egy bizonyos $M$-en (a korláton) túlra. Ugorja át $A$ a $(k+1)$-edik lépésben $B$-t és ezzel kerüljön $C$-be. Az értelemszerű jelölésekkel ebből:

$$s_{k+1} = s_k + c - a, \qquad c-b = \lambda(b-a),$$

ezt átrendezve $\lambda(c-a) = (1+\lambda)(c-b)$. Tehát $s_{k+1} = s_k + \dfrac{1+\lambda}{\lambda}(c-b)$.

Most igazoljuk, hogy

$$s_{k+1} - s_k = \frac{1+\lambda}{\lambda}(c-b) \geq \frac{1+\lambda}{\lambda}(w_{k+1}-w_k).$$

$b \leq w_k$, tehát ha $c \geq w_{k+1}$, akkor ez valóban igaz. Ha pedig $c < w_{k+1}$, akkor $w_{k+1} = w_k$, hiszen a legjobbra eső pont nem változhatott másra, mint $c$-re. Ekkor az egyenlőtlenség nyilvánvaló.

Tehát $s_{k+1}-s_k \geq \frac{1+\lambda}{\lambda}(w_{k+1}-w_k)$. Vagyis $\frac{1+\lambda}{\lambda}\cdot w_k - s_k \geq \frac{1+\lambda}{\lambda} w_{k+1} - s_{k+1}$.

Mivel $\lambda < \frac{1}{n-1}$, azért $1+\lambda > n\lambda$, amiből $\frac{1+\lambda}{\lambda} - n > 0$. Legyen $\mu = \frac{1+\lambda}{\lambda} - n$. Ekkor

$$\frac{1+\lambda}{\lambda}\cdot w_k - s_k = \mu\cdot w_k + (n\cdot w_k - s_k) \geq \mu\cdot w_k,$$

Ezek szerint $w_k \leq \frac{\frac{1+\lambda}{\lambda}\cdot w_1 - s_1}{\mu}$, tehát $w_k$ korlátos, készen vagyunk.

Így a megoldás: $\lambda \geq \frac{1}{n-1}$.

*Pálvölgyi Dömötör* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

**4.** *Egy bűvésznek száz kártyája van, amelyek 1-től 100-ig vannak számozva. Mindegyiket beleteszi három doboz – egy piros doboz, egy fehér doboz és egy kék doboz – valamelyikébe, olymódon, hogy mindegyik dobozban van legalább egy kártya.*

*A közönség egy tagja kiválaszt kettőt a három doboz közül, és mindegyikből kivesz egy kártyát, majd kihirdeti a kivett kártyákon lévő két szám összegét. Ennek az összegnek az ismeretében a bűvész meg tudja mondani, hogy melyik az a doboz, amiből nem vettek ki kártyát.*

*Hányféleképpen lehet a kártyákat a dobozokban úgy elhelyezni, hogy ez a mutatvány mindig sikerüljön? (Két elhelyezést különbözőnek tekintünk, ha van legalább egy kártya, ami másik dobozba kerül.)*

**Megoldás.** Legyen a három doboz $A$, $B$ és $C$.

$$A = \{a_1 < a_2 < \ldots < a_k\},$$
$$B = \{b_1 < b_2 < \ldots < b_l\},$$
$$C = \{c_1 < c_2 < \ldots < c_m\}, \qquad (k+l+m=100).$$

Vegyük a következő összegeket:

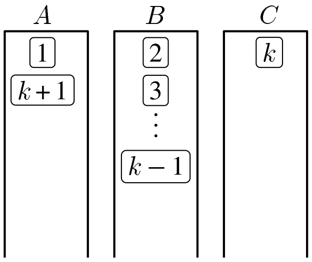
$$\{a_1+b_1 < a_1+b_2 < \ldots < a_1+b_l < a_2+b_l < \ldots < a_k+b_l\}$$
$$\{a_1+c_1 < a_1+c_2 < \ldots < a_1+c_m < a_2+c_m < \ldots < a_k+c_m\}$$
$$\{b_1+c_1 < b_1+c_2 < \ldots < b_1+c_m < b_2+c_m < \ldots < b_l+c_m\}$$

(az egyenlőtlenségek az eredeti egyenlőtlenségekből következnek).

Mivel két csoportban nem lehet ugyanolyan összeg, azért van $k+l-1+k+m-1+l+m-1=2(k+l+m)-3=197$ különböző számunk. Az 1–100 számokból éppen ennyi, 197 különböző kéttagú összeg készíthető ($1+2=3$, $\ldots 99+100=199$), ezért az összes szám szerepel. Ezután esetvizsgálattal nézzük meg a lehetőségeket:

Kezdjük feltölteni a dobozokat. Vegyük észre, hogy mivel a 3 összeg létrejön, az $\boxed{1}$ és a $\boxed{2}$ kártya különböző dobozokba kerül. Ezt a két kártyát összesen hatféleképpen rendezhetjük el. Tegyük fel, hogy az $\boxed{1}$ kártya az $A$, a $\boxed{2}$ pedig a $B$ dobozba került. A

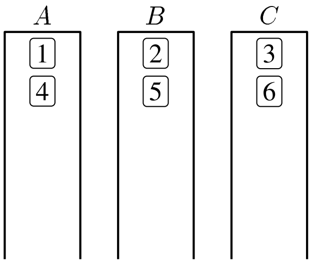
$\boxed{3}$ kártya ezután nem kerülhet az $A$ dobozba, ellenkező esetben ugyanis a $\boxed{4}$ összeg nem jöhet létre. A $\boxed{3}$ kártya tehát vagy a $B$ dobozba került – ahová a $\boxed{2}$ – vagy pedig az eddigi üres $C$ dobozba. Azt állítjuk, hogy a további kártyák elhelyezése mindkét esetben egyértelmű.




*1. eset* (a $\boxed{3}$ kártya a $B$ dobozba kerül):

- a $C$ doboz nem üres, így legyen a legkisebb $C$-beli kártya $\boxed{k}$. Ekkor $\boxed{k+1}$ csak az $A$-ba kerülhet, hiszen különben $2+k=(k+1)+1$, a bűvész nem tud dönteni.

Ám ekkor $(k+1)+2=k+3$, a bűvész most sem tud dönteni, hacsak $\boxed{k+1}$ kártya már egyáltalán nincsen. Így „nem létezhet” $\boxed{k+1}$, tehát $k=100$. Ekkor az $A$ és $C$ dobozban egy-egy kártya van, az $\boxed{1}$, illetve a $\boxed{100}$, a többiek a $B$ dobozba kerülnek. Ez az elrendezés pedig nyilván megfelelő, így tehát hat esetet kaptunk.




*2. eset* (a $\boxed{3}$ kártya a $C$ dobozba kerül):

- $2+3=4+1$, $\boxed{4}\in A$

$5+1=4+2$ tehát $\boxed{5}\notin C$, és $5+2=4+3$, tehát $\boxed{5}\notin A$. Így $\boxed{5}\in B$. Hasonlóan

$6+1=4+3$, így $\boxed{6}\notin B$, továbbá $6+2=5+3$, azért $\boxed{6}\notin A$. Így csak $\boxed{6}\in C$ lehetséges.

Az első sort elhagyva ezt „eljátszva” a második sorral kapjuk, hogy a számok 3-as maradék szerint vannak rendezve, és ez az elrendezés is tényleg jó lesz. Ez tehát további hat eset.

Így összesen 12 olyan elrendezés van, amikor mindig sikerülhet a mutatvány.

*Vizer Máté* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

**5.** *Döntsük el, hogy létezik-e olyan $n$ pozitív egész szám, amelyre teljesül, hogy $n$ pontosan 2000 különböző prímszámmal osztható, és $2^n+1$ osztható $n$-nel.*

**Megoldás.** Belátjuk, hogy minden pozitív egész $k$-hoz található olyan pozitív egész $n$ úgy, hogy $(2^n+1)$ osztható $n$-nel, és $n$-nek pontosan $k$ darab prímosztója van.
(Így $k=2000$-re is létezik ilyen $n$.)

$k$ szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. $k=1$-re igaz: $9\mid 2^9+1$.

$k=2$-re: $9\cdot 19\mid 2^{9\cdot 19}+1$.

Tegyük fel, hogy $k$-ra igaz ($k\ge 2$):

$$p_1^2p_2p_3\dots p_k\mid 2^{p_1^2p_2p_3\dots p_k}+1,\qquad p_1=3<p_2=19<p_3<\dots<p_k.$$

**Segédtétel.** *Ha $p>3$ prím, akkor $(2^p+1)$-nek van $p$-nél nagyobb prímosztója.*

*Bizonyítás.* Legyen a $q$ a $(2^p+1)$-nek egy $p$-nél nem nagyobb prímosztója. Ekkor $q>2$ és

$$2^p \equiv -1 \pmod{q}. \qquad \text{Négyzetre emelve} \qquad 2^{2p} \equiv 1 \pmod{q}.$$

A kis Fermat-tétel szerint $2^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$. Innen az euklideszi algoritmus alkalmazásával kapjuk, hogy $2^{(2p,\,q-1)} \equiv 1 \pmod{q}$. $p \nmid q-1$, mert $q-1<p$, így $(2p,q-1)=2$

$$2^2=4\equiv 1 \pmod{q}, \qquad \text{tehát}$$

$$q=3.$$

Másrészt $9 \nmid 2^p+1$, mert egyébként $2^{2p} \equiv 1 \pmod{9}$ és $2^6 \equiv 1 \pmod{9}$ miatt $2^{(6,\,2p)} \equiv 1 \pmod{9}$ az euklideszi algoritmus miatt, ami $2^2 \equiv 1 \pmod{9}$, és ez ellentmondás.

Ha tehát $(2^p+1)$-nek nincs $p$-nél nagyobb prímosztója, akkor $2^p+1 \le 3$, ami ellentmondás. Ezzel a segédtételt beláttuk.

Legyen ezután $p_{k+1}$ a segédtétel szerinti prím, tehát $p_{k+1}>p_k$, és $p_{k+1} \mid 2^{p_k}+1$.

$$2^{p_k} \equiv -1 \pmod{p_{k+1}}, \qquad \text{és így}$$

$$2^{p_1^2p_2p_3\dots p_kp_{k+1}} \equiv (-1)^{p_1^2p_2p_3\dots p_{k-1}p_{k+1}} = -1 \pmod{p_{k+1}}, \qquad \text{azaz}$$

$$p_{k+1} \mid 2^{p_1^2p_2p_3\dots p_kp_{k+1}}+1.$$

Másrészt az indukciós feltevés miatt $p_1^2p_2\dots p_k \mid 2^{p_1^2p_2\dots p_k}+1$, tehát

$$2^{p_1^2p_2\dots p_k} \equiv -1 \pmod{p_1^2p_2\dots p_k}.$$

$$2^{p_1^2p_2\dots p_kp_{k+1}} \equiv (-1)^{p_{k+1}} = -1 \pmod{p_1^2p_2\dots p_k}.$$

$$p_1^2p_2\dots p_kp_{k+1} \mid 2^{p_1^2p_2\dots p_kp_{k+1}}+1,$$

mert $p_1^2\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k$ és $p_{k+1}$ relatív prímek. Így $k+1$-re $n=p_1^2\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k\cdot p_{k+1}$ megfelelő, amivel az indukciós bizonyítást befejeztük.

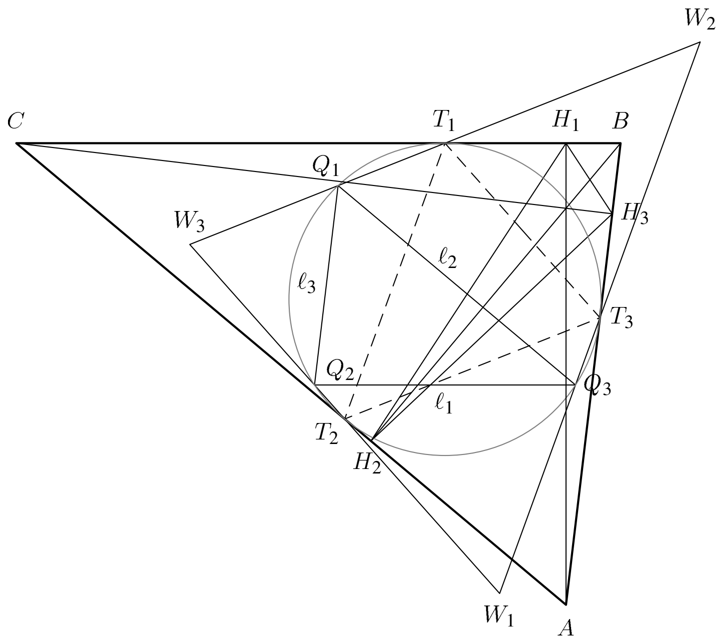
*Zábrádi Gergely* (Győr, Révai M. Gimn., 12. o.t.)

**6.** *Legyenek $AH_1$, $BH_2$, $CH_3$ az $ABC$ hegyesszögű háromszög magasságai. Az $ABC$ háromszög beírt köre a $BC$, $CA$, $AB$ oldalakat rendre a $T_1$, $T_2$, $T_3$ pontokban érinti. Legyenek az $\ell_1$, $\ell_2$, illetve $\ell_3$ egyenesek a $H_2H_3$, $H_3H_1$, illetve $H_1H_2$ egyenesek tükörképei a $T_2T_3$, $T_3T_1$, illetve $T_1T_2$ egyenesekre.*

*Bizonyítsuk be, hogy $\ell_1$, $\ell_2$, $\ell_3$ egy olyan háromszöget határoznak meg, amelynek csúcsai az $ABC$ háromszög beírt körén vannak.*

**Megoldás.** Legyen $1 \le i < j \le 3$ esetén $\ell_i \cap \ell_j = Q_k$, ahol $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$. Belátjuk, hogy pl. $Q_1Q_2$ egyenese és $AB$ egyenese párhuzamos. Ez éppen azt jelenti, hogy $\ell_3 \parallel AB$.

Irányított szögekkel fogunk számolni. $CAB\sphericalangle=\alpha$, $ABC\sphericalangle=\beta$, $BCA\sphericalangle=\gamma$. $H_1H_2$-t $BC$-be* $(-\alpha)$ szögű forgatás viszi ($H_2H_1C\sphericalangle=CAB\sphericalangle$, mert $H_1H_2AB$ négyszög húrnégyszög: $H_1$ és $H_2$ rajta van az $AB$ szakasz Thálesz-körén.)




$T_1T_2$-t $\left(-\dfrac{\pi-\gamma}{2}\right)$ szögű forgatás viszi $BC$-be (a $CT_1T_2$ háromszög egyenlő szárú), így $H_1H_2$-t $T_1T_2$-be $(-\alpha)-\left(-\dfrac{\pi-\gamma}{2}\right)$ szögű forgatás viszi. $H_1H_2$-t $\ell_3$-ba ennek kétszerese, $-2\alpha-(-\pi+\gamma)=\pi-2\alpha-\gamma$ szögű forgatás viszi. Így $\ell_3$-at $BC$-be $-(\pi-2\alpha-\gamma)+(-\alpha)=-\pi+\alpha+\gamma=-\beta$ szögű forgatás viszi, amivel állításunkat igazoltuk.

A $Q_iT_i$ $(i=1, 2, 3)$ egyenesek a $W_1W_2W_3$ háromszöget határozzák meg.

Ezután a következőket látjuk be:

*(i)* A $W_1W_2W_3$ háromszög talpponti háromszöge a $Q_1Q_2Q_3$ háromszög.

*(ii)* A $W_1W_2W_3$ háromszög középvonalai a $T_1T_2T_3$ háromszöget adják.

*(i)* Egyszerűen adódik, hogy pl.: $H_1H_2B\sphericalangle=BH_2H_3\sphericalangle=\dfrac{\pi}{2}-\beta$, ezért $T_2$ távolsága $H_2H_1$-től és $H_2H_3$-tól megegyezik. $T_2$ távolsága $H_2H_1$-től és $\ell_3$-tól, illetve $H_2H_3$-tól és $\ell_1$-től is ugyanakkora, azaz $T_2$ egyenlő távolságra van $Q_2Q_1$ és $Q_2Q_3$-tól, így $Q_2T_2$ a $Q_1Q_2Q_3\sphericalangle$ külső szögfelezője. Hasonló áll $Q_3T_3$ és $Q_1T_1$ esetén is. Emiatt *(i)* valóban fennáll.

---

* Itt és a továbbiakban a szakaszok által meghatározott egyenesek forgatásáról van szó.

A szerk.

