Bicentenáriumi Jedlik Ányos fizikaverseny, Győr

Kétszáz évvel ezelőtt, 1800. január 11-én, az Érsekújvárhoz közeli Szimőn született a tudós-paptanár, bencés szerzetes, feltaláló, az első magyar nyelvű egyetemi fizika tankönyv írója, Jedlik Ányos. Rá emlékeztünk az egész Kárpát-medence magyar középiskolásai számára meghirdetett fizikaversennyel. A verseny döntőjét – amelyre 35 tanuló jutott be – Győrött, a Czuczor Gergely Bencés Gimnáziumban március 17–18-án rendeztünk meg. Az első napon 2,5 órát kaptak a versenyzők a következő feladatsorra[1]:

1. A kerti csapra csatlakoztatott gumicső segítségével locsoljuk a kertet. Soroljon fel néhány lehetőséget, hogyan tudnánk minél egyszerűbben megmérni a locsolócső nyílásán kispriccelő víz sebességét!

2. Átlátszó plexilapon szétterülő vékony olajréteg egyik pontja bíborvörösnek, a másik pontja acélkéknek tűnik. A két pont között a színek a színképnek megfelelően folytonosan mennek át egymásba. Legalább mekkora a megfigyelt két pontban az olajréteg vastagságkülönbsége? (Az olaj törésmutatója 1,5; a plexié 1,6.)

Színek	Hullámhossz (nm)	Kiegészítő szín
Vörös	700	kékeszöld
Narancs	600	acélkék
Sárga	575	ultramarin
Zöld	500	bíborvörös
Kék	470	sárga
Ibolya	450	sárgászöld

3. Optikai rácsot 586 nm hullámhosszúságú párhuzamos fénynyalábbal világítunk meg. A rácstól 3 méterre levő ernyőn a nulladrendű (a direkt) és az elsőrendű elhajlási maximum egymástól 20 cm-re látható. Centiméterenként hány vonal (karcolat) van a rácson? Milyen messze van a másodrendű elhajlási maximum az elsőrendűtől? Milyen színű fénypamacsokat látunk az ernyőn?

4. Az Egyenlítő mentén hajó halad nyugat-kelet irányban 45 km/h sebességgel. Mennyit siet vagy késik 3 óra alatt a hajón levő ingaóra, amely a Földhöz képest nyugvó hajón pontosan jár?

[1] Az 1. és 5. feladatot dr. Tolnai László, a 2. és 3. feladatot Zábrádi Antal, a 4., 6. és 7. feladatot dr. Radnai Gyula adta.

5. Egy soros gerjesztésű egyenáramú motort $U=100$ V feszültségre kapcsolunk. Indulás előtt a motor 16 A áramot vesz fel, majd forogni kezd. Mire a fordulatszáma állandóvá válik, a motoron átfolyó áram 4 A-re csökken. A motort dinamónak akarjuk használni, és ugyanakkora fordulatszámon üzemeltetjük, mint amikor motor volt. Mekkora terhelő ellenállást kell a dinamóra kötni, ha azt akarjuk, hogy a dinamón is 4 A áram folyjon át, és mekkora ebben az esetben a dinamó hasznos teljesítménye?

6. Miképp fejthetni meg azt, hogy a delejes acélrúd hatása a rúd közepe táján semmi, a rúd végei felé pedig mindinkább növekszik? (Jedlik Ányos, 1871)

7. Mi a különbség a haladó és álló hanghullámok között, és mely körülményekben s mi módon képződnek az álló hullámok? (Jedlik Ányos, 1872)

A szellemi munkát kulturális program követte. A vendégek megtekinthették Győr-Belváros nevezetességeit, ezután a városi köztemetőben megkoszorúzták Jedlik Ányos sírját. Az élménydús nap a városháza dísztermében végződött, ahol Bach és Albinoni darabjait hallgathattuk Hoffmann László orgonaművész tolmácsolásában.

A második napon a továbbjutott 9 tanulónak Jedlik rekonstruált eszközeit kellett működés közben bemutatni. A versenyzők még a verseny előtt írott ismertetőt kaptak az alábbi, a Jedlik kiállításhoz fűződő témakörökből. [2]

1. A Froment-féle motor működési elve és előnyei a korábbiakhoz képest.

2. A Gramme-féle gyűrűs motor működési elve (összevetve a mai motorok elvével).

3. A forgony elve (megoldandó problémák).

4. Az ívlámpák szabályozó szerkezete. Ívfénnyel színkép előállítása, gyertyafény árnyképe.

5. Lissajous-görbék számítógépen. (Analóg és digitális rendszerek összevetése.)

6. A dinamó.

7. Újdonságok a vonalzógépen. Ívfénnyel színkép előállítása.

