Az 1999/2000. tanévi matematika pontverseny állása a decemberig feldolgozott feladatok alapján

A nehezebb feladatok

Az eddig feldolgozott feladatok: szeptember, október, november, december, A. 228., A. 229., A. 230.

Feladatonként egy helyes megoldással elérhető: 75 pont.

1. *Gyenes Zoltán* 12. o.t. 75 pont; **2.** *Zábrádi Gergely* 12. o.t. 70 pont; **3.** *Harangi Viktor* 10. o.t. 68 pont; **4.** *Kiss 345 Gergely* 12. o.t. 56 pont; **5.** *Varjú Péter* 11. o.t. 52 pont; **6.** *Pálvölgyi Dömötör* 12. o.t. 46 pont; **7.** *Kunszenti-Kovács Dávid* 9. o.t. 41 pont; **8.** *Csóka Endre* 9. o.t. 39 pont; **9.** *Vizer Máté* 12. o.t. 29 pont; **10.** *Ambrus Gergely* 11. o.t. 21 pont; **11.** *Reviczky Ádám János* 11. o.t. 17 pont; **12–13.** *Koch Dénes* 11. o.t., *Tóth 498 Ferenc* 12. o.t. 16 pont; **14.** *Dezső Balázs* 12. o.t. 15 pont; **15.** *Máthé András* 12. o.t. 13 pont; **16.** *Nagy 444 Zoltán* 9. o.t. 11 pont; **17–19.** *Baharev Ali* 12. o.t., *Keszegh Balázs* 12. o.t., *Papp Dávid* 12. o.t. 10 pont; **20.** *Vígh Viktor* 11. o.t. 8 pont; **21.** *Sidó Péter* 12. o.t. 6 pont; **22–26.** *Breuer János* 11. o.t., *Dénes Attila* 12. o.t., *Iván Szabolcs* 12. o.t., *Pozsár Balázs* 12. o.t., *Ta Vinh Thong* 10. o.t. 5 pont; **27–30.** *Antal Ágnes* 11. o.t., *Kőrizs András* 10. o.t., *Spanczér Ilona* 10. o.t., *Székelyhidi Tamás* 11. o.t. 4 pont; **31–33.** *Enyedi Gábor* 11. o.t., *Lang Péter* 9. o.t., *Sipos Ádám* 12. o.t. 3 pont; **34–38.** *Babos Attila* 11. o.t., *Bartha 321 Ágnes* 10. o.t., *Bartha Tamás Árpád* 11. o.t., *Mics Zoltán* 11. o.t., *Pesti Gábor* 11. o.t. 2 pont.

Kevesebb pontja van 38 versenyzőnek.

B feladatok

A szeptember–decemberi összesítés után, a maximális elérhető pontszám: 107 pont.

Általános iskolások

1. *Hablicsek Márton* 8. o.t. 98 pont; **2.** *Birkner Tamás* 7. o.t. 88 pont; **3.** *Rácz Béla András* 8. o.t. 80 pont; **4.** *Pach Péter Pál* 8. o.t. 78 pont; **5.** *Horváth 424 Márton* 8. o.t. 76 pont; **6.** *Pál 213 Ágnes* 8. o.t. 71 pont; **7.** *Sarusi Annamária* 8. o.t. 70 pont; **8–9.** *Puskás Anna* 8. o.t., *Szilágyi Péter* 8. o.t. 65 pont; **10.** *Paulin Dániel* 8. o.t. 64 pont; **11.** *Bauer Péter* 8. o.t. 48 pont; **12.** *Kovács Dóra Judit* 8. o.t. 46 pont; **13.** *Nyeste Szabolcs* 8. o.t. 40 pont; **14.** *Seress Bence* 8. o.t. 39 pont; **15.** *Halbrucker Tamás* 8. o.t. 37 pont; **16.** *Klobb Maja* 8. o.t. 36 pont; **17.** *Hudáky Zsuzsanna* 8. o.t. 35 pont; **18.** *Horváth Tamás* 6. o.t. 30 pont; **19–20.** *Kovács 666 Gábor* 8. o.t., *Steinbach Cecília* 8. o.t. 29 pont; **21–23.** *György András* 8. o.t., *Matyuska Ferenc* 8. o.t., *Varga 711 Nóra* 8. o.t. 24 pont; **24–25.** *Kutasi Dávid* 8. o.t., *Vámossy Viktória* 7. o.t. 20 pont; **26.** *Árokszállási László* 7. o.t. 19 pont; **27–29.** *Bengery Zsófia* 7. o.t., *Kádár András* 7. o.t., *Sebestyén Krisztián* 8. o.t. 17 pont; **30.** *Fehér Gábor* 8. o.t. 16 pont; **31–32.** *Hegyi Gábor* 8. o.t., *Németh 704 Márton* 7. o.t. 14 pont; **33–34.** *Kawka Gábor* 8. o.t., *Turi Adrienn* 8. o.t. 13 pont; **35–36.** *Mészáros 6 Balázs* 8. o.t., *Rátkai András* 7. o.t. 11 pont; **37.** *Magonyi Erika* 8. o.t. 10 pont.

Kevesebb pontja van 29 versenyzőnek.

9. osztályosok

1. *Kunszenti-Kovács Dávid* 104 pont; **2.** *Csóka Endre* 93 pont; **3.** *Nagy 444 Zoltán* 92 pont; **4.** *Bérczi Kristóf* 91 pont; **5.** *Komjáthy Júlia* 81 pont; **6.** *Rácz Judit* 80 pont; **7–8.** *Malakuczi Viktor*, *Szekeres Balázs* 77 pont; **9–10.** *Kiss Zsuzsanna*, *Ruppert László* 76 pont; **11.** *Backhausz Ágnes* 74 pont; **12.** *Balogh 126 Zoltán* 73 pont; **13–14.** *Bergmann Gábor*, *Salát Máté* 72 pont; **15.** *Varga 840511 András* 71 pont; **16–17.** *Jankó András*, *Ureczky Dóra* 70 pont; **18–20.** *Herr Annamária*, *Jelitai Kálmán*, *Kovács 494 Andrea* 69 pont; **21–22.** *Balogh Ágnes*, *Tábor Áron* 67 pont; **23.** *Sparing Dániel* 66 pont; **24–26.** *Belső Róbert*, *Blastik Márta*, *Surján Veronika* 65 pont; **27–28.** *Gábor Sámuel*, *Nyul Balázs* 64 pont; **29.** *Módos András* 63 pont; **30–31.** *Bartha Ferenc*, *Fülöp Anita* 62 pont; **32–33.** *Nagy 625 Tibor*, *Szalai Attila* 61 pont; **34–35.** *Buti Tamás*, *Szilágyi Zoltán* 60 pont; **36–37.** *Borbély Attila*, *Mándy Péter* 58 pont; **38–39.** *Hajdú Huba*, *Sipos Gábor* 57 pont; **40.** *Molnár 712 Ágnes* 56 pont; **41–43.** *Besenyei Balázs*, *Honti Edit Anna*, *Sevecsek Zsuzsanna* 53 pont; **44.** *Kalcsú Áron* 52 pont; **45.** *Antal 627 Áron* 50 pont; **46–49.** *Bisztray Márta*, *Fehér Ádám*, *Hanzséros Eszter*, *Horváth 997 Eszter* 48 pont; **50–52.** *Budai Dénes*, *Kormos Attila*, *Lang Péter* 46 pont; **53.** *Márton Noémi Petra* 44 pont; **54–57.** *Derts Zsófia*, *Pinczehelyi Tamás*, *Prekopcsák Zoltán*, *Vági Andrea* 43 pont; **58–60.** *Markó Roland*, *Márton Sándor*, *Rácz Éva* 42 pont; **61–63.** *Balaton Attila*, *Gáspár Orsolya*, *Tölgyesi Csaba* 41 pont; **64–65.** *Gáthy Lajos*, *Kiss Demeter* 40 pont; **66–70.** *Balogh 947 László*, *Maróti László*, *Pomázi Krisztina*, *Töreki 123 Péter*, *Urbán 300 Krisztián* 39 pont; **71–74.** *Bárkai János*, *Csekő Anna*, *Csetri András*, *Simon Zsolt* 38 pont; **75.** *Király Anna Katalin* 37 pont; **76.** *Boldog Richárd* 36 pont; **77–78.** *Koltai Péter*, *Szalay Gergely* 35 pont; **79–82.** *Kukel Imre*, *Pusztai János*, *Salamon Péter*, *Sepler Gábor* 34 pont; **83–87.** *Bakonyi Lídia*, *Drüszler Anikó*, *Hellinger Péter*, *Kovács 123 Áron*, *Varga 523 Noémi* 33 pont; **88–89.** *Gál Veronika*, *Lakatos Szilvia* 32 pont; **90–92.** *Molnár Kolos*, *Molnár 999 László*, *Ökrös András* 31 pont; **93–95.** *Köber Csaba*, *Simon 111 Attila*, *Winter Zsolt* 30 pont; **96–98.** *Lakatos Kristóf*, *Szöllősi Ádám*, *Vadas Réka* 29 pont; **99–101.** *Kalcsó Kitti*, *Nyikos József*, *Orencsák Izabella Judit* 28 pont; **102–103.** *Csiszer Ildikó*, *Hangai Attila* 27 pont; **104–109.** *Andrásik Miklós*, *Bíró Zoltán*, *Mihók Péter*, *Pálvölgyi Dénes*, *Reiss Tibor*, *Szabó László* 26 pont; **110–114.** *Farkasházi Nóra*, *Gabler Gergely*, *Petrás Attila*, *Sipos Kinga*, *Tar Orsolya Rita* 25 pont; **115–120.** *Balog Boglárka*, *Fliszár Vilmos*, *Jurecska Laura*, *Neudold Soma*, *Pótsa Mátyás*, *Szőke Csongor* 24 pont; **121–127.** *Bakonyi Ákos*, *Jurácsik Nikoletta*, *Pálinkás Zoltán*, *Pintér Balázs*, *Rauscher Anna*, *Sándor Nóra*, *Szabados Katalin* 23 pont; **128–130.** *Herczegh Attila*, *Hudecz Viktor*, *Palkovics Márta* 22 pont; **131–132.** *Karches Tamás*, *Kutnyánszky Edit* 21 pont; **133–136.** *Erdős Dóra*, *Kutnyánszky Vera*, *Lajkó Miklós*, *Pál Bese* 20 pont; **137–146.** *Ary Árpád*, *Bálint Márton*, *Csécs Levente*, *Gálosfai Krisztina*, *Gyenese Péter*, *Horváth Zsolt*, *Márton Szabolcs*, *Szalai Zsuzsanna*, *Varga István*, *Varga Veronika* 19 pont; **147–155.** *Baráth Géza*, *Boros Gábor*, *Csákberényi Nagy Dorottya*, *Fehér Mátyás*, *Ferzsigán A. Gergő*, *Hegedűs Viktor*, *Siket Bence*, *Tamás Katalin*, *Tukacs Lívia* 18 pont; **156–162.** *Garab Ábel*, *Kis 761 László*, *Kutas Viola*, *Petrovszki Judit*, *Szaniszló Boglárka*, *Urbán György*, *Vakulya Gergely* 17 pont; **163–169.** *Blasko Ján*, *Fehér Gábor*, *Fenyvesi Annamária*, *Fodróczy Péter*, *Horváth Katalin*, *Komlósi 985 Gergely*, *Varga László* 16 pont; **170–175.** *Balogh Rózsa*, *Estók Szabolcs*, *Gyurity Igor*, *Korai Szabolcs*, *Szeghő Ágnes*, *Vidor Sára* 15 pont; **176–178.** *Fazekas Enikő*, *Gábor István*, *Kopányi Dávid* 14 pont; **179–184.** *Bagdi Gábor*, *Hudetz György*, *Makray Bálint*, *Pászthy Edina*, *Persics Bálint*, *Szabó 928 Hajnalka* 13 pont.
Kevesebb pontja van 187 versenyzőnek.

10. osztályosok

1. *Csikvári Péter* 104 pont; **2–3.** *Gerencsér Balázs*, *Somogyi Dávid* 101 pont; **4.** *Koreck Ferenc* 96 pont; **5.** *Tran Thanh Long* 95 pont; **6–7.** *Hargitai Gábor*, *Kovács*

Erika Renáta 93 pont; **8–9.** *Pallos Péter*, *Ta Vinh Thong* 90 pont; **10.** *Horváth Illés* 89 pont; **11.** *Jesch Dávid* 86 pont; **12.** *Csötönyi Nóra* 85 pont; **13–15.** *Boros Vazul*, *Csernenszky András*, *Szalay Zsófia* 84 pont; **16.** *Hamar Gergő* 83 pont; **17.** *Kőrösi Attila* 82 pont; **18.** *Béky Bence* 81 pont; **19.** *Farkas Viktor* 78 pont; **20.** *Zavarkó Gábor* 77 pont; **21.** *Takács Gergő* 74 pont; **22–24.** *Boróczki Lajos*, *Kőrizs András*, *Siska Ádám* 73 pont; **25–27.** *Czeininger Zoltán*, *Kerékfy Péter*, *Váradi Vajk* 72 pont; **28.** *Madár Ivett* 71 pont; **29.** *Siroki László* 70 pont; **30–32.** *Klein Andrea*, *Márton Eszter*, *Soproni Péter* 69 pont; **33–34.** *Spanczér Ilona*, *Zséger Ádám* 68 pont; **35–37.** *Ábel Dániel*, *Dobler Csaba*, *Vajk Tamás* 66 pont; **38.** *Szirmay Márta* 65 pont; **39.** *Zsbán Ambrus* 63 pont; **40–42.** *Asztalos Gyula*, *Dombi Adrienn*, *Gyulasi Tamás* 60 pont; **43.** *Baur Eszter* 59 pont; **44–51.** *Balog Gergely*, *Kádár Cecília*, *Kevei Péter*, *Major Gergely*, *Molnár 354 Tamás*, *Nagy 469 Ambrus*, *Porcs-Makkay Ákos*, *Tolvaj Nóra* 57 pont; **52–53.** *Sándorfi Erika*, *Szabó 984 Attila* 56 pont; **54–56.** *Radochay Imre*, *Szabó 406 Tamás*, *Szirtes Péter* 55 pont; **57.** *Kovács 625 Erika* 54 pont; **58–60.** *Devecsery Ágnes*, *Reiss Attila*, *Tóth Rudolf* 53 pont; **61–62.** *Raikovich Tamás*, *Szintai Judit* 52 pont; **63.** *Leicht Zoltán* 51 pont; **64.** *Dömötör Csilla* 50 pont; **65–67.** *Antal 193 Péter*, *Csordás Hunor*, *Kádas Attila* 49 pont; **68–72.** *Embersics László*, *Farkas 327 Dóra*, *Hauser Edit*, *Kórus Gergely*, *Zsurkó Mátyás* 48 pont; **73–75.** *Barta 679 Zsolt*, *Keszi-Petik János*, *Potzauf Krisztina* 47 pont; **76–77.** *Gottlasz Valér*, *Vasas Éva Zsuzsanna* 46 pont; **78–79.** *Fűrész Gábor*, *Németh 999 Antal* 45 pont; **80–83.** *Gábris Gergely*, *Molnár 475 Viktor*, *Szügyi Hajnalka*, *Walfisch Dávid* 44 pont; **84–85.** *Erdélyi Dániel*, *Varga Lajos* 43 pont; **86–87.** *Pajna Gabriella*, *Sipos Szabó Eszter* 42 pont; **88–91.** *Bartha 321 Ágnes*, *Berta Balázs*, *Gémes Norbert*, *Kertész Zsuzsanna* 41 pont; **92.** *Pszota Zsolt* 40 pont; **93–95.** *Botka Bea*, *Kovács 721 Péter*, *Mult Attila* 39 pont; **96.** *Czinder Attila* 38 pont; **97–101.** *Bognár Attila*, *Hetesi Péter*, *Kiss Gergely Péter*, *Kurtz Orsolya*, *Nagy 039 Péter* 37 pont; **102–103.** *Farkas Melinda*, *Várnai Anikó* 36 pont; **104–108.** *Bede Viktória*, *Lehoczki Csaba*, *Pilissy György*, *Rabb Gergely*, *Tóth Mihály* 35 pont; **109–113.** *Asztalos Márk*, *Dajka Tamás*, *Fischer Noémi*, *Kocsis Mária*, *Tankovics Gábor* 34 pont; **114–118.** *Farkas Máté*, *Kucsera Dénes*, *Makk Péter*, *Nagy 144 Ferenc*, *Szente Dávid* 33 pont; **119–120.** *Holicska Ádám*, *Steinbach Gergely* 32 pont; **121–122.** *Kőber Péter*, *Ócsai Katalin* 31 pont; **123–127.** *Csáky Attila*, *Györkő Roland*, *Iván Szilárd*, *Kepe Gábor*, *Kovács 444 György* 30 pont; **128–131.** *Ambrus Nóra*, *Balogh 225 Gabriella*, *Beke Krisztina*, *Simon András* 29 pont; **132–134.** *Szilágyi Örs*, *Tóth Georgina Zsófia*, *Varga 846 Petra* 28 pont; **135–139.** *Buza Krisztián Antal*, *Iberpaker Péter*, *Izsák Andrea*, *Rischák Rózsa*, *Weisz Gyula* 27 pont; **140–145.** *Borosán Péter*, *Gyökeres Ágnes*, *Kiss 214 Ákos*, *Pongrácz Júlia*, *Somodi Gergely*, *Várnai Csilla* 26 pont; **146–152.** *Horváth 119 Beáta*, *Nagy 206 István*, *Nagy 725 János*, *Olgyay Margit*, *Stogicza Ákos*, *Vámi Petra*, *Völgyi Krisztina* 25 pont.

Kevesebb pontja van 245 versenyzőnek.

11. osztályosok

1. *Babos Attila* 103 pont; **2–3.** *Ambrus Gergely*, *Deli Lajos* 102 pont; **4.** *Nagy Tamás* 99 pont; **5.** *Bálint Gergely* 98 pont; **6–7.** *Lovrics Anna*, *Vígh Viktor* 97 pont; **8–9.** *Boros M. Mátyás*, *Simon 812 Győző* 96 pont; **10–11.** *Pacz Bence Tamás*, *Vörös László* 95 pont; **12.** *Pogátsa Attila* 90 pont; **13.** *Lovrics Klára* 89 pont; **14.** *Gelencsér Gábor* 88 pont; **15.** *Zalán Péter* 85 pont; **16–17.** *Balka Richárd*, *Veres Péter* 83 pont; **18.** *Börcsök József* 82 pont; **19.** *Andrássy Zoltán* 81 pont; **20.** *Koch Dénes* 80 pont; **21.** *Horváth Szilárd* 78 pont; **22.** *Nagy 139 Gergely* 77 pont; **23.** *Árvay Eszter* 75 pont; **24–25.** *Fekete 110 Árpád*, *Vonnák Dzsamila* 74 pont; **26.** *Szilágyi Tamás* 73 pont; **27–28.** *Fehér Gergely*, *Lajtha Balázs* 72 pont; **29–32.** *Bakó Dániel*, *Bohák András*, *Eördegh Péter*, *Szilasi Zoltán* 71 pont; **33–35.** *Antal Ágnes*, *Breuer János*, *Kisfügedi Viktória*

70 pont; **36.** *Fodor 133 Gyula* 69 pont; **37–38.** *Horváth Balázs*, *Mics Zoltán* 67 pont; **39.** *Toka László* 66 pont; **40.** *Mátyási Péter* 63 pont; **41.** *Wéber Zoltán* 61 pont; **42.** *Hegyi Márta* 60 pont; **43–45.** *Csaszny Tamás*, *Csereklei Gábor*, *Várkonyi Dániel* 59 pont; **46.** *Horváth 713 György* 57 pont; **47.** *Imrefi József* 55 pont; **48–51.** *Soós 740 Károly*, *Székelyhidi Tamás*, *Szekeres 761 András*, *Tóth Szilveszter* 54 pont; **52–53.** *Horváth 724 Zoltán*, *Tóth 124 Péter* 53 pont; **54.** *Szintai Balázs* 52 pont; **55–56.** *Siklósi Dávid*, *Sofró Csaba* 51 pont; **57–58.** *Enyedi Gábor*, *Hegedűs Vera* 49 pont; **59–60.** *Czibik Ágnes*, *Király Attila* 48 pont; **61–65.** *Bartos Imre*, *Börzsönyi Ádám*, *Germán Tibor*, *Legány Csaba*, *Vajda Péter* 47 pont; **66–68.** *Fellegi Zoltán*, *Gyurcsek András*, *Paál Csaba* 46 pont; **69–70.** *Ádám Zoltán*, *Görföl Tamás* 45 pont; **71–73.** *Csabina Csilla*, *Kovács Krisztián*, *Tóth 007 Balázs* 43 pont; **74.** *Győző Miklós* 42 pont; **75–77.** *Ekler Márton*, *Kiss Árpád*, *Szamosújvári Ilona* 41 pont; **78.** *Novák Zoltán* 40 pont; **79–81.** *Budai Erika*, *Rakamazi Richárd*, *Wéner Balázs* 39 pont; **82.** *Darabos Andrea* 38 pont; **83–84.** *Mészáros Gergely*, *Székelyi Szabolcs* 37 pont; **85.** *Nagy 729 Dávid* 36 pont; **86–89.** *Béhm A. Diana*, *Medgyesi László*, *Németh 512 Róbert*, *Vizer Tibor* 35 pont; **90–93.** *Dőrr Zsuzsanna*, *Peresztegi Márton*, *Sándor 027 Attila*, *Szabó Géza* 34 pont; **94–98.** *Kalmár Levente*, *Kiss 414 Norbert*, *Roszol László*, *Stépán József*, *Szentpéteri Zsolt* 33 pont; **99–102.** *Fenyvesi Zsuzsanna*, *Garai Zsolt*, *Harcz Ádám*, *Karácsonyi József Sándor* 32 pont; **103–104.** *Almási Angelika*, *Szána Linda* 31 pont; **105–109.** *Gönczöl Ágnes*, *Jakab Zsolt*, *Karácsony Veronika*, *Karaszi Mihály*, *Zajdó Csaba* 30 pont; **110–116.** *Durai Pál*, *Imre Ildikó*, *Király Ferenc*, *Mitcsenkov Attila*, *Nagy 314 Ádám*, *Pálinkó Szabolcs*, *Veres Dániel* 29 pont; **117.** *Varga 832 Erzsébet* 28 pont; **118–121.** *Bobák Enikő*, *Kazinczi Csaba*, *Nagy 777 Péter*, *Varga Máté* 27 pont; **122–124.** *Arany Sándor*, *Horváth 004 Tamás*, *Kurucz Endre* 26 pont; **125–129.** *Bogatin György*, *Pongrácz Dorottya*, *Tóth 575 Árpád*, *Tóth 666 Balázs* , *Varga 274 Károly* 25 pont.