*(ii)* Belátjuk, hogy pl. $T_1T_2$ egyenese párhuzamos $W_1W_2$ egyenesével, azaz $Q_3T_3$-mal. *(i)* miatt $Q_3T_3$ a $Q_2Q_3Q_1$ szög külső szögfelezője, így mivel a $Q_1Q_2Q_3$ háromszög és az $ABC$ háromszög egyállású és $Q_2Q_3Q_1\sphericalangle = BCA\sphericalangle$, $Q_3T_3$-at $Q_3Q_2$-be $\left(-\dfrac{\pi-\gamma}{2}\right)$ szögű forgatás viszi. De láttuk, hogy $T_1T_2$-t $BC$-be is $\left(-\dfrac{\pi-\gamma}{2}\right)$ szögű forgatás viszi. Tehát mivel $BC$ és $Q_3Q_2$ párhuzamosak, $T_1T_2$ is párhuzamos $Q_3T_3$-mal.

Így a $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, $H_1$, $H_2$, $H_3$ pontok rajta vannak a $W_1W_2W_3$ háromszög Feuerbach-körén, azaz egy körön vannak. Mivel a $H_1$, $H_2$, $H_3$ pontok éppen az $ABC$ háromszög beírt körét határozzák meg, a bizonyítással készen vagyunk.

*Gyenes Zoltán* (Apáczai Cs. J. Gimn., 12. o.t.)

# A IX. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

*„Csak művelt nemzet tarthatja fenn magát Európa népei között, tehát a nemzet jövője kulturális előrehaladásától függ.”*

*Eötvös József*

2000. márciusában kilencedszer rendezték meg a Kárpát-medence különböző országaiban élő magyar középiskolások matematikaversenyét. A találkozó házigazdája a *Dunaszerdahelyi Magyar Tanítási Nyelvű Gimnázium* volt. Ennek a rangos megmérettetésnek három tényező a mozgatója, írja a versenyről készült beszámolóban *dr. Bíró Gizella,* a szervezőbizottság elnöke:

*a*) az anyanyelv, ami összeköti a versenyzőket,

*b*) a matematika szeretete és tisztelete,

*c*) a barátság, amely minden alkalommal születik, vagy a meglévő erősödik.

Az ünnepélyes megnyitón *Szigeti László,* a Szlovák Oktatási Minisztérium politikai államtitkára, a rendezvény fővédnöke, *Jarábik Gabriella,* a Kulturális Minisztérium államtitkára, *Pázmány Péter,* Dunaszerdahely polgármestere, *Urbán János,* a zsűri elnöke, a magyar csapat vezetője, *Bíró Gizella* főszervező és *Cseh Mária,* a gimnázium igazgatónője üdvözölte a vendégeket. Megható élménybeszámolót mondott el a Csallóközben töltött gyerekkoráról, majd családjának kitelepítéséről *Urbán Jánosné.*

Az ötnapos programban színházi előadás, múzeum- és tárlatlátogatás, pozsonyi, csallóközi, dévényi kirándulás, előadások, táncház, a polgármester úr fogadása, no és a verseny adtak soha el nem múló élményeket.

A négyórás írásbeli március 25-én volt, minden évfolyamon 6-6 feladattal.

Közöljük a 9. és 10. évfolyamosok feladatsorát.*

---

* Az idei feladatokat, a kitűző tanárok nevét és az összes korábbi versenyfeladatot megtalálhatják az érdeklődők az interneten, honlapunkon, a `http://komal.elte.hu`-tól kiindulva a *Kapcsolatok*-nál vagy közvetlenül a `http://berzsenyi.tvnet.hu/~nemecs` címen.

## *9. évfolyam*

**1.** Bizonyítsuk be, hogy minden $k$ pozitív egész számra igaz, hogy a $(k+1)(k+2)(k+3)\cdot\ldots\cdot(k+2000)$ szorzat osztható $2000^{99}$-nel!

**2.** Ha az $ABC$ háromszög $AB$ és $AC$ oldalán úgy vesszük fel a $D$ és $E$ pontokat, hogy $DE=DB=EC$ teljesüljön, akkor $AD=AE=BC$ is teljesül. Mekkorák az $ABC$ háromszög szögei?

**3.** Igazoljuk, hogy bárhogyan is választunk ki a 2000-nél nem nagyobb pozitív egész számok közül 1001-et, biztosan lesz a kiválasztottak között két olyan szám, amelyek különbsége 4.

**4.** Az $ABC$ derékszögű háromszög $AB$ átfogóját a háromszögbe írt kör a $D$ pontban érinti. Bizonyítsuk be, hogy az $AD$ és $DB$ oldalhosszúságú téglalap területe egyenlő az $ABC$ háromszög területével!

**5.** Az $1\le x\le 3$ valós számokra az $f$ függvényt a következő módon értelmezzük:

$$f(x)=\frac{x^4-4x^3+5x^2-4x+9}{1+4x-x^2}.$$

Határozzuk meg $f$ legkisebb értékét és azt az $x$ helyet, ahol ezt a legkisebb értéket felveszi!

**6.** Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletet: $y(1-x)^2+x(1-y)^2+(x+y)^2-x^3-y^3=2000$.

## *10. évfolyam*

**1.** Oldjuk meg az egész számok körében az $x^2-y^2-z^2=1,\quad y+z-x=3$ egyenletrendszert!

**2.** Az $ABC$ derékszögű háromszögben ($ACB\sphericalangle=90^\circ$) a beírt kör $K$ középpontját a háromszög köré írt kör $O$ középpontjával összekötő egyenes az átfogóval $45^\circ$-os szöget zár be. Számítsuk ki az átfogó és a beírt kör sugarának arányát!

**3.** Számítsuk ki az $a_1+a_2+\ldots+a_{2000}$ összeget, ha $a_n=\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$ $\quad(n\in\mathbf{N}^+)$.

**4.** Az $ABC$ háromszög $BC$ oldalán úgy vettük fel az $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ pontokat, hogy az $AA_1, AA_2, \ldots, AA_{n-1}$ félegyenesek a $BAC\sphericalangle=\alpha$ szöget $n$ egyenlő részre osztják. Igazoljuk, hogy $AB\cdot AA_1+AA_1\cdot AA_2+\ldots+AA_{n-1}\cdot AC=AB\cdot AC\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{n}}$.

**5.** A táblára felírtak 3 pozitív egész számot. Egy lépésben a táblára felírt számok közül egyet letörölhetünk és helyére a megmaradt két szám összegénél 1-gyel kisebb számot írhatunk. Néhány lépés után a táblán ez a három szám áll: 17, 75, 91. Lehetett-e a kiinduló számhármas

*a*) 2, 2, 2; és *b*) 3, 3, 3?

**6.** Az $ABCD$ négyzet $AB$ oldalának $A$-hoz közelebbi harmadolópontja $H$. A $H$ pont tükörképe $A$-ra $H_1$, $B$-re $H_2$. A $CH_1$ és $AD$ egyenesek metszéspontja $E$, a $DH_2$ és $BC$ egyenesek metszéspontja $F$, végül a $CH_1$ és $DH_2$ egyenesek metszéspontja $M$. Hányad része az $ABCD$ négyzet területének a $DEM$ és $CFM$ háromszögek területének összege?

A verseny helyezettjei:

*IX. osztály*

1. **Nagy Zoltán Lóránt,** Budapest, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn.,
   **Bergmann Gábor,** Budapest, Berzsenyi D. Gimn.,
2. **Csóka Endre,** Debrecen, Fazekas M. Gimn.,
   **Szalai Attila,** Szeged, Radnóti M. Gimn.,
3. **Nagy Gábor,** Kaposvár, Táncsics M. Gimn.,
   **Pintér Balázs,** Paks, Energetikai Szakközépisk.,
   **Lang Péter,** Győr, Révai M. Gimn.

*X. osztály*

1. **Balogh János,** Kaposvár, Táncsics M. Gimn.,
   **Simon András,** Kaposvár, Táncsics M. Gimn.,
   **Spanczér Ilona,** Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn.,
2. **Csikvári Péter,** Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn.,
   **Gémes Norbert,** Miskolc, Földes F. Gimn.,
3. **Boros Vazul** Budapest, Berzsenyi D. Gimn.,
   **Erdei Zsuzsa,** Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn.,
   **Sipos István,** Nagyvárad Ady E. Gimn.,
   **Horváth Szabolcs,** Sepsiszentgyörgy, Székely Mikó Koll.,
   **Dömötör Csilla,** Győr, Révai M. Gimn.,
   **Koreck Ferenc,** Szeged, Radnóti M. Gimn.

*XI. osztály*

1. **Vörös László,** Győr, Révai M. Gimn.,
   **Pesti Gábor,** Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn.,
2. **Lovrics Anna,** Budapest, Berzsenyi D. Gimn.,
   **Pogátsa Attila,** (Bonyhád, Petőfi S. Evang. Gimn.,
3. **Ritter Ádám,** Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn.,
   **Dávid László,** Marosvásárhely, Bolyai F. Líceum.

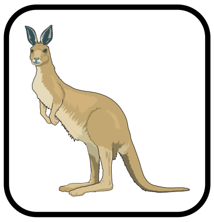
*XII. osztály*

1. **Demeter Albert,** Székelykeresztúr, Orbán B. Gimn.,
   **Pálvölgyi Dömötör,** Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn.,
2. **Hegyi Géza,** Csíkszereda, Márton Á. Líceum,
3. **Gyürki István,** Zselíz, Magyar Tannyelvű Gimnázium,
   **Bálint Balázs,** Miskolc, Földes F. Gimn.,
   **Balázs Péter,** Kaposvár, Táncsics M. Gimn.,
   **Kiss Norbert,** Debrecen, Fazekas M. Gimn.

A versenyt a következő években is megrendezzük, minden második évben Magyarországon, közben pedig a környező országokban.

A záróünnepség végén *dr. Pintér Ferenc* meghívta a jelenlévőket a jövő évi versenyre Nagykanizsára.

*Bogdán Zoltán*



## Kenguru Nemzetközi Matematika Verseny 2000

Évek óta Nagykanizsán szervezik az idén már több, mint húszezer (!) diákot megmozgató KENGURU nemzetközi matematikaversenyt. A szervezést idén is *dr. Pintér Ferenc,* a versenyt szervező Zalai Matematikai Tehetségekért Alapítvány titkára irányította. Az Európa több országából érkező rengeteg javasolt problémából *Erdős Gábor* válogatta ki a magyar versenyzők elé kerülő feladatokat. A Kenguru versenyzői valamennyien saját iskolájukban küzdenek meg a rendelkezésre álló 75 perc alatt a 30 izgalmas feladattal. A versenyzők által kitöltött kódlapokat Nagykanizsán számítógép segítségével értékelik, és a legjobbak értékes díjazásban részesülnek. Több, mint 2 millió forint értékű könyvjutalom, valamint 1 millió forint értékű külföldi utazás talált gazdára április 26-án, a budapesti díjkiosztó gálán, ahol a hagyományoknak megfelelően a legjobb diákokon kívül az odaadóan dolgozó felkészítő tanárokat is jutalmazták.

A győztesek a következők voltak:

*Általános iskolások, heti max. 4 óra*

5. oszt.: **Bíró Tamás** (Dancs Lajos Ált. Isk., Nagyecsed, tanára: *Bíróné Ster Mária*)
**Szalkai Balázs** (Szilágyi Erzsébet Á. I., Veszprém, tanára: *Csizmadiáné Csillag Hajnalka*)

6. oszt.: **Farkas Bálint** (Jedlik Á. Ginm., Budapest, tanára: *Gudenus Lászlóné*)

7. oszt.: **Tóth Szilvia** (Paragvári utcai Ált. Isk., Szombathely, tanára: *Ágoston Mária*)

8. oszt.: **Bauer Péter** (Bolyai János Gyak. Á. I., Szombathely, tanára: *Hollerné Gazdag Ilona*)

*Általános iskolások, heti min. 5 óra*

5. oszt.: **Kunovszki Péter** (Brodarics téri Ált. Isk., Mohács, tanára: *Kiel Mátyásné*)
6. oszt.: **Salamon László** (Zrínyi M. Ginm., Zalaegerszeg, tanára: *dr. Vajda István*)
7. oszt.: **Krusper Márta** (Fazekas M. Gimn., Debrecen, tanárai: *Gaál Istvánné* és *Lakatos Tibor*)
8. oszt.: **Nagy Zsolt** (Református Ált. Isk., Mezőcsát, tanára: *Vechter Józsefné*)

*Szakközépiskolások*

9. oszt.: **Simon Tamás** (Puskás Tivadar Távk. Techn., Budapest, tanára: *Beregszászi Zoltán*)
10. oszt.: **Pszota Zsolt** (Boronkay György Középiskola, Vác, tanára: *Fábián Gábor*)
11. oszt.: **Szentesi Máté Balázs** (Puskás Tivadar Távk. T., Budapest, tanára: *Beregszászi Zoltán*)
12. oszt.: **Váradi István** (Széchenyi István Szki., Nyíregyháza, tanára: *Filetóth István*)



KöMaL – 2000/7 MAT0007 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 19:07 (12. lap)

*Gimnáziumi tanulók*

9. oszt.: **Fehér Ádám** (Révai M. Gimn., Győr, tanára: *Sántha Noémi*)
10. oszt.: **Balogh János** (Táncsics M. Gimn., Kaposvár, tanárai: *dr. Iharos Csabáné* és *Kubatov Antal*)
11. oszt.: **Pesti Gábor** (Batthyány L. Gimn., Nagykanizsa, tanára: *Erdős Gábor*)
12. oszt.: **Ivaskó György** (III. Béla Gimn., Baja, tanára: *Királyné Nagy Éva*)

*Speciális matematika tagozatosok*

9. oszt.: **Nagy Tibor** (Fazekas M. Gimn., Debrecen, tanára: *Balázs Tivadar*)
10. oszt.: **Péterfalvi Ferenc** (Janus Pannonius Gimn., Pécs, tanárai: *Sáriné Dombi Anna* és *Polcz Katalin*)
11. oszt.: **Vígh Viktor** (JATE Ságvári E. Gyak. Gimn., Szeged, tanárai: *Konfárné Nagy Klára* és *dr. Dobi János*)
12. oszt.: **Dezső Balázs** (Teleki Blanka Gimn., Székesfehérvár, tanárai: *Csuthy Márta* és *Sipos Imre*)

## Hajós György Verseny

A műszaki főiskolák (főiskolai karok, intézetek) 22. Hajós György Matematikai Versenyét a Zrínyi Miklós Nemzetvédelmi Egyetem Repülőtiszti Intézete rendezte meg Szolnokon 2000. április 19-e és 21-e között. A versenyen 14 intézmény egy-egy 2–4 fős csapata összesen 51 versenyzővel vett részt.

Bár a verseny megszervezése és lebonyolítása mintaszerű volt, a Tisza éppen akkor Szolnokon tetőző vízszintje a versenyzők és a közreműködők gondolatait időnként lefoglalta.

A feladatok megoldására 180 perc állt a versenyzők rendelkezésére, és számítógép, valamint mobiltelefon kivételével bármilyen segédeszközt igénybe vehettek.

A Versenybizottság a következő feladatokat tűzte ki:

**1.** *Oldja meg a pozitív egész számok halmazán az* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ *egyenletet!*

**2.** *Legyen* $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2-x+2}$ $(x\in\mathbf{R})$*, továbbá* $A=\{x_n \mid x_n=f(n),\quad n=1,2,\ldots$ $\ldots,2000\}$. *(*$\mathbf{N}$ *a természetes számok halmazát,* $\emptyset$ *az üres halmazt jelöli.)*

a*) Igazolja, hogy* $A\cap\mathbf{N}=\emptyset$*!*

b*) Határozza meg az* $A$ *halmaz elemeinek a számát!*

c*) Adja meg az* $A$ *halmaz legnagyobb elemét!*

**3.** *Adott egy* $ABC$ *szabályos háromszög alapú gúla, amelynek oldalélei* $AD=BD=$ $=CD=a$ *és az alaplaphoz tartozó magassága* $\frac{a\sqrt{3}}{2}$*. Milyen távolságra kell felvenni az* *alaplaptól a $CD$ élen egy $E$ pontot ahhoz, hogy az $EAB$ háromszög területe minimális legyen?*

*Határozza meg az $ABEC$, illetve $ABED$ gúlák térfogatának arányát!*

**4.** *Igazolja, hogy a* $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ *minden $x$ elemére fennáll, hogy* $\operatorname{tg} x - 1 \geq 2x - \frac{\pi}{2}$.