8. A hő mint hullám (hulláminterferencia, fókuszálás).

9. Nagyfeszültség előállítása szikrainduktorral. (Nagyfrekvenciás nagyfeszültségű kísérletek.)

10. A villamfeszítő. (Jedlik-palack feltöltése, kisütése.)

A verseny díjazottai:

I. helyezett: *Friedl Zita* (Sopron, Széchenyi I. Gimn.), tanára: Lang Ágota.

II. helyezett: *Triebl László* (Győr, Czuczor Gergely Bencés Gimn.),
tanára: Szalóky Albert.

III. helyezett: *Cseh András* (Győr, Czuczor Gergely Bencés Gimn.),
tanára: Tóth Konstantin.

[2] A téma-ismertetőket és a szóbeli feladatokat Szalóky Albert állította össze.

A legszebb írásbeli megoldásért: *Kozma Kornél* (Budapest, Puskás Tivadar Technikum), tanára: Nagy Józsefné. A legjobb szóbeli megoldásért: *Cseh András* (Győr, Czuczor Gergely Bencés Gimn.), tanára: Tóth Konstantin. A legjobb határon túli magyar diák: *Ács László* (Érsekújvár, Magyar Tannyelvű Középisk.), tanára: Hátas Anna. A rendező város díja: *Lackó Tamás* (Érsekújvár, Magyar Tannyelvű Középisk.), tanára: Hátas Anna. A legeredményesebb Jedlik-es vagy bencés diák: *Triebl László* (Győr, Czuczor Gergely Bencés Gimn.), tanára: Szalóky Albert.

A versenyt az Oktatási Minisztérium, a Jedlik Ányos Társaság, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat Győri Csoportja, Győr város Önkormányzata, a győri Jedlik Ányos Informatikai Szakközépiskola és Gimnázium és a győri Czuczor Gergely Bencés Gimnázium támogatta.

Zábrádi Antal
ELFT Győri Csoport elnöke

CSILLAGÁSZAT

Rovatvezető: Horányi Gábor

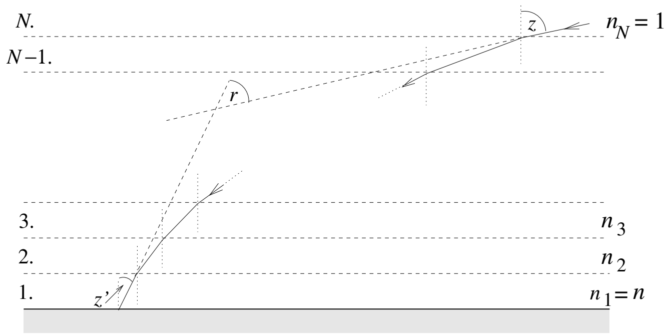
A refrakció

Az égitestek fénye szemünket vagy műszereinket úgy éri el, hogy közben keresztülhalad a Föld légkörén is. A levegő a rajta áthaladó fényre többféle módon is hatást gyakorol: megváltoztatja intenzitását, színképi összetételét, sőt még haladási irányát is. Ezeket a hatásokat pontos csillagászati vizsgálatoknál figyelembe kell venni, mielőtt az észlelési eredményekből következtetéseket vonnánk le.