Kevesebb pontja van 173 versenyzőnek.

12. osztályosok

1. *Vizer Máté* 106 pont; **2.** *Keszegh Balázs* 103 pont; **3.** *Papp Dávid* 101 pont; **4.** *Győri Nikolett* 100 pont; **5–6.** *Dénes Attila*, *Venter György* 99 pont; **7.** *Máthé András* 98 pont; **8.** *Hegedűs Ákos* 97 pont; **9.** *Baharev Ali* 96 pont; **10.** *Tóth 498 Ferenc* 95 pont; **11–12.** *Besenyei Ádám*, *Gáspár Merse Előd* 93 pont; **13.** *Sidó Péter* 87 pont; **14.** *Bákor Krisztina* 85 pont; **15.** *Taraza Busra* 84 pont; **16.** *Pozsonyi Gergő* 82 pont; **17.** *Ivaskó György* 78 pont; **18.** *Horváth 413 László* 75 pont; **19.** *Kiss 345 Gergely* 73 pont; **20.** *Kiss 360 Sándor* 72 pont; **21–22.** *Iván Szabolcs*, *Sipos Ádám* 70 pont; **23.** *Herczegh Géza* 69 pont; **24.** *Kasztner Tamás* 65 pont; **25–26.** *Antal István*, *Horváth Gergely* 64 pont; **27–28.** *Kiss Ferenc Emánuel*, *Vitéz Ildikó* 63 pont; **29.** *Borbíró Levente* 59 pont; **30.** *Flach Attila* 57 pont; **31.** *Torda Péter* 56 pont; **32–33.** *Agócs Judit*, *Szabó 968 Lóránt* 55 pont; **34.** *Zombori Zsolt* 54 pont; **35.** *Tóth 888 János* 53 pont; **36–37.** *Tarcsi Tamás*, *Tolvaj Nándor* 52 pont; **38–39.** *Balázs Péter*, *Koczka Gergely* 50 pont; **40–42.** *Gáspár Endre*, *Gömöri Péter*, *Schlotter Ildikó* 48 pont; **43.** *Szélig Nikoletta* 47 pont; **44–45.** *Bódai Zoltán*, *Németh 555 Lajos* 45 pont; **46.** *Törőcsik Andrea* 44 pont; **47.** *Fodor Erzsébet* 43 pont; **48.** *Matin Tamás* 42 pont; **49–50.** *Friedl Zita*, *Varga Balázs* 41 pont; **51.** *Wilfing András* 40 pont; **52.** *Tóth 587 Viktória* 38 pont; **53–54.** *Gyürki István*, *Szabó Gergely* 36 pont; **55–56.** *Gyarmati-Szabó István*, *Hegedüs 008 Péter* 35 pont; **57–62.** *Baranyai 248 Gábor*, *Horváth Lajos*, *Jósvai Szilárd*, *Kriston Vízi Gábor*, *Mészáros Fruzsina*, *Micskei Zoltán* 33 pont; **63.** *Móczó Péter* 32 pont; **64.** *Sinkovicz Katalin* 31 pont; **65.** *Papp Eszter* 30 pont.

Kevesebb pontja van 104 versenyzőnek.

C gyakorlatok

A szeptember–decemberi összesítés után, a maximális elérhető pontszám: 100 pont.

Legfeljebb 10. osztályosok

1–2. *Bóka Gergely* 9. o.t., *Tóth 370 Ágnes* 10. o.t. 100 pont; **3.** *Erdei Zsuzsa* 10. o.t. 99 pont; **4.** *Bérczi Kristóf* 9. o.t. 98 pont; **5–6.** *Boros Balázs* 9. o.t., *Siroki László* 10. o.t. 97 pont; **7.** *Birkner Tamás* 7. o.t. 96 pont; **8–11.** *Kiss-Tóth Christian* 7. o.t., *Paulin Dániel* 8. o.t., *Szekeres Balázs* 9. o.t., *Szűcs Mónika* 9. o.t. 95 pont; **12.** *Ellenbacher Péter* 10. o.t. 94 pont; **13–15.** *Farkas Viktor* 10. o.t., *Pach Péter Pál* 8. o.t., *Tímár Gábor* 10. o.t. 93 pont; **16–17.** *Lakatos Szilvia* 9. o.t., *Rácz Béla András* 8. o.t. 92 pont; **18–21.** *Fehér Ádám* 9. o.t., *Kórus Péter* 8. o.t., *Marton József* 10. o.t., *Sándor Nóra* 9. o.t. 91 pont; **22–27.** *Bertus-Barcza Tímea* 10. o.t., *Borsódi Éva* 9. o.t., *Fehér Gábor* 9. o.t., *Papp Gábor* 10. o.t., *Ruppert László* 9. o.t., *Szilágyi Zoltán* 9. o.t. 90 pont; **28–31.** *Blastik Márta* 9. o.t., *Hajdú Huba* 9. o.t., *Reiss Attila* 10. o.t., *Salát Máté* 9. o.t. 89 pont; **32–37.** *Farkas 327 Dóra* 10. o.t., *Gottlasz Valér* 10. o.t., *Horváth 424 Márton* 8. o.t., *Pszota Zsolt* 10. o.t., *Szalay Zsófia* 10. o.t., *Tollner Dávid* 9. o.t. 88 pont; **38–43.** *Bérces Péter* 9. o.t., *Hablicsek Márton* 8. o.t., *Hofgárt Gergely* 9. o.t., *Nagy 359 Gábor* 9. o.t., *Nagy 625 Tibor* 9. o.t., *Várnai Csilla* 10. o.t. 87 pont; **44–47.** *Jankó András* 9. o.t., *Kádas Attila* 10. o.t., *Karches Tamás* 9. o.t., *Mándy Péter* 9. o.t. 86 pont; **48–50.** *Bikov András* 9. o.t., *Gáthy Lajos* 9. o.t., *Nyul Balázs* 9. o.t. 85 pont; **51–56.** *Erdélyi Dániel* 10. o.t., *Klement Balázs* 9. o.t., *Lelovics András* 10. o.t., *Németh Adrián* 8. o.t., *Penha Felizardo Renáta* 9. o.t., *Sarusi Annamária* 8. o.t. 84 pont; **57–61.** *Baur Eszter* 10. o.t., *Besenyei Balázs* 9. o.t., *Hargitai Gábor* 10. o.t., *László L. András* 10. o.t., *Márton Zsuzsanna* 9. o.t. 83 pont; **62–65.** *Durham Patrick* 9. o.t., *Márton Noémi Petra* 9. o.t., *Sipka Bálint* 8. o.t., *Sipőcz Éva* 9. o.t. 82 pont; **66–67.** *Moór Anikó* 9. o.t., *Sparing Dániel* 9. o.t. 81 pont; **68–70.** *Fülöp Anita* 9. o.t., *Herczeg Lynda* 9. o.t., *Varga Lajos* 10. o.t. 80 pont; **71–76.** *Aczél Anna* 10. o.t., *Fonyódi György* 9. o.t., *Hangya Miklós* 8. o.t., *Jesch Dávid* 10. o.t., *Kormos Attila* 9. o.t., *Szabó 127 Andrea* 10. o.t. 79 pont; **77–80.** *Kocsis Mária* 10. o.t., *Pajna Gabriella* 10. o.t., *Sarkadi Tamás* 9. o.t., *Széll Károly* 9. o.t. 78 pont; **81.** *Pintér Miklós* 10. o.t. 77 pont; **82–87.** *Baranyai Tamás* 9. o.t., *Bauer Péter* 8. o.t., *Németh 864 Márk* 8. o.t., *Rischák Rózsa* 10. o.t., *Spanczér Ilona* 10. o.t., *Zámbó Virág* 10. o.t. 76 pont; **88.** *Kotnyek Barbara* 10. o.t. 75 pont; **89–91.** *Bozsik Judit* 10. o.t., *Csáky Attila* 10. o.t., *Schuster Ágnes* 9. o.t. 74 pont; **92–98.** *Ásványi Katalin* 10. o.t., *Csekő Anna* 9. o.t., *Fekete 132 Krisztián* 9. o.t., *Koreck Ferenc* 10. o.t., *Nagy 666 Károly* 9. o.t., *Seress Bence* 8. o.t., *Tál Balázs* 10. o.t. 73 pont; **99.** *Caimacan Dávid* 8. o.t. 72 pont; **100–102.** *Horváth 274 Ágnes* 10. o.t., *Konfár András* 8. o.t., *Varga 236 Szabolcs* 9. o.t. 71 pont; **103–106.** *Kovács 954 Szabolcs* 10. o.t., *Mult Attila* 10. o.t., *Virasztó Zsolt* 9. o.t., *Vona Péter* 8. o.t. 70 pont; **107–108.** *Nagy 701 Mária* 10. o.t., *Tóth Georgina Zsófia* 10. o.t. 68 pont; **109–113.** *Bedzsula Bálint* 9. o.t., *Dombi Nóra* 9. o.t., *Komlósi 985 Gergely* 9. o.t., *Szabó 314 Zsolt* 10. o.t., *Török Sándor Miklós* 9. o.t. 67 pont; **114–120.** *György András* 8. o.t., *Lang Péter* 9. o.t., *Lehoczki Csaba* 10. o.t., *Sándor István* 9. o.t., *Sipos Kinga* 9. o.t., *Szirmay Márta* 10. o.t., *Vadai Zsolt* 10. o.t. 66 pont; **121–122.** *Bartha 321 Ágnes* 10. o.t., *Gerevics János* 10. o.t. 65 pont; **123–124.** *Buza Krisztián Antal* 10. o.t., *Gál Dénes* 9. o.t. 64 pont; **125–132.** *Csizmazia Eszter* 9. o.t., *Hegyi Gábor* 8. o.t., *Kalcsú Áron* 9. o.t., *Kovács 721 Péter* 10. o.t., *Makai Andrea* 9. o.t., *Molnár András* 10. o.t., *Tisch Dániel* 10. o.t., *Várnai Anikó* 10. o.t. 63 pont; **133–136.** *Gál András* 9. o.t., *Ócsai Katalin* 10. o.t., *Schlakker Eszter* 9. o.t., *Szabados Katalin* 9. o.t. 62 pont; **137–142.** *Kárnyáczki Zsuzsanna* 10. o.t., *Márton Szabolcs* 9. o.t., *Nagy Mónika* 10. o.t., *Szabó 182 Katalin* 9. o.t., *Szalay Gergely* 9. o.t., *Szever Márton* 9. o.t.

60 pont; **143–147.** *Bán Zoltán* 10. o.t., *Filep Gergely* 10. o.t., *Pluhár Gabriella* 9. o.t., *Szöllősi Ádám* 9. o.t., *Vincze Nándor* 9. o.t. 59 pont; **148–154.** *Balázsy Zsófia* 8. o.t., *Erdei Katalin* 9. o.t., *Gere Ágota* 10. o.t., *Juhász Sándor* 10. o.t., *Matyuska Ferenc* 8. o.t., *Nyolczas Viktor* 10. o.t., *Rabb Gergely* 10. o.t. 58 pont; **155–163.** *Barsi Mária* 9. o.t., *Ferencsik Erika* 9. o.t., *Forgács Tamás* 9. o.t., *Fülöp István* 9. o.t., *Hudáky Zsuzsanna* 8. o.t., *Kutasi Dávid* 8. o.t., *Szalai Bence* 10. o.t., *Tóth 143 Anett* 8. o.t., *Uzonyi Béla* 9. o.t. 57 pont; **164–165.** *Hartmann Bálint* 9. o.t., *Nótári Péter* 10. o.t. 56 pont; **166–171.** *Andrásik Miklós* 9. o.t., *Bíró Zoltán* 9. o.t., *Dombai Balázs* 9. o.t., *Lantos Norbert* 9. o.t., *Török Zoltán Bálint* 8. o.t., *Varga 840511 András* 9. o.t. 55 pont; **172–177.** *Czakó Péter* 10. o.t., *Markó Máté* 10. o.t., *Szrnka Éva* 9. o.t., *Udvari Balázs* 6. o.t., *Varga László* 9. o.t., *Varga 846 Petra* 10. o.t. 54 pont; **178–182.** *Fejes Lívia* 8. o.t., *Mihók Péter* 9. o.t., *Reiss Tibor* 9. o.t., *Varga 123 Áron* 10. o.t., *Zoltán Illés* 10. o.t. 53 pont; **183–188.** *Buday Bence* 9. o.t., *Kárpáti Zsuzsanna* 10. o.t., *Kawka Gábor* 8. o.t., *Petrás Attila* 9. o.t., *Szebenyi Zoltán* 10. o.t., *Szemján Zoltán* 9. o.t. 52 pont; **189–193.** *Gyenese Péter* 9. o.t., *Komáromy Dávid* 9. o.t., *Mészáros Zsolt* 10. o.t., *Puskás Anna* 8. o.t., *Tomsits András* 9. o.t. 51 pont; **194–197.** *Mátyási Domonkos* 10. o.t., *Nemeskéri Tamás* 9. o.t., *Pálinkás Zoltán* 9. o.t., *Vakulya Gergely* 9. o.t. 50 pont; **198–203.** *Bácsi Ádám* 8. o.t., *Miklós Rita* 10. o.t., *Prekopcsák Zoltán* 9. o.t., *Rückert Péter* 9. o.t., *Somlai Ágnes* 10. o.t., *Vilim Tamás* 10. o.t. 49 pont; **204–208.** *Himics Miklós* 9. o.t., *Horváth 979 Kornél* 9. o.t., *Jurácsik Nikoletta* 9. o.t., *Kiss László Bence* 9. o.t., *Németh 704 Márton* 7. o.t. 48 pont; **209–214.** *Baráth Géza* 9. o.t., *Dányádi Zsolt* 8. o.t., *Ferzsigán A. Gergő* 9. o.t., *Havran Zsolt* 10. o.t., *Kádár András* 7. o.t., *Kovács István* 10. o.t. 47 pont; **215–221.** *Buthi Irma* 10. o.t., *Gébert Judit* 9. o.t., *Kalinák József* 9. o.t., *Kovács 985 Zsuzsanna* 9. o.t., *Sticker Nóra* 10. o.t., *Szilágyi Örs* 10. o.t., *Szirom Zoltán* 9. o.t. 46 pont; **222–225.** *Bedő Anett* 9. o.t., *Hochrein Gábor* 10. o.t., *Horváth Tamás* 6. o.t., *Olgyay Margit* 10. o.t. 45 pont; **226–230.** *Bodnár Barbara* 10. o.t., *Fejér Balázs* 8. o.t., *Péczeli Viktor* 10. o.t., *Regula Gergely* 10. o.t., *Soós Gábor* 9. o.t. 44 pont; **231–236.** *Dőry Magdolna* 9. o.t., *Énzsöly Anna* 9. o.t., *Farkas Máté* 10. o.t., *Gáspár Orsolya* 9. o.t., *Lőczi Gergő* 10. o.t., *Móra Péter* 9. o.t. 43 pont; **237–240.** *Bengery Zsófia* 7. o.t., *Kéri Sophia* 10. o.t., *Mattyasovszky Nóra* 10. o.t., *Simon 111 Attila* 9. o.t. 42 pont; **241–252.** *Bartakovics Zoltán* 9. o.t., *Bencze Zoltán* 10. o.t., *Boros Benedek* 8. o.t., *Borosán Péter* 10. o.t., *Farkas Ildikó* 8. o.t., *Kőszegi László* 10. o.t., *Morvai Krisztina* 10. o.t., *Nagy 124 Ágnes* 10. o.t., *Nagy András* 9. o.t., *Nagy 333 Orsolya* 9. o.t., *Szabó 930 Krisztina* 10. o.t., *Tóth Mihály* 10. o.t. 41 pont; **253–261.** *Bakó Mária* 8. o.t., *Erdei Sándor* 9. o.t., *Nagy 469 Ambrus* 10. o.t., *Németh Ildikó* 10. o.t., *Rauscher Anna* 9. o.t., *Sáringer Tibor* 9. o.t., *Sztrányóczki Dávid* 10. o.t., *Tóth Gergely* 9. o.t., *Varga 984 Márta* 9. o.t. 40 pont.

Kevesebb pontja van 862 versenyzőnek.