**5.** *Adott a síkban $n$ számú körvonal, amelyek közül bármelyik kettő éppen két pontban metszi egymást, és egyik ponton sem halad át az adott körvonalakból kettőnél több. Összesen hány részre osztja fel a síkot a körvonalaknak ez a rendszere?*

A *csapatversenyben* az első három helyezést elért csapat:

1. Budapesti Műszaki Főiskola, Kandó Kálmán Főiskolai Kar, Budapest
2. Budapesti Műszaki Főiskola, Bánki Donát Gépészmérnöki Főiskolai Kar, Budapest
3. Szent István Egyetem Ybl Miklós Műszaki Főiskolai Kar, Budapest

Az *egyéni versenyben* az első hat versenyző:

1. *Hadászi Zoltán,* Budapesti Műszaki Főiskola, Kandó K. FK.,
2. *Bíró István,* Budapesti Műszaki Főiskola, Bánki D. GFK.,
3. *Zöldy Balázs,* Szent István Egyetem, Ybl M. MFK.,
4. *Fenyvesi Zoltán,* Zrínyi M. Nemzetvédelmi Egyetem, Bolyai J. KMFK.,
5. *Békési Zoltán,* Budapesti Műszaki Főiskola, Kandó K. FK.,
6. *Köcski Réka,* Szent István Egyetem, Ybl M. MFK., ő a 4. feladat ötletes megoldásáért *különdíjat* is kapott.

*Scharnitzky Viktor*
a Versenybizottság elnöke

## Zipernowsky Matematika Kupa

2000. május 23-án fejeződött be a 25. Zipernowsky Matematika Kupa, amelyen Baranya megye és Pécs város 13 gimnáziuma és 7 szakközépiskolája vett részt 148 versenyzővel. A gimnáziumok Zipernowsky Kupájának védője ismét a pécsi Janus Pannonius Gimnázium lett, a szakközépiskolák versenyét a pécsi Zipernowsky Károly Ipari Szakközépiskola nyerte.

Az egyéni versenyben az alábbi tanulók szereztek I. díjat:

*Ruppert László,* Pécs, Janus Pannonius Gimnázium, 9. évfolyam,
*Péterfalvi Ferenc,* Pécs, Janus Pannonius Gimnázium, 10. évfolyam,
*Vadász Péter,* Pécs, Leőwey Klára Gimnázium, 10. évfolyam,
*Frick Ferenc,* Pécs, Zipernowsky Károly Ipari Szakközépiskola, 9. évfolyam,
*Mészáros Zoltán,* Pécs, Zipernowsky Károly Ipari Szakközépiskola, 10. évfolyam.

A versenyt 25 éven keresztül *Németh József* tanár szervezte.

## Rátz László Vándorgyűlés

Szeged, 2000. július 4–7.

Magas hőfokon zajlott az idén a matematikatanárok hagyományos évi vándorgyűlése: a hőség ellenére nagy érdeklődés kísérte a legtöbb rendezvényt mind az alsó és felső tagozaton tanítók, mind a középiskolai tanárok körében, akik a felsőoktatási ankétot is látogatták. A színvonalas előadásokon túl komolyzenei koncertek, filmvetítés, kirándulások gazdagították a programot. Köszönjük a szegedi szervezőknek!

A 2000. évi **Beke Manó Emlékdíj I. fokozatát** kapta meg

**C. Neményi Eszter**,

aki az általános iskolai matematika tanítás korszerűsítésének kiemelkedő és meghatározó egyénisége.

A **Beke Manó Emlékdíj II. fokozatát** kapták:

– **Árokszállási Tibor** rendkívül magas színvonalú matematika tanári munkájáért, sikeres tehetséggondozó tevékenységéért, áldozatkészségéért és szervezőkészségéért, amellyel a paksi Energetikai Szakképzési Intézetben példaértékű országos hírű matematikatanítási centrum létrejöttét segítette;

– **dr. Csetényi Istvánné**, a győri Fekete István Általános és Szakképző Iskola fejlesztő tanára, matematika munkaközösségének vezetője, a megye és a Társulat matematikai rendezvényeinek aktív szereplője;

– **Fazakas Tünde**, a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium tanára, aki kiváló feladatmegoldó és ötletes feladatalkotó matematikus, tanári munkájára az önmagával és tanítványaival szembeni rendkívüli igényesség és módszergazdagság jellemző;

– **Kosztolányi József**, aki meghatározó szerepet tölt be a magyar közoktatás matematikai nevelése kialakításában: számos könyve, cikke, előadása, továbbképzése, nyári tábora és kitűnő tanár-személyisége révén tanítványai Szegeden az általános iskolásoktól az egyetemi hallgatókig tisztelik és elismerik;

– **dr. Németh József**, a Juhász Gyula TFK matematika tanszékének vezetője, aki óriási tudásával, jól szerkesztett előadásaival, szigorú és következetes magatartásával, segítőkészségével és remek humorérzékével példamutatóan készíti fel a tanárjelölteket, a továbbképzéseken a tanárokat és a középiskolás diákokat;

– **Peák Istvánné**, a salgótarjáni Bolyai János Gimnázium magas szakmai felkészültségű, munkájára igényes tanára, iskolájában évekig irányította a matematika munkaközösséget, a tanítást élethivatásának tekinti.

Minden díjazottnak ezúton gratulálunk!

A Szerk.

## Mérőlap felvételire készülőknek I.*

*Gallai Tibor professzor úr emlékére*

**1.** Egy mértani sorozat első, harmadik és ötödik tagjának összege 126, a második és a negyedik tag összege a hányados 30-szorosa. Számítsa ki a sorozat első tagját és hányadosát.

**2.** Igazolja, hogy ha $a>0$, $b>0$, $c>0$ és $a+b+c=3$, akkor

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<9.$$

**3.** Az $ABCD$ téglalapban $AB=20$, $BC=10$ egység. A téglalapon belül található olyan $P$ pont, amelyből az $AB$ és $AD$ szakaszok $90^\circ$-os szögben látszanak. Számítsa ki $P$ pont távolságát a téglalap csúcsaitól.

**4.** Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

*a)* $\log_3(x-1)^2+\log_3(x+2)^2=2\log_3 2$;

*b)* $\log_3(x-1)^2+2\log_3(x+2)=2\log_3 2$;

*c)* $2\log_3(x-1)+\log_3(x+2)^2=2\log_3 2$;

*d)* $2\log_3(x-1)+2\log_3(x+2)=\log_3 4$.

**5.** Egy háromszög oldalai $a$, $b$, $c$. Területe $T=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(c^2-a^2-b^2)$.

Fejezze ki $a$-val és $b$-vel a háromszög köré írt kör sugarát!

**6.** Az $x^2-a^2x-2ab=0$ egyenlet gyökei 2-vel nagyobbak az $x^2+3ax-\dfrac{4}{3}b=0$ egyenlet gyökeinél. Számítsa ki $a$ és $b$ értékét, valamint az egyenlet gyökeit.

**7.** Határozza meg azokat a valós $(x;y)$ számpárokat, amelyekre $0\le x\le 2\pi$, $0\le y\le$ $\le 2\pi$, és kielégítik a

$$2\cos^3 x+\sin y=0,$$
$$2\sin^3 x+\cos y=0$$

egyenletrendszert.

**8.** Az $ABC$ háromszög két csúcspontja $A(7;9)$ és $B(-1;3)$, $BC=4\sqrt{5}$ egység, a háromszög területe 40 területegység. Számítsa ki a $C$ csúcs koordinátáit.

**Rábai Imre**

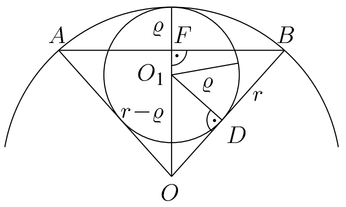
---

* Ajánljuk, hogy a mérőlapok feladatait tanári segítséggel dolgozzák fel a diákok, a feladatokat megoldás után beszéljék meg órán vagy szakkörön.

## Matematika gyakorlatok megoldása

**C. 563.** *Egy $O$ középpontú, $r$ sugarú körben az átmérőnél kisebb húr legyen $AB$, az $AO$ és $BO$ sugarak által meghatározott kisebb körcikkbe beírt kör sugara pedig $\varrho$. Adjuk meg $AB$-t $r$ és $\varrho$ segítségével.*

**Megoldás.** A $\varrho$ sugarú kör középpontját jelöljük $O_1$-gyel, és érintse ez a kör az $OB$ szakaszt a $D$ pontban. Legyen az $AB$ szakasz felezőpontja $F$. Az $OFB$ háromszög hasonló az $OO_1D$ háromszöghöz, mert mindkettő derékszögű, és $FOD$ szögük közös. A hasonlóságból

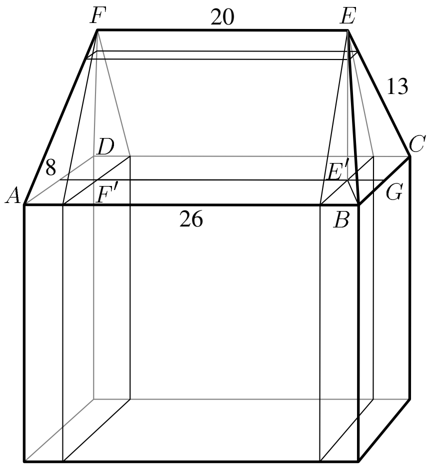



$$\frac{AB}{2} : \varrho = r : (r-\varrho), \quad \text{ahonnan} \quad AB = \frac{2r\varrho}{r-\varrho}.$$

345 dolgozat érkezett. 5 pontos 306, 4 pontos 6, 3 pontos 9, 2 pontos 17, 1 pontos 3, 0 pontos 2, nem versenyszerű 2 dolgozat.

**C. 564.** *Egy téglatest oldalélei 26, 20 és 8 egység hosszúak. A $26 \times 8$-as lapok fölé építsünk olyan egyenes sátortetőket, amelyek „ferde” éleinek hossza 13, „vízszintes” éle pedig 20 egység. Mekkora a téglatest azon részének térfogata, amelyet úgy kapunk, hogy eltávolítjuk a téglából a sátortetőknek a téglatesthez illeszkedő lapjukra vonatkozó tükörképeit?*

*Megjegyzés.* A feladatban szereplő „egyenes sátortető” kifejezés (mint többen kifogásolták) sem matematikai, sem építészeti szempontból nem volt megfelelő. A beküldők túlnyomó többsége azért ugyanarra gondolt, amire a szerkesztőbizottság.




**Megoldás.** Jelöljük a $26 \times 8$-as téglalap csúcsait $A$, $B$, $C$ és $D$-vel, a sátortető 20 egységnyi élének végpontjait $E$-vel és $F$-fel, az *ábra* szerint. $EF$ vetülete a téglalap síkjára $E'F'$.

A sátortető szimmetriájából következik, hogy $E'F'$ a téglalap középvonalára esik, meghosszabbítása messe a $BC$ oldalt $G$-ben!

Az $E'GB$ derékszögű háromszögben

$$E'G = \frac{26-20}{2} = 3, \qquad BG = 4, \qquad EB = \sqrt{4^2+3^2} = 5;$$

$$EE' = \sqrt{EB^2 - E'B^2} = \sqrt{13^2-5^2} = 12,$$

ez a sátortető magassága. Fektessünk $E$-n és $F$-en keresztül a téglatest $20\times 8$-as oldalával párhuzamos síkokat.

A síkokkal feldaraboltuk a sátortetőt egy 20 egység magasságú háromszög alapú hasábra és két egybevágó téglalap alapú gúlára. Ezek térfogatát könnyen felírhatjuk.

A hasáb térfogata: $\frac{8\cdot 12}{2}\cdot 20=960$ térfogategység. A két gúla együttes térfogata: $2\cdot\frac{3\cdot 8\cdot 12}{3}=192$. Az együttes térfogat: 1152.

Ha tükrözzük a sátortetőket a téglalapokra – mivel együttes magasságuk $24>20$ nagyobb a téglatest élénél –, a két tükörképnek lesz közös része.

Határozzuk meg a közös rész térfogatát!

Ez egy olyan sátortető lesz, amelynek magassága 2 egység, az eredeti magasság $\frac{1}{6}$-a. A háromszög alapú hasáb alapterülete $\frac{1}{36}$-ára változott, míg magassága maradt 20 egység, vagyis térfogata az eredeti térfogat $\frac{1}{36}$ részére csökkent.

A téglalap alapú gúla alapterülete $\frac{1}{36}$-ára csökkent, magassága $\frac{1}{6}$-ára, így térfogata az eredeti hasáb térfogatának $\frac{1}{216}$-a.

A téglatest térfogata: $26\cdot 20\cdot 8=4160$ térfogategység.

A tükrözéskor fedésbe került részek térfogata: $2\cdot\frac{96}{216}+\frac{960}{36}\approx 27{,}55$.

A keresett térfogat: $4160-2\cdot(1152-27{,}55)\approx 1911{,}1$ térfogategység.

*Hablicsek Márton* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.)

339 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 84, 4 pontot 112, 3 pontot 42, 2 pontot 51, 1 pontot 28, 0 pontot 20 beküldő. Nem versenyszerű 2 dolgozat.

**C. 565.** *Egy tálba egymás után felütünk tíz darab tojást. A tojások közül kettő romlott, de ez csak a feltöréskor derül ki. A záptojások az összes előttük feltört tojást használhatatlanná teszik. A tálat ilyenkor kimossuk és a megmaradt tojásokkal folytatjuk az eljárást. A jó tojásoknak átlagosan hányadrésze megy ilymódon veszendőbe?*

**Megoldás.** Nyilván csak a második záptojás után feltört tojások nem mennek veszendőbe. Az *ábrán* a feketével jelölt második záptojás összes lehetséges helyeit láthatjuk.

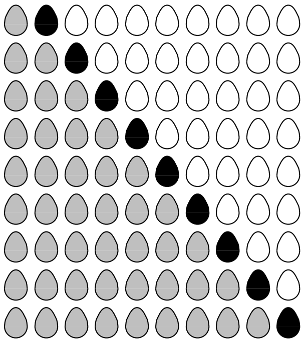
Az I. esetben az *első* záptojás csak egy (az első) helyen lehet, és a veszendőbe ment jó tojások száma 0. A II. esetben az első záptojás két helyen fordulhat elő, és 1 jó tojás vész kárba. A III. esetben 3 helyre választhatjuk az első záptojást, és mindig 2 jó tojás vész kárba, és így tovább. A IX. esetben 9 helyen lehet az első záptojás, és 8 jó tojás megy veszendőbe.

Tehát a jó tojások közül elvész:

$$1\cdot 0+2\cdot 1+3\cdot 2+\ldots+9\cdot 8=240$$

tojás. Mindig 8 jó tojás volt, összesen $(1+2+\ldots+9)\cdot 8=360$ tojás.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.



| | Nem megy veszendőbe | Veszendőbe megy |
|---|---|---|
| I. | 8 jó tojás | 0 jó tojás |
| II. | 7 jó tojás | 1 jó tojás |
| III. | 6 jó tojás | 2 jó tojás |
| IV. | 5 jó tojás | 3 jó tojás |
| V. | 4 jó tojás | 4 jó tojás |
| VI. | 3 jó tojás | 5 jó tojás |
| VII. | 2 jó tojás | 6 jó tojás |
| VIII. | 1 jó tojás | 7 jó tojás |
| IX. | 0 jó tojás | 8 jó tojás |

Mivel a 360-ból 240 megy kárba, így átlagosan a jó tojásoknak $\frac{240}{360}=\frac{2}{3}$-a megy veszendőbe.

*Schlotter Diána* (Budapest, Veres Péter Gimn., 11. o.t.)

437 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 284, 4 pontot 47, 3 pontot 10, 2 pontot 16, 1 pontot 40, 0 pontot 39 beküldő. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

**C. 566.** *Oldjuk meg a következő egyenletet:*

$$(x-2)^2+\left(|x-1|+|x-3|-\frac{15}{4}\right)^2=\frac{65}{16}.$$

**Megoldás.** Az abszolút érték definíciójának megfelelően három esetet vizsgálunk.

i) Ha $x\le 1$. Ekkor $|x-1|=-(x-1)$ és $|x-3|=-(x-3)$.

A kiinduló egyenlet az abszolútérték jelek elhagyása után:

$$x^2-4x+4+\left(-x+1-x+3-\frac{15}{4}\right)^2=\frac{65}{16}.$$

Rendezve azt kapjuk, hogy $5x^2-5x=5x(x-1)=0$. Innen vagy $x=0$, vagy $x=1$.

ii) Ha $1<x\le 3$, akkor $|x-1|=x-1$ és $|x-3|=-(x-3)$.

Az egyenlet a rendezés után: $x^2-4x+3=0$. Innen $x=3$ ($x=1$ nem esik a vizsgált intervallumba).

iii) Végül, ha $x>3$, akkor $|x-1|=x-1$ és $|x-3|=x-3$.