Komoly gondot okoz, hogy a levegő állapota térben és időben erősen változik. Emiatt a csillagok fénye még szabad szemmel nézve is nyugtalan: sziporkázik, reszket, színekben játszik. A jelenséget *scintillációnak* nevezzük. Oka az, hogy az állandóan mozgó, turbulens légkörben kavargó, különböző fizikai állapotú légtömegek pillanatról pillanatra másképp törik meg a rajtuk áthaladó fényt. A csillagok képe jó távcsőben elvileg pontszerű, illetve a fényelhajlás miatt néhány koncentrikus fényes és sötét gyűrűből áll; ám a scintilláció következtében a csillagászati távcsövek fókuszsíkjában keletkező kép sosem teljesen éles, és időben sem állandó. De még ha a levegő állapota változatlan lenne is, fellépne benne a *szelektív abszorpció* és a *fényszórás* jelensége. Ezeket a hatásokat, ha nem is nagyon egyszerűen, de figyelembe tudjuk venni, ismerve a levegőt alkotó gázok kémiai összetételét és fizikai állapotát. Ha pedig mindezektől eltekinthetünk, akkor még fennmarad a *refrakció,* azaz a légköri fénytörés jelensége, ami az égitestek látszó irányát változtatja meg. Precíz pozícióméréseknél ezt is figyelembe kell venni; ez bár elvileg nem is nehéz, de a gyakorlatban nem végezhető el pontosan, hiszen a légkör fizikai állapota így a nyomástól és hőmérséklettől is függő törésmutatója pillanatról pillanatra változik. Mindezeket a zavaró hatásokat teljesen kiküszöbölni csak úgy lehet, hogy műszereinket a légkörön túlra telepítjük.

Nézzük meg közelebbről a refrakció jelenségét! Már *Tycho Brahe* (1546–1601) is foglalkozott vele, s megpróbálta tekintetbe venni, hogy pozíciómérései minél pontosabbak legyenek, de ez még nem sikerülhetett neki, mert a jelenség oka ismeretlen volt számára. Úgy hitte, hogy a Nap és a többi égitest fényének irányváltozása különböző.

Az égitest, mondjuk egy csillag fénye a légkörbe lépve egyre sűrűbb légrétegeken keresztülhatolva jut le a felszínig, azaz a törésmutató folyamatosan változik. Ha eltekintünk a légköri nyugtalanságtól, akkor a törésmutatót monoton növekvőnek vehetjük. Így a fénysugár útja valamilyen görbe vonal lesz (kivéve azt az esetet, amikor a fény pontosan a zenit irányából érkezik). Ilyenkor a refrakció nem változtatja meg haladásának irányát. A ferdén érkező sugár törése miatt az égitestet valódi helyzeténél magasabban észleljük, azaz zenittávolsága látszólag csökken. Legyen z a csillag (valódi) zenittávolsága, és z' az a zenittávolság, amit észlelünk. A kettő különbsége, a refrakció szöge legyen r; tehát $r = z - z'$.



Osszuk fel a légkört gondolatban N rétegre, amelyekben a törésmutatót állandónak vesszük. A legalsónak az abszolút törésmutatója legyen $n_1 = n$, a legfelsőé pedig $n_N = 1$, a vákuum abszolút törésmutatója. Írjuk föl minden réteg határfelületére a Snellius–Descartes-törvényt, majd a kapott $N-1$ egyenletet szorozzuk össze! Ekkor a legalsó réteg törésmutatóján, valamint a felszíni és a légkör határán észlelhető beesés szögének szinuszán kívül minden kiesik, és kapjuk:

$$\frac{\sin z}{\sin z'} = \frac{\sin(r+z')}{\sin z'} = \frac{\sin r \cos z' + \sin z'}{\sin z'} = n.$$

(Figyelembe vettük, hogy r kicsiny szög, tehát $\cos r \approx 1$.) Ebből pedig a fény eltérülésének szögére a következő összefüggés adódik:

$$\sin r = (n-1)\,\mathrm{tg}\, z'.$$

A z' látszólagos zenittávolság és a levegő törésmutatója ismeretében ebből a refrakció r szöge meghatározható, ezzel pedig megkaphatjuk az égitest valódi zenittávolságát.

A refrakció szöge a zenitben nulla, és ahogy közeledünk a horizonthoz, monoton növekszik, eleinte lassan, majd a horizont közelében már gyorsan. Értéke a horizonton kb. $34'$, vagyis nagyjából akkora, mint a Nap vagy a Hold látszó átmérője. Eszerint amikor a lemenő Nap éppen érinti a látóhatárt, de még teljes terjedelmében fent van, akkor valójában már teljesen a látóhatár alá merült s csak a refrakció által megemelt képét látjuk. Sőt, megfigyelhetjük, hogy ez a kép eltorzul: alját sokkal jobban megemeli a fénytörés, mint a tetejét, ezért a horizonton a Napot „zsemle” alakúnak látjuk.