11–12. osztályosok

1–2. *Csató György* 11. o.t., *Gajdos Béla* 12. o.t. 100 pont; **3–4.** *Germán Tibor* 11. o.t., *Zalán Péter* 11. o.t. 99 pont; **5.** *Bankó Krisztián* 12. o.t. 98 pont; **6–10.** *Besenyei Ádám* 12. o.t., *Kardos Péter* 12. o.t., *Kegyes Tamás* 12. o.t., *Nagy 219 András* 12. o.t., *Tóth 498 Ferenc* 12. o.t. 97 pont; **11–13.** *Horváth Balázs* 11. o.t., *Kármán Péter* 11. o.t., *Végh Anita* 11. o.t. 96 pont; **14–18.** *Agócs Judit* 12. o.t., *Baranyi Tibor* 12. o.t., *Braun Melinda* 11. o.t., *Nagy 281 Dávid* 11. o.t., *Patay Gergely* 12. o.t. 95 pont; **19.** *Kismődi Péter* 11. o.t. 94 pont; **20–23.** *Gyarmati-Szabó István* 12. o.t., *Szintai Balázs* 11. o.t., *Vanya Ádám* 11. o.t., *Vörös Krisztina* 11. o.t. 93 pont; **24–26.** *Antal Ágnes* 11. o.t., *Kisfügedi Viktória* 11. o.t., *Strobl Apolka* 12. o.t. 92 pont; **27–28.** *Buti András* 11. o.t., *Vígh Attila* 11. o.t. 90 pont; **29–32.** *Matin Tamás* 12. o.t., *Paál Csaba* 11. o.t., *Szekeres 761 András* 11. o.t., *Torda Péter* 12. o.t. 89 pont; **33–34.** *Révai Balázs* 12. o.t., *Soós 740*

Károly 11. o.t. 88 pont; **35–36.** *Béhm A. Diana* 11. o.t., *Jakab Gyula* 11. o.t. 87 pont; **37–38.** *Fehérvári Sándor* 12. o.t., *Szászi Zsuzsanna* 12. o.t. 86 pont; **39.** *Döme Botond* 12. o.t. 85 pont; **40.** *Árvay Eszter* 11. o.t. 84 pont; **41–42.** *Karika Róbert* 12. o.t., *Schmeiszer Krisztián* 12. o.t. 83 pont; **43–46.** *Klausz Ferenc* 12. o.t., *Koczka Gergely* 12. o.t., *Medve Kinga Sára* 11. o.t., *Varga 951 Attila* 12. o.t. 82 pont; **47–50.** *Koch Dénes* 11. o.t., *Legány Csaba* 11. o.t., *Mitcsenkov Attila* 11. o.t., *Tóth 777 Balázs* 11. o.t. 81 pont; **51–52.** *Horváth Lajos* 12. o.t., *Kmellár Béla* 11. o.t. 80 pont; **53–57.** *Ivánszki Szilvia* 12. o.t., *Kőszegi Katalin Adrienn* 11. o.t., *Medgyesi László* 11. o.t., *Murguly Hajnalka* 11. o.t., *Wéner Balázs* 11. o.t. 79 pont; **58–60.** *Antal István* 12. o.t., *Horváth 413 László* 12. o.t., *Nagy Zoltán* 12. o.t. 78 pont; **61–62.** *Soltész Kata* 11. o.t., *Szekeres Nóra* 12. o.t. 77 pont; **63–64.** *Harangi Norbert* 12. o.t., *Juhász 113 Ágnes* 12. o.t. 76 pont; **65–66.** *Kulbert István* 12. o.t., *Szépe Bálint* 12. o.t. 75 pont; **67–68.** *Pótó Júlia* 11. o.t., *Sörös Csaba* 11. o.t. 74 pont; **69–70.** *Török Tímea* 12. o.t., *Wilfing András* 12. o.t. 73 pont; **71–75.** *Havran Dániel* 12. o.t., *Kriston Vízi Gábor* 12. o.t., *Sajtos Erika* 11. o.t., *Schmeiszer Kornél* 12. o.t., *Simon Hajnalka* 11. o.t. 72 pont; **76–78.** *Lévai István* 12. o.t., *Oláh Tibor Benjámin* 12. o.t., *Tóth 613 Marcella* 11. o.t. 71 pont; **79–81.** *Dinnyés Gábor* 11. o.t., *Karácsonyi József Sándor* 11. o.t., *Papp András* 11. o.t. 70 pont; **82.** *Rakamazi Richárd* 11. o.t. 68 pont; **83–87.** *Csornai Gyula* 12. o.t., *Káldy Nóra* 12. o.t., *Mehrl Nándor* 12. o.t., *Papp Gyula* 12. o.t., *Prantner Attila* 12. o.t. 67 pont; **88–90.** *Gérecz Balázs* 11. o.t., *Kalmár Levente* 11. o.t., *Kánya Dávid* 11. o.t. 66 pont; **91.** *Takács Nóra* 12. o.t. 65 pont; **92–94.** *Bálint Zsuzsanna* 11. o.t., *Frey Dóra* 11. o.t., *Zsédely Eszter* 12. o.t. 64 pont; **95–99.** *Balázs Györgyi* 11. o.t., *Csurdi Abigél* 12. o.t., *Karaszi Mihály* 11. o.t., *Somodi Zoltán* 12. o.t., *Tóth Balázs* 12. o.t. 63 pont; **100–102.** *Hancsók Réka* 12. o.t., *Kiss Árpád* 11. o.t., *Kolláth Endre* 11. o.t. 62 pont; **103–107.** *Borda Máté* 11. o.t., *Dömötör Piroska* 11. o.t., *Klein Gábor* 11. o.t., *Kormos Zoltán* 12. o.t., *Sofró Csaba* 11. o.t. 61 pont; **108–109.** *Sinkovicz Katalin* 12. o.t., *Somlai Henrietta* 11. o.t. 60 pont; **110.** *Pintér Zsuzsanna* 12. o.t. 59 pont; **111.** *Reményi Zsolt* 11. o.t. 58 pont; **112–116.** *Fenyvesi Zsuzsanna* 11. o.t., *Gáspár Katalin* 12. o.t., *Gáspár Krisztina* 12. o.t., *Linka Judit* 12. o.t., *Rácz László* 11. o.t. 57 pont; **117–123.** *Hanfeldt Györgyi* 11. o.t., *Király Péter* 12. o.t., *Láda Judit* 11. o.t., *Mező Rita* 11. o.t., *Nagy 331 Zsuzsanna* 11. o.t., *Pólik Márta* 12. o.t., *Vukman Krisztina* 11. o.t. 55 pont; **124.** *Rádi Krisztina* 12. o.t. 53 pont; **125–128.** *Bíró László* 12. o.t., *Fiedler Ágnes* 12. o.t., *Rozovits Zoltán* 12. o.t., *Szekeres Árpád* 11. o.t. 52 pont; **129.** *Tóth 575 Árpád* 11. o.t. 51 pont; **130–132.** *Gaál Zoltán* 12. o.t., *Jancski Dóra* 12. o.t., *Tóth 007 Balázs* 11. o.t. 50 pont; **133–134.** *Szabó 415 Ágnes* 12. o.t., *Székelyhidi Tamás* 11. o.t. 49 pont; **135–143.** *Gönczöl Katalin* 12. o.t., *Huszár Lia* 12. o.t., *Lükő Sára* 12. o.t., *Menyhárt Ferenc* 12. o.t., *Mihics Henrik* 12. o.t., *Monostori Eszter* 11. o.t., *Németh Zsófia* 11. o.t., *Pintér Csaba* 11. o.t., *Sebestyén Zita* 11. o.t. 48 pont; **144–149.** *Hankó András* 11. o.t., *Jánosi Róbert* 12. o.t., *Koszta Rita* 11. o.t., *Márkus Viktória* 12. o.t., *Rév Tamás* 11. o.t., *Somodi Katalin* 12. o.t. 47 pont; **150–157.** *Baski Attila* 11. o.t., *Fazekas Gábor* 12. o.t., *Geri Péter* 12. o.t., *Görbicz Gergely* 11. o.t., *Ledniczki Petra* 12. o.t., *Markó Péter* 11. o.t., *Pájer Boróka* 11. o.t., *Széles Ildikó* 11. o.t. 46 pont; **158–160.** *Dobrádi László* 11. o.t., *Tóth Eszter* 12. o.t., *Zsoldos Vanda* 11. o.t. 45 pont; **161–165.** *Kanyó Péter* 11. o.t., *Kiss 123 József* 12. o.t., *Lődör Zoltán* 12. o.t., *Nyisztor Noémi* 12. o.t., *Schwalm Gergő* 11. o.t. 44 pont; **166–170.** *Horváth István* 12. o.t., *Kápolnai Richárd* 12. o.t., *Kungl István* 12. o.t., *Mózer Erzsébet* 12. o.t., *Robotka Zsolt* 12. o.t. 43 pont; **171–177.** *András Anikó* 11. o.t., *Bohák András* 11. o.t., *Garai Tamás* 11. o.t., *Gyenes Katalin* 12. o.t., *Hantos Mariann* 12. o.t., *Sólyomvári Nándor* 12. o.t., *Szabó Gergely* 12. o.t. 42 pont; **178–182.** *Feró Dalma* 11. o.t., *Kiss Adrienn* 11. o.t., *Németh 123 Boglárka* 12. o.t., *Soltész Noémi* 12. o.t., *Töviskes Péter* 12. o.t. 41 pont; **183–188.** *Cseh Péter* 11. o.t., *Darabos Andrea* 11. o.t., *Huszár Zsuzsanna* 12. o.t., *Konta Melinda* 12. o.t., *Nagy 712 Gábor* 11. o.t., *Vörös 163 Csaba* 12. o.t. 40 pont.

Kevesebb pontja van 287 versenyzőnek.

Harmadrendű görbék II.
Poncelet tétele

Mint ismeretes, sárkányok nincsenek. Ez a primitív megállapítás talán kielégíti az egyszerű elmét, de nem a tudományt… Elég az hozzá, hogy a zseniális Cerebron, egzakt módszerekkel boncolgatva a problémát, a sárkányok három faját fedezte fel: a nullás, az imaginárius és a negatív sárkányokat. Mindezek, amint már említettük, nem léteznek, de mindegyik fajta egészen másképpen nem létezik. [1]

Stanisław Lem: Kiberiáda
(Harmadik utazás avagy a valószínűségi sárkányok)

A fogoly

J. V. Poncelet Napóleon katonájaként 24 éves korában Moszkvából visszavonulóban Kutuzov seregének fogságába esett. 1812–13 rettenetes hideg telén 800 km-t meneteltették őt és társait az orosz sztyeppén át a Volga partjáig, a szaratovi fogolytáborig. A rabságban Poncelet felelevenítette magában a bevonulás előtt nem sokkal befejezett egyetemi tanulmányait, olvasmányait. Mindezek új életre keltek benne. Könyvtártól elzártan, szellemi társakat nélkülözve, fizikai fájdalmaktól gyötörten a fiatal hadmérnök a geometria addig ismeretlen területeit fedezte fel. Megalkotta többek között az ideális pont fogalmát, megálmodott egy különleges leképezést, a polaritást[2], és elméjében furcsa körtáncra indultak a poligonok, itt született meg cikkünk témája, Poncelet tétele is.

Az életben maradt rabokat, köztük Poncelet-t, 1814 szeptemberében engedték szabadon. A mérnök-matematikus fogságban fogant gondolatai 1822-ben jelentek meg nyomtatásban az „Értekezés az alakzatok projektív tulajdonságairól” című könyvében. Ebben található az alábbi tétel:

Poncelet tétele: *Legyenek adva az egymást nem érintő e és a körök, a az e belsejében. Az e körön tetszőlegesen választott A_0 pontból indulva megszerkeszthetjük az e kör A_1, $A_2, \ldots$ pontjait úgy, hogy az A_0A_1, $A_1A_2, \ldots$ egyenesek érintsék az a kört és bármely két, a sorban egymást követő egyenes különbözzék egymástól.*

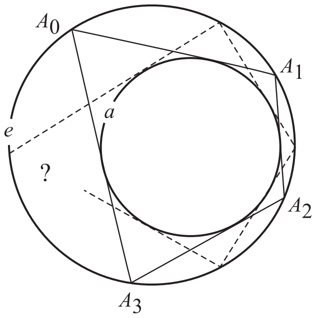
Előfordulhat, hogy bizonyos számú lépésben visszajutunk a kezdőpontba, azaz $A_n = A_0$. Ebben az esetben az e kör bármely másik pontjából indulunk is ki, biztosan visszaérünk a kezdőpontba, mégpedig pontosan ugyanannyi lépésben (n), mint előzőleg.

A tétel tehát nem azt mondja ki, hogy mindig van visszatérés, hanem azt, hogy a visszatérés kérdése, és a lépésszám nem a kezdőpont megválasztásától, hanem kizárólag a két kör nagyságától, egymához viszonyított elhelyezkedésétől függ.

[1] Murányi Beatrix fordítása

[2] *Kiss György:* A körre vonatkozó polaritás, KöMaL, 19998/8. szám, 450. o.

A tétel állítása triviálisan teljesül koncentrikus körök esetén. Minden más esetben viszont meglehetősen nehéz a bizonyítás. Ez az első ránézésre talán ártatlannak tűnő tétel nemcsak születésének regényes körülményei miatt érdekes, de a XIX. századi matematika sűrűjébe vezető tartalma miatt is. Poncelet állítása, a két fejezettel később közölt általánosabb alakjában, ekvivalens a harmadrendű görbe csoporttulajdonságával és a trigonometrikus függvények általánosításainak, az elliptikus függvényeknek az addíciós tételeivel.



1. ábra

Poncelet körök helyett tetszőleges irreducibilis másodrendű görbékre mondta ki a tételt (lásd a 6. feladatot). Azt sem kellene megkövetelni, hogy az egyik görbe a másik belsejében legyen, de ez a fajta általánosítás nagyon megnehezítené az elemi tárgyalást.

Körsorok

Az $O_a(u_a,v_a)$ középpontú r_a sugarú a kör (affin) egyenlete:

$$(x-u_a)^2+(y-v_a)^2-r_a^2=0. \tag{1}$$

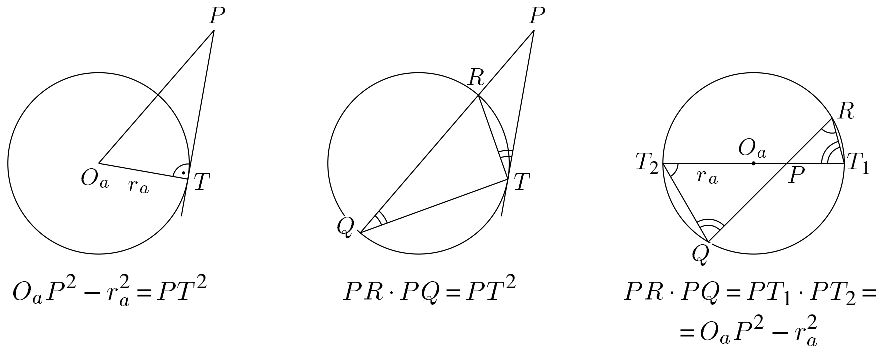
Jelöljük az (1) egyenlet bal oldalán álló polinomot, mint x és y függvényét $a(x,y)$-nal. Ha a $P(\xi,\eta)$ pont illeszkedik erre a körre, akkor

$$a(\xi,\eta)=0,$$

ha viszont nem, akkor

$$a(\xi,\eta)\neq 0.$$

Az utóbbi esetben $a(\xi,\eta)$ értéke nem csak azt árulja el, hogy a P pont nincs rajta a körön, hanem arról is ad információt, hogy hogyan nincs rajta.



2. ábra

A $a(\xi,\eta)$ kifejezés fő része, $(\xi-u_a)^2+(\eta-v_a)^2$ az O_aP szakasz hosszának négyzetét adja meg. Ha $a(\xi,\eta)$ értéke negatív, az azt jelenti, hogy $O_aP^2<r_a^2$, azaz P az a kör belsejében helyezkedik el. Ha a vizsgált érték pozitív, akkor P a körön kívül van, ráadásul $a(\xi,\eta)$ épp a P-ből a körhöz húzott érintő hosszának négyzete (*2. ábra*).

Ennél még némileg többet is mondhatunk. Mind a pozitív, mind a negatív esetben igaz, hogy a P-n át a körhöz húzott tetszőleges szelőnek a körrel vett R, Q metszéspontjaira a $PR \cdot PQ$ érték állandó, azaz független a szelő választásától. Ez a kerületi és az érintőszárú kerületi szögek tételének felhasználásával és hasonló háromszögek segítségével igazolható.

Ezt az állandó értéket a P pont k *körre vonatkozó hatványának* is mondják és éppen egyenlő $O_aP^2 - r_a^2$ -tel, tehát $a(\xi,\eta)$ értékével.[3]

Ennek alapján azt mondhatjuk, hogy az

$$a(x,y) = t$$

egyenletet azok a pontok elégítik ki, amelyeknek az a körre vonatkozó hatványa t; $t > 0$ esetén tehát azok a pontok, amelyekből a a-hoz húzott érintő szakasz hosszának négyzete t.

Legyen adva az a körtől különböző b kör is, melynek egyenlete

$$b(x,y) = (x - u_b)^2 + (y - v_b)^2 - r_b^2 = 0.$$

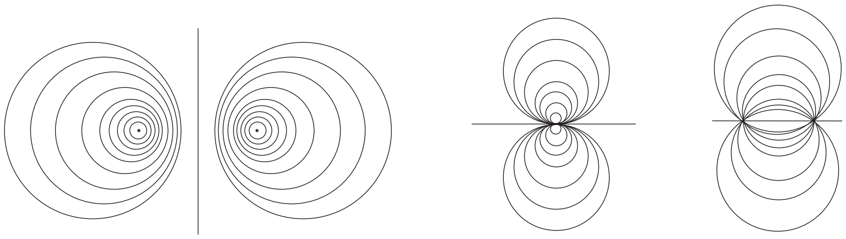
Kereshetjük azokat a pontokat, melyekből az a-hoz, illetve a b-hez húzott érintő szakasz hosszának aránya egy adott érték. Általánosabban, legyen c azon pontok mértani helye a síkban, melyeknek az a-körre vonatkozó hatványa úgy aránylik a b körre vonatkozó hatványához, mint α a β-hoz. A c halmaz egyenlete:

$$\beta a(x,y) - \alpha b(x,y) = 0. \tag{2}$$

Ez is egy kör (esetleg pont, vagy üres halmaz, illetve $\alpha = \beta$ esetén egyenes) egyenlete, hiszen olyan kétváltozós másodfokú egyenlet, amelyben x^2 és y^2 együtthatója egyenlő ($\alpha = \beta$ esetén 0) xy-os tag pedig nincsen benne.

A (2) alakú görbék halmazát az a és b *generálta körsornak* nevezzük. A körsor bármelyik két eleméből megkapható az összes többi elem, egyenleteik (2) alakú *lineáris kombinációik* segítségével. Tehát a körsort bármelyik két tagja generálja, azaz meghatározza.

Ha a és b egy körsor tetszőleges két köre, c pedig a körsor bármelyik eleme, akkor c különböző pontjainak az a-ra és b-re vonatkozó hatványainak aránya ugyanaz az érték.



3. ábra

[3] a $PR \cdot PQ$ szorzatot előjelesen értelmezzük, tehát ha P-től R és Q ellenkező irányban vannak, azaz ha P a kör belső pontja, akkor a szorzat értéke negatív.

Nem nehéz igazolni, hogy 3 fajta körsor van: *nem metsző*, *érintő* és *metsző*. Az elsőben semelyik két körnek sincs közös pontja, a másodikban a körök egy bizonyos pontban érintkeznek egymással, a harmadikban két közös ponton mennek át. (Lásd még az 1., 2. feladatokat.)

Poncelet gondolatmenete

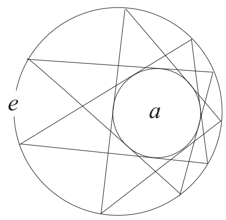
Ebben a fejezetben keveset bizonyítunk, inkább csak vázoljuk Poncelet gondolatmenetét. Annál is inkább, mert az utolsó részben közölt bizonyítás az itteni részletekre is rávilágít.

L. Euler egy nevezetes tétele kapcsolatot teremt a háromszög beírt és körülírt körének r, R sugarai és középpontjaik d távolsága között:

$$R^2 - d^2 = 2Rr. \tag{3}$$

A tétel bizonyítása megtalálható *H.S.M. Coxeter* és *S. L. Greitzer:* Az újra felfedezett geometria című könyvében (Gondolat Kiadó, 1977.) (2.1.2 Tétel), de a 3. feladat is segítséget ad a bizonyításhoz.

Tegyük fel most, hogy azt a feladatot kapjuk, hogy szerkesszünk háromszöget, ha adott körülírt és beírt körének sugara és a két középpont távolsága. A tétel alapján mondhatjuk, hogy ha a három adat nem teljesíti a (3) összefüggést, akkor nem létezik ilyen háromszög, ha viszont teljesíti, akkor a háromszög alulhatározott, végtelen sok megoldás van.

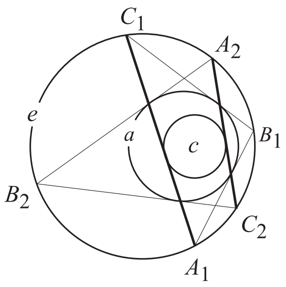


4. ábra

A helyzet ahhoz hasonló, mint mikor három szögből akarunk háromszöget szerkeszteni. Csak akkor van megoldás, ha a szögek összege 180°, ekkor viszont végtelen sok megoldás van. Sőt, a háromszög egyik oldalát ilyenkor tetszőlegesen felvehetjük, mindig találunk megoldást. Éppen így, ha az e és a körök R, r sugarai és középpontjuk d távolsága kielégíti a (3) egyenletet, akkor az e kör bármely pontja felvehető egy e-be és a köré írt háromszög csúcsaként. Ez az állítás persze indoklásra szorul, ehhez hozzásegít pl. a 3. feladat. Az előző állításból és Euler tételéből már következik Poncelet tétele az $n = 3$ esetre: csak a (3) feltétel teljesülése esetén záródhat a poligon három lépésben, akkor viszont akárhonnan indulva záródik.

Hogyan nem léteznek a (3) egyenletnek nem megfelelő adatokból szerkesztendő háromszögek? Poncelet bizonyításának lépései és könyvének bevezetőjében a szerkesztő eszközök beszerzésének nehézségeiről valló panaszai alapján úgy látom, hogy a rab mérnök erre a kérdésre kereste a választ.

Az *5. ábrán* ilyen rossz adatokból próbáltunk háromszöget szerkeszteni. Az e, a köröket a rossz adatoknak megfelelően vettük fel. Az e kör egy próbaképp felvett A pontjából érintőt húztunk a-hoz, ami e-ből kimetszette a háromszög következő csúcsát, B-t. A B-ből a-hoz húzott másik érintő segítségével kaptuk C-t. Az AC egyenes láthatóan nem érinti a-t, tehát a szerkesztés nem volt sikeres. Több hasonló próbálkozás után Poncelet azt vehette észre (hiszen ezt bizonyította), hogy a kísérletezés során kapott AC egyenesek egyike sem érinti ugyan az a kört, de mindegyik érint egy bizonyos másik kört, c-t. Ráadásul ez a c kör az e és a generálta körsorhoz tartozik. Ez különösen feltűnő a háromszög szerkesztésének szempontjából eleve reménytelen a, e metsző körök esetén.)