Az ezzel kapott egyenlet: $x^2-7x+12=0$, innen $x=4$ ($x=3$ nem esik a vizsgált tartományba).

Lépéseink megfordíthatók, így a kapott értékekek: 0, 1, 3, 4 az egyenlet megoldásai.

590 dolgozat érkezett. 5 pontos 460, 4 pontos 28, 3 pontos 46, 2 pontos 32, 1 pontos 14, 0 pontos 3 dolgozat. Nem versenyszerű 7.

**C. 567.** *Egy téglatest minden élének mérőszáma egész. A téglatest térfogatának, fél felszínének és az egyik csúcsba befutó élek hosszának mérőszámait összeadva* 2000*-et kapunk. Mekkorák a téglatest élei?*

**Megoldás.** A téglatest élei: $a$, $b$ és $c$, azaz a feltétel szerint

(1) $$abc+ab+bc+ca+a+b+c=2000.$$

A bal oldalon álló kifejezés nem más, mint $(a+1)(b+1)(c+1)-1$. (Ezt könnyen ellenőrizhetjük, ha elvégezzük a szorzásokat. Az összefüggést érdemes megjegyezni, mert máskor is felhasználhatjuk.)

Az (1) egyenlőség átalakítás után:

$$(a+1)(b+1)(c+1)=2001=3\cdot 23\cdot 29.$$

Mivel 3, 23 és 29 prímszám és a bal oldalon három, 1-nél nagyobb egész szorzata áll, a szorzat tényezői a jobb oldal tényezői lehetnek. (A sorrend csak attól függ, melyik élt jelöltük $a$-val, $b$-vel, $c$-vel.)

Legyen pl. $a+1=29$, $b+1=23$, $c+1=3$, ahonnan $a=28$, $b=22$, $c=2$.

A téglatest élei tehát 28, 22 és 2 egység hosszúak.

*Koch Dénes* (Linz, Akad. Gymn., 11. o.t.)

473 dolgozat érkezett. 5 pontos 298, 4 pontos 119, 3 pontos 22, 2 pontos 10, 1 pontos 9, 0 pontos 11 dolgozat. Nem versenyszerű 4.

**C. 568.** *Az ötös lottó sorsolásnak hány olyan különböző kimenetele lehetséges, amelynél a nyerő számok* a) *számtani* b) *mértani sorozatot alkotnak?*

**Megoldás.** *a)* Jelölje az 5 kihúzott számot $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, ahol $a_5=a_1+4d$; $d$ a számtani sorozat különbsége. Ekkor $a_1+4d\le 90$. Mivel $a_1$ legkisebb értéke 1, így $4d\le 89$, ahonnan $d\le\dfrac{89}{4}<23$, s mivel $d$ egész, értéke legfeljebb 22. Az első elem 1 és $90-4d$ közé esik, és összesen $90-4d$ féle lehet.

A számtani sorozatok száma tehát összesen

$$86+82+78+\ldots+6+2=968.$$

*b)* Ha az 5 szám mértani sorozatot alkot, akkor $a_5=a_1q^4$, ahol $q$ a sorozat hányadosa, pozitív és racionális, hiszen két egész szám hányadosa.

Legyen először $q$ egész. Nyilván $q$ nagyobb 1-nél, mert a sorozat tagjai különbözők, és $q<4$, mert különben $a_5\ge a_1 4^4>90$ lenne, azért $q=2$ vagy $q=3$.

Ha $q=2$, akkor $a_5=q_1 2^4=16a_1\le 90$ miatt $a_1$ lehet 1, 2, 3, 4 és 5. Ez 5 sorozat.

Ha $q=3$, akkor $a_5=a_3^4=81a_1\le 90$, ez csak $a_1=1$ esetén teljesül. Ez 1 sorozat.

Legyen most $q=\dfrac{p}{s}>1$ és $(p,s)=1$, $s>1$.

Ekkor $a_5=a_1\left(\dfrac{p}{s}\right)^4$, ahonnan $a_5s^4=a_1p^4$. Mivel $(p,s)=1$, $s^4\mid a_1$ és $p^4\mid a_5$. 1 és 90 között csak a $p=3$, $s=2$, $a_1=16$, $a_5=81$ értékek jöhetnek szóba. Ezek jók is, hiszen 16, 24, 36, 54, 81 mértani sorozat. Ez egy újabb sorozat.

Összesen tehát 7 öttagú mértani sorozat található a lottószámok között.

*Hablicsek Márton* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.)

346 dolgozat érkezett. 5 pontos Antal Ágnes, Árvay Eszter, Bankó Krisztián, Bérczi Kristóf, Besenyei Ádám, Birkner Tamás, Bóka Gergely, Dombi Nóra, Erdei Zsuzsa, Fehér Ádám, Gajdos Béla, Germán Tibor, Gyarmati-Szabó István, Hablicsek Márton, Hangya Miklós, Hofgárt Gergely, Horváth Balázs, Jesch Dávid, Kardos Péter, Kegyes Tamás, Kisfügedi Viktória, Kiss-Tóth Christian, Koczka Gergely, Kovács 721 Péter, Lang Péter, Mitcsenkov Attila, Nagy 219 András, Nagy 359 Gábor, Nyul Balázs, Paál Csaba, Patay Gergely, Pszota Zsolt, Rácz Béla András, Reiss Attila, Révai Balázs, Ruppert László, Siroki László, Soós 740 Károly, Szekeres Balázs, Tomsits András, Tóth 370 Ágnes, Tóth 498 Ferenc, Török Sándor Miklós és Török Zoltán Bálint megoldása. 4 pontos 17, 3 pontos 140, 2 pontos 94, 1 pontos 27, 0 pontos 17 dolgozat. Nem versenyszerű 7.

**C. 569.** *Az $y=x^2$ parabolához az $y=x$ egyenletű egyenes mely pontjából húzható két, egymásra merőleges érintő?*

**Megoldás.** Az $y=x^2$ egyenletű parabola tengelye az $y$ tengely, csúcsa pedig az origó. Az $y=x$ egyenes azon $P(x_0;x_0)$ pontját keressük, amelyből a parabolához két egymásra merőleges érintő húzható.

Mivel a parabolának nincsen tengely irányú érintője, a $P$-n átmenő érintőknek van iránytangense, egyenletük felírható

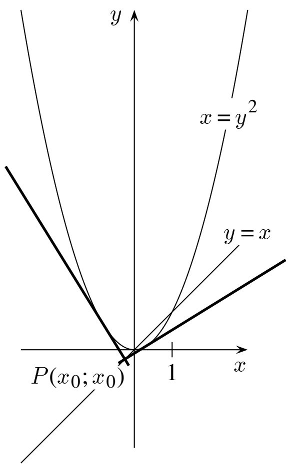
$$y-x_0=m(x-x_0)$$

alakban. Ha egy ilyen egyenes érinti a parabolát, akkor pontosan egy közös pontjuk van. A parabola és egyenes közös pontjának koordinátái kielégítik mindkét görbe egyenletét. A két görbének akkor van egyetlen közös pontja, ha az egyenleteikből adódó másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0, vagyis az

$$x^2-mx+(m-1)x_0=0 \qquad \text{egyenletben}$$

$$m^2-4x_0m+4x_0=0,$$

ahonnan a gyökök és együtthatók közötti összefüggésből $m_1m_2=4x_0$.




Tudjuk továbbá, hogy az egymásra merőleges egyenesek iránytangenseinek szorzata $-1$, vagyis $4x_0=-1$, innen $x_0=-\frac{1}{4}$. A keresett pont tehát a $P\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{4}\right)$.

*Zalán Péter* (Budapesti Evangélikus Gimn., 11. o.t.)

*Megjegyzés. Besenyei Ádám* (Tatabánya, Árpád Gimn., 12. o.t.) megmutatta, hogy az $y=ax^2$ egyenletű parabola esetén azon pontok halmaza, amelyekből két egymásra merőleges érintő húzható a parabolához, egy egyenes, a parabola vezéregyenese. Ennek egyenlete $y=-\frac{1}{4a}$. Ebből nyomban adódik feladatunk megoldása.

160 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 120, 4 pontot 13, 3 pontot 5, 2 pontot 6, 1 pontot 5, 0 pontot 9 beküldő. Nem versenyszerű 2 dolgozat.

**C. 570.** *Határozzuk meg azokat a háromjegyű prímszámokat, amelyekben a számjegyek szorzata* 189.

**Megoldás.** Bontsuk a 189-et prímtényezőire és írjuk fel a pozitív osztóit: $189 = 3^3 \cdot 7$, az osztók: 1, 3, 7, 9, 21, 27, 63 és 189.

Az osztók közül csak az egyjegyűek, azaz 1, 3, 7, 9 lehetnek számjegyek. Ezeket kell úgy megválasztani, hogy szorzatuk 189 legyen.

Az 1-es nem szerepelhet, mert akkor a másik két jegy szorzata legfeljebb $9 \cdot 9 = 81$ lenne. A 9-es és 7-es pedig legfeljebb egyszer szerepelhet, mert sem a $9 \cdot 9 = 81$, sem a $7 \cdot 7 = 49$ nem osztója 189-nek.

A háromjegyű szám jegyei tehát: 3, 7 és 9.

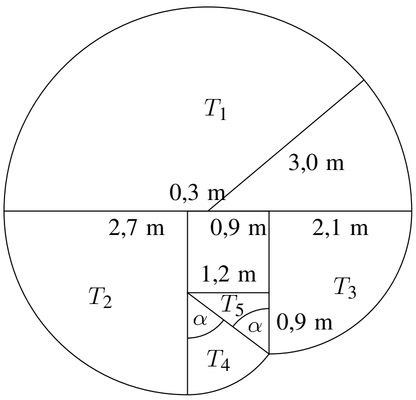
A lehetséges háromjegyű számok: 379, 397, 739, 793, 937, 973.

Közülük 379, 397, 739, 937 prím, ezek tehát a feladat megoldásai.

*Paulin Dániel* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.)

624 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 557, 4 pontot 8, 3 pontot 9, 2 pontot 29, 1 pontos 8, 0 pontot 10 versenyző. Nem versenyszerű 3 dolgozat.

**C. 571.** *Egy kertben álló négyzet alapú kutyaház oldala* 1,2 m *hosszú. Az egyik sarkától* 30 cm*-re, a bejáratával azonos oldalon a kutyaház külső falához kötötték ki a kutyát egy* 3 *méteres lánccal. Mekkora területen mozoghat a kutya?*




**Megoldás.** Bármilyen irányban is indul el a kutya, addig tud haladni, amíg a lánca bele nem ütközik a kutyaház valamelyik oldalába.

A bejárható területet öt tartományra bonthatjuk. $T_1$ egy 3 m sugarú félkör, $T_2$ és $T_3$ egy-egy 2,7 m, illetve 2,1 m sugarú negyedkör. $T_5$ egy derékszögű háromszög, végül $T_4$ egy körcikk. A körcikk sugara 1,5 m, középponti szöge, $\alpha$ pedig egyenlő a derékszögű háromszög egyik hegyesszögével, amelyre

$$\cos\alpha = \frac{0{,}9}{1{,}5} = 0{,}6, \quad \text{ahonnan} \quad \alpha \approx 53{,}11^\circ.$$

Az öt terület összege:

$$\frac{3^2\pi}{2} + \frac{2{,}7^2\pi}{4} + \frac{2{,}1^2\pi}{4} + \frac{1{,}5^2 \cdot 53{,}11^\circ \cdot \pi}{360^\circ} + \frac{0{,}9 \cdot 1{,}2}{2} \approx 24{,}9091\ \text{m}^2.$$

Ha a kutyaház területét is hozzászámítjuk, akkor a bejárható terület 26,3491 m$^2$.

489 dolgozat érkezett. 5 pontos 333, 4 pontos 60, 3 pontos 46, 2 pontos 27, 1 pontos 7, 0 pontos 12 dolgozat. Nem versenyszerű 4.

## Matematika feladatok megoldása

**B. 3317.** *Oldjuk meg a következő egyenletet:*

$$\sqrt{x+1999\sqrt{x+1999\sqrt{x+1999\sqrt{x+1999\sqrt{2000x}}}}}=x.$$

(*4 pont*) Javasolta: *Hans Zoltán,* Nagykanizsa

**Megoldás.** Könnyen látható, hogy 0 és 2000 megoldásai az egyenletnek. Belátjuk, hogy más megoldás nincs.

Ha ugyanis $0<x<2000$ volna, akkor $\sqrt{2000x}>\sqrt{x^2}=x$ miatt

$$\sqrt{x+1999\sqrt{2000x}}>\sqrt{x+1999x}=\sqrt{2000x}>x,$$

és így tovább, az egyenlet bal oldalán bármelyik gyökjel alatt szereplő mennyiség nagyobb, mint $x$. Így az egyenlet bal oldala is nagyobb, mint $x$, a jobb oldala pedig egyenlő $x$-szel, ami nem lehetséges.

Ha $x>2000$, akkor $\sqrt{2000x}<\sqrt{x^2}=x$ után hasonló meggondolással kapjuk, hogy az egyenlet bal oldala kisebb, mint $x$, tehát ekkor sem kapunk megoldást.

*Antal Ágnes* (Budapest, Móricz Zs. Gimn., 11. o.t.)

*Megjegyzés. Taraza Busra* (Budapest, ELTE Apáczai Cs. J. Gyak. Gimn., 12. o.t.) lényegében az előző gondolatmenetet követve azt látta be általánosabban, hogy a

$$\sqrt{\underbrace{x+n\sqrt{\ldots+n\sqrt{x+n\sqrt{(n+1)x}}}}_{k\ \text{tag}}}=x$$

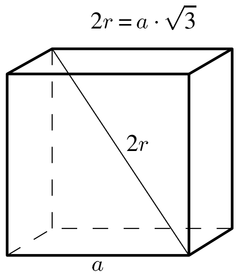
egyenletnek (ahol $n$ és $k$ pozitív egész számok) pontosan két megoldása van, $x=0$ és $x=n+1$.

267 dolgozat érkezett, 4 pontos 121, 3 pontos 41, 2 pontos 38, 1 pontos 39, 0 pontos 28.

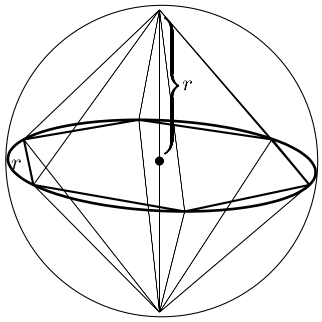
**B. 3319.** *Ismert, hogy egy adott körbe írható négy csúcsú síkidomok közül a négyzet területe a legnagyobb. Igaz-e, hogy egy adott gömbbe írható nyolc csúcsú testek közül a beírható kocka térfogata a legnagyobb?*

(*4 pont*)

**Megoldás.** Nem igaz. Az $r$ sugarú gömbbe írható kocka testátlója $2r$, ezért élének hossza $\frac{2r}{\sqrt3}$, tehát térfogata $\frac{8}{3\sqrt3}\cdot r^3$. A gömbbe írható nyolc csúcsú testek közt sok olyan van, amelynek térfogata ennél nagyobb. Az alábbiakban erre mutatunk egy példát.




*1. ábra*




*2. ábra*

Vegyük a gömb egyik főkörét, és írjunk bele egy szabályos hatszöget. A hatszög csúcsai adják a test hat csúcsát, a másik két csúcs pedig legyen a gömbnek az a két pontja, amely a hatszög síkjától a legmesszebb van. Ez a két csúcs a gömb középpontján átmenő, a hatszög síkjára merőleges egyenesnek és a gömbnek a két metszéspontja. Az így keletkezett test két darab hatszög alapú egyenes gúlából van összerakva. A gúlák alaphatszögének területe $6 \cdot r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$, magasságuk $r$, tehát térfogatuk $\frac{1}{3} \cdot 6r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} r = \frac{\sqrt{3}}{2} r^3$. Ezért a két test térfogata $\sqrt{3} r^3$, ami valóban nagyobb a kocka térfogatánál, mivel $\sqrt{3} > \frac{8}{3\sqrt{3}}$.

*Kiss Gergely* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

117 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 88, 3 pontot 3, 2 pontot 1, 1 pontot 1, 0 pontot 24 beküldő.

**B. 3324.** *Hányféleképpen írható fel* $1999^{1999}$ *egymás után következő természetes számok összegeként?*

(*4 pont*) Javasolta: *Káspári Tamás,* Paks

**Megoldás.** Ha $1999^{1999}$ felírható egymás után következő természetes számok összegeként, akkor valamely $a \geq 0$, $n \geq 1$ egész számok esetén

$$1999^{1999} = (a+1) + (a+2) + \ldots + (a+n) = n \cdot a + (1 + 2 + \ldots + n) = \\ = n \cdot a + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+2a+1)}{2},$$

azaz $2 \cdot 1999^{1999} = n(n+2a+1)$.