Csaba György Gábor

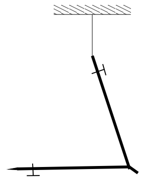
Fizika gyakorlatok és feladatok megoldása

FGy. 3154. *Egy körzőt az egyik végénél fogva felfüggesztünk egy fonálon. Milyen szögben kell kinyitni a körzőt, hogy csuklója a lehető legmagasabban legyen? Hogyan áll ekkor a körző alsó szára? (A körző szárait közelítsük homogén rudakkal.)*

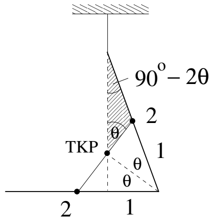
Közli: *Bercsek Zoltán,* Budapest

Megoldás. A körző tömegközéppontja mindig a felfüggesztési pont alatt kell legyen. Ha a szárak nyílásszögét változtatjuk, az egyes szárak tömegközéppontja vízszintes irányban is elmozdul, de a felezőpontjuk (a rendszer tömegközéppontja) csak függőlegesen mozoghat.

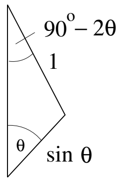
Belátjuk, hogy a csukló akkor lesz a legmagasabban, amikor a körző alsó szára *vízszintes*. Induljunk ki ebből a helyzetből (*1. ábra*), és képzeljük el egy pillanatra, hogy a körző felső (felfüggesztett) szárát rögzítetten tartjuk. Ha a másik (kezdetben vízszintes) szárat valamerre (akár felfele, akár pedig lefele) döntjük, a tömegközéppontja a körző csuklójához vízszintes irányban közeledik. Ha most a felső szár rögzítését megszüntetjük, ez a szár mindenképpen lefelé kell elmozduljon, mert csak így érhető el, hogy a közös tömegközéppont továbbra is a felfüggesztési pont alatt maradjon.



1. ábra



2. ábra



3. ábra

Jelöljük a körző szárai közötti szöget 2θ-val, és válasszuk a szárak hosszát 2 egységnyinek! A *2. ábrán* látható besötétített háromszögre (melyet *3. ábrán* kinagyítva láthatunk) felírhatjuk a szinusztételt:

$$\frac{\sin\theta}{1} = \frac{\sin(90^\circ - 2\theta)}{\sin\theta},$$

melyből egyszerű átalakítások után

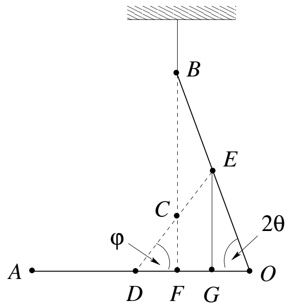
$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \text{azaz} \qquad \theta \approx 35{,}3^\circ$$

adódik. A körző szárait tehát $2\theta \approx 70{,}5^\circ$-nyira kell kinyitnunk, ekkor lesz a csuklója a legmagasabban.

Pozsonyi Gergő (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A kérdéses 2θ nyílásszög a párhuzamos szelők tételének alkalmazásával is megkapható. Húzzunk a rendszer C tömegközéppontján át és a felső szár E tömegközéppontján át egy-egy függőleges egyenest (*4. ábra*). Ezek a 2θ nyílású szög szárainak párhuzamos szelői, tehát OE és EB egyenlőségéből $FG=GO$ következik. Hasonló megfontolással a φ szögre: $DC=$ $=CE$ miatt $FG=DF$. Ezek szerint az F és a G pontok harmadolják az OD szakaszt, amely viszont OE-vel egyenlő, vagyis $OE=3\,GO$. Mivel az EGO háromszög derékszögű, $\cos 2\theta=\frac{1}{3}$, azaz $2\theta\approx 70{,}5^\circ$.

(H. Gy.)



4. ábra

84 dolgozat érkezett. Helyes 49, kicsit hiányos (3 pont) 15 megoldás, hiányos (1–2 pont) 3, hibás 16, nem versenyszerű (névtelen) 1 dolgozat.