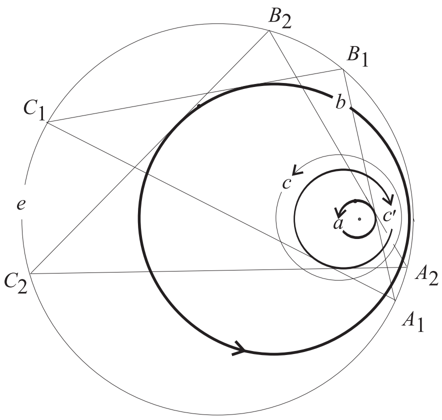
5. ábra

Tehát a szerkesztendő háromszögek egyfajta nagyon szabályos módon nem léteznek. Euler tételéről kiderült, hogy nem egyszerűen csak a háromszögről és annak két köréről, hanem egy körsor elemei között kígyózó poligon záródásáról szól.

A megfigyelésekből adódik az előző szerkesztési feladat alábbi általánosítása.

Az adott e kör és a belsejében felvett a, b, c körök tartozzanak ugyanahhoz a körsorhoz. Szerkesztendő háromszög, melynek körülírt köre e, AB, BC, AC oldalai pedig rendre érintik az a, b, c köröket.

Egy külső pontból egy körhöz két érintő is húzható. Hogy az ebből fakadó szerkesztési bizonytalanságot megszüntessük, a feladatban rögzítsünk az a, b, c körökön egymástól függetlenül egy-egy forgásirányt, és követeljük meg, hogy a szerkesztendő ABC háromszög oldalain az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ irányok mindhárom érintési pontnál egyezzenek meg a megfelelő érintő kör forgásirányával.



6. ábra

A szerkesztési feladat megoldása korábbi feladatunkéhoz hasonló, de a bizonyítás itt még nehezebb. Most sem a szerkesztés okozza a nehézséget, hanem a diszkusszió: Ha az e, a, b, c körök (és az utóbbiak forgásiránya) megfelelő, akkor e bármely pontjából kiindulva az egyértelmű szerkesztési eljárás eredményeképp mindig háromszöget kapunk. Általában pedig itt is azt vehetjük észre, hogy a próbálkozások során kapott AC egyenesek mindig a körsor egy bizonyos c' körét érintik, mindig ugyanabban a forgásirányban, de ez a c' kör az esetek zömében nem egyezik meg c-vel. Most nem térünk ki rá, hogy mikor egyezik meg a c' kör c-vel, éppen elég meglepő, hogy a c' kör egyáltalán létezik.

Tekintsük most az e kör pontjainak halmazán azt a leképezést, amely az $X \in e$ ponthoz hozzárendeli az X-ből az a (irányított) körhöz húzott, az irányításnak megfelelő érintő e-vel való második metszéspontját. Úgy tekintjük, hogy ha az a kör megegyezik e-vel, akkor ez a leképezés az *identitás*, azaz a helybenhagyás. Ha az a kör koncentrikus e-vel, de nem egyezik meg vele, akkor a vizsgált transzformáció egy egyszerű elforgatás. Más esetben csak a forgatáshoz hasonló hozzárendelést kapunk, nevezzük ezt a továbbiakban *ferde elforgatás*nak. Két, azonos pont körüli elforgatás egymás utáni elvégzésének eredőjeként (azaz a két elforgatás *kompozíciója*ként) újabb elforgatást kapunk, melynek szöge az eredeti forgási szögek összege. Előbb épp azt vettük észre, hogy ennek az állításnak az első fele általánosítható: az a irányított körre, majd a b irányított körre vonatkozó ferde elforgatások kompozíciója is egy ferde elforgatás, nevezetesen a fent említett c' kör által meghatározott ferde elforgatás. Jacobi bizonyítása majd arra világít rá, hogy mi az a szám, az a mérték, ami az általános esetben a forgási szöget helyettesíti.

Mintha az e körből, a körsor e belsejében fekvő irányított köreiből és pontköréből (lásd a 2. feladatot), álló $\mathbb{P}$ halmazon lenne egy $\circledast$ művelet, ami a ferde elforgatások kompozíciójának felel meg:

$$a \circledast b = c'.$$

Poncelet, bár szót sem ejtett ilyen absztrakt algebrai fogalmakról, lényegében mégis azt mutatta meg, hogy ez a $\circledast$ művelet asszociatív és kommutatív. Ez azt jelenti, hogy a $\mathbb{P}$ halmaz a $\circledast$ műveletre nézve kommutatív, másként szólva *Abel* csoportot alkot, hiszen a maradék csoportaxiómák is teljesülnek: e az egységelem, és egy irányított kör inverze ugyanaz a kör az ellentétes irányításával.

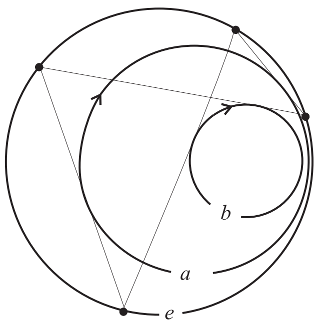
Gondolatmenetének eredményeként Poncelet a korábban kimondottnál jóval általánosabb tételhez jutott el:

Poncelet általános tétele. *Legyen e egy nem metsző körsor egyik köre, az a_1, a_2, $\dots$, a_n irányított körök pedig ugyanennek a körsornak e belsejében található nem feltétlenül különböző tagjai. Az e körön fölvett A_0 pontból kiindulva megszerkesztjük az A_1, $A_2, \dots$ A_n pontokat ugyanezen a körön úgy, hogy az A_0A_1, $A_1A_2, \dots$ $A_{n-1}A_n$ egyenesek rendre érintsék az a_1, $a_2, \dots$ a_n köröket, az irányításnak megfelelően. Előfordulhat, hogy a szerkesztés végén éppen visszajutunk, azaz $A_n = A_0$. Ebben az esetben az e kör bármelyik másik pontjából is indulunk ki, az n-edik lépés után vissza fogunk jutni a kezdőpontba és még arra sem kell ügyelnünk, hogy ugyanabban a sorrendben húzzuk az érintőket a megadott körökhöz.*

Bizonyítás. Az e körvonal a_1, $a_2, \dots$ a_n körökre vonatkozó ferde elforgatásainak kompozíciója a körsor

$$b = a_1 \circledast a_2 \circledast \dots \circledast a_n$$

irányított köre által meghatározott ferde elforgatással egyezik meg. Ez a transzformáció az A_0 pontot önmagára képezi, tehát a b irányított körhöz A_0-ból húzott érintő nem metszheti az e kört, hanem azt is érinti. Ez azt jelenti, hogy $b = e$, hiszen a körsor többi eleme e belsejében van és nem is érintheti e-t. Az e által meghatározott ferde forgatás az identitás, tehát az A_0 pont helyett bármelyik másik pontból indulunk is ki, visszajutunk hozzá. A csoport kommutativitása miatt az se számít, hogy milyen sorrendben húzzuk az érintőket a megadott körökhöz.

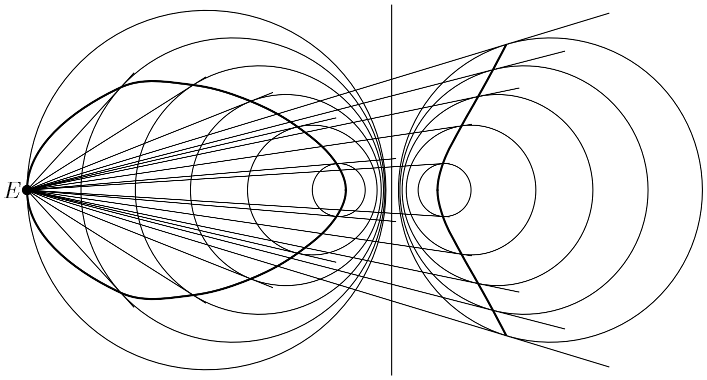


7. ábra. $a \circledast b = b \circledast a$

Ha $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$, akkor Poncelet korábban említett tételéhez jutunk. Ott nincs szükség a körök irányításának bevezetésére, mert ha az a kör (illetve az általános esetben az a_1, $a_2 \dots$ a_n körök mindegyikének) irányítását megfordítjuk, akkor ugyanazokat az érintőket kell megrajzolni, mint korábban, csak ellenkező irányban és fordított sorrendben.

Poncelet tétele és a harmadrendű görbe

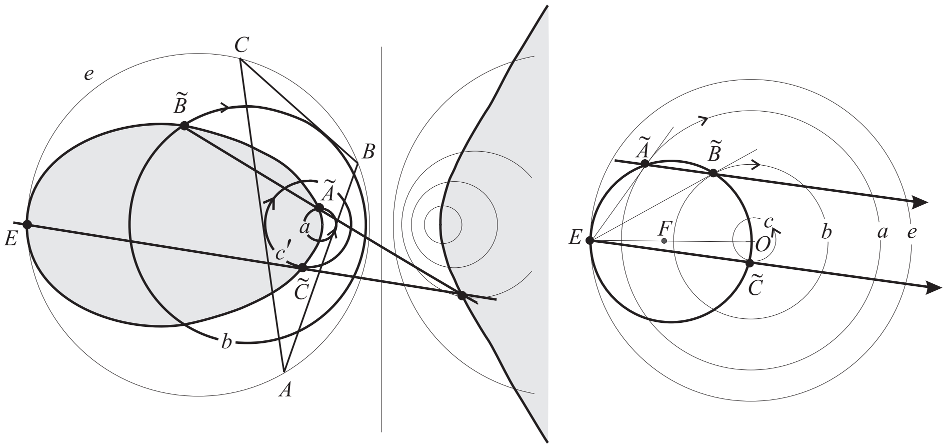
Feleltessünk meg a $\mathbb{P}$ csoport elemeinek egy-egy pontot az alábbi módon. Válasszunk e-n egy tetszőleges E pontot e számára. A körsor egy tetszőleges irányított körének feleljen meg az E-ből hozzá (az irányításnak megfelelően) húzott érintő érintési pontja (*8.a) ábra*).



8.a) ábra

Az így kapott pontok egy harmadrendű görbe részhalmazát alkotják (lásd a 6. feladatot). Ha a görbe egységelemének az E pontot tekintjük, akkor a szóbanforgó részhalmaz egyben részcsoport is lesz és a $\mathbb{P}$-beli $\circledast$ művelet és a harmadrendű görbe $*$ művelete éppen megfelel egymásnak (*8.b) ábra*). Ezt az állítást itt nem bizonyítjuk.

Érdekesen lóg ki a sorból a koncentrikus körökből álló körsor esete. Ebben az esetben $\mathbb{P}$ elemei valódi forgatásoknak felelnek meg.



8.b) ábra. Ha $a \circledast b = c'$, akkor az E-ből az a, b, c' körökhöz húzott érintők $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}'$ érintési pontjaira $\tilde{A} * \tilde{B} = \tilde{C}'$.

Az E-ből a körökhöz húzott érintők talppontjai első látásra nem harmadrendű görbét, hanem az EO szakasz k Thalesz-körét alkotják. Ha az a irányított körhöz hozzárendelt pont $\tilde{A}$, akkor a körnek megfelelő forgatás a $2\cdot\tilde{A}OE\sphericalangle=\tilde{A}FE\sphericalangle$-gel való forgatás, ahol F a k középpontját, $\sphericalangle$ az irányított szöget jelöli.

Tegyük fel, hogy ehhez a Thalesz körhöz tartozik még egy l egyenes is, nevezetesen az ideális egyenes. (A sugárnyaláb modellben úgy is fogalmazhatnánk, hogy mostani ábránk a teljes konfigurációnak csak egy rajza, amiről lemaradt az l egyenes, mert a rajzsík párhuzamosan áll az egyenesről szemünkbe jövő fénysugarak síkjával.) Az $l\cup k$ ponthalmaz egy (reducibilis) harmadrendű görbe, hiszen polinomja egy másodfokú és egy elsőfokú polinom szorzata. A reducibilis görbén nem végezhető el korlátlanul a $*$ művelet (pl. az egyenes két pontját most nem tudnánk összeszorozni), de az adott esetben k bármely két pontja össze-$*$-szorozható. Az $\tilde{A}$, $\tilde{B}\in k$ pontok $\tilde{A}*\tilde{B}$ szorzatát úgy kapjuk, hogy tekintjük az $\tilde{A}\tilde{B}$ egyenes és $l\cup k$ harmadik metszéspontját, tehát az $\tilde{A}\tilde{B}$ egyenes ideális pontját; majd ezt összekötjük E-vel, azaz párhuzamost húzunk $\tilde{A}\tilde{B}$-vel E-n át és ez az egyenes kimetszi k-n $\tilde{A}*\tilde{B}$-t. A $*$ és $\circledast$ műveletek egymásnak való megfelelése tehát az alábbi elemi állításon múlik:

Ha az $\tilde{A}\tilde{B}E$ háromszög körülírt körének középpontja F és az $E\tilde{C}$ húr párhuzamos az $\tilde{A}\tilde{B}$ húrral, akkor

$$EF\tilde{A}\sphericalangle+EF\tilde{B}\sphericalangle=EF\tilde{C}\sphericalangle\pmod{2\pi}.$$

E szép állítás igazolását az olvasóra bízzuk.

Míg Poncelet 1822-ben publikálta poligonjait, a harmadrendű görbe csoporttulajdonságára csak 1835-ben derített fényt a königsbergi Jacobi. De előtte még neki is volt egy kalandja Poncelet tételével.

Elliptikus integrálok

1827-ben a *Journal für die reine und angewandte Mathematik* [4] folyóiratban az alábbi feladatot tűzte ki J. Steiner:

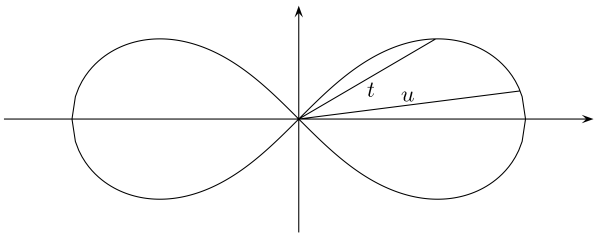
Egy ötszög egyszerre húr- és érintő-ötszög is. Milyen összefüggés áll fönn a két kör sugara és középpontjaik távolsága között? Oldjuk meg a feladatot 6-, 7-, 8-, 9, 10-*szög esetére is.*

Steiner tehát, Poncelet tételéhez kapcsolódva, a záródás algebrai feltételei iránt érdeklődött. Steiner tudta a megoldást ezekben az esetekben, de nemhiába tűzte ki a problémát, mert felkeltette Jacobi érdeklődését, aki így új, különleges bizonyítást adott Poncelet tételére.

[4] A *Tiszta és alkalmazott matematika lap* című folyóiratot éppen Steiner és Abel ösztönzésére alapította A. L. Crelle porosz mérnök.

Jacobi ekkortájt az elliptikus integrálokkal foglalkozott. Ez a problémakör G. Fagnano hercegnek az *ellipszissel* és a *lemniszkáta* görbével kapcsolatos eredményeiből született. Fagnano szerette volna meghatározni, hogy az $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ egyenletű lemniszkáta origóból induló t hosszúságú húrjához mekkora lemniszkátaív tartozik. Ezzel a problémával ekvivalens kérdéssel J. Bernoulli és L. Euler is találkozott rugalmasságtani vizsgálódásaik során. Egyiküknek se sikerült fölírni a lemniszkáta ívhosszát megadó $I(t)$ függvényt.

Fagnano eredménye az volt, hogy meg tudta határozni, hogy milyen hosszú az a húr, amelyhez kétszer akkora ív tartozik, mint a t hosszúságú húrhoz. Euler messzemenően általánosította a módszert. Képletet, úgynevezett *addíciós formulát*, adott, amely a t_1, t_2 számokból előállítja annak a húrnak a hosszát, amelyhez tartozó ív éppen olyan hosszú, mint a t_1 és t_2 hosszúságú húrok ívei összesen. Euler ezen is túl ment: megadta azoknak az ív- és területszámítási problémáknak (általánosabban: *integráloknak*) egy széles körét, ahol addíciós formula adható. Ezeket nevezzük elliptikus integráloknak.



9. ábra. Ha $u=\dfrac{2t\sqrt{1-t^4}}{1+t^4}$, akkor $I(u)=2I(t)$

Jacobi is jelentős eredményeket ért el ebben a témában. N. H. Abellel versengve írták a cikkeket az említett folyóiratban az elliptikus integrálokról. Jacobi, változatosságképpen, megpróbálkozott Steiner feladatával is. Ábrát készített, behúzott néhány vonalat, kifejezte a hosszukat és elámult: az elliptikus integrálok addíciós formuláihoz kísértetiesen hasonló képletek álltak előtte. A képletek azt mutatták, hogy van egy mennyiség, egy integrál, ami a Poncelet-poligon egyes oldalainak behúzásakor mindig ugyanannyival változik. A koncentrikus körök esetén ez a mennyiség a poligonhoz tartozó középponti szög. Ebben a speciális esetben ugyanis a két kör közötti minden „érintő húr” egyenlő hosszú, középponti szögeik is egyenlőek. Ha e középponti szög n-szerese 360°, vagy annak egész számú többszöröse, akkor a poligon n lépésben záródik, egyébként pedig nem.

Jacobi azt látta a képletekből, hogy az általános esetben is van egy, a középponti szögnek megfelelő mérték. A tétel bizonyításához nem volt lényeges, hogy mi ennek a mértéknek a geometriai tartalma. Ezt azért hangsúlyozzuk ennyire, mert az alább közölt bizonyítás logikus és szemléletes, de nem árt tudni, hogy aki kitalálta, az másfajta logikával, másfajta szemlélettel jött rá.

Jacobi bizonyítása

Szeretnénk a Poncelet tétel e alapkörén egy olyan mértéket bevezetni, amely a kör PP' és QQ' ívéhez ugyanazt a számot rendeli, ha a PP' egyenes és a QQ' egyenes is érinti az a kört.

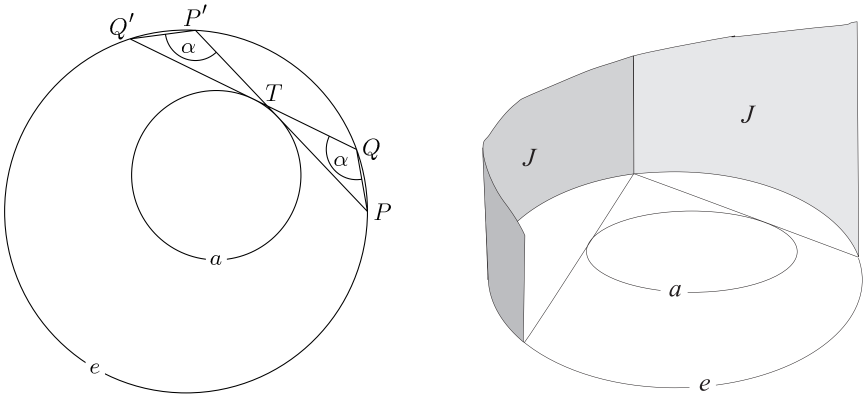
Próbálkozzunk először egymáshoz közeli ívekkel. Az is jó lenne, ha a PQ, $P'Q'$ ívek mértéke lenne egyenlő. Az említett ívek majdnem ugyanolyan hosszúak, mint a

KöMaL – 2000/5 MAT0005 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 18:59 (16. lap)

PQ, $P'Q'$ szakaszok. Ezek a szakaszok, sajnos, nem egyenlő hosszúak, de egymással egyszerűen kapcsolatba hozhatók. A PQT, $Q'P'T$ háromszögek ugyanis az egyenlő kerületi szögek miatt hasonlóak. Ennek alapján

$$\frac{PQ}{PT} = \frac{P'Q'}{Q'T}. \tag{4}$$

Az egyenlet két oldalán a nevezők a PQ, illetve a $P'Q'$ ív pontjaiból az a körhöz húzott érintőszakaszok hosszát közelítik. Ez azt jelenti, hogy ha egyenlő mértéket akarunk adni a PQ, $P'Q'$ szemköztes íveknek, akkor mindkettőt a pontjaiból az a körhöz húzott érintő reciprokával kell súlyozni.