Mivel 1999 prímszám, így $2 \cdot 1999^{1999}$ minden osztója vagy $1999^k$ ($k = 0, \ldots, 1999$), vagy $2 \cdot 1999^k$ ($k = 0, \ldots, 1999$) alakú.

Ha $n = 1999^k$, akkor $n + 2a + 1 > n$ miatt $0 \leq k \leq 999$ lehet, ekkor $n + 2a + 1 =$

$= 2 \cdot 1999^{1999-k}$, innen $a = 1999^{1999-k} - \dfrac{1999^k + 1}{2}$ valóban pozitív és egész is, hiszen $1999^k$ páratlan. Ebben az esetben tehát 1000-féle $n$ és hozzá tartozó $a$ megoldás lesz.

Ha $n = 2 \cdot 1999^k$, akkor újra $n + 2a + 1 > n$ miatt csak $0 \le k \le 999$ lehet, ekkor $n + 2a + 1 = 1999^{1999-k}$, innen $a = \dfrac{1999^{1999-k} - 1}{2} - 1999^k$ ismét pozitív egész, mivel $1999^{1999-k}$ páratlan. Így most is 1000 megoldást kapunk.

Nyilvánvaló, hogy a kapott 2000-féle felírás különböző, más felírás pedig nem lehetséges.

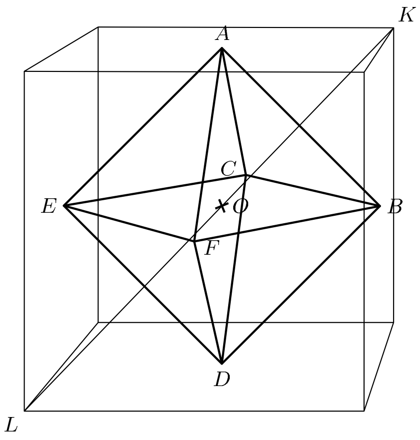
*Koch Dénes* (Linz, Akad. Gymn., 11. o.t.)

255 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 83, 3 pontot 80, 2 pontot 33, 0 pontot 55 beküldő. Nem versenyszerű 4 dolgozat.

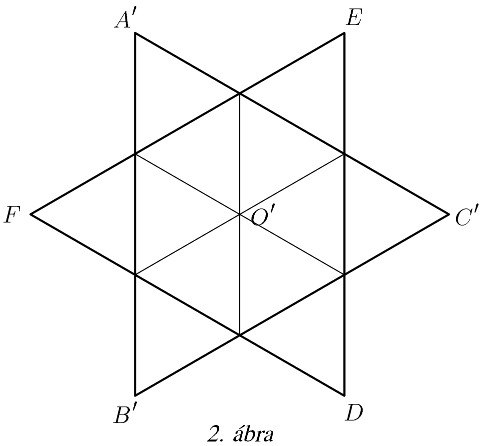
**B. 3326.** *Egy szabályos oktaéder egyik lapját merőlegesen vetítjük a szemközti lap síkjára. A szemközti lap területének hányadrészét fedi le a vetület?*

(*4 pont*) Javasolta: *Juhász Máté 8. o.t.,* Budapest

**Megoldás.** Tekintsük azt a kockát, amelynek lapközéppontjai a szabályos oktaédert alkotják. Legyen az oktaéder egyik lapja az $ABC$, a vele szemközti lap pedig a $DEF$ szabályos háromszög. Ekkor a kockának az $A$, $B$, $C$ pontokat tartalmazó lapjai a $K$, a $D$, $E$, $F$ pontokat tartalmazó lapjai pedig az ezzel szemközti $L$ csúcsban találkoznak (*1. ábra*).




*1. ábra*




*2. ábra*

A $KL$ egyenes körül 120°-kal forgatva a kocka, s így az oktaéder is, önmagába megy át. Ezért az $ABC$ és a $DEF$ sík is merőleges a $KL$ egyenesre. Az $ABC$ és a $DEF$ lapok egymásnak a kocka $O$ középpontjára vonatkozó tükörképei. A $KL$ egyenes átmegy $O$-n is, és az $ABC$ és $DEF$ szabályos háromszögek középpontjain is. Ha tehát az $ABC$ háromszöget és $O$-t merőlegesen – azaz $KL$-lel párhuzamosan – vetítjük a

$DEF$ síkra, akkor $O$-nak az $O'$ képe a $DEF$ háromszög középpontja lesz, $A$, $B$ és $C$ képei pedig rendre $D$, $E$ és $F$ $O'$-re vonatkozó tükörképei (*2. ábra*).

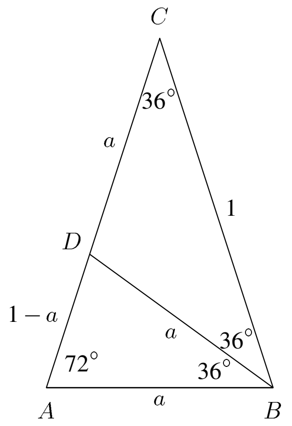
Könnyen látható, hogy a két háromszög közös része egy szabályos hatszög. A *2. ábrán* látható 12 kis háromszög nyilván egybevágó, ezért a vetület a lap területének $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$ részét fedi le.

*Máthé András* (Budapest, ELTE Apáczai Cs. J. Gyak. Gimn., 12. o.t.)
dolgozata alapján

188 dolgozat érkezett. 4 pontos 121, 3 pontos 20, 2 pontos 11, 1 pontos 12, 0 pontos 24.

**B. 3327.** *Adjunk meg egy egész együtthatós polinomot, amelynek a* $\cos 18^\circ$ *zérushelye!*
(*4 pont*)

**I. megoldás.** Számítsuk ki $\cos 18^\circ$ értékét: tekintsük az $ABC$ egyenlő szárú háromszöget, amelyben a szárak hossza 1, közbezárt szögük $36^\circ$.




A $B$-ből húzott szögfelező $AC$-t $D$-ben metszi. Ekkor az $ABC$ és $DAB$ háromszögek hasonlóak, így $CB:DB=AB:DA$, azaz $\frac{1}{a}=\frac{a}{1-a}$.

Innen $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. A $C$-ből induló magasság felezi a $36^\circ$-os szöget és az $AB$ szakaszt is, így $\sin 18^\circ=\frac{a}{2}=$ $=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\cos 18^\circ=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

Legyen $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}=x$, ahol $x>0$. Ekkor $16x^2=$ $=10+2\sqrt{5}$, vagyis $\sqrt{5}=8x^2-5$. Ebből négyzetre emeléssel kapható: $64x^4-80x^2+20=0$. Osszunk 4-gyel, így a feladat kérésének megfelel a $16x^4-20x^2+5$ polinom.

**II. megoldás.** Legyen $\cos 18^\circ=x$ $(0<x<1)$, ekkor $\sin 18^\circ=\sqrt{1-x^2}$.
Ezek segítségével:

$$\sin 36^\circ=2x\sqrt{1-x^2}, \qquad \cos 36^\circ=x^2-(1-x^2)=2x^2-1.$$

$\sin 72^\circ=4x\sqrt{1-x^2}(2x^2-1)$. Mivel $\cos 18^\circ=\sin 72^\circ$, azért $4x\sqrt{1-x^2}(2x^2-1)=x$. Az $x$-szel oszthatunk, hiszen nem 0. Vagyis a feladat kérésének megfelel a $16(1-x^2)(2x^2-1)^2-1=-64x^6+128x^4-80x^2+15$ polinom.

*Dénes Attila* (Békéscsaba, Rózsa F. Gimn., 12. o.t.)

*Megjegyzések.* 1. A II. megoldásban kapott $-64x^6+128x^4-80x^2+15$ polinom szorzat alakban így írható: $(3-4x^2)(16x^4-20x^2+5)$. A második tényező azonos az I. megoldásban megadott polinommal.

2. *Nyul Balázs* (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 9. o.t.) abból indult ki, hogy $5\cdot 18^\circ=90^\circ$, így a $\cos 5\alpha=0$ egyenletet kellene felírni $\cos\alpha$ hatványai segítségével, ahol most $\alpha=18^\circ$.

$\cos 5\alpha$ a szögfüggvények addíciós tételeiből némi számolással kifejezhető:

$$\cos 5\alpha=64\cos^5\alpha-80\cos^3\alpha+20\cos\alpha,$$

így $\cos 18^\circ$ gyöke a $64x^5-80x^3+20x$ polinomnak. Ez mellesleg az I. megoldásban kapott polinom $4x$-szerese.

Tetszőleges $n$ egész számhoz létezik $T_n$ egész együtthatós polinom, amelyre $T_n(\cos\alpha)=\cos n\alpha$. A $T_n$ polinomot az $n$-edik *Csebisev-polinomnak* hívják.

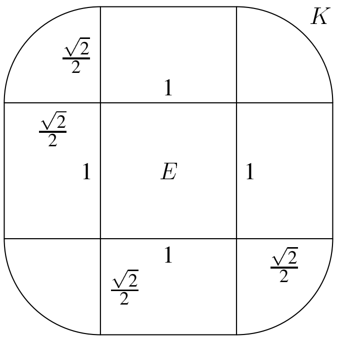
204 dolgozat érkezett. 4 pontos 162, 3 pontos 14, 2 pontos 12, 0 pontos 16.

**B. 3330.** *Egy* 105 *egység oldalú négyzet belsejében* 1999 *egységnégyzetet helyeztünk el. Mutassuk meg, hogy elhelyezhető még egy egységnégyzet úgy, hogy ne legyen a többivel közös pontja.*
(*5 pont*)

**Megoldás.** Tekintsük azokat a pontokat, amelyek az $E$ egységnégyzettől legfeljebb $\frac{\sqrt2}{2}$ távolságra vannak. Ezek a pontok egy olyan 4 téglalapból, 4 negyedkörből és 1 négyzetből álló $K$ alakzatot alkotnak, amelynek a területe $4\cdot 1\cdot\frac{\sqrt2}{2}+4\cdot\frac14\cdot\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2\cdot\pi+1=1+2\sqrt2+\frac{\pi}{2}$ (*1. ábra*). Ha egy egységnégyzet középpontja $K$-n kívül helyezkedik el, akkor a négyzetnek és $E$-nek biztosan nincs közös pontja.

Ha a feladatban szereplő 1999 egységnégyzethez tartozó $K$-nak megfelelő alakzatok nem fedik le azt a 104 egység oldalú négyzetet, amelyet úgy kapunk, hogy a nagy négyzet minden oldaláról levágunk egy 0,5 egység széles csíkot, akkor a lefedetlen területre helyezve egy, a nagy négyzet oldalaival párhuzamosan álló egységnégyzetet, annak nem lesz a többi egységnégyzettel közös pontja. Tudjuk, hogy $\pi<3{,}15$ és $\sqrt2<1{,}415$, ezért az 1999 darab $K$-val egybevágó idom összterülete kisebb, mint

$$1999\cdot\left(1+2\cdot 1{,}415+\frac{3{,}15}{2}\right)=10\ 804{,}595.$$

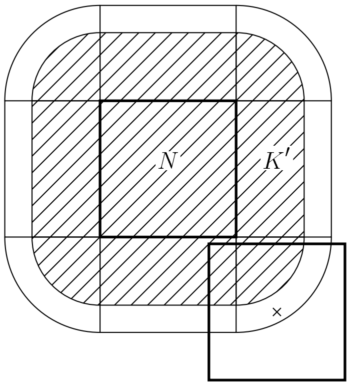


*1. ábra*

A 104 egység oldalú négyzet területe ennél nagyobb, mert $104^2=10\ 816$. Tehát mindenképpen marad lefedetlen terület, s így elhelyezhető a feltételeknek megfelelő 2000-edik egységnégyzet.

*Kerékfy Péter* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján

*Megjegyzés.* Azt is be lehet látni, hogy ha eredetileg 2336 egységnégyzetet helyeztünk el, akkor is lerakható legalább még egy, a feltételeknek megfelelő módon. Legyen ugyanis $K'$ azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek $E$-től legfeljebb 0,5 egység távolságra vannak (*2. ábra*). Ha a nagy négyzet minden oldaláról egy $\frac{\sqrt{2}}{2}$ egység széles csík levágásával kapott $(105-\sqrt{2})^2$ területű négyzetnek van olyan pontja, amit a lerakott egységnégyzethez tartozó $K'$-nek megfelelő alakzatok egyike sem, a $K$-nak megfelelő alakzatok közül pedig legfeljebb egy, az $N$ egységnégyzethez tartozó alakzat tartalmaz, akkor ebbe a pontba elhelyezhető egy $N$ oldalaival párhuzamos oldalú, a feltételeknek megfelelő egységnégyzet. A $K \setminus K'$ ponthalmaz területe




*2. ábra*

$$\left(1+2\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}\right)-\left(1+4\cdot 1\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\pi\right)=2\sqrt{2}-2+\frac{\pi}{4}.$$

Ha tehát a $K \setminus K'$ típusú ponthalmazokat legalább kétszeresen akarjuk lefedni, akkor a $(105-\sqrt{2})$ oldalú négyzet lefedéséhez szükséges egységnégyzetek $n$ számára teljesülnie kell az

$$n\cdot\left(1+2+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{n}{2}\cdot\left(2\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2\right)>(105-\sqrt{2})^2$$

egyenlőtlenségnek. Ebből $n>2336$ adódik, s éppen ezt akartuk megmutatni.

*Jankó András* (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., 9. o.t.) dolgozata alapján

125 dolgozat érkezett. 5 pontos 42, 4 pontos 1, 3 pontos 11, 2 pontos 8, 0 pontos 60. Nem versenyszerű 3.

**B. 3335.** *A $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ sokszögek úgy helyezkednek el a síkon, hogy csúcsaik nincsenek rajta a másik sokszög oldalegyenesein. Legfeljebb hány pontban metszik egymást az oldalak, ha $\mathcal{K}$ ötszög és* a) *$\mathcal{L}$ háromszög;* b) *$\mathcal{L}$ négyszög?*

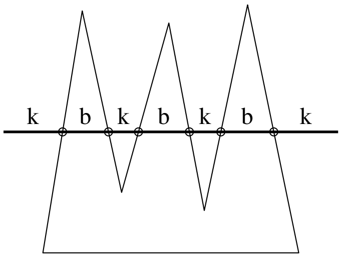
(*5 pont*)

**Megoldás.** Ha egy egyenes egy sokszög egyik csúcsán sem megy át, akkor a sokszög oldalait páros számú pontban metszi, mert a metszéspontok által elválasztott egyenesdarabok felváltva a sokszögön kívül, illetve belül haladnak, továbbá az első és az utolsó darab két félegyenes, amelyek végtelenek, tehát nem lehetnek a sokszögön belül (*1. ábra*).

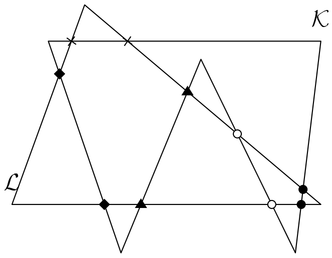
Az *a)* esetben tehát az ötszög minden oldala legfeljebb 2-2 háromszögoldalt metszhet, így a metszéspontok száma legfeljebb $5\cdot 2=10$ lehet. Ez a *2. ábra* tanúsága szerint lehetséges is.

A *b)* esetben a négyszög minden oldala legfeljebb 4-4 ötszögoldalt metszhet, tehát a metszéspontok maximális száma $4\cdot 4=16$. Ez a *3. ábrán* látható módon meg is valósítható.

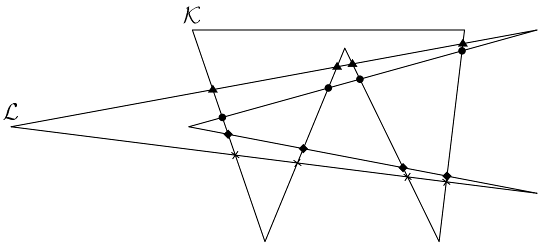
*Papp Dávid* (Budapest, Szent István Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján




*1. ábra*




*2. ábra*




*3. ábra*

*Megjegyzés.* Ajánljuk, olvassák el az **A. 229.** feladat megoldását (KöMaL 2000/6., 353. o.).