FGy. 3185. *Egy tanuló sorba kapcsolt négy egyforma* 1,5 V*-os elemet és egy* 6 V*-os akkumulátort. Az így kapott „telepre” rákötött egy* 6 Ω*-os ellenállást. Ezen az ellenálláson is* 6 V *lett a feszültség. Ezek után* 1,2,3 *majd 4 elemet vett ki az áramkörből, és meglepődve tapasztalta, hogy az ellenálláson a feszültség mindegyik esetben* 6 V *maradt. Kis gondolkodás után rájött, hogy nincs ebben semmi ördöngösség. Miért?*

(4 pont) (**Á**) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

Megoldás. Ha n darab 1,5 V-os, egyenként R_b belső ellenállású elemet, egy (elhanyagolható belső ellenállású) 6 V-os akkumulátort és egy 6 Ω-s terhelő ellenállást sorba kapcsolunk, a körben folyó áram az Ohm-törvény szerint

(1) $$I=\frac{n\cdot 1{,}5+6}{n\cdot R_b+6}.$$

A terhelő ellenálláson eső feszültség mindegyik ($n=4$, 3, 2, 1, 0) esetben 6 V, az áramkörben tehát mindannyiszor 1 A áram folyt. Az (1) egyenlet szerint ez akkor teljesül, ha

$$n\,(1{,}5-R_b)\equiv 0,$$

ami akkor áll fenn, ha a telepek belső ellenállása $R_b=1{,}5$ Ω.

Henits Péter (Szombathely, Premontrei Rendi Szent Norbert Gimn., 10. o.t.)

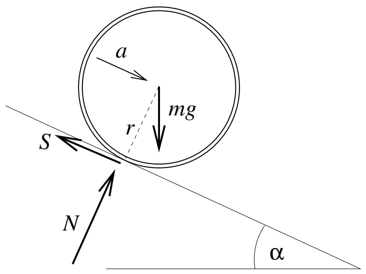
369 dolgozat érkezett. Helyes 272 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 25, hiányos (1–2 pont) 18, hibás 48, nem versenyszerű 6 dolgozat.

FN. 3232. *Egy α hajlásszögű lejtőn a súrlódási együttható a lejtő tetejétől mért távolsággal arányosan nő: $\mu=\gamma\cdot x$. Írjuk le a lejtő tetejéről induló m tömegű, r sugarú abroncs mozgását! Mennyi idő múlva fog az abroncs tisztán gördülni?*

(6 pont) Közli: *Balogh Péter,* Budapest

Megoldás. Az abroncsra az *1. ábrán* látható erők hatnak. Mivel a lejtőre merőleges irányban nem gyorsul a test,

(1) $$N=mg\cos\alpha,$$



1. ábra

a súrlódási erő pedig (mindaddig, amíg csúszik az abroncs)

(2) $$S = \mu N = \mu m g \cos\alpha.$$

A lejtő irányú mozgásegyenletből következik, hogy az abroncs tömegközéppontjának gyorsulása

(3) $$a = g(\sin\alpha - \mu g \cos\alpha).$$

A súrlódási együttható megadott helyfüggését is figyelembe véve és bevezetve az

(4) $$\omega_0 = \sqrt{\gamma g \cos\alpha} \qquad \text{és} \qquad x_0 = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\gamma}$$

jelöléseket a (3) mozgásegyenlet

(5) $$a = -\omega_0^2\,(x - x_0)$$

alakba is írható. Ez az egyenlet megegyezik egy ω_0 körfrekvenciájú, x_0 egyensúlyi helyzetű harmonikus rezgőmozgásával. Ezt az analógiát kihasználva felírhatjuk az abroncs tömegközéppontjának $x(t)$ elmozdulását is. Az $x(0) = 0$ és $v(0) = 0$ kezdeti feltételeket figyelembe véve a megoldás:

(6) $$x(t) = x_0\,(1 - \cos\omega_0 t),$$

az abroncs tömegközéppontjának pillanatnyi sebessége pedig

(7) $$v(t) = x_0\omega_0 \sin\omega_0 t.$$

A elmozdulás ismeretében kiszámíthatjuk a pillanatról pillanatra változó súrlódási együtthatót, abból a súrlódási erőt:

(8) $$S(t) = \mu m g \cos\alpha = x(t)\cdot\gamma m g \cos\alpha,$$

majd ennek forgatónyomatékából az abroncs β szöggyorsulását:

(9) $$\beta = \frac{rS}{mr^2} = \frac{\gamma x_0 g \cos\alpha}{r}\,(1 - \cos\omega_0 t)\,.$$

(Kihasználtuk, hogy egy m tömegű, r sugarú vékony abroncs tehetetlenségi nyomatéka mr^2.)