10. ábra

Ezt a gondolatot szemléletessé tehetjük. Emeljünk az e körre, a kör síkjára merőlegesen, hengerszerűen egy palástot. A palást alapja legyen maga a körvonal, a magassága viszont pontonként változzék. A kör P pontjában a palást magassága legyen egyenlő a P-ből az a körhöz húzott érintőszakasz hosszának reciprokával. A palást felszíne a keresett mérték.

Állítjuk, hogy a PQ és a $P'Q'$ ívekhez tartozó palástdarabok felszíne egyenlő. A (4) egyenlet két oldalán e palástrészek felszínének egy-egy közelítő értéke áll. A PQ és $P'Q'$ szakaszok hossza a PQ, PQ' ívek hosszát, $\dfrac{1}{PT}$ és $\dfrac{1}{Q'T}$ értéke pedig a vizsgált ívek fölötti palást magasságát közelíti. E palástdarabok felszínére pontosabb értéket kapunk, ha a PQ ívet és vele szemben a $P'Q'$ ívet kisebb darabokra osztjuk, és a kisebb részeket külön-külön becsüljük meg egy-egy húr és közelítő magasság szorzatával. Ha ezt mindig a (4) egyenlet két oldalának megfelelő formula segítségével tesszük, akkor a PQ ív és a $P'Q'$ ív fölötti részekre mindig egyenlő közelítő értékeket kapunk. Ezzel a módszerrel a két palástrész felszínét tetszőleges pontossággal megközelíthetjük, ami csak úgy lehet, hogy ez a két rész egyenlő felszínű.

Eredményünkből következik, hogy a PP' és QQ' ívekhez tartozó palástdarabok is egyenlő felszínűek. Képzeljük el, hogy a P, P' pontokat úgy mozgatjuk az e körön, hogy a PP' húr mindig érinti az a kört. Megállapításaink szerint eközben a PP' ívhez tartozó palástrész területe mindig állandó marad. Jelölje ennek az állandónak az értékét J, a teljes palást területét I.

A Poncelet-poligon pontosan akkor záródik n lépésben m körbefordulás után, ha $mI = nJ$. Ez a feltétel teljesen független az A_0 kezdőpont megválasztásától, így Poncelet tételét bebizonyítottuk. Azt is láthatjuk, hogy a poligon akkor fog záródni, ha a $\frac{J}{I}$ hányados racionális és a visszatéréshez szükséges lépésszám ennek a racionális számnak a nevezője.

A Jacobi-féle palást területe olyan tulajdonságú, mint a lemniszkáta ívhossza. Egy rögzített pontból induló húrok hosszától való függése transzcendens, azaz véges sok elemi függvény segítségével nem fejezhető ki. De föl lehet írni a Fagnano-féle duplikációs képletnek megfelelő n-szerezési formulát, amivel Steiner problémája is teljes általánosságban megoldható. Ezt a munkát azonban, csak mintegy 25 évvel később, A. Cayley végezte el.

Jacobi módszere, egy kis módosítással, alkalmas Poncelet általános tételének bizonyítására is. Ennek érdekében rögzítsünk az e körön egy E pontot és a palást P pont fölötti magasságát definiáljuk úgy, mint az E ponttól, illetve a P ponttól az a körhöz húzott érintők arányát: $m(P) = \frac{EE_A}{PP_A}$. Ez a korábban definiált magasságtól csak az EE_A konstans szorzóban különbözik. Értelme az, hogy ez a magasság univerzális, a körsor minden eleme ugyanazt a palástot határozza meg. Ennek magyarázata egy korábbi eredményünkben rejlik. Láttuk, hogy ha a, b, e egy körsor három eleme, akkor e különböző pontjainak az a, b körökre vonatkozó hatványainak, esetünkben az érintő szakaszoknak, az aránya egyenlő: $\frac{EE_A}{EE_B} = \frac{PP_A}{PP_B}$, azaz $\frac{EE_A}{PP_A} = \frac{EE_B}{PP_B}$.

Ha a teljes palást területe I, a körsor $a_1, a_2, \ldots, a_n$ irányított elemeihez az érintők által meghatározott ívek fölötti palástdarabok területe $J_1, J_2, \ldots, J_n$ akkor a záródás feltételét a

$$J_1 + J_2 + \ldots + J_n = mI$$

egyenlet fogalmazza meg. Ennek az összefüggésnek a teljesülése pedig valóban független a kezdőpont választásától.

Feladatok

1. a) Mutassuk meg, hogy bármely körsor tagjainak középpontjai egy egyenesen helyezkednek el.

b) Legyen egy körsor egyik körének sugara R, a körsor egy másik, az előzőnél kisebb körének sugara r, a két középpont távolsága d. Bizonyítsuk be, hogy a

$$k = \sqrt{\frac{4Rd}{(R+d)^2 - r^2}}$$

értéke nem függ a kisebb kör választásától.

c) Mutassuk meg, hogy a körsor rendre akkor koncentrikus; nem metsző; érintő; metsző, ha $k=0$; $0<k<1$; $k=1$; $1<k$.

2. Bizonyítsuk be, hogy a nem metsző; érintő; metsző körsorokban rendre 2; 1; 0 *pontkör*, azaz $(x-u)^2+(y-v)^2=0$ egyenletű alakzat található.

3. Az ABC háromszög körülírt köre e, beírt köre a. A két kör sugara R, illetve r, középpontjaik távolsága d. A beírt kör érintési pontjai X, Y, Z.

a) Bizonyítsuk be, hogy az a körre vonatkozó inverziónál az e kör képének sugarát és középpontjának a középpontjától való távolságát az

$$R'=\frac{Rr^2}{R^2-d^2} \quad d'=\frac{dr^2}{R^2-d^2}$$

képletek adják meg!

b) Bizonyítsuk be, hogy az a körre vonatkozó inverziónál az A, B, C pontok az XYZ háromszög oldalfelezőpontjaiba képződnek.

c) Bizonyítsuk be Euler tételét!

d) Bizonyítsuk be Poncelet tételét az $n=3$ esetben!

4. Keressük meg az Euler tételének megfelelő formulát a háromszög körülírt és *hozzáírt* körére vonatkozólag!

5. a) Bizonyítsuk be, hogy az $a(x,y)=0$, $b(x,y)=0$ körök generálta körsor $P(\xi,\eta)$ ponton átmenő elemének egyenlete:

$$b(\xi,\eta)a(x,y)-a(\xi,\eta)b(x,y)=0.$$

b) Bizonyítsuk be, hogy az (1) egyenletű kört a $P(\xi,\eta)$ pontjában érintő egyenes egyenlete:

$$(\xi-u_a)(x-\xi)+(\eta-v_a)(y-\eta)=0.$$

c) Bizonyítsuk be, hogy egy pontból egy körsor elemeihez húzott érintők érintési pontjai általában harmadrendű görbét alkotnak.

6. a) Írjuk föl az (1) egyenlet homogén megfelelőjét és mutassuk meg, hogy a körre illeszkednek az $(1,i,0)$, $(1,-i,0)$ ideális és egyben képzetes $(i^2=-1)$ pontok.

b) Bizonyítsuk be, hogy egy valós együtthatós, nem üres irreducibilis másodrendű görbe pontosan akkor kör, ha illeszkednek rá az $(1,i,0)$, $(1,-i,0)$ pontok.[5]

Hraskó András

[5] A komplex számok bevezetése a geometriába szintén Poncelet hadifogságbeli töprengéseinek eredménye. Többek között ezt mondta: ha komplex koordinátákat is megengedünk, akkor bármely két másodrendű görbének létezik két közös pontja. Ha ezeket átvetítjük az $(1,i,0)$, $(1,-i,0)$ pontokba, akkor a két görbéből két kört kapunk. Így a Poncelet tételt is elég két körre igazolni.

Olimpiai válogatóverseny

2000. március 16.

Az idén Dél-Korea rendezi a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát. A magyar diákok felkészülését – több, mint 40 éve – *Reiman István* tanár úr irányítja. A felkészülés jegyében került sor március 16-án arra a versenyre, amelynek alapján összeállt az olimpiára készülő szűkebb keret, továbbá kijelölték a XI. magyar–izraeli matematikaversenyen résztvevő négy magyar diákot, *Csikvári Pétert* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t.), *Gyenes Zoltánt* (Budapest, Apáczai Cs. J. Gimn., 12. o.t.), *Vizer Mátét* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) és *Zábrádi Gergelyt* (Győr, Révai M. Gimn., 12. o.t.).

A válógatóverseny feladatai a következők voltak:

1. *Az ABC háromszög beírt, illetve köréírt körének középpontja K, illetve O, magasságpontja M.*

a) *Ha* $\sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\alpha$, *mekkora a* $\varphi = AKO\sphericalangle$*?*

b) *Milyen összefüggésnek kell fennállnia a háromszög szögei között, ha az $AMO\sphericalangle$ az a) alatt értelmezett φ szöggel egyenlő?*

2. *Adott a síkon* 10 *pont, közöttük nincs három egy egyenesen. Minden pontpárt összeköt egy szakasz (él). Az éleket kiszínezzük k színnel úgy, hogy bármely k pontot választva, a köztük futó élek között mind a k szín előfordul. Határozzuk meg azt a legkisebb k-t* ($1 \le k \le 10$)*, amelyre létezik ilyen színezés.*

3. *Az S halmaz n darab különböző valós számot tartalmaz. Legyen T azoknak a valós számoknak a halmaza, amelyek előállíthatók k darab különböző S-beli szám összegeként* ($1 \le k \le n$)*. Bizonyítsuk be, hogy T-nek legalább* $k(n-k)+1$ *eleme van, és ez az érték általában már nem növelhető.*

XI. magyar–izraeli matematikaverseny

Április 12-én és 13-án került sor a XI. magyar–izraeli matematikaverseny egyéni részére. A Nemzetközi Matematikai Diákolimpia rendszerében lebonyolított verseny az idei évtől kezdve *Joe Gillis* izraeli és *Turán Pál* magyar matematikusok emlékére a **Gillis–Turán Matematikaverseny** nevet viseli. A kétnapos egyéni verseny feladatai a következők voltak:

Első nap

1. *Legyen S a 2000 szám összes partícióinak halmaza. Minden S-beli p partícióra definiálunk egy függvényt:* $f(p) = ($*a p-beli összeadandók száma*$) + ($*a p-beli maximális összeadandó*$)$*. Számítsuk ki azt a minimális értéket, amit $f(p)$ S-en felvesz.*

Megjegyzés. Egy pozitív egész n szám partíciója alatt értjük n egy előállítását pozitív egészek összegeként. (Két partíciót, amelyek csak az összeadandók sorrendjében különböznek, nem tekintünk különbözőnek.)

2. *Bizonyítsuk be, vagy cáfoljuk meg a következő állítást: minden pozitív egész k számhoz létezik olyan pozitív egész n szám, hogy az $\binom{n}{i}$ binomiális együttható osztható k-val minden $1 \le i \le n-1$ esetén.*

3. *Legyen ABC egy olyan háromszög, ami nem egyenlő oldalú. Az ABC háromszög beírt köre érintse a megfelelő oldalakat az A_1, B_1, C_1 pontokban, és legyen M az $A_1B_1C_1$ háromszög magasságpontja. Bizonyítsuk be, hogy M rajta van az ABC háromszög körülírt körének középpontját és beírt körének középpontját összekötő egyenesen.*

Második nap

1. *Legyen $S = \{1, 2, \ldots, 2000\}$. Tekintsünk két A, $B \subseteq S$ halmazt, amelyekre $|A| \cdot |B| \ge 3999$. Bizonyítsuk be, hogy az $(A-A) \cap (B-B)$ halmaz nem üres.*
Az $X-X$ jelölés jelentése: $X-X = \{s-t \mid s, t \in X,\ s \ne t\}$. $|X|$ jelöli az X halmaz elemszámát.

2. *d egy adott egész szám. Legyen az S halmaz a következő:*

$$S = \{m^2 + dn^2 \mid m, n \in \mathbf{Z}\}.$$

Legyen p, q az S halmaz két eleme, és tegyük fel, hogy p prím. Tegyük fel továbbá, hogy $r = \dfrac{q}{p}$ egész szám. Bizonyítsuk be, hogy ekkor r is eleme az S halmaznak.

3. *k és l adott pozitív egész számok, a_{ij} $(1 \le i \le k,\ 1 \le j \le l)$ pedig $k \cdot l$ rögzített pozitív szám. Bizonyítsuk be, hogy ha $q \ge p > 0$, akkor*

$$\left(\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{k} a_{ij}^{p}\right)^{q/p}\right)^{1/q} \le \left(\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{l} a_{ij}^{q}\right)^{p/q}\right)^{1/p}.$$

A haifai egyetem vendégeként a magyar csapat a következő eredményt érte el (minden feladat 7-7 pontot ért):

Csikvári Péter, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t., 30 pont;
Gyenes Zoltán, Budapest, Apáczai Cs. J. Gimn., 12. o.t., 33 pont;
Vizer Máté, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t., 30 pont;
Zábrádi Gergely, Győr, Révai M. Gimn., 12. o.t., 35 pont.

Az első négy feladat – könnyebbek voltak az átlagosnál – nem tette különösebben próbára a versenyzőket. Az ötödik feladatot a magyarok közül csak Zábrádi Gergely oldotta meg, a hatodikban pedig egyedül Gyenes Zoltánnak volt értékelhető részeredménye. A remekül felkészült izraeli diákok közül ketten is megoldották a legnehezebb, hatodik feladatot, így most az egyéni eredményeket összesítve megelőztek minket; a magyar versenyzők 128, az izraeliek 133 pontot értek el. Gratulálunk, és sok sikert kívánunk nekik a nyári koreai diákolimpián!

A harmadik napon újra felelevenítettük az első évek nagysikerű csapatversenyét. Az angol nyelven megfogalmazott feladatokon együtt gondolkodtak és dolgoztak a négytagú csapatok. A feladatokat a 298. oldalon közöljük.

A csapatverseny problémáinak megoldása a magyar diákoknak sikerült valamivel jobban. Mindkét csapat megoldotta az első feladat első két kérdését, és más-más módszerrel a második feladatot. A harmadik feladatban a magyar csapat teljesítménye határozottan felülmúlta a vendéglátókét. (A nyitott probléma megoldásával is megpróbálkoztak, de részeredményeken túl nem sokra jutottak.)

A háromnapos verseny ünnepelyes eredményhirdetésére április 16-án, vasárnap délután került sor a haifai egyetem dísztermében. Az esemény díszvendége volt *Joszef Szarid,* az izraeli művelődési miniszter, a magyar külképviselet nevében pedig *dr. Jungbert Béla* helyettes nagykövet jött el Tel Avivból.

A jövő évi, immár 12-dik verseny színhelye a hagyományoknak megfelelően Magyarország lesz.

Pataki János

Bács-Kiskun Megyei Középiskolai Matematika Verseny, 1999/2000 tanév

Bács-Kiskunban az a szokás, hogy minden évben más-más iskola rendezi a megyei versenyt – ezúttal a kiskőrösi Petőfi Sándor Gimnázium, Kertészeti Szakközépiskola és Kollégiumban 1110 diák részvételével, 4 évfolyamon, 10 kategóriában zajlott a vetélkedés. A feladatsorokat *Deli Lajos*, a hajdúszoboszlói Hőgyes Endre Gimnázium tanára állította össze. A 31 díjazott tanuló öt- és tizenkétezer forint közötti tárgyjutalmat kapott. Külön tárgyjutalomban részesültek a felkészítő tanárok, valamint a legjobban szereplő gimnázium és szakközépiskola matematika munkaközösségei.

A versenyről a Bács-Kiskun Megyei Önkormányzat Pedagógiai Intézete kiadványt jelentetett meg. A részletes eredmények a `http://www.petofi-kkoros.sulinet.hu` honlapon tekinthetők meg.

Rideg László

A verseny első helyezettjei a különböző kategóriákban a következők voltak:

9. osztály

Horváth Katalin, Kecskeméti Református Kollégium Gimnáziuma, Kecskemét, tanárai: Gálfiné Makra Ildikó, Szabó István;
Nagy Károly, Kada Elek Közgazdasági Szakközépiskola, Kecskemét, tanára: Fuchs Józsefné.

10. osztály

Iván Szilárd, Bolyai János Gimnázium, Kecskemét, tanára: Varga József;
Péli Mónika, II. Rákóczi Ferenc Mezőgazdasági, Közgazdasági és Informatikai Szki., Kiskunhalas, tanára: László Károly.

11. osztály

Medgyesi László, Katona József Gimnázium, Kecskemét, tanárai: Horti Attila, Varga József;
Vizer Tibor, Piarista Gimnázium, Kecskemét, tanára: Fazekas József;
Huszka Krisztián, Petőfi Sándor Gépészeti Szakközépiskola, Kiskunfélegyháza, tanára: Szabó Lászlóné.

KöMaL – 2000/5 MAT0005 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 18:59 (22. lap)

12. osztály

Simon István, Magyarországi Németek MK Gimnázium, Baja, tanára: Steingart János;
Ivaskó György, III. Béla Gimnázium, Baja, tanára: Királyné Nagy Éva;
Iván Szabolcs, Bolyai János Gimnázium, Kecskemét, tanára: Varga József;
Jagadics Arnold, Türr István Közgazdasági és Postaforgalmi Szki., Baja, tanára: Vörös Rózsa.

Közöljük a verseny döntő fordulójában a 9. és a 10. évfolyam feladatait:

9. évfolyam

1. Hány olyan ezernél kisebb természetes szám van, amely sem öttel, sem héttel, sem tizenegyel nem osztható? Hány négyzetszám van az ezen tulajdonsággal rendelkező számok között?

2. A P pont az $ABCD$ négyzeten belül van, a Q pont pedig kívül úgy, hogy a $PAB\triangle$ és a $QCB\triangle$ is szabályos. Bizonyítsd be, hogy a négyzet D csúcsa rajta van a P és Q pontokat összekötő egyenesen! (Az A, B, C, D ebben a sorrendben a négyzet csúcsai.)

3. Két doboz mindegyikében 3 piros, 3 fehér és 3 kék golyó van. Bekötött szemmel kivesszük az egyik dobozból a lehető legnagyobb számú golyót úgy, hogy még biztosak lehessünk abban, hogy mindegyik színből legalább egy golyó marad a dobozban. Ezeket a golyókat betesszük a másik dobozba. Most – továbbra is bekötött szemmel – visszatesszük a második dobozból az elsőbe azt a lehető legkisebb számú golyót, amennyi ahhoz kell, hogy az első dobozban mind a három színből legalább két golyó legyen. Hány golyó marad a második dobozban?

4. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 5 cm, átfogója 13 cm hosszúságú. A háromszög beírt körének az átfogón lévő érintési pontja az átfogót két szakaszra bontja. Hányszorosa a két szakasz hosszának szorzata a háromszög területének? Igaz-e a kapott eredmény bármely derékszögű háromszög esetén?

5. Egy kereskedő egy adott termék eladási árát úgy alakítja ki, hogy a beszerzési árhoz a beszerzési ár bizonyos százalékát hozzáadja. Ez az ő nyeresége. Ha az árut 30 %-os engedménnyel adná el, még mindig maradna 5 %-os haszna. Hány százalékos a haszna, ha sikerül a tervezett áron értékesítenie az árut?

6. a) Bejárható-e egy 5×7-es sakktábla egy huszárral úgy, hogy minden mezőre pontosan egyszer lépünk, és az utolsó lépésben a kiinduló helyre érünk?

b) És mi a helyzet a 4×7-es sakktábla esetén?

(Megjegyzés: a huszár L alakban lép: valamely sorban vagy oszlopban kettőt, s rá merőlegesen egyet.)

10. évfolyam

1. Egy 1999 jegyű természetes szám minden számjegye kilences. Mennyi e szám négyzetében a számjegyek összege?

2. a) Oldd meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán, ahol k valós paraméter.

$$|3x - k| = x + k + 1$$

b) A k paraméter mely értékei esetén van az egyenletnek pontosan egy gyöke?

c) A k paraméter mely egész értékei esetén lesz az egyenlet gyöke egész?

3. Két, egymást kívülről érintő kör sugara R_1 és R_2. Három olyan egyenes van, amely mind a két kört érinti. Abból az érintőből, amely a közös pontban érinti a két kört, mekkora szakaszt metsz ki a másik két érintő R_1-gyel és R_2-vel kifejezve?

4. Három csoport sporthorgász egy versenyen 113 halat fogott. Az első csoport tagjai átlagosan 13, a második csoport tagjai átlagosan 5, a harmadik csoport tagjai átlagosan 4 halat fogtak. Hányan voltak az egyes csoportokban, ha összesen 16 horgász vett részt a versenyen?

5. Bizonyítsd be, hogy bármely háromszög beírható körének az oldalakkal való három érintési pontja hegyesszögű háromszöget határoz meg. Mekkora ebben a háromszögben a legnagyobb és a legkisebb szög különbségének maximális, illetve minimális értéke?