258 dolgozat érkezett. 5 pontos 109, 4 pontos 52, 3 pontos 24, 2 pontos 37, 1 pontos 16, 0 pontos 19. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

**B. 3337.** *Adott egy parabola fókusza és két pontja. Szerkesszük meg a vezéregyenesét.*

(*3 pont*)

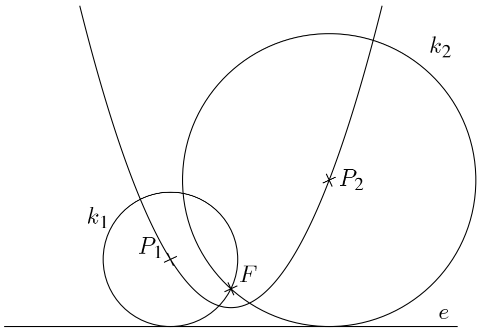
**Megoldás.** A parabola pontjai a fókusztól és a vezéregyenestől egyenlő távol vannak, ezért a vezéregyenes érinti azokat a köröket, amelyek középpontjai a parabola pontjai, és átmennek a fókuszon.

Ha az adott parabolapontokat $P_1$ és $P_2$, a fókuszt pedig $F$ jelöli, akkor az előzőek alapján a szerkesztendő vezéregyenes a $P_i$ középpontú, $P_iF$ sugarú $k_i$ $(i=1,\ 2)$ körök közös érintője. Mivel a parabola pontjai a vezéregyenesnek ugyanazon az oldalán helyezkednek el, azért a két kör közös érintői közül csak a külső érintők lehetnek vezéregyenesek. Ha az $e$ egyenes a $k_1$ és $k_2$ körökhöz az ismert módon szerkesztett közös külső érintő, akkor a $P_i$ pontok $e$-től és $F$-től egyenlő távol vannak, $e$ tehát egy megfelelő parabola vezéregyenese.

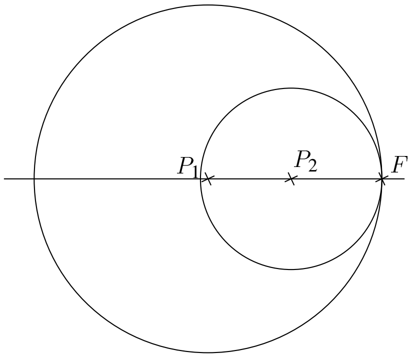
A megoldások száma megegyezik $k_1$ és $k_2$ közös külső érintőinek számával. Mivel mindkét kör átmegy $F$-en, azért ez a szám 0 vagy 2, és csak akkor 0, ha az egyik kör a *2. ábrán* látható módon belülről érinti a másikat, azaz ha az $F$, $P_1$ és $P_2$ pontok egy egyenesen vannak és $F$ nem a $P_1P_2$ szakasz belső pontja.

*Rácz Judit* (Szekszárd, Garay J. Gimn., 9. o.t.) dolgozata alapján

322 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 54, 2 pontot 215, 1 pontot 46, 0 pontot 6 beküldő. Nem versenyszerű 1 dolgozat.




*1. ábra*




*2. ábra*

**B. 3342.** *Határozzuk meg azokat a pozitív egész számokat, amelyekre $n^2 - 19n - 99$ négyzetszám.*

(*3 pont*) *Amerikai feladat*

**Megoldás.** Megoldandó az $n^2 - 19n - 99 = k^2$ egyenlet, ahol $k$ és $n$ pozitív egész számok. $n^2 - 19n - (99 + k^2) = 0$, ahonnan $n_{1,2} = \dfrac{19 \pm \sqrt{4k^2 + 757}}{2}$. Akkor lehet $n$ pozitív egész, ha $4k^2 + 757$ négyzetszám: $4k^2 + 757 = l^2$, ahol $l$ is pozitív egész.

$$757 = (l - 2k)(l + 2k).$$

Mivel a 757 prímszám, az osztói: 1, $-1$, 757, $-757$. A feltételek mellett $l - 2k < l + 2k$, így két lehetőség lenne: $l - 2k = -757$ és $l + 2k = -1$ (de ez nem lehetséges, hiszen $k$, $l$ pozitív egész), illetve $l - 2k = 1$ és $l + 2k = 757$.

Az egyenletrendszer megoldása $l = 379$, $k = 189$. Ekkor $n_1 = 199$, $n_2 = -180$. A feltételeknek az $n = 199$ tesz eleget és valóban: $199^2 - 19 \cdot 199 - 99 = 35\,721 = 189^2$.

*Árvai Eszter* (Szekszárd, Garay J. Gimn., 11. o.t.)

293 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 252, 2 pontot 5, 1 pontot 11, 0 pontot 20 beküldő. Nem versenyszerű 5 dolgozat.

**B. 3343.** *Az $ABC$ háromszög $AB$ oldalának felezőpontja $F$. Az $AFC$ háromszög súlypontja $S_1$, a $BFC$ háromszög súlypontja $S_2$. Az $AS_1$ egyenes a $BC$ oldalt a $P_1$ pontban, a $BS_2$ egyenes az $AC$ oldalt a $P_2$ pontban metszi. Igazoljuk, hogy az $S_1S_2P_1P_2$ négyszög paralelogramma.*

(*3 pont*)

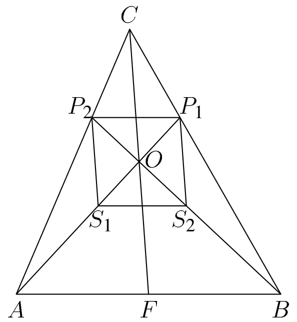
**I. megoldás.** Legyen a $CF$ szakasz felezőpontja $O$. Mivel $S_1$ és $S_2$ súlypontok, azért harmadolják a súlyvonalakat, vagyis az $OA_1$, illetve az $OB$ szakaszokat is. Ebből következik, hogy $S_1S_2$ párhuzamos $AB$-vel, és $S_1S_2=\frac{1}{3}AB$. Alkalmazzuk *Menelaosz tételét* (bizonyítását lásd pl. Geometriai feladatok gyűjteménye, I. kötet, 1260. feladat) az $AFC$ háromszögre és a $BP_2$ egyenesre:

$$\frac{CP_2}{P_2A}\cdot\frac{AB}{BF}\cdot\frac{FO}{OC}=-1.$$

$F$ az $AB$, $O$ pedig az $FC$ szakasz felezőpontja, ezért az előző összefüggésből $\frac{AB}{BF}=-2$ és $\frac{FO}{OC}=1$ miatt $\frac{CP_2}{P_2A}=\frac{1}{2}$ következik, vagyis $P_2$ az $AC$ szakasz $C$-hez közelebbi harmadolópontja. Ugyanígy kapjuk, hogy $P_1$ a $BC$ szakasz $C$-hez közelebbi harmadolópontja, ha Menelaosz tételét a $BFC$ háromszögre és az $AP_1$ egyenesre alkalmazzuk. Ez viszont azt jelenti, hogy az $AB$ szakaszt $C$-ből $\frac{1}{3}$ arányban kicsinyítve a $P_2P_1$ szakaszt kapjuk. Ezért $P_2P_1 \parallel AB \parallel S_1S_2$ és $P_2P_1=\frac{1}{3}AB=S_1S_2$. Tehát az $S_1S_2P_1P_2$ négyszög paralelogramma, mert két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő.

*Szilágyi Örs* (Miskolc, Földes F. Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján

**II. megoldás.** Legyen a $CF$ szakasz $O$ felezőpontjából $A$-ba mutató vektor $6\mathbf{a}$, $B$-be mutató vektor pedig $6\mathbf{b}$. Mivel $F$ az $AB$ felezőpontja, azért $\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=3\mathbf{a}+3\mathbf{b}$; $O$ pedig a $CF$ felezőpontja, ezért $\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OF}=-3\mathbf{a}-3\mathbf{b}$. Az $OA$, illetve $OB$ szakaszok súlyvonalak, amit a megfelelő súlypontok harmadolnak, ezért




$$\overrightarrow{OS_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=2\mathbf{a} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{OS_2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}=2\mathbf{b}.$$

A $CA$ szakasz $C$-hez közelebbi $H_2$ harmadolópontjába mutató vektor az ismert képlet szerint:

$$\overrightarrow{OH_2}=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA})=\frac{1}{3}(-6\mathbf{a}-6\mathbf{b}+6\mathbf{a})=-2\mathbf{b}.$$

Vagyis $\overrightarrow{OH_2}=-\overrightarrow{OS_2}$, ami azt jelenti, hogy $H_2$ rajta van az $OS_2$ egyenesen is, ezért megegyezik $OS_2$ és $AC$ metszéspontjával, vagyis $P_2$-vel. Tehát $\overrightarrow{OP_2}=-2\mathbf{b}$.

Ugyanígy kapjuk, hogy $\overrightarrow{OP_1}=-2\mathbf{a}$. Vagyis $\overrightarrow{OP_1}=-\overrightarrow{OS_1}$ és $\overrightarrow{OP_2}=-\overrightarrow{OS_2}$, tehát az $S_1S_2P_1P_2$ négyszögnek $O$ szimmetriaiközéppontja. Ezért a négyszög paralelogramma.

263 dolgozat érkezett. 3 pontos 220, 2 pontos 28, 1 pontos 9, 0 pontos 6.

**B. 3344.** *Tekintsük azokat a természetes számokat, amelyek osztóinak számát megkapjuk úgy, hogy a prímtényezős felbontásukban szereplő prímszámok szorzatából ki-*

*vonjuk a hatványkitevők szorzatát. Ilyen például a* 25 *és a* 600 *is. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok ilyen szám van.*

(*4 pont*)

**I. megoldás.** Tekintsünk egy páratlan prímszámot. Legyen ez a $2k+1$. Ekkor $(2k+1)^k$ a feltételnek megfelelő szám. Ennek ugyanis $k+1$ darab osztója van: 1, $2k+1$, $(2k+1)^2$, $\ldots$, $(2k+1)^k$. Prímtényezős felbontása $(2k+1)^k$, és ha az alapból kivonjuk a kitevőt, éppen $(k+1)$-et, az osztók számát kapjuk. Ez bármelyik $(2k+1)$ alakú prímszám $k$-adik hatványára igaz. Mivel végtelen sok prímszám van (ezt könnyen igazolhatjuk indirekt módon), és közülük csak egy páros, így végtelen sok páratlan prím is van. Ezért végtelen sok, a feladat feltételének eleget tevő természetes szám van.

*Jelitai Kálmán* (Budapest, Szent István Gimn., 9. o.t.)

**II. megoldás.** Mutatunk egy módszert, amellyel végtelen sok, a feladat feltételének eleget tevő számot készíthetünk. Válasszunk olyan $p_1$ és $p_2$ prímszámokat, amelyek 3-mal osztva 1, illetve 2 maradékot adnak, azaz $p_1 \equiv 3 \pmod 3$ és $p_2 \equiv -1 \pmod 3$ teljesül. Ismeretes, hogy végtelen sok ilyen $p_1$ és $p_2$ prímszám létezik. Következik ez például *Dirichlet* tételéből, hiszen ez annak csak speciális esete (Erdős Pál–Surányi János: Válogatott fejezetek a számelméletből, Polygon, Szeged, 1996., 67. o.). Tekintsük ezután a $k=\dfrac{p_1p_2-2}{3}$ számot, ez nyilván egész. Megmutatjuk, hogy a $p_1\cdot p_2^k$ szám eleget tesz a feladat feltételének. Ezek osztói: 1, $p_2$, $p_2^2$, $\ldots$, $p_2^k$, $p_1$, $p_1p_2$, $\ldots$, $p_1p_2^k$; ezek száma $2(k+1)$, vagyis $2\left(\dfrac{p_1p_2-2}{3}+1\right)$, ami pedig valóban egyenlő $p_1p_2-\dfrac{p_1p_2-2}{3}$-mal.

A feladat állítását ezzel beláttuk.

*Baharev Ali* (Vác, Boronkay Gy. Gimn., 12. o.t.)

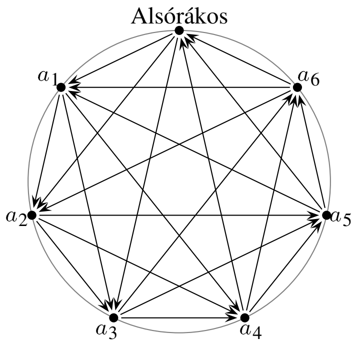
*Megjegyzés.* A feladatnak nemcsak a közölt „egyszerű alakú” $p^k$ vagy $p_1p_2^k$ megoldásai vannak, mint azt a kitűzésben példaként szereplő 600 is mutatja!

205 dolgozat érkezett. 4 pontos 196, 3 pontos 4, 2 pontos 2, 1 pontos 1, 0 pontos 2 dolgozat.

**B. 3345.** *Egy egyfordulós, körmérkőzéses focibajnokságon* 9 *csapat indult. Az Alsórákosi STC csapata* 5 *győzelmet aratott és* 3 *vereséget szenvedett. Lehetséges-e, hogy ezek után a csapat csak* 7. *lett? (A győzelemért* 3*, a döntetlenért* 1-1 *pont jár, azonos pontszám esetén a sorrendet a gólkülönbség dönti el.)*

(*4 pont*)

**Megoldás.** Előfordulhat, hogy a csapat csak 7. lett. Az Alsórákosi SC a bajnokságban $5\cdot 3=15$ pontot szerzett. Ha ezzel csak 7. lett, akkor az 1–6. helyezett csapatok mindegyike legalább 15 pontot szerzett. A 8. és 9. helyezett csapatok egymás elleni meccsén kívül a bajnokságban $\binom{9}{2}-1=35$ meccset játszottak, amelyek után legfeljebb $35\cdot 3=105$ pontot szereztek a csapatok. Mivel $105=7\cdot 15$, azért az 1–7. helyezett csapatok mindegyikének 15 pontot kellett szereznie. Megmutatjuk, hogy ez lehetséges.




Az első 7 csapat mindegyike győzze le a 8. és a 9. helyezettet, mégpedig az $i$-edik ($i=1$, 2, $\dots$, 7) mindkettőt $(8-i):0$ arányban. Az első 7 csapat egymás elleni meccsein az eredmény mindig $1:0$ legyen, mégpedig úgy, hogy minden csapat háromszor nyerjen és háromszor veszítsen. Ez például elérhető a következő módon: a 7 csapatot jelképező pontokat helyezzük el egy kör kerületén. Minden csapat győzze le a kör kerületén az óramutató járása szerint őt megelőző három csapatot (a győztestől a vesztes felé nyíl mutat az ábrán). Így mind a 7 csapatnak 15 pontja lesz, s az Alsórákosi STC a 7. helyen végez, mert gólkülönbsége $5:3$, ami a 7 csapat közül a legrosszabb.

*Balka Richárd* (Sárvár, Tinódi S. Gimn., 11. o.t.) és
*Simon Győző* (Győr, Révai M. Gimn., 11. o.t.) dolgozatai alapján

288 dolgozat érkezett. 4 pontos 203, 3 pontos 22, 2 pontos 29, 1 pontos 13, 0 pontos 16. Nem versenyszerű 5.

**B. 3348.** *Határozzuk meg az* $\dfrac{a+1}{b}=c\cdot\dfrac{a}{b+1}$ *egyenlet egész megoldásait.*

(*4 pont*) Javasolta: *Fried Ervin,* Budapest

**Megoldás.** Nyilván $b$ nem lehet 0 és $-1$; beszorozva $b(b+1)$-gyel

$$(a+1)(b+1)=cab. \tag{1}$$

Ha $a=0$, akkor (1)-ből $b=-1$ következok, ezt pedig kizártuk; így $a\neq 0$. Ha $a=-1$, akkor $0=cab=-cb$ miatt $c=0$, azaz $a=-1$, $c=0$ tetszőleges (0-tól és $-1$-től különböző) $b$-vel megoldás. A továbbiakban feltesszük, hogy ($b$-hez hasonlóan) $a\notin\{-1;0\}$.

Az (1) jobb oldala osztható $a$-val, így $a\mid(a+1)(b+1)$. Mivel $a$ és $a+1$ relatív prímek, azért $a\mid b+1$ és hasonlóan $b\mid a+1$.

I. Ha $a$, $b>-1$, akkor $a$ és $b$ pozitív, így az iménti oszthatóságokból $a\le b+1$ és $b\le a+1$ következik. Ekkor $a\le b+1\le a+2$, ezért $b$ csak $a-1$, $a$ vagy $a+1$ lehet.