A (9) képlet azt mutatja, hogy a szöggyorsulás egy időben állandó és egy időben periodikusan ($\cos\omega_0 t$-vel arányosan) változó tag összege. Ennek megfelelően az abroncs szögsebessége (annak kezdeti nulla értékét is figyelembe véve)*:

(10) $$\omega(t) = \frac{\gamma x_0 g}{r}\cos\alpha\left(t - \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}\right).$$

* Az abroncs pillanatról pillanatra változó $\omega(t)$ szögsebessége nem tévesztendő össze a tömegközéppont mozgásképletében szereplő ω_0 körfrekvenciával, ami egy állandó érték.

Az abroncs addig csúszik, míg a tömegközéppont $v(t)$ sebessége nagyobb, mint a forgómozgásból származó $v_{\text{ker}}(t)=r\omega(t)$ kerületi sebesség. A tiszta gördülés kezdetére (7) és (10) szerint

$$x_0\omega_0 \sin\omega_0 t=\gamma x_0 g\cos\alpha\left(t-\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}\right) \tag{11}$$

jellemző, amit (4) felhasználásával és a az $\xi=\omega_0 t$ új változó bevezetésével

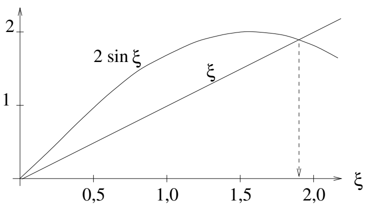
$$\xi=2\sin\xi \tag{12}$$

alakra hozhatunk. (12) megoldása grafikusan (*2. ábra*), vagy egy zsebszámológéppel numerikusan kereshető meg, és $\xi\approx 1{,}8955$-nek adódik.

Az abroncs tehát az indításától számított

$$t\approx\frac{1{,}90}{\omega_0}=\frac{1{,}90}{\sqrt{\gamma g\cos\alpha}} \tag{13}$$

idő múlva kezd el csúszásmentesen gördülni.



2. ábra

A mozgás további részében (egészen a lejtő aljáig) az abroncs sebessége és a szögsebessége ($\frac{1}{2}g\sin\alpha$ gyorsulással, illetve $\dfrac{g}{2r}\sin\alpha$ szöggyorsulással) időben egyenletesen növekszik.

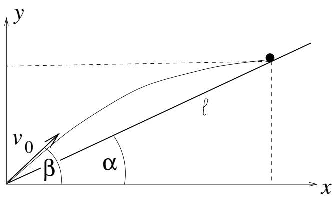
Ambrus Gergely (Szeged, Radnóti M. Gimn., 10. o.t.) és *Katona Gergely* (Budapest, ELTE Trefort Á. Gyakorlóisk., 12. o.t.) dolgozata alapján

23 dolgozat érkezett. Helyes Ambrus Gergely, Buruzs Ádám, Gáspár Merse Előd, Hegedűs Ákos, Katona Gergely, Máthé András és Tóth Bálint megoldása. Hiányos (1–3 pont) 13, hibás 1, nem versenyszerű 2 dolgozat.

FGy. 3235. *Egy* 35°*-os lejtő alján hasalva puskával próbáljuk eltalálni a lejtőn fölfelé* 40 *méterre levő célt. Milyen irányban kell tartanunk a puskát, ha a lövedék kezdősebessége* $100\ \mathrm{m/s}$*, és a levegő ellenállásától eltekintünk?*

(4 pont) Közli: *Láng Róbert,* Balatonfüred

Megoldás. A lövedék pályája parabola. Ábrázoljuk ezt a parabolát és a lejtőt közös koordinátarendszerben. Ha a kezdősebesség vízszintessel bezárt szöge β, a parabola egyenlete (a ferde hajítás kinematikai összefüggéseinek megfelelően, az *ábra* jelöléseivel):



$$y=\operatorname{tg}\beta\cdot x-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\beta}x^2. \tag{1}$$

A célpont koordinátáit ismerjük:

$$x=\ell\cos\alpha \qquad \text{és} \qquad y=\ell\sin\alpha,$$

ezeket (1)-be helyettesítve a keresett β szögre a következő egyenletet kapjuk:

$$\ell \sin\alpha = \ell \mathrm{tg}\,\beta\, \cos\alpha - \frac{g\ell^2 \cos^2\alpha}{2v_0^2 \cos^2\beta}.$$