6. Egy kör belsejében (a körvonalon belül) megjelöltek kétezer pontot. Igazold, hogy van a körnek olyan szelője, amelyen a megjelölt pontok egyike sincs rajta, s a szelőegyenes egyik oldalán is, másik oldalán is pontosan ezer pont található.

A Székely Mikó Matematikaverseny feladatai

2000. február 26.

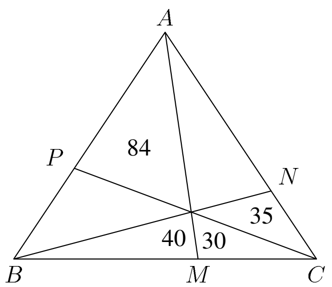
IX. osztály

1. a) Oldjátok meg az $x^2+y^2=xy+2000$ egyenletet az egész számok halmazában!

b) Az a, b és c, nullától különböző valós számok összege nulla. Bizonyítsátok be, hogy

$$\frac{a^2}{a^2-b^2-c^2}+\frac{b^2}{b^2-c^2-a^2}+\frac{c^2}{c^2-a^2-b^2}=\frac{3}{2}.$$

Kacsó Ferenc és Bege Antal



2. Az ABC háromszöglapot az *ábrán* látható három összefutó egyenes hat kisebb háromszögre bontja. Közülük négy háromszög területének mérőszámát az ábrán feltüntettük. Határozzátok meg az ABC háromszög területét!

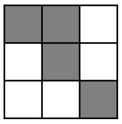
3. Az $ABCD$ négyzet oldalain mozog az M és a P pont. Ha O a négyzet középpontja, határozzátok meg az $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP}$ összegvektor végpontjainak mértani helyét az alábbi esetekben:

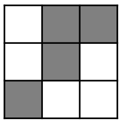
a) az M pont az AB, a P pont pedig a CD zárt szakaszon mozog, egymástól függetlenül;

b) a két pont a négyzet oldalain mozog, tetszőlegesen, egymástól függetlenül (egymásra is kerülhetnek).

András Szilárd

4. Egy 3×3-as négyzetháló 1×1-es mezőjét feketére festjük oly módon, hogy minden sorban és minden oszlopban legyen legalább egy befestett mező. Hány különböző ilyen színezés lehetséges? A szimmetrikus és egymásba forgatással átvihető eseteket is különbözőnek tekintjük, például az alábbi színezések különbözőek:





X. osztály

1. a) Oldjátok meg a

$$4^x + 15^x = 10^x + 9^x$$

egyenletet a valós számok halmazában.

b) Bizonyítsátok be, hogy ha a, b és c 1-nél nagyobb valós számok, akkor

$$\log_b\left(b - a + \frac{a^2}{b}\right) \cdot \log_c\left(c - b + \frac{b^2}{c}\right) \cdot \log_a\left(a - c + \frac{c^2}{a}\right) \geq 1.$$

2. Az $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény teljesíti az $f(f(x)) = x^{2n+1} + \alpha x$ egyenlőséget bármely $x \in \mathbf{R}$ esetén, ahol n pozitív egész és $\alpha \in (0, 1)$ rögzített számok. Igazoljátok, hogy léteznek olyan a, b és c, páronként különböző valós számok, amelyekre

$$f(a) + f(b) + f(c) = 0.$$

Bencze Mihály

3. Az $ABCD$ téglalap oldalain léteznek olyan $M \in BC$ és $N \in CD$ pontok, amelyekre az AMN háromszög egyenlő oldalú.

a) Határozzátok meg a $\dfrac{BC}{AB}$ arány minimális és maximális értékét!

b) Igazoljátok, hogy $T(ABM) + T(ADN) = T(MNC)$.

Dáné Károly

4. Egy szabályos tízszög csúcsaiba elhelyezzük az 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25 és 28 számokat valamilyen sorrendben. Tételezzük fel, hogy lerajzoltuk az összes lehetséges sorrendnek megfelelő tízszöget (a számokkal együtt). Minden ilyen tízszög belsejébe beírjuk a legnagyobb olyan összeg értékét, amelyet három szomszédos csúcsába írt szám összeadásával nyerhetünk. Határozzátok meg a tízszögek belsejében található számok közül a legkisebbet!

Beszámoló a Református Iskolák VIII. Országos Matematika Versenyéről

A Református Iskolák VIII. Országos Matematika Versenyét 2000. március 4–5-ig rendeztük meg ismét a Debreceni Református Kollégium Gimnáziumában. 18 városból 90 diák mérte össze játékos formában a tudását. A zsűri elnöke *Kiss László* főtanácsos, a zsűri tagjai *Dr. Lajkó Károly* egyetemi docens, *Szvetits Zoltán* tanár, *Bérczes Attila* és *Herendiné Kónya Eszter* tanársegéd voltak. A tanárok számára rendezett szakmai programban szerepelt *Deli Lajos* „Módszertani fogások a tehetséggondozásban” című előadása és Pálmay Lóránt tájékoztatása a kerettantervvel kapcsolatos tervekről.

A versenyfeladatokat a 7., 8. évfolyam számára *Károlyné Teleki Anikó* és *Dr. Bajza Istvánné*, a 9., 10., 11. és 12. évfolyamosoknak *Dr. Kántor Sándor, Kovács András, Dr. Páles Zsolt* és *Dr. Kántor Sándorné* állították össze.

A 7., 8. évfolyamon 4 feladatot kaptak a tanulók, amelyek kidolgozására 2 óra állt rendelkezésre. A 9., 10., 11., 12. évfolyamokon 5 feladatot 3 óra alatt kellett megoldani.

Március 5-én vasárnap „Játékos matematika” címmel csapatversenyt szerveztünk a benevezett iskolák csapatainak. Helyezések:

I. díj: Budapest, Baár-Madas Református Gimnázium;
II. díj: Pápa;
III. díj: Kecskemét.

A Baár-Madas Református Gimnázium diákjai kapták a dr. Molnárné Ötvös Tünde iparművész készítette vándordíjat.

Külön öröm számunkra, hogy immár nyolcadik alkalommal rendezhettük meg a matematikaversenyt, és egyre több kollégát láthattunk vendégül.

dr. Bajza Istvánné

A március 4-i egyéni verseny eredményei:

7. osztály

1.: *Polgár Lívia,* Budapest (Baár-Madas Ref. Gimn.), *Ábrám Dániel,* Miskolc; **2.:** *Fábi László,* Debrecen; **3.:** *Gégély Péter,* Sárospatak; **dicséret:** *Kókai Zsófia,* Gödöllő.

8. osztály

1.: *Pósa Csenge,* Debrecen; **2.:** *Gyűrűsi Attila,* Kecskemét, *Bozsik László,* Mezőtúr, *Szádvári Gábor,* Miskolc; *Rovó Petra,* Nagykőrös; **3.:** *Kertész Orsolya,* Budapest, Lónyai Ref. Gimn.; *Szabadi Viktor,* Kiskunhalas.

9. osztály

1.: *Sándor Nóra,* Pápa; **2.:** *Bacskai Zoltán,* Sárospatak, *Máté Adrienn,* Kiskunhalas; **3.:** *Dóka Zsuzsanna,* Miskolc, *Mártonfalvi Pál,* Nagykőrös; **dicséret:** *Tóth Lajos,* Karcag.

10. osztály

1.: *Sipos Szabó Eszter,* Kecskemét; **2.:** *Kerekes József,* Hódmezővásárhely; **3.:** *Bodnár Péter,* Sárospatak, *Kotlár Kinga,* Miskolc; **dicséret:** *Sára Petra,* Csurgó, *Varga Dávid,* Kiskunhalas, *Vízkeleti József,* Karcag, *Kollár Szilvia,* Budapest (Baár-Madas Ref. Gimn.), *Székely Zsuzsa,* Pápa.

11. osztály

1.: *Börzsönyi Ádám,* Hódmezővásárhely; **2.:** *Komáromi András,* Gödöllő, *Bácskay Nagy Gábor,* Budapest (Baár-Madas Ref. Gimn.); **3.:** *Sajtos Erika,* Debrecen, *Fazekas Mihály,* Kecskemét; **dicséret:** *Holbusz Tímea,* Miskolc, *Mátyási Nóra,* Kiskunhalas.

12. osztály

1.: *Szabó Péter,* Sárospatak; **2.:** *Kegyes Tamás,* Budapest (Baár-Madas Ref. Gimn.); **3.:** *Kiss Melinda,* Kecskemét, *Révész Péter,* Hódmezővásárhely, **dicséret:** *Papp József,* Nagykőrös.

Közöljük a 11. és 12. osztályosok feladatsorát:

11. osztály

1. Adott 12 darab 2000-nél nagyobb egymás után következő egész szám. Bizonyítsuk be, hogy van köztük legalább 8 összetett szám.

2. Állítsuk nagyság szerinti sorrendbe az alábbi számokat (zsebszámológép használata nélkül):

$$a=\log_7 8,\qquad b=\log_7 9,\qquad c=\log_8 9.$$

3. Legyen u, v és w az $x^3-2x^2-x+2=0$ egyenlet három gyöke. Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, amelynek gyökei $u+v+w$ és $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}$.

4. Oldjuk meg a

$$\cos(x+y)=x^2-2xy+y^2-4x+4y+5$$

egyenletet a valós számok halmazán.

5. Az ABC háromszögben az A és B csúcsból induló súlyvonalak merőlegesek egymásra. Igazoljuk, hogy a C csúcsnál levő szög koszinusza $\frac{4}{5}$-nél nem kisebb.

12. osztály

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

$$\log_2(2^x-1)-\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-2)>-2.$$

2. Egy szabályos kilencszög legrövidebb átlójának hossza d, leghosszabb átlójának hossza e. Fejezzük ki a szabályos kilencszög oldalának hosszát d és e segítségével.

3. Adjuk meg azokat a háromjegyű számokat, amelyek 45-tel oszthatók, és számjegyeik egy számtani sorozat egymás után következő tagjai.

4. Hány $(x;y)$ egész számokból álló számpár elégíti ki a következő egyenlőtlenséget:

$$|x-30|+|y-10|<100?$$

5. Az $ABCD$ szabályos tetraéderbe gömböt írunk úgy, hogy a gömb a tetraéder minden oldallapját érintse, majd ebbe a gömbbe írunk be egy $PQRS$ szabályos tetraédert úgy, hogy a tetraéder csúcsai illeszkedjenek a gömbre. Határozzuk meg az $ABCD$ és a $PQRS$ szabályos tetraéderek térfogatának az arányát.

Könyvismertetés

Egy „omniheurista” (Dr. Ecco) talányos kalandjai

Typotex Kiadó–SHL Hungary Kft., 2000, ára: 1200 Ft

„A könyvben található rejtvények többektől és többféle forrásból származnak, és, akárcsak egy regény, valós élményeket tükröznek.” Ezzel kezdődik *Dennis Shasha* könyve.

A magát „omniheuristának” („mindenfejtőnek”) valló Dr. Ecco a matematikai képességeit hétköznapi, matematikán kívüli problémák megoldásában hasznosítja. Mi viszont, megoldva a felsorakoztatott problémákat, megismerve Ecco megoldásait, a hétköznapi gondolkodásunkra hagyatkozva matematikai goldolkodási képességeinket fejleszthetjük úgy, hogy közben jól szórakozunk. Kombinatorika, skatulyaelv, matematikai logika és sok más téma kerül szóba anélkül, hogy erre gondolnánk.

Így ír erről a szerző:

„Bár gyerekkorom óta imádom a matematikai feladványokat, csak akkor jöttem rá, hogy egy napon talán nekik köszönhetem majd az állásomat, amikor az IBM-nél kezdtem el dolgozni. Az egyetemről frissen kikerülve az volt a munkám, hogy egy nagy teljesítményű központi számítógép számára tervezzek áramköröket. Ezek közül a legérdekesebb feladat olyan áramkörök megtervezése volt, amelyek feladata más áramkörök működésének ellenőrzése volt. A cél pedig egy olyan gép tervezése, amely képes arra, hogy megállapítsa a saját működésében fellépő hibákat.

Míg azonban ezeken a problémákon törtem a fejem, rájöttem, hogy egyre jobban elveszek a részletekben. Így aztán az az ötletem támadt, hogy általánosabb szintre emelem a problémát, amit így rejtvényként már érthetővé tudtam tenni minden intelligens ember számára függetlenül attól, hogy mérnök-e az illető vagy sem. Így rejtvénnyé alakítva aztán egy barátommal hamarosan rájöttünk, mi a teendő, én pedig könnyedén meg is tudtam tervezni az áramkört. (Lásd: Áramkörök)”

A feladványok egy része ismerősen cseng, mégsincs köztük tipikus. A hamis pénzérme problémában például ugyan tudjuk, hogy mekkora lehet a tömege a hamis és a valódi pénzérméknek, de ezek nem pontos adatok. Az igazmondók és hazugok problémája sem szokványos. Megtudhatjuk, hogy miért jó az utakat egyirányúsítani, vagy hogy miért sok a mellékapcsolás a telefonközpontban.

Álljon itt egy feladvány a könyvből. Dr. Ecco levelet kap: „»Egy érdekes problémára akadtam a múltkoriban – folytatódott a levél –, amelyet szeretnék veled is megosztani. Úgy nevezik, hogy az összehangolt támadás problémája. Van két szövetséges tábornok, akiknek a csapatai egy hegygerinc két oldalán táboroznak. Egymással csak postagalambok segítségével tudnak kommunikálni. A galambok olykor elvesznek, vagy ragadozómadarak prédájául esnek. A tábornokoknak el kell dönteniük, hogy másnap reggel megtámadják-e az ellenséget vagy sem. Akárhogyan is döntenek, együtt kell támadniuk vagy nem támadniuk, mivel ha csak egyikük támad, az biztos vereséghez vezet. Nos tehát, tegyük fel, hogy A tábornok úgy ítéli meg, hogy elérkezett a megfelelő pillanat, ezért postagalambbal üzenetet küld B tábornoknak a ‚Hajnalban támadás!’ szöveggel. Anélkül, hogy megerősítést kapna B tábornoktól, A tábornok nem fog támadni, ezért arra kéri, hogy küldjön visszajelzést. B tábornok erre visszajelzést küld.«

Lehetséges-e a postagalambok útján végül egyértelműen megegyezniük a tábornokoknak a támadásban? Ha igen, hány üzenetre van szükség?”

Raymond Smullyan: Seherezádé rejtélye és más bámulatos fejtörők, régiek és újak

Typotex Kiadó, 1999, ára: 1200 Ft

A szerzőnek immár harmadik könyvét ismerhetik meg a logikai játékokat kedvelők: ezúttal Seherezádé folytatja az ezeregy éjszaka meséit szellemes, gondolkodtató kis történeteivel, rejtvényeivel. Ha az olvasó, a fejtörőmese királyához hasonlóan, esetleg nem tudja a választ, hátralapozhat a megoldásokhoz. Ezután érdemes hozzákezdeni a könyv második részéhez, amely elvezet Seherezádétól a modern logikáig.

Igaz, hogy a logikai játékok, trükkök és paradoxonok némelyike igen ismerős, és szembeötlik néhány sajtóhiba is, a könyvecske mégis kellemes megjelenésével, „könnyed" tartalmával hasznos időtöltés fiatalnak és idősebbnek.

Ez a könyv a sorozatba első elemként illik bele: a korábbi kettőnél egyszerűbb feladványaival, könnyedségével. Fiatalabbak, illetve a matematika iránt kevésbé elkötelezettek is bátran kézbevehetik.

Olvasóink többsége bizonyára ismeri a történetet, hogyan számította ki a kis Gauss 1-től 1000-ig a természetes számok összegét. Ehhez kapcsolódik Seherezádé egyik kérdése:

„Ali gondolt egy számot egy és ezer között, és leírta. Ezután Ahmed is gondolt egy számot egy és ezer között, és ő is leírta. Mi a valószínűsége, hogy Ahmed száma nagyobb, mint Alié?

– Hmm – gondolkodott el a király.

– Két különböző módon lehet megoldani ezt a problémát – mondta Seherezádé. – Az egyik megoldás rövidebb és jóval leleményesebb, mint a másik.

Mi a két megoldási lehetőség?"

Seherezádé megoldása a könyv 202. oldalán kezdődik:

„HÁNYFÉLEKÉPPEN LEHETSÉGES? Alinak és Ahmednek is ezerféle lehet a száma, tehát a két szám összesen egymillióféle lehet. Azt kell kiszámolnunk, hogy ebből hány esetben lesz Ahmed száma nagyobb Aliénál. Ha ezt a számot elosztjuk egymillióval, megkapjuk a valószínűségét annak, hogy Ahmed száma nagyobb lesz Aliénál. Azt, hogy ez hány esetben igaz, kétféleképpen is ki lehet számolni, és annak a ténynek, hogy mindkettő ugyanazt az eredményt adja, érdekes következménye van, de erről később fogunk beszélni.

Az első módszer: Ha Ali száma 1, akkor Ahmed száma 999-féle lehet. Ha Ali száma 2, akkor Ahmedé 998-féle lehet, és így tovább. Végül, ha Ali száma 9999, akkor Ahmedé csak egyféle lehet. Tehát az összes lehetőség: $1+2+\ldots+999$.

A másik módszer egyszerűbb, és nem kell hozzá a formula sem: 1000-féleképpen lehet a két szám egyforma, tehát $(1\,000\,000-1000)$-féleképpen lehetnek különbözők, és ezeknek az eseteknek a felében, azaz $999\,000/2$ esetben lesz Ahmed száma nagyobb Aliénál.

SEHEREZÁDÉ ÉSZREVÉTELE. Az előző feladat megoldásában kiszámoltuk, hogy Ahmed száma $1+2+\ldots+999$-féleképpen lehet nagyobb Aliénál, utána pedig azt, hogy ez a szám $\frac{999\cdot 1000}{2}$. Ez egy másik módszer arra, hogy belássuk, hogy ez a két szám egyenlő! Természetesen ez a módszer általánosítható minden pozitív n-re. Legyen x és y két szám 1 és n között, ekkor hányféleképpen lehet y nagyobb x-nél?

Az első módszert használva, ha $x=1$, akkor y $(n-2)$-féle lehet, ha $x=2$, akkor y $(n-3)$-féle, ..., ha $x=n-2$, akkor y 2-féle lehet, ha pedig $x=n-1$, akkor y csak egyféle lehet. Tehát az összes lehetőség $1+2+\ldots+n-1$.

A második módszer szerint pedig: x és y összesen n^2-féle lehet, ebből n esetben egyenlő a két szám, tehát n^2-n esetben különbözők. Ezért $\dfrac{n^2-n}{2}$ esetben lesz y nagyobb x-nél, ami $\dfrac{(n-1)n}{2}$. Ez bizonyítja, hogy minden n pozitív számra $1+2+\ldots+(n-1)=\dfrac{(n-1)n}{2}$, ami ugyanaz, mint $1+2+\ldots+(n-1)+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. Ez Seherezádé másik bizonyítása a híres formulára.”

Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből

Typotex Kiadó, 2000, ára: 1420 Ft

A korábbi kiadások, az 1000, majd az 1500 feladat után újra bővült a példatár. Az új feladatok közül tűztük ki szeptemberi számunkban a **B. 3293., B. 3294., B. 3296., B. 3299.** és **B. 3301.** gyakorlatainkat, de a 2000 példa között bárki megtalálhatja az érdeklődésének, tudásának megfelelőt.

❄

Az ismertetett könyvek mindegyike kapható a Typotex Elektronikus Kiadónál, az 1024 Budapest, Retek u. 33–35. címen (Tel./fax: 316-3759) vagy az ELTE 1117 Pázmány Péter sétány 1/A. épületében a földszinti árusítóhelyen, ahol a vásárló 15% kedvezményben részesül.

Megoldásvázlatok, eredmények az V. mérőlap (2000/4. sz.) feladataihoz

1. Az $A=\operatorname{tg}(0\cdot 12^\circ)+\operatorname{tg}(1\cdot 12^\circ)+\ldots+\operatorname{tg}(15\cdot 12^\circ)$ 16-tagú összeg első és utolsó tagja 0. Továbbá

$$\operatorname{tg}(k\cdot 12^\circ)=\operatorname{tg}(180^\circ-k\cdot 12^\circ)=-\operatorname{tg}(15\cdot 12^\circ-k\cdot 12^\circ)=\operatorname{tg}\left((15-k)\cdot 12^\circ\right),$$

ahol k lehetséges értékei 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Így $A=0$.