Ha $b=a-1$, akkor $b\mid a+1$ miatt $\dfrac{a+1}{a-1}\ge 2$, azaz $a\le 3$; ebben az esetben a következő megoldásokat kapjuk: $a=2$, $b=1$, $c=3$ és $a=3$, $b=2$, $c=2$. Ha $b=a$, akkor hasonlóan $\dfrac{a+1}{a}\ge 2$ miatt $a\le 1$, ebből az $a=b=1$, $c=4$ megoldást kapjuk. Ha pedig $b=a+1$, akkor a $b=a-1$ esetben kapott megoldásokhoz jutunk $a$ és $b$ szerepét felcserélve: $a=1$, $b=2$, $c=3$ és $a=2$, $b=3$, $c=2$.

II. Ha $a<-1$ és $b>-1$, akkor $b>0$, így $a\mid b+1$ szerint $-a\le b+1$ és $b\mid a+1$ miatt $b\le -a-1$; ezért $-a\le b+1\le -a-1+1=-a$, azaz $b=-a-1$. Az egyenletbe visszahelyettesítve ekkor az

$$a=t, \qquad b=-t-1, \qquad c=1 \qquad (t<-1)$$

megoldásokat kapjuk. Hasonlóan, az $a>-1>b$ esetben az

$$a=t, \qquad b=-t-1, \qquad c=1 \qquad (t>0)$$

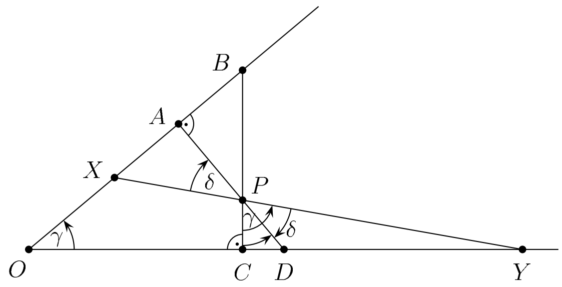
megoldásokhoz jutunk.

Megmutatjuk, hogy az eddigieken kívül nincs több megoldás. A még hátralévő $a$, $b<-1$ esetben ugyanis $a\,|\,b+1$ miatt $a\ge b+1$, és $b\,|\,a+1$ miatt $b\ge a+1$, tehát $a\ge$ $\ge b+1\ge a+2$, ami lehetetlen.

*Siroki László* (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 10. o.t.)
*Venter György* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

237 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 45, 3 pontot 34, 2 pontot 45, 1 pontot 76, 0 pontot 35 versenyző. Nem versenyszerű 2 dolgozat.

**B. 3354.** *Adott a síkon két metsző egyenes és egy rajtuk kívül elhelyezkedő $P$ pont. Szerkesszük meg a két egyenesen azt az $X$, illetve $Y$ pontot, amelyre az $XY$ szakasz átmegy $P$-n és $PX\cdot PY$ minimális.*
(*5 pont*)



*1. ábra*

**Megoldás.** A két egyenes metszéspontját jelöljük $O$-val. Húzzunk $P$-n keresztül az egyenesekre merőlegeseket, legyenek ezek $AD$ és $BC$ az *1. ábra* szerint. Irányított szögekkel számolunk.

$$XPA\sphericalangle+CPY\sphericalangle=$$
$$=YPD\sphericalangle+CPY\sphericalangle=CPD\sphericalangle,$$

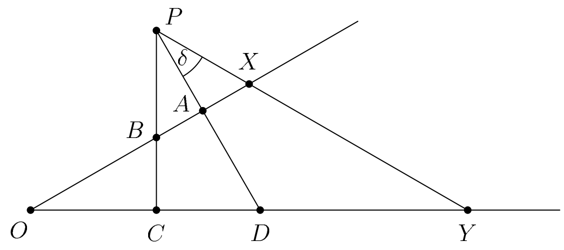
ami az $X$, $Y$-tól független állandó, jelöljük az értékét $\gamma$-val. (Nyilván $COA\sphericalangle=CPD\sphericalangle=\gamma$, mivel merőleges szárú szögek.)

Jelöljük az $XPA$ szöget $\delta$-val, ekkor tehát $CPY\sphericalangle=\gamma-\delta$, és az $XAP$, $PCY$ derékszögű háromszögekből

$$PX=\frac{AP}{\cos\delta}, \qquad PY=\frac{CP}{\cos(\gamma-\delta)}.$$

Így $PX\cdot PY=\dfrac{AP\cdot CP}{\cos\delta\cdot\cos(\gamma-\delta)}$ pontosan akkor minimális, ha $\cos\delta\cdot\cos(\gamma-\delta)$ maximális. Mivel $\cos\delta\cdot\cos(\gamma-\delta)=\dfrac{1}{2}\,(\cos\gamma+\cos(2\delta-\gamma))$, azért

$$\cos\delta\cdot\cos(\gamma-\delta)\le\frac{1}{2}(\cos\gamma+1)$$




*2. ábra*

és egyenlőség lehetséges, ha $\delta = \frac{\gamma}{2}$. A szerkesztendő pontokat tehát a $CPD$ szög belső szögfelezője metszi ki az $O$ csúcsszög száraiból. A szerkesztést ezzel egy szög felezésére vezettük vissza. Hasonlóan járhatunk el akkor is, ha $P$ az $X$, $Y$ által meghatározott szögtartomány külső pontja (*2. ábra*), illetve ha az $XOY$ szög tompaszög.

*Pach Péter Pál* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.)
*Sipos Ádám* (Miskolc, Földes F. Gimn., 12. o.t.) és
*Soproni Péter* (Budapest, Szent István Gimn., 10. o.t.) dolgozatai alapján

109 dolgozat érkezett. 5 pontos Ambrus Gergely, Béky Bence, Csernenszky András, Csikvári Péter, Kunszenti-Kovács Dávid, Pach Péter Pál, Sipos Ádám, Soproni Péter és Zavarkó Gábor megoldása. 4 pontos 84, 3 pontos 7, 2 pontos 2, 1 pontos 3, 0 pontos 4 dolgozat.

**B. 3357.** *Van-e olyan négyzetszám, amelynek ugyanannyi* $3k+1$ *alakú pozitív osztója van, mint* $3k+2$ *alakú?*
(*4 pont*)

**Megoldás.** A feladat kérdésére a válasz nemleges. Először megmutatjuk, hogy egy négyzetszám (pozitív) osztóinak a száma mindig páratlan. Ehhez az osztókat párba állítjuk: ha $d \mid t^2$, akkor $d$ osztópárja legyen $e = \frac{t^2}{d}$; nyilván $e$ párja a $d$. Az egy párba tartozó két osztó akkor és csak akkor egyenlő, ha $e = d$, azaz $t^2 = d^2$, vagyis $d = t$. Tehát az osztók párba állításánál egyetlen osztónak, a szám négyzetgyökének nem jut (tőle különböző) pár, így az osztók száma valóban páratlan.

Legyen ezután $t = 3^\ell \cdot m$, ahol $m$ nem osztható 3-mal; ekkor $t^2$-nek a $(3k+1)$ alakú és a $(3k+2)$ alakú osztói együttesen éppen az $m^2$ osztóit adják. Ezek száma páratlan lévén, a $(3k+1)$ és a $(3k+2)$ alakú osztók száma szükségképpen különböző.

*Megjegyzések.* 1. Két $(3k+1)$ alakú és két $(3k+2)$ alakú szám szorzata is $(3k+1)$ alakú, míg egy $(3k+1)$ és egy $(3k+2)$ alakú számot összeszorozva $(3k+2)$ alakú számhoz jutunk. Így (a közölt megoldás jelöléseit használva) ha $m$ prímtényezős felbontása $m = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{a_r}$, akkor $m^2 = p_1^{2a_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{2a_r}$ osztói azok a $d = p_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{b_r}$ alakú számok, amelyekre $0 \le b_i \le 2a_i$ teljesül minden $i = 1, 2, \ldots, r$-re; a $d$ pontosan akkor $(3k+1)$ alakú, ha a $(3k+2)$ alakú $p_j$ prímek $b_j$ kitevőinek összege páros.

Legyen $f$ az $m^2$-nek tetszőleges $(3k+2)$ alakú osztója, és jelölje $p_j$ azt a $(3k+2)$ alakú prímet, amelyre $b_j$ páratlan és $j$ minimális. Ekkor ($b_j < 2a_j$ miatt) $p_j f \mid m^2$, és $p_j f$ nyilván $(3k+1)$ alakú. Ezzel minden $(3k+2)$ alakú osztóhoz hozzárendeltünk egy $(3k+1)$ alakú osztót, mégpedig különböző osztókhoz különbözőket. Az is világos, hogy $m^2$-nek létezik olyan $(3k+1)$ alakú osztója, amely nem áll elő ezen a módon, pl. az 1 ilyen. Ezzel azt is megmutattuk, hogy $(3k+1)$ alakú osztó több van, mint $(3k+2)$ alakú.

2. A szóbanforgó osztók számának különbségét ki is számolhatjuk az $m^2$ prímtényezős felbontásából: jelölje (az egyszerűség kedvéért) $p_1, p_2, \ldots, p_c$ az $m^2$ összes $(3k+2)$ alakú prímosztóját. Tetszőleges $n$ természetes számra jelölje rendre $S_1(n)$ és $S_2(n)$ az $n$ $(3k+1)$, illetve $(3k+2)$ alakú osztóinak a számát, legyen továbbá $S(n)=S_1(n)-S_2(n)$. Ha $m^2=a^2b^2$, ahol $a^2=\prod_{j=1}^{c} p_i^{2a_i}$, $b^2=\prod_{j=c+1}^{r} p_j^{2a_j}$, akkor $S_i(m^2)=S_i(a^2)D(b^2)$, ahol $D$ a megfelelő szám összes osztóinak számát jelöli. Legyen $a^2=x^2y^2$, $(x,y)=1$, ekkor $S(a^2)=S_1(a^2)-S_2(a^2)=(S_1(x^2)S_1(y^2))+$ $+S_2(x^2)S_2(y^2))-(S_1(x^2)S_2(y^2)+S_2(x^2)S_1(y^2))=S(x^2)S(y^2)$.

Ennek ismételt alkalmazásaival kapjuk, hogy

$$S(a^2)=\prod_{j=1}^{c} S\left(p_i^{2a_i}\right).$$

Végül, mivel $p_j^{2a_j}$ $(3k+1)$ alakú osztói $1, p_j^2, \ldots, p_j^{2a_j}$, azért $S(p_j^{2a_j})=(a_j+1)-a_j=1$, tehát $S(a^2)=1$, így

$$S(m^2)=S_1(m^2)-S_2(m^2)=S(a^2)D(b^2)=D(b^2)=\prod_{j=c+1}^{r}(2a_j+1)>0.$$

*Dénes Attila* (Békéscsaba, Rózsa F. Gimn., 12. o.t.)

158 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 38, 2 pontot 6, 1 pontot 4, 0 pontot 17 versenyző. Nem versesnyszerű 1 dolgozat.

**B. 3359.** *Bizonyítsuk be, hogy ha az $x^3-3x-1=0$ egyenlet valós $x_1$, $x_2$, $x_3$ gyökeire $x_1<x_2<x_3$, akkor $x_3^2-x_2^2=x_3-x_1$.*
(*5 pont*) Javasolta: *Mihalovics Sándor,* Esztergom

**I. megoldás.** Megmutatjuk, hogy ha $c$ gyöke az $f(x)=x^3-3x-1=0$ egyenletnek, akkor $-\frac{c+1}{c}$ és $-\frac{1}{c+1}$ is gyökök. Valóban, a $c^3-3c-1=0$ összefüggés felhasználásával

$$\left(-\frac{c+1}{c}\right)^3-3\left(-\frac{c+1}{c}\right)-1=-\frac{1}{c^3}\left((c+1)^3-3c^2(c+1)+c^3\right)=$$
$$=-\frac{1}{c^3}(-c^3+3c+1)=\frac{1}{c^3}(c^3-3c-1)=0,$$

és

$$\left(-\frac{1}{c+1}\right)^3-3\left(-\frac{1}{c+1}\right)-1=-\frac{1}{(c+1)^3}\left(1-3(c+1)^2+(c+1)^3\right)=$$

$$=-\frac{1}{(c+1)^3}\left(c^3-3c-1\right)=0.$$

A $-\frac{c+1}{c}$ és $-\frac{1}{c+1}$ gyökök különbözők, mivel ellenkező esetben $(c+1)^2=c$, azaz $c^2+c+1=0$; ilyen $c$ valós szám azonban nincsen.

Mivel $f(1)=-3<0<1=f(2)$, azért az egyenletnek létezik olyan $c$ gyöke, amelyre $1<c<2$. Ekkor a $-\frac{c+1}{c}$, $-\frac{1}{c+1}$ gyökök negatívak, így $x_3=c$. Másrészt

$$-\frac{1}{c+1}=-\frac{c+1}{(c+1)^2}=-\frac{c+1}{c+(c^2+c+1)}>-\frac{c+1}{c},$$

tehát $x_1=-\frac{c+1}{c}$ és $x_2=-\frac{1}{c+1}$. Ezért

$$x_3^2-x_2^2-x_3+x_1=c^2-\frac{1}{(c+1)^2}-c-\frac{c+1}{c}=$$

$$=\frac{c^3(c^2+2c+1)-c-c^2(c^2+2c+1)-(c+1)^3}{c(c+1)^2}=\frac{c^5+c^4-2c^3-4c^2-4c-1}{c(c+1)^2}=$$

$$=\frac{(c^2+c+1)(c^3-3c-1)}{c(c+1)^2}=0.$$

*Nagy Tamás* (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., 11. o.t.)

**II. megoldás.** A Viète-formulákat használjuk: $x^3-3x-1=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ szerint

$$x_1+x_2+x_3=0, \tag{1}$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-3, \tag{2}$$

$$x_1x_2x_3=1. \tag{3}$$

Az (1)-ből és (3)-ból $x_1x_2(x_1+x_2)=-1$, azaz

$$x_2^2x_1+x_2x_1^2+1=0, \quad \text{hasonlóan} \tag{4}$$

$$x_3^2x_1+x_3x_1^2+1=0. \tag{5}$$

Mivel $x_1<x_2<x_3$ és $x_1+x_2+x_3=0$, azért $x_1<0$, így $x_2<x_3$ szerint (4)-ből és (5)-ből

$$x_2=\frac{-x_1^2+\sqrt{x_1^4-4x_1}}{2x_1}, \qquad x_3=\frac{-x_1^2-\sqrt{x_1^4-4x_1}}{2x_1}.$$

Tehát

$$x_3^2-x_2^2-x_3+x_1=\frac{4x_1^2\sqrt{x_1^4-4x_1}}{4x_1^2}+\frac{x_1^2+\sqrt{x_1^4-4x_1}}{2x_1}+x_1=$$
$$=\frac{(2x_1+1)\sqrt{x_1^4-4x_1}+3x_1^2}{2x_1};$$

ez pontosan akkor nulla, ha

$$3x_1^2=-(2x_1+1)\sqrt{x_1^4-4x_1}. \tag{6}$$

Tegyük fel, hogy (6) jobb oldala negatív, azaz $x_1>-\frac{1}{2}$. Ekkor $x_2>x_1>-\frac{1}{2}$, ezért $x_3=-(x_1+x_2)<1$, ami nem lehet, hiszen az I. megoldásban láttuk, hogy az egyenlet legnagyobb gyöke nagyobb, mint 1. Így (6) ekvivalens a két oldal négyzetének egyenlőségével:

$$9x_1^4=(2x_1+1)^2x_1(x_1^3-4)=(2x_1+1)^2x_1(3x_1-3),$$
$$9(3x_1+1)=9x_1^3=3(4x_1^2+4x_1+1)(x_1-1),$$
$$9x_1+3=4x_1^3-3x_1-1,$$
$$0=4(x_1^3-3x_1-1),$$

ami valóban igaz; ezért a feladat által kívánt összefüggés is teljesül.

*Balka Richárd* (Sárvár, Tinódi Sebestyén Gimn., 11. o.t.)

*Megjegyzés.* A harmadfokú egyenlet gyökeit előállító *Cardano-képlet* segítségével az egyenlet gyökei „pontosan" is meghatározhatók: $x_1=2\cos 220^\circ$, $x_2=2\cos 100^\circ$, $x_3=2\cos 20^\circ$. Ezután a feladat állítása a trigonometrikus függvényekre vonatkozó addíciós formulák felhasználásával igazolható.

*Bálint Gergely* (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 11. o.t.)

73 dolgozat érkezett. 5 pontos 35, 4 pontos 21, 3 pontos 2, 2 pontos 7, 1 pontos 1, 0 pontos 7 dolgozat.