A B kiszámításához próbáljuk meg a $(6\sqrt{3}-10)$-et egy kéttagú kifejezés köbeként felírni. Célszerű a kéttagú kifejezést $a+\sqrt{3}$ alakban keresni: $(a+\sqrt{3})^3=a^3+3a^2\cdot\sqrt{3}+3a\cdot 3+3\sqrt{3}$. Ebből $(3a^2+3)\cdot\sqrt{3}=6\sqrt{3}$, tehát $a^2=1$, továbbá $a^3+9a=-10$, ami $a^2=1$ miatt $10a=-10$, vagyis $a=-1$. Eszerint:

$$B=\sqrt[3]{6\cdot\sqrt{3}-10}=\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)^3}=\sqrt{3}-1\approx 0{,}73.$$

$$C=\log_2\sqrt{\frac{2}{a}\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{2}\cdot\sqrt[4]{\frac{a^8}{32}}}}=\log_2\sqrt[6]{\sqrt[4]{\frac{4^4\cdot a^8}{a^8\cdot 32}}}=\log_2\sqrt[24]{8}=\log_2 2^{\frac{1}{8}}=0{,}125.$$

Az a értékétől függetlenül megkaptuk C-t. A növekvő sorrend: A, C, B.

2. Az ABE háromszögben FG középvonal, FGD háromszögben HI középvonal, HIC háromszögben KJ középvonal, ezért $AB=2\cdot FG=4\cdot HI=8\cdot KJ$, így $JK:AB=1:8$.

3. Mivel

$$\frac{x^2-2000x+1999}{x-1}=\frac{(x-1999)(x-1)}{x-1} \qquad \text{és} \qquad \frac{x^2-1999x+1998}{x-1}=\frac{(x-1998)(x-1)}{x-1},$$

azért az $x \neq 1$ kikötéssel az egyenlet a következő alakban írható: $\sqrt{2000-x}+\sqrt{x-1999}=1$. A négyzetgyökök miatt $2000-x \geq 0$ és $x-1999 \geq 0$, vagyis $1999 \leq x \leq 2000$. Ezen az intervallumon csak két egész szám van, 1999 és 2000, amelyek megoldásai az egyenletnek.

4. Ha a kör középpontja illeszkedik a parabola tengelyére, akkor csak úgy lehet három közös pontjuk, ha az egyik a parabola tengelypontja. Legyen ez a háromszög C csúcsa. A parabola egyenletét írjuk $(y-3)^2=x-2$ alakban, ezért $C(2;3)$. A szabályos háromszögnek a tengely felett lévő pontja legyen $A(a;b)$, ez a pont illeszkedik a parabolára, ezért $a=b^2-6b+11$. Az AC egyenes irányszöge 30°, így $\operatorname{tg} 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{b-3}{b^2-6b+11-2}=\frac{1}{b-3}$, vagyis $b=3+\sqrt{3}$, $a=5$.

A szabályos háromszög oldalának hossza: $AC=\sqrt{(5-2)^2+(3+\sqrt{3}-3)^2}=\sqrt{12}$, a magassága $m=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{12}=3$, a köréírt kör sugara pedig $r=\frac{2}{3}\cdot m=2$. Ezek alapján a kör középpontja: $K(4;3)$. A keresett kör egyenlete: $(x-4)^2+(y-3)^2=4$.

5. Alakítsuk át a feltételeket: $(x^2-y)(x-y)=0$, $(x-2)^2+(y-1)^2 \leq 9$. Vagyis azokat a rácspontokat keressük, amelyek illeszkednek az $y=x^2$ egyenletű parabolára vagy az $y=x$ egyenletű egyenesre és a $K(2;1)$ középpontú, $r=3$ sugarú, zárt körlemezen vannak.

A megfelelő pontok: $(-1;1)$, $(0;0)$, $(1;1)$, $(2;4)$, $(2;2)$, $(3;3)$.

6. Legyen a bevásárlóközpont egy évvel ezelőtti bevétele egységnyi, a vásárlók száma v, akkor az egy főre jutó vásárlás $\frac{1}{v}$. Ha a vásárlók száma p százalékkal nő, akkor az idén $v\left(1+\frac{p}{100}\right)$ a vásárlók létszáma, a megnövekedett egy főre futó vásárlás pedig $\frac{1}{v}\left(1+\frac{4p}{100}\right)$. Az új, megnövekedett bevétel ezek alapján $v\left(1+\frac{p}{100}\right)\frac{1}{v}\left(1+\frac{4p}{100}\right)=1{,}54$. A műveleteket elvégezve és rendezve $4p^2+500p-5400=0$. Az egyenlet pozitív gyöke jöhet csak szóba, és ez $p=10$, a vásárlók száma 10 százalékkal növekedett.

7. Írjuk fel a diszkrimináns negyedét:

$$\frac{D}{4}=b^2(a+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\cdot 2ac=a^2b^2+2ab^2c+b^2c^2-2a^3c-2ab^2c-2ac^3=$$

$$=b^2\cdot(a^2+c^2)-2ac\cdot(a^2+c^2)=(b^2-2ac)\cdot(a^2+c^2).$$

a és c különböző előjelű valós számok, azért $b^2-2ac>0$, $a^2+c^2>0$, így $D>0$. Ezzel megmutattuk, hogy az egyenletnek van két különböző valós gyöke.

Ha $x=0$, akkor a helyettesítési érték $2ac$, vagyis negatív, ha $x=1$, akkor a helyettesítési érték $(a^2+b^2+c^2)-2b(a+c)+2ac$. Ezt $(a-b+c)^2$ alakban is írhatjuk, ami pozitív, mert $a+c \neq b$. Ebből látható, hogy az egyik gyök a $(0;1)$ intervallumban van. Ez biztosan a nagyobbik gyök, mert a két gyök szorzata $\frac{2ac}{a^2+b^2+c^2}$, negatív, a másik gyök tehát negatív.

8. Legyen az A-nál lévő belső szög α, ekkor $AC=\cos\alpha$. Írjuk fel a területet:

$$T=t_{ACE}+t_{ABG}+t_{ABC}+t_{AEG}=\frac{\cos^2\alpha}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{2}+\frac{1\cdot\cos\alpha\cdot\sin(180^\circ-\alpha)}{2}.$$

$$T=\frac{\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+1}{2}=\frac{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}+\sin 2\alpha+1}{2}=\frac{2\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+3}{4}.$$

Legyen $2\alpha=x$, és vizsgáljuk az $f(x)=2\sin x+\cos x$ függvényt, keressük meg a maximumhelyét a $(0;180^\circ)$ intervallumon:

$$2\sin x+\cos x=\sqrt{5}\left(\sin x\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}+\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\approx$$

$$\approx\sqrt{5}(\sin x\cos 26{,}6^\circ+\cos x\sin 26{,}6^\circ)=\sqrt{5}\sin(x+26{,}6^\circ).$$

Vagyis $x\approx 63{,}4^\circ$, így $\alpha\approx 31{,}7^\circ$.

Számadó László

A C. 575. gyakorlat megoldása☺

– Nos, hát mondja meg nekem, hogy ha Pozsonyból Brassóba mindennap két postakocsi közlekednék, Brassóból Pozsonyba pedig ugyanannyi, ha mármost föltesszük, hogy az út tíz napig tart, mennyi kocsival találkozik ön útközben, míg Pozsonyból egy postakocsin ülve Brassóba ér?"

– Hússzal.

– Nono, fiatalember, gondolja meg jól, nem annyival.

– Akkor talán valami furfang van a kérdésben?

– Biztosítom, hogy nincs.

– Ez esetben kétségtelenül húsz, vagyis hogy az egyik, a huszadik már éppen beért Pozsonyba, mikor én onnan elindultam, tehát csak tizenkileccel! Nem igaz?

– Nem és nem. Igen sajnálom kedves, ifjú barátom.

– Engedje meg, uram, hogy nyugodtan kiszámítsam a szobámban.

– Tessék – mondá az öregúr gúnyos mosolygással.

A brünni vállalkozó egész nap számított, őrülten számított, teleírt számokkal vagy tíz ív papírt, a homlokáról csurgott az izzadtság, annyit számított, de nem boldogult, mindig más-más eredmény jött ki. Végre egy szakajtó babot kért a szakácsnétól, a babszemekből aztán kirakta az induló postakocsikat a pozsony–brassói vonalon, de csak még jobban belezavarodott az egészbe.

Mikor aztán látta Horváth, hogy semmire sem megy, megszabadította a bizonytalanságtól.

– Hát lássa, önből nem lesz jó vállalkozó, mert ön nem látja tisztán maga előtt a dolgok következményeit már a második fokon sem. A pozsony–brassói úton ott vannak az előző tíz napon elindult szekerek is, meg a mostani tíz napon elindultak. Eszerint a pozsony–brassói úton negyven szekér van. Ami pedig az ön mostani útját illeti, ne haragudjék, de azon csak egy kosár van.

Ilyen eszelős ember volt ez a bizonyos Horváth.

A „feladat" **Mikszáth Kálmán:** Különös házasság c. regényében szerepel. Életrajza szerint a regény írásának idején Mikszáth Fogarason lakott.

Megjegyzés az F. 3288. feladathoz

F. 3288. *Legyenek n és k pozitív egészek és p prímszám úgy, hogy $p^k|n!$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $n!$ osztható $(p!)^k$-nal is.*

A KöMaL 2000/1. számának 36–37. oldalán a fenti feladatra két megoldást is közöltünk. Amint arra *Kiss Gergely* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) felhívta a figyelmünket, az I. megoldás hibás, az állítás, amelyből az indukció kiindul, nem igaz. Abból ugyanis, hogy m a legkisebb olyan egész szám, amire $p^\ell \mid m!$, nem következik, hogy $m+p$ a legkisebb olyan pozitív egész, amelynek faktoriálisa $p^{\ell+1}$-nel osztható. A legegyszerűbb ellenpélda a $p=\ell=2$. Ekkor az a legkisebb m, amire $m!$ osztható 4-gyel, az $m=4$; és 4! osztható 2^3-nel is.

A megjelent hibás teljes indukciós bizonyítás helyett *Fried Ervin* az alábbi bizonyítást bocsátotta a lap rendelkezésére:

Legyen p rögzített prímszám, és jelölje $k(n)$ azt a legnagyobb kitevőt, amelyre $p^{k(n)}$ osztója $n!$-nak. Elég az állítást $k(n)$-re bizonyítani, hiszen $k<k(n)$ esetén $(p!)^k$ osztója $(p!)^{k(n)}$-nek. (Az eddigiek csak az egyszerűbb számolást szolgálják.)

Azt kell tehát bizonyítani, hogy $(p!)^{k(n)}$ osztója $n!$-nak. Ezt az állítást n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Az $n=1$ esetben $k(1)=0$ következtében az állítás igaz. Tegyük fel, hogy az állítás teljesül minden n-nél kisebb természetes szám esetében, és vizsgáljuk $n!$-t. Ha p nem osztója n-nek, akkor $k(n-1)=k(n)$ miatt $(p!)^{k(n)}$ osztója $(n-1)!$-nak; így $n!$-nak is.

Legyen most $n=pm$. Mivel p prímszám, azért az $n!$-ban fellépő maximális p-hatvány megegyezik az $1\cdot p, 2\cdot p, \ldots, m\cdot p$ számok szorzatában fellépő maximális prímhatvánnyal. Ez a szorzat pontosan $p^m\cdot m!$. Így $k(pm)=m+k(m)$. Bontsuk fel most az $n!$-t $m+1$ tényező szorzatára. Az első m tényező a következő:

$$
\begin{gathered}
1\cdot 2\cdots(p-1),\\
\vdots\\
(ip+1)\cdot(ip+2)\cdots((i+1)p-1),\\
\vdots\\
((m-1)p+1)\cdot((m-1)p+2)\cdots(mp-1).
\end{gathered}
$$

Ezen tényezők mindegyike osztható $(p-1)$ faktoriálissal, hiszen bármilyen t egész szám esetén t egymás utáni egész szám szorzata osztható $t!$-sal. Ez a szorzat tehát osztható a $(p-1)!^m$ számmal. A fennmaradó tényező a $p^m\cdot m!$ szorzat. A p^m tényezőt az előző szorzathoz hozzávéve egy olyan szorzatot kapunk, amely osztható $(p!)^m$-nel. Az indukciós feltevés és $m<n$ miatt $m!$ osztható $(p!)^{k(m)}$-nel. A már belátott $k(n)=m+k(m)$ összefüggésből következik az állítás.

Matematika gyakorlatok megoldása

B. 3322. *Legfeljebb hány részre osztja a teret* 4 *olyan sík, amely egy ponton halad át?*

(*3 pont*)

I. megoldás. Ha van olyan egyenes, amelyen a megadott síkok közül kettőnél több megy át, akkor a létrejövő térrészek száma 8 – ha a négy sík egy egyenesen megy át –, vagy 12, ha a síkok egyike metszi a másik három sík közös egyenesét.

Ha ilyen egyenes nincsen, akkor a síkok egyikét párhuzamosan eltolva létrejön egy újabb – korlátos – térrész: annak a tetraédernek a belseje, amelynek az eltolt sík és a másik három a négy lapsíkja.

Ennek a tetraédernek a lapsíkjai 15 részre osztják a teret, hiszen minden csúcshoz (4), élhez (6) és laphoz (4) csatlakozik egy-egy térrész, a 15-ödik rész pedig a tetraéder belseje.

Az eltolt síkot eredeti helyzetébe visszatolva ez a korlátos térrész megszűnik, a nem korlátos részek megmaradnak, így azt kapjuk, hogy a négy sík a teret legfeljebb 14 részre osztja.

Tóth Szilveszter (Tata, Eötvös J. Gimn., 11. o.t.)

II. megoldás. Vizsgáljuk meg, hogy n darab síkhoz egy $(n+1)$-ediket véve hogyan változik a térrészek száma. Ezt a síkot a meglévő n sík egy-egy egyenesben metszi; ez az n darab egyenes áthalad a síkok közös pontján (pontjain), és az $(n+1)$-edik síkot legfeljebb $2n$ részre osztja. E részek mindegyike pontosan egy új térrészt határol, így az $(n+1)$-edik sík fölvételével a térrészek száma legfeljebb $2n$-nel nő. Ez lehetséges is, ha az n darab egyenes között nincsenek azonosak, a tér bármely egyenesén legfeljebb kettő halad át a megadott síkok közül.

A fenti eredmény alapján kapjuk az alábbi táblázatot:

síkok száma (n)	térrészek száma (R_n)
1	2
2	$2+2\cdot 1=4$
3	$4+2\cdot 2=8$
4	$8+2\cdot 3=14$

Ezek szerint ha négy sík egy ponton halad át, akkor legfeljebb 14 részre osztja a teret.

Megjegyzések. 1. Az első megoldás pongyolábban, de nagyon szemléletesen is elmondható: tekintsünk egy tetraédert, illetve azt a 15 részt, amelyre a lapsíkok a teret osztják. Ha „nagyon" messzire távolodunk a tetraédertől, akkor az „ponttá zsugorodik", a 14 darab nemkorlátos térrész viszont megmarad, így a feladat kérdésére a válasz 14.

2. Egy másik módszerrel is célhoz érhetünk. Írjunk a síkok közös pontja köré egy gömböt. Ezt a gömböt a síkok egy-egy főkörben metszik, amelyek a gömb felületét részekre osztják. Minden térrésznek pontosan egy ilyen tartomány felel meg a gömbfelületen.

A kérdés tehát úgy szól, hogy 4 darab főkör hány részre osztja a gömbfelületet. Ha a gömb olyan P pontjából, amelyen keresztül nem halad kör, a P-vel átellenes pontba húzott érintősíkra vetítjük a gömböt, akkor ismeretes, hogy a gömbfelület képe a teljes sík, a körök képe pedig kör. Így az eredeti kérdést átfogalmaztuk: legfeljebb hány részre osztja a síkot 4 körvonal. A két feladat tehát ekvivalens, az utóbbi formájában pedig jóval ismertebb.

3. A második megoldásban az $R_1=2$; $R_{n+1}=R_n+2n$ rekurziót kapjuk a létrejövő térrészek R_n számára, a rekurzió megoldása: $R_n=n^2-n+2$.

293 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott Andrássy Zoltán, Bagdi Gábor, Bálint Gergely, Bartos Imre, Belső Róbert, Besenyei Balázs, Birkner Tamás, Boróczki Lajos, Budai Dénes, Buti Tamás, Csóka Endre, Deli Lajos, Enyedi Gábor, Gáspár Orsolya, Hablicsek Márton, Horváth 413 László, Kiss Zsuzsanna, Kovács Dóra Judit, Kovács 625 Erika, Major Gergely, Nyul Balázs, Pilissy György, Pszota Zsolt, Rácz Béla András, Ruppert László, Sipos Szabó Eszter, Siroki László, Siska Ádám, Stépán József, Szekeres Balázs, Tóth Szilveszter, és Turchányi Márton. 2 pontos 163, 0 pontos 98 dolgozat.

B. 3323. *Keressük meg azt a legbővebb intervallumot, amelyben* $\frac{19}{99}$ *a legkisebb nevezőjű tört.*
(*5 pont*)

I. megoldás. A feladatot megoldjuk, ha megkeressük

I. azokat az a és b pozitív egész számokat, amelyekre $b<99$, $\frac{a}{b}<\frac{19}{99}$ és $\frac{a}{b}$ az ilyen törtek közül a legnagyobb; illetve

II. azokat a c és d pozitív egész számokat, amelyekre $d<99$, $\frac{c}{d}>\frac{19}{99}$ és $\frac{c}{d}$ az ilyen törtek közül a legkisebb.

I. Vizsgáljuk a $D=\frac{19}{99}-\frac{a}{b}=\frac{19b-99a}{99b}>0$ különbséget!

Legyen először $19b-99a=1$. Ekkor $19b=99a+1$, amiből $b=5a+\frac{4a+1}{19}$.

Mivel $b<99$, azért a kisebb, mint 20. Így a számláló, a $4a+1$ értéke 19 páratlan többszöröseként 19 vagy 57. A 19 nem megfelelő, mivel 18 nem osztható 4-gyel. Így $4a+1=57$, $a=14$ és $b=73$, a tört pedig $\frac{14}{73}$.

Ebben az esetben $D=\frac{1}{99\cdot 73}$. Ez a legkisebb különbség, mivel ha D számlálója egynél nagyobb lenne, akkor a nevezőben csak 99-nél nagyobb b esetén lehetne a tört kevesebb, mint $\frac{1}{99\cdot 73}$.

II. Vizsgáljuk most is a $D=\frac{c}{d}-\frac{19}{99}=\frac{99c-19d}{99d}>0$ különbséget!

Legyen először $99c-19d=1$. Ekkor $19d=99c-1$, amiből $d=5c+\frac{4c-1}{19}$.

Mivel $d<99$, azért c kisebb, mint 20. Így a számláló, $4c-1$ értéke 19; 57 vagy 95. 57 nem megfelelő, mivel 18 nem osztható 4-gyel. 95 esetén $c=19$ és $d=100$, túl nagy. Így $4c-1=19$, $c=5$ és $d=26$.

Ebben az esetben $D=\frac{1}{99\cdot 26}$. Ha ennél kisebb különbséget keresünk, akkor ha D számlálója e, akkor d legalább $26e<99$. Emiatt a D számlálója legfeljebb 3.

Ha $99c-19d=2$, akkor $19d=99c-2$, amiből $d=5c+\frac{4c-2}{19}$. A fentiekhez hasonlóan ellenőrizhető, hogy csak a $4c-2=38$ a megoldás, amiből $c=10$ és $d=52$.

Ha $99c-19d=3$, akkor $19d=99c-3$, amiből $d=5c+\frac{4c-3}{19}$. Most csak a $4c-3=$ $=57$ a megoldás, amiből $c=15$ és $d=78$.

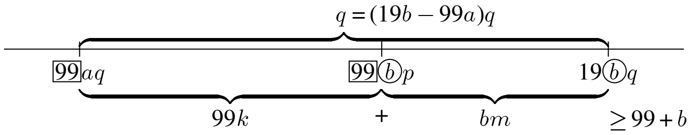
Mindhárom eredmény az $\frac{5}{26}$ törtet adja.

A feladat megoldása tehát: $\frac{14}{73}<x<\frac{5}{26}$ az a legbővebb (nyílt) intervallum, ahol a $\frac{19}{99}$ a legkisebb nevezőjű tört.

Hablicsek Márton (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.)

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy ha $0<\frac{a}{b}<\frac{19}{99}$ és $19b-99a=1$, akkor az $\left(\frac{a}{b};\frac{19}{99}\right)$ intervallumban minden tört nevezője nagyobb 99-nél – valójában, mint látni fogjuk majd, $99+b$-nél is.

Legyen tehát $0<\frac{a}{b}<\frac{p}{q}<\frac{19}{99}$. A nevezőkkel szorozva $99aq<bp\cdot 99<19bq$. Így $q=19bq-99aq=19bq-99bp+99bp-99aq=(19q-99p)b+(bp-aq)\cdot 99\geq b+99$ (*1. ábra*).



1. ábra

KöMaL – 2000/5 MAT0005 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 18:59 (36. lap)

Ugyanígy igazolható, hogy ha $\frac{19}{99} < \frac{c}{d}$ és $99c - 19d = 1$, akkor a $\left(\frac{19}{99}; \frac{c}{d}\right)$ intervallumban minden tört nevezője nagyobb, mint $99 + d$.

A megoldáshoz tehát meg kell keresnünk azt a legkisebb pozitív b, illetve d nevezőt, amelyre

(1) $$19b - 99a = 1, \qquad \text{illetve}$$

(2) $$99c - 19d = 1.$$

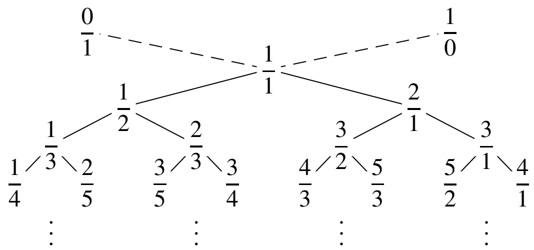
Ismeretes, hogy – mivel $(19, 99) = 1$, a fenti egyenleteknek van, mégpedig pontosan egy olyan (b, a), illetve (d, c) megoldása, hogy $0 < b < 99$ és $0 < a < 19$, illetve $0 < d < 99$ és $0 < c < 19$, sőt, a $19b - 99a = 99c - 19d$ egyenlőség átrendezésével kapott $19(d + b) = 99(a + c)$ feltételből ezekre a minimális megoldásokra $d + b = 99$ és $a + c = 19$.

Az (1), (2) ún. diofantikus egyenletek megoldására több módszer ismeretes – az I. megoldásban valójában ezeket az egyenleteket oldotta meg a beküldő – és ezek bármelyikével $b = 73$, tehát $d = 99 - 73 = 26$, $a = 14$, tehát $c = 19 - 14 = 5$, a maximális intervallum pedig, amelyben $\frac{19}{99}$ a minimális nevezőjű tört, $\left(\frac{14}{73}, \frac{5}{26}\right)$.

Megjegyzések. 1. A megoldásból kiderül, hogy a keresett intervallumban $\frac{19}{99} = \frac{14+5}{73+26}$, a két végpont, $\frac{14}{73}$ és $\frac{5}{26}$ úgynevezett mediánja. A mediánképzés segítségével a $0 = \frac{0}{1}$ és az $1 = \frac{1}{1}$ törtekből kiindulva a $[0, 1]$ intervallum bármely törtjéhez eljuthatunk, ezeket redukált – azaz egyszerűsített – alakban kapjuk, és minden $\frac{p}{q}$ tört a legbővebb olyan intervallum két végpontjának a mediánjaként áll elő, amelyben $\frac{p}{q}$ a minimális nevezőjű tört.

A konstrukció leírása megtalálható *Graham–Knuth–Patashnik:* Konkrét matematika (Műszaki Könyvkiadó, 1998) c. könyve 117–119. oldalán.

A fenti könyv 118. oldalán a konstrukciót megvalósító, ún. *Stern–Brocot*-fa kezdete látható (*2. ábra*).

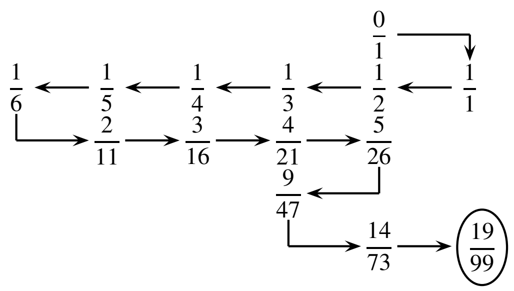


2. ábra

A fában az „$\frac{1}{0}$” szimbólum segítségével az 1-nél nagyobb törteket is megkapjuk. Ha úgy tetszik – mint ahogyan a margón olvasható „graffiti” mondja, $\frac{1}{0}$ értelmezhető a „végtelennek nem redukálható tört alakjában történő előállításaként”. A fában minden tört az első balra, illetve jobbra felfelé útbaejtett szám mediánja.

A Stern–Brocot-fa felhasználásával oldotta meg a feladatot *Gerencsér Balázs* és *Kovács Erika Renáta* (mindketten a Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. osztályos tanulói). A hivatkozás után a feladat annyi, hogy a $\frac{19}{99}$ törtet kell megtalálni a fában. A két tört, amelynek mediánjaként megtaláltuk, határolja a keresett intervallumot.

Az alábbiakban Gerencsér Balázs ábrájának egy tipográfiailag módosított változatán mutatjuk be a $\frac{19}{99}$ felkutatását a fában. Induljunk el az egyik kezdőpontból, és mindig a $\frac{19}{99}$ felé lépjünk tovább: ha az éppen érintett szám nagyobb, mint $\frac{19}{99}$, akkor balra, ha pedig kisebb, akkor jobbra lépjünk a fában (*3. ábra*).



3. ábra

A $\frac{19}{99}$ a $\frac{14}{73}$ és az $\frac{5}{26}$ mediánjaként adódott, a keresett intervallum tehát $\left(\frac{14}{73}, \frac{5}{26}\right)$.

2. A redukált törtek fenti származtatásával áll szoros kapcsolatban a 0 és 1 közé eső törtek *Farey*-sorozatokba történő elrendezése. Erről olvashatunk többek között – a már idézett könyv 119–120. oldalán, továbbá a KöMaL 1999/1. és 2. számában megjelent *Holló-Szabó Ferenc:* A Riemann-függvényről című cikkében. N-edrendű Farey-sorozatnak nevezzük és $\mathcal{F}_N$-nel jelöljük a 0 és 1 közötti olyan redukált törtek növekvően rendezett sorozatát, amelyek nevezője nem nagyobb, mint N. Például

$$\mathcal{F}_6 = \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}.$$

$\mathcal{F}_N$-et megkapjuk, ha $\mathcal{F}_1 = \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$-ből indulva mindannyiszor beszúrjuk a mediánokat, valahányszor a nevező nem nagyobb, mint N.

$\mathcal{F}_N$ bármely két szomszédos $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ elemére $cb - ad = 1$, így a $\frac{19}{99}$-hez tartozó maximális intervallum két végpontja $\frac{19}{99}$ két szomszédja lesz az $\mathcal{F}_{99}$ sorozatban. *Gáspár-Merse Előd* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) ezzel a módszerrel kereste meg a szóban forgó intervallumot.

127 dolgozat érkezett. 5 pontos 38, 4 pontos 30, 3 pontos 30, 2 pontos 7, 1 pontos 2, 0 pontos 20.

B. 3352. Ha egy hajó legénységének létszámát megszorozzuk a legénység létszámánál eggyel kisebb számmal, akkor tizenöttel nagyobb számot kapunk, mint ha a kapitány életkorát megszoroznánk a legénység létszámánál kettővel kisebb számmal. Hogy hívják a kapitányt?☺

(*3 pont*) *Elhangzott a Repeta című műsorban*

Megoldás. A feladatban két ismeretlen szerepel: a hajó legénységének létszáma (l) és a kapitány ételkora (k) (maga a kapitány is ismeretlen). Bár most nem az volt a kérdés, hogy hány éves a kapitány, mégis, áprilisi tréfát sejtve, ezt lenne érdemes kiszámolni:

$$l(l-1)=k(l-2)+15$$

$$k=\frac{l^2-l-15}{l-2}=l+\frac{l-15}{l-2}=l+1-\frac{13}{l-2}.$$

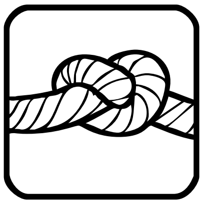
Mivel a feladat szerint k is és l is pozitív egész, így $\frac{13}{l-2}$-nek is egésznek kell lennie, ez pedig csak akkor lehet,

ha $l-2=1$, ekkor k negatív; vagy $l-2=13$, ekkor $l=15$ és $k=15$;
vagy $l-2=-13$, ekkor l negatív; vagy $l-2=-1$, ekkor $l=1$ és $k=15$.

Mindkét kapott megoldás az eredeti feladatnak is megoldása (és több megoldás nem lehet).

A 15 éves kapitányt – főként, ha egymagában vitorlázik – természetesen bárhogy hívhatják, így nemcsak azok kaphatják meg a 3 pontot a feladatra, akik *Jules Verne:* A 15 éves kapitány c. könyvének főhősére, *Dick Sandre* gondoltak.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (585–589.)



C. 585. Bizonyos magnókazettákban 0,0075 mm vastagságú szalag tekeredik a 11 mm átmérőjű orsókra. Az orsók középpontjainak távolsága 42 mm. Legfeljebb hány méter szalag lehet egy használható magnókazettában? (A tele orsóról a szalagnak akadálytalanul át kell jutnia az üres orsóra.)

C. 586. Legfeljebb hány oldalú az a konvex sokszög, amelynek nincs két szomszédos tompaszöge?

C. 587. Legyen n pozitív egész. Az x-tengely n abszcisszájú pontját összekötjük az y-tengely $n-1$ és $n+1$ ordinátájú pontjaival, továbbá az y-tengely n ordinátájú pontját összekötjük az x-tengely $n-1$, illetve $n+1$ abszcisszájú pontjaival. Mekkora területű négyszöget zár közre ez a négy szakasz?

C. 588. Írjuk fel az $f:(-\infty,\,-2)\to\mathbf{R}$, $x\mapsto 2x^2+8x+7$ függvény inverzét.

C. 589. Egy V keresztmetszetű vízlevezető árokban elakadt egy egyenes bot. A bot két vége az árok két különböző oldalához ér hozzá, és a két oldal síkjával azonos nagyságú szöget zár be. Mutassuk meg, hogy ekkor a bot két vége egyenlő távolságra van az árok aljától.

❄

Beküldési határidő: 2000. június 15.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest, Pf. 47. 1255

A B pontversenyben kitűzött feladatok (3372–3381.)

B. 3372. Egy derékszögű háromszögről tudjuk, hogy a súlyvonalaiból mint oldalakból szerkesztett háromszög is derékszögű. Bizonyítsuk be, hogy a két háromszög hasonló.
(*3 pont*) Javasolta: *Gyanta Nándor,* Budapest

B. 3373. Az f egyenes két oldalán, tőle egységnyi távolságra megrajzoljuk az e és g egyeneseket. Legyenek E, F és G a megfelelő egyenesek megfelelő pontjai úgy, hogy az általuk meghatározott háromszögben F-nél derékszög van. Mekkora a háromszög F-ből induló magassága?
(*3 pont*) Javasolta: *Pap Gyula,* Debrecen

B. 3374. Egy vizsga két részből áll, írásbeliből és szóbeliből. Mindkét részre 0-tól 9-ig terjedő egész értékű pontszámot lehet szerezni. A rangsorban A megelőzi B-t, ha A eredménye egyik vizsgán sem rosszabb, mint B-é, továbbá legalább az egyik vizsgán A eredménye határozottan jobb. Egy csoport húsz diákja közül semelyik kettő eredménye nem azonos. Bizonyítsuk be, hogy van a csoportban három diák, A, B és C, akik közül A megelőzi B-t és B megelőzi C-t.
(*4 pont*)

B. 3375. Van-e olyan $p(x)=x^2+ax+b$ egész együtthatós polinom, amelyre $a^2-4b\neq 0$ és $p(x)$ legalább 2000 egész helyen vesz fel négyzetszám értéket?
(*4 pont*)

B. 3376. Az ABC háromszög AC oldala egységnyi. Az A csúcsból induló súlyvonal $1:2$ arányban osztja az A-nál lévő szöget. Mekkora lehet a háromszög AB oldala?
(*3 pont*) Javasolta: *Mihalovics Sándor,* Esztergom

B. 3377. Legyen k páratlan szám. Mit ad maradékul a $2^{n-1}k^2+2^{n-2}k^4+2^{n-3}k^8+$ $+\ldots+2k^{2^{n-1}}+k^{2^n}$ összeg 2^{n+2}-nel osztva?
(*4 pont*) Javasolta: *Bencze Mihály,* Brassó

B. 3378. Egy érettségiző osztályban öt egyetemre felvételiznek, mindegyikre a diákoknak legalább a fele. Bizonyítsuk be, hogy van két olyan egyetem, hogy a diákoknak legalább az egyötöde mindkettőre jelentkezik.

(*5 pont*)

B. 3379. Legyen az ABC háromszögben az AA_1, BB_1, CC_1 szögfelezők metszéspontja O. Igazoljuk, hogy $8 \leqslant \frac{AO}{A_1O} \cdot \frac{BO}{B_1O} \cdot \frac{CO}{C_1O} \leqslant \frac{4R}{r}$, ahol R a köréírt, r a beírt kör sugarát jelöli.

(*5 pont*) Javasolta: *Bencze Mihály,* Brassó

B. 3380. Mutassuk meg, hogy minden paralelepipedonban vagy van olyan csúcs, amelynél a három élszög egyike sem hegyesszög, vagy van olyan csúcs, amelynél a három lapszög egyike sem tompaszög.

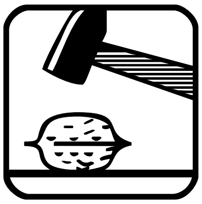
(*4 pont*)

B. 3381. Az osztályfőnök észrevette, hogy az osztályába járó 30 gyerek között van kettő, akinek ugyanazon a napon van a születésnapja. Mutassuk meg, hogy ez nem is olyan meglepő, hiszen annak valószínűsége, hogy 30 ember között van legalább kettő, akinek egy napon van a születésnapja, legalább $1 - \left(\frac{703}{732}\right)^{30}$.

(*5 pont*)

Beküldési határidő: 2000. június 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (239–241.)



A. 239. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott az a három pont, ahol a súlyvonalak meghosszabbításai metszik a körülírt kört.

Javasolta: *Rácz János,* Budapest

A. 240. Legyenek n és m pozitív egészek. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{\substack{1\le k\le n\\(k,m)=1}} \frac{1}{k} \ge \frac{\varphi(m)}{m} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(φ az Euler-féle függvény.)

A. 241. Igazoljuk, hogy tetszőleges n pozitív egész esetén

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=2^{2n-1}(n+1)(3n+2).$$

Problems of the Hungary–Israel Binational Mathematical Team Competition

1. $\triangle ABC$ is a given triangle. P_1 is a point inside $\triangle ABC$.

1. Prove that the lines obtained by reflecting P_1A, P_1B, P_1C through the angle bisectors of $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, respectively, meet at a common point P_2.
2. Let A_1, B_1, C_1 be the feet of the perpendiculars from P_1 onto BC, CA and AB, respectively. Let A_2, B_2, C_2 be the feet of the perpendiculars from P_2 onto BC, CA and AB, respectively. Prove that these six points A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 lie on a circle.
3. Prove that the circle in part (b) touches the nine point circle (*Feuerbach's circle*) of $\triangle ABC$ if and only if P_1, P_2 and the center of the circumcircle of $\triangle ABC$ are collinear.

2. An ant is walking inside the region bounded by the curve whose equation is $x^2+y^2+xy=6$. Its path is formed by straight segments parallel to the coordinate axes. It starts at an arbitrary point on the curve and takes off inside the region. When reaching the boundary, it turns by 90° and continues its walk inside the region. When arriving at a point on the boundary which it has already visited, or where it cannot continue its walk according to the given rule, the ant stops. Prove that, sooner or later, and regardless of the starting point, the ant will stop.

3. 1. In the plane, we are given the circle C (without its center) and the point P. Is it possible to construct, with a ruler only, the line through P and the center of the circle?

2. In the plane, we are given two circles C_1 and C_2 (without their centers). Construct, with a ruler only, the line through their centers when:
   - *i.*) the two circles intersect.
   - *ii.*) the two circles touch each other, and their point of contact, T, is marked.
   - ($*$) *iii.*) *We do not know how to solve this problem if the two circles have no common point. It might even be the case that this construction cannot be done at all with a ruler only. Can you do better?*

Note: Part *(iii)* does not belong to the official team contest. However, any progress will be appreciated.

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS

(Volume 50. No. 5. May 2000)

New exercises for practice – competition C (see page 297): **C. 585.** In certain audio cassettes, a 0.0075 mm wide tape is wound on the reels whose common diameter is 11 mm. The centres of the reels are in distance 42 mm apart. How long a tape can a usable cassette (in which the tape can be wound up on each reel without getting stuck at any point) contain? **C. 586.** Find the maximum possible number of sides of a convex polygon which does not have two consecutive obtuse angles. **C. 587.** Let n denote a positive integer. Connect the point of the x-axis whose abscissa is n with the points of the y-axis whose ordinates are $n-1$ and $n+1$, respectively. Connect, moreover, the point of the y-axis whose ordinate is n with the points of the x-axis whose abscissas are $n-1$ and $n+1$, respectively. Determine the area enclosed by the four segments obtained this way. **C. 588.** Determine the inverse of the function $f:(-\infty,-2)\to\mathbf{R}$, $x\mapsto 2x^2+8x+7$. **C. 589.** A straight stick got stuck in a drainage ditch of a V-shaped cross-section. The two ends of the stick lean against the two sides of the ditch, forming equal angles with both sides. Prove that the two ends of the stick rest in the same distance from the bottom of the ditch.

New problems – competition B (see page 296): **B. 3372.** In a certain right-angled triangle, the medians can be arranged to form the sides of another right-angled triangle. Prove that the two triangles are similar. (*3 points*) (Proposed by *N. Gyanta,* Budapest) **B. 3373.** Lines e and g, respectively, are drawn on each side of a given line f, in a unit distance from f. Points E,G and F lie on the corresponding lines such that triangle EFG has a right angle at vertex F. Determine the length of the altitude of the triangle starting at F. (*3 points*) (Proposed by *Gy. Pap,* Debrecen) **B. 3374.** A certain exam consists of a written and an oral part; the students can obtain an integer mark between 0 and 9 at each part. In the final evaluation student A is ranked higher than B if A's mark is not worse than that of B at each part of the exam, and is strictly better than that of B at one of the exams at least. In a group of 20 students no two students obtained identical results. Prove that there are three students A,B,C in the group such that A is ranked higher than B and B is ranked higher than C. (*4 points*) **B. 3375.** Is there any polynomial $p(x)=x^2+ax+$ $+b$ whose integers coefficients satisfy $a^2-4b\neq 0$ and which assigns a perfect square value to at least 2000 different integers? (*4 points*) **B. 3376.** In a triangle ABC, side AC is of unit length. The median starting at vertex A divides the angle at A in the ratio $1:2$. How long may side AB be? (*3 points*) (*S. Mihalovics,* Esztergom) **B. 3377.** Let k denote an odd integer. Find the remainder when the sum $2^{n-1}k^2+2^{n-2}k^4+2^{n-3}k^8+\ldots+2k^{2^{n-1}}+k^{2^n}$ is divided by 2^{n+2}. (*4 points*) (Proposed by *M. Bencze,* Brassó) **B. 3378.** The pupils of a graduating class apply at five different universities; each university receiving the application of at least half of the pupils. Prove that there exist two universities such that at least one fifth of the pupils apply at both institutions. (*5 points*) **B. 3379.** In a triangle ABC, the angle bisectors AA_1, BB_1, CC_1 meet at point O. Prove that

$$8\leqslant\frac{AO}{A_1O}\cdot\frac{BO}{B_1O}\cdot\frac{CO}{C_1O}\leqslant\frac{4R}{r},$$

where R and r, respectively, denote the radii of the circumscribed and the inscribed circle. (*5 points*) (Proposed by *M. Bencze,* Brassó) **B. 3380.** Show that every parallelepiped has a vertex where either none of the 3 plane angles between the edges are acute or none of the 3 dihedral angles are obtuse. (*4 points*) **B. 3381.** A teacher noticed that among the 30 pupils who attend to her class, two celebrate their birthdays on the very same day. This is not a big surprise: prove that the probability of two people out of 30 having the same birthday is at least $1-\left(\frac{703}{732}\right)^{30}$. (*5 points*)

New advanced problems – competition A (see page 298): **A. 239.** Construct a triangle, if the three points where the extensions of the medians intersect the circumcircle of the triangle are given. (Proposed by *J. Rácz,* Budapest) **A. 240.** Let n and m denote positive integers. Prove that

$$\sum_{\substack{1\leq k\leq n\\(k,\,m)=1}}\frac{1}{k}\geq\frac{\varphi(m)}{m}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

where φ is Euler's totient function. **A. 241.** Prove that, for every positive integer n,

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=2^{2n-1}(n+1)(3n+2).$$