**B. 3362.** *Tizennyolc gyerek megoldotta a KöMaL áprilisi számának egy-egy feladatát. A megoldásokat elektronikus levelezéssel (e-mailen keresztül) akarják megbeszélni. Legalább hány e-mailt kell küldeniük egymásnak, hogy mindegyikük megtudja mindegyik megoldást? (Minden e-mail annyiszor számít, ahány embernek küldik.)*

(*5 pont*) *Gyanta Nándor* ötletéből

**Megoldás.** Nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy minden időegység (azaz egy e-mail elküldéséhez szükséges időtartam) alatt a 18 gyerek között legfeljebb 1 levél elküldésére kerül sor. A folyamat elején mindenki pontosan 1 megoldást ismer, a végén pedig mindenki 18-at; tekintsük azt a legkorábbi időpontot, amikor van valaki ($G$), aki mind a 18 megoldást ismeri már. Ehhez $G$-nek legalább 17 e-mailt kellett kapnia. A többiek legfeljebb 17 feladat megoldását ismerik a vizsgált időpontban, ezért a későbbiek folyamán mindegyikük kap még legalább 1 levelet. Tehát az elküldött üzenetek száma legalább $2 \cdot 17 = 34$. Ennyi levél segítségével a teljes információcsere le is bonyolítható: először mindenki elküldi a megoldását $G$-nek, aki ezután a megoldások teljes listáját elküldi a többieknek.

*Birkner Tamás* (Budapest, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 7. o.t.)

162 dolgozat érkezett, 5 pontot kapott 53, 4 pontot 9, 3 pontot 10, 2 pontot 44, 1 pontot 31, 0 pontot 13 beküldő. Nem versenyszerű 2 dolgozat.

**B. 3364.** *Tegyük fel, hogy 15 különböző (pozitív) prímszám számtani sorozatot alkot. Igazoljuk, hogy a sorozat két szomszédos tagjának a különbsége* 30 000*-nél nagyobb.*

(*3 pont*) Javasolta: *Székelyhidi Tamás* 11. o.t., Budapest

**Megoldás.** A prímek által alkotott számtani sorozat legyen $a$, $a+d$, $a+2d$, $\dots$, $a+14d$, ahol $a$ és $d$ pozitív egész. A 15-nél kisebb prím nem fordulhat elő a sorozatban, hiszen $a<15$ esetén a sorozatnak $a+ad=a(d+1)$ is eleme lenne, holott ez összetett szám. Megmutatjuk, hogy $d$ minden 15-nél kisebb prímszámmal osztható. Ha ugyanis nem lenne osztható $p$-vel, és $p$ a 15-nél kisebb prím, akkor a sorozat $i$-edik és $j$-edik ($1 \le i < j \le p$) tagjának különbsége, $(j-i)d$, nem osztható $p$-vel, azaz $a$, $a+d$, $\dots$, $a+(p-1)d$ csupa különböző maradékot ad $p$-vel osztva. Ekkor valamelyikük osztható $p$-vel, ami lehetetlen, mivel $p$-nél nagyobb prímszámra ez nem teljesülhet. Tehát $d$ osztható a 2, 3, 5, 7, 11, 13 számok mindegyikével, így $30\,030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \mid d$, ezért $d$ nyilván 30 000-nél nagyobb.

114 dolgozat érkezett, 3 pontos 67, 2 pontos 37, 1 pontos 5, 0 pontos 5.

**B. 3368.** *Hány megoldása van a pozitív egész számok körében az* $x^7 + y^8 = z^9$ *egyenletnek?*

(*4 pont*) Javasolta: *Behm Andrea,* Nagykanizsa

**Megoldás.** Minden $n$ pozitív egészre legyen

$$x_n = 2^{32} \cdot n^{72}, \qquad y_n = 2^{28} \cdot n^{63}, \qquad z_n = 2^{25} \cdot n^{56}.$$

Ekkor

$$x_n^7 + y_n^8 = 2^{224} \cdot n^{504} + 2^{224} \cdot n^{504} = 2^{225} \cdot n^{504} = z_n^9,$$

tehát az egyenletnek végtelen sok megoldása van a pozitív egészek körében.

*Bálint Gergely* (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 11. o.t.)

*Megjegyzés.* Általánosabban megmutatható, hogy ha az $l_1$, $l_2$, $\dots$, $l_n$ pozitív egészek legkisebb közös többszöröse relatív prím a $k$ természetes számhoz, akkor az $x_1^{l_1} + \dots + x_n^{l_n} = z^k$ egyenletnek is végtelen sok megoldása van a pozitív egészek halmazán. Ez (akárcsak a közölt megoldás számpéldája) elsősorban azon múlik, hogy ha az $a$ és $b$ egészek legnagyobb közös osztója $d$, akkor alkalmas $x$ és $y$ egészekkel $xa + yb = d$ teljesül.

*Boros M. Mátyás* (Budapest, Veres Péter Gimn., 11. o.t.)

68 dolgozat érkezett. 4 pontos 59, 3 pontos 2, 0 pontos 7.



KöMaL – 2000/7 MAT0007 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 19:07 (39. lap)

## A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (595–599.)

**C. 595.** Melyek azok a háromjegyű számok, amelyek egyenlők a számjegyeik faktoriálisainak összegével?

**C. 596.** Oldjuk meg a valós számok halmazán az $\left[\dfrac{1}{1-x}\right]=\left[\dfrac{1}{1{,}5-x}\right]$ egyenletet. ([a], az $a$ egész része az $a$-nál nem nagyobb egészek legnagyobbika.)

**C. 597.** Bizonyítsuk be, hogy egy derékszögű háromszögben a beírt és körülírt kör középpontjának távolsága a körülírt kör sugarának legalább a $(\sqrt{2}-1)$-szerese.

**C. 598.** Van-e 2000 olyan pozitív egész szám, hogy egyikük sem osztható semelyik másikkal, de bármelyikük négyzete osztható az összes többi számmal?

Javasolta: *Ábrány Miklós,* Ukrajna

**C. 599.** Egy egyenes kúp alapkörének sugara $R$, magassága egységnyi. A kúpot az alapsíkjától $h$ távolságra elmetsszük az alapjával párhuzamos síkkal. A levágott kúpot tükrözzük a metsző síkra, majd a csonkakúpból a közös részt eltávolítjuk. Mekkora az így kapott test térfogata?

❄

**Beküldési határidő: 2000. november 15.**
**Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)**
**Budapest, Pf. 47. 1255**

❄

## A B pontversenyben kitűzött feladatok (3382. és 3392–3401.)

**Figyelem!** Az előző számunkban a **B. 3382.** feladat hiányosan jelent meg, ezért újra kitűzzük. A javított feladat az eredetileg kitűzött helyett a szeptemberiek közé számít. Bár új beküldési határideje 2000. november 15., nem az októberben beküldendő 6 feladat között értékeljük.

**B. 3382.** Bizonyítsuk be, hogy ha 17 különböző pozitív prímszám négyzetének összege négyzetszám, akkor közülük a két legnagyobb négyzetének a különbsége osztható a legkisebbel.

(*3 pont*) Javasolta: *Gyurcsek András,* Veszprém

(Ez a feladat a szeptemberiek közé számít, bár a beküldési határideje 2000. november 15.)

❄

**B. 3392.** Adott 25 edény, űrtartalmuk rendre 1, 2, ..., 25 liter. Hányféleképpen választható ki közülük tíz úgy, hogy bármely két kiválasztott edény felhasználásával kimérhető legyen 1 liter víz? (Korlátlan mennyiségű víz áll rendelkezésre, és egyik edényből a másikba is lehet töltögetni.)

(*4 pont*) Javasolta: *Kozma László,* Székelyudvarhely

**B. 3393.** Mekkora az $ABC$ háromszög és az $A'B'C'$ háromszög területének aránya, ha az $AA'$, $BB'$, $CC'$ szakaszok felezőpontjai rendre $B'$, $C'$, $A'$?

(*3 pont*)

**B. 3394.** Bizonyítsuk be, hogy pontosan akkor szerkeszthető $a$, $b$ és $c$ hosszúságú oldalakkal háromszög, ha az $a$, $b$, $c$ pozitív valós számokra teljesül, hogy

$$(a^2+b^2+c^2)^2>2(a^4+b^4+c^4).$$

(*3 pont*)

**B. 3395.** Szerkesszük meg az $A_1A_2A_3A_4A_5$ ötszöget, ha adott az $A_i$ pontnak az $A_{i+1}$ pontra vonatkozó tükörképe ($i=1, \dots, 5$, $A_6:=A_1$).

(*3 pont*)

**B. 3396.** Oldjuk meg az $xy+yz+zx-xyz=2$ egyenletet, ha $x$, $y$ és $z$ pozitív egész számok.

(*4 pont*)

**B. 3397.** $ABC$ egy hegyesszögű háromszög, a $KLMN$ pedig egy olyan téglalap, hogy $N$ az $AC$ szakaszra, $K$ és $L$ pedig az $AB$ szakaszra illeszkedik. Toljuk el a $KLMN$ téglalapot az $AC$-vel párhuzamosan úgy, hogy $M'$ a $BC$ szakaszra kerül. Így kapjuk a $K'L'M'N'$ téglalapot. Mutassuk meg, hogy $CL'$ és $AB$ metszéspontját az $AM$ és $CB$ metszéspontjával összekötő egyenes merőleges az $AB$ egyenesre.

(*4 pont*)

**B. 3398.** Az $ABCD$ pontok úgy helyezkednek el a térben, hogy az $AB$ és $CD$ szakaszok hossza 4 egység, míg a $BC$ és $DA$ szakaszok hossza 5 egység. Jelölje az $AC$ és $BD$ szakaszok hosszának négyzetét rendre $x$ és $y$. Ábrázoljuk a koordinátarendszerben az így adódó $x$, $y$ számpárok halmazát.

(*4 pont*) Javasolta: *Hraskó András,* Budapest

**B. 3399.** Adott a síkon két kör, $e$ és $f$, rajtuk kívül pedig a $P$ pont. A $P$-ből egy-egy érintőt húzunk a két körhöz, ezek érintési pontja $E$ és $F$. Bizonyítsuk be, hogy azoknak a szakaszoknak az aránya, amelyeket a két kör metsz ki az $EF$ egyenesből, nem függ attól, hogy melyik két érintőt rajzoltuk meg.

(*5 pont*)

**B. 3400.** Adott $d$ egész számra legyen $S_d = \{x^2 + dy^2 : x, y \in \mathbf{Z}\}$. Tegyük fel, hogy $a \in S_d$ és $b \in S_d$ olyanok, hogy $b$ prím és $\frac{a}{b}$ egész, Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\frac{a}{b} \in S_d$.

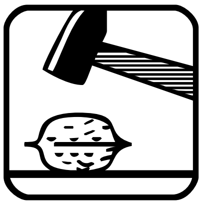
(*5 pont*) *Csörnyei Marianna,* London

**B. 3401.** Egy nagy, önkiszolgáló raktárban rengeteg árut tárolnak legfeljebb 1 tonnás csomagokban. Van egy 3 és egy 4 tonnás teherautónk. Szerződést akarunk kötni, amelyben vállaljuk, hogy a raktárból egy fordulóval legalább $N$ tonna árut szállítunk el. Mekkora $N$ legnagyobb értéke?

(*5 pont*) Arany D. versenyfeladat (2000) nyomán

❄

**Beküldési határidő: 2000. november 15.**
**Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)**
**Budapest, Pf. 433. 1371**



## Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (245–247.)

**A. 245.** Autónkkal egy kör alakú autópályán kell körbehaladnunk. A pálya mentén bizonyos helyeken benzinkutak vannak, az ezekben található összes üzemanyag két kör megtételére elég. Igazoljuk, hogy a benzinkutak közül kiválasztható legalább egy, amelytől bármelyik irányba elindulva oda visszajuthatunk.

**A. 246.** Határozzuk meg az összes olyan $x$, $y$, $z$, $w$ valós számnégyest, amelyre

$$x + y + z + w = x^7 + y^7 + z^7 + w^7 = 0.$$

*Shay Gueron,* Haifa

**A. 247.** Igazoljuk, hogy az egységnégyzet oldalegyenesein nincs olyan pont, amely mind a négy csúcstól racionális távolságra van.

*Kovács Ádám,* Budapest

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 50. No. 7. October 2000)

**New exercises for practice – competition C** (see page 424): **C. 595.** Find all 3-digit numbers which are equal to the sum of the factorials of their respective digits. **C. 596.** Solve the equation $\left[\frac{1}{1-x}\right]=\left[\frac{1}{1{,}5-x}\right]$ on the set of real numbers. ([a] denotes the integer part of $a$, that is, the largest integer not exceeding $a$.) **C. 597.** Prove that, in any right triangle, the distance between the incentre and the circumcentre is at least $(\sqrt{2}-1)$ times the radius of the circumcircle. **C. 598.** Is it possible to find 2000 positive integers such that none of them is divisible by any of the other numbers but the square of each is divisible by all the others? (Proposed by *M. Ábrány,* Ukraine) **C. 599.** A right cone of unit height whose circular base has a radius $R$ is truncated in the following way. First, it is cut along a plane whose distance from the base is $h$. Next, the removed cone is reflected in the cutting plane and its image is removed from the frustum. Calculate the volume of the solid obtained this way.

**New problems – competition B** (see page 425): **B. 3392.** We have 25 vessels whose volumes are 1,2,...,25 litres, respectively. 10 vessels are to be selected such that from an unlimited supply of water, exactly 1 litre can be measured with the help of any two selected vessels. How many different selections can be made? (*4 points*) (Proposed by *L. Kozma,* Székelyudvarhely) **B. 3393.** Triangles $ABC$ and $A'B'C'$ are given in the plane such that points $A'$, $B'$ and $C'$ are the midpoints of segments $CC'$, $AA'$ and $BB'$, respectively. Determine the ratio of the areas of the two triangles. (*3 points*) **B. 3394.** Prove that the positive numbers $a$, $b$, $c$ are the lengths of the sides of some triangle if and only if $(a^2+b^2+c^2)^2>2(a^4+b^4+c^4)$. **B. 3395.** Construct the pentagon $A_1A_2A_3A_4A_5$, given the reflections of point $A_i$ through point $A_{i+1}$ for $i=1, 2 \dots, 5$, respectively, where $A_6=A_1$. (*3 points*) **B. 3396.** Find all positive integer solutions of the equation $xy+yz+zx-xyz=2$. (*4 points*) **B. 3397.** An acute triangle $ABC$ and a rectangle $KLMN$ are given such that $N$ is incident to segment $AC$ and $K,L$ are incident to segment $AB$. Translating the rectangle parallel to $AC$ an other rectangle $K'L'M'N'$ is obtained whose vertex $M'$ is incident to segment $BC$. Prove that the line connecting the intersection point of $CL'$ and $AB$ with the intersection point of $AM$ and $CB$ is perpendicular to line $AB$. (*4 points*) **B. 3398.** Points $A$, $B$, $C$, $D$ are points in the space such that segments $AB$ and $CD$ are of 4 unit length while segments $BC$ and $DA$ are of 5 unit length. Let $x$ and $y$ denote the squares of the lengths of segments $AC$ and $BD$, respectively. Plot in the Cartesian system all pairs $(x,y)$ that arise this way. (*4 points*) (Proposed by *A. Hraskó* Budapest) **B. 3399.** Two circles $e$ and $f$ are given in the plane, and a point $P$ outside the circles. A tangent line from $P$ is drawn to each circle, touching the circles at points $E$ and $F$, respectively. Prove that the ratio of the lengths of the two segments that the two circles cut out of line $EF$ does not depend on the choice of the two tangent lines. (*5 points*) **B. 3400.** For a given interger $d$ let $S_d=\{x^2+dy^2 : x,y\in\mathbf{Z}\}$. Assume are $a\in S_d$, $b\in S_d$ such that $b$ is a prime and $\frac{a}{b}$ is an integer. Prove that $\frac{a}{b}\in S_d$. (*5 points*) (Proposed by *M. Csörnyei,* London) **B. 3401.** In a ware house there are a lot of parcels, each weighing at most 1 (metric) ton. We have two lorries which can be loaded with weights of 3 and 4 tons, respectively. A contract is to be made according to which we carry at least $N$ tons of wares at each turn. What is the largest value of $N$ with which we may undertake the contract? (*5 points*)

**New advanced problems – competition A** (see page 426): **A. 245.** We want to make a round trip with our car. There are a few gas-stations along the road where the total amount of fuel is enough to make two round trips. Prove that there is a station from where the round trip can be completed in both directions. **A. 246.** Find all quadruples of real numbers $x$, $y$, $z$, $w$ which satisfy $x+y+z+w=x^7+y^7+z^7+w^7=0$. (*Shay Gueron,* Haifa) **A. 247.** Prove that there is no point on the lines determined by the sides of the unit square whose distance from each vertex of the square is rational. (*Á. Kovács,* Budapest)