Innen trigonometriai átalakítások után

$$2\sin(\beta-\alpha)\cos\beta = \frac{g\ell}{v_0^2}\cos^2\alpha,$$

majd ebből a $2\sin u \cos v = \sin(u+v) + \sin(u-v)$ azonosság alkalmazásával

$$\sin(2\beta-\alpha) = \sin\alpha + \frac{g\ell^2}{v_0^2}\cos^2\alpha$$

adódik. Az adatok behelyettesítése után

$$\sin(2\beta - 35^\circ) = \frac{9{,}81\cdot 40\cos 35^\circ}{100^2} + \sin 35^\circ \approx 0{,}600, \tag{2}$$

vagyis $\beta \approx 35{,}9^\circ$. A puskát tehát a lejtőhöz képest $0{,}9^\circ$-os szögben kell tartanunk.

Szintai Balázs (Szekszárd, Garay J. Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzés. A (2) egyenletnek $\beta = 89{,}07^\circ$ is gyöke, ez azonban a fizikai feladat szempontjából nem tekinthető reális megoldásnak, mert a majdnem függőlegesen felfelé kilőtt lövedék nem „eltalálja”, hanem (kb. 500 méter magasból) rápottyan a célra.

178 dolgozat érkezett. Helyes 116 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 34, hiányos (1–2 pont) 16, hibás 12 dolgozat.

FF. 3252. *Mi korlátozza inkább az emberi szem felbontóképességét: a pupilla nagysága, vagy a retina idegsejtjeinek sűrűsége?*

(5 pont) Közli: *Kedves Ferenc*, Budapest

Megoldás. A szem felbontóképességét azzal a legkisebb szöggel jellemezhetjük, amekkora látószögű pontszerű fényforrások még külön-külön láthatók.

A retinán a csapok kb. 5 mikron távolságban vannak egymástól, a szemlencse és a retina távolsága pedig kb. 15 mm. Ha két fényforrás szögtávolsága kisebb, mint

$$\alpha_1 = \frac{5\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}}{1{,}5\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}} \approx 3\cdot 10^{-4}\ \text{radián} \approx 0{,}1\ \text{ívperc},$$

akkor – az idegsejtek véges sűrűsége miatt – nem láthatjuk külön azokat.

A pupilla véges átmérője (átlagos megvilágításnál $D \approx 5$ mm) és a fény hullámtermészete miatt egy pontszerű fényforrás képe nem pontszerű, hanem (a fényelhajlás miatt) véges méretű fényfolt lesz. A folt látószöge (átmérőjének és a képtávolságnak a hányadosa)

$$\alpha_2 \approx \frac{\lambda}{D},$$

ahol $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-7}$ m a látható (sárgászöld) fény hullámhossza. Numerikusan $\alpha_2 \approx 1 \cdot \cdot 10^{-4}$ radián. Ha két (pontszerű) fényforrás látószöge α_2-nél kisebb, akkor az elhajlási jelenség miatt a képeik (a fényfoltok) átfedik egymást, tehát a fényforrások nem látszanak külön-külön.

Látható, hogy az idegsejtek véges sűrűsége egy kicsit erősebben korlátozza a szem felbontóképességét, mint a pupilla nagysága és a fény hullámtermészete, de a két korlát *nagyságrendileg* megegyezik. Ennek feltehetően evolúciós okai vannak: nem volt „érdemes” biológiailag sokkal jobb szem kifejlődjön, mint amilyen felbontóképességet a fizikai törvények „megengednek”.

Geresdi Attila (Pécs, Árpád Fejedelem Gimn., 9. o.t.) és
Németh Péter (Jászapáti, Mészáros L. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Az elhajlási jelenségből adódó felbontóképesség képletét (nagyságrendileg helyesen) abból az egyszerűsített modellből is megkaphatjuk, ha a kör alakú pupilla helyett egy vele megegyező szélességű rést tekintünk, és ezen a résen áthaladó fény elhajlási maximumainak szélességét vizsgáljuk. Úgy is eljuthatunk α_2 idézett képletéhez, ha azt a kérdést tesszük fel, hogy egy pontszerű fényforrásból a retina mely részeire érkezhet fény különböző útvonalakon, de $\lambda/2$-nél nem nagyobb útkülönbséggel.

29 dolgozat érkezett. Helyes 12 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 10, hibás 4 dolgozat.

FF. 3260. *Szalaggenerátor segítségével egy fémgömböt Q_1 töltésűre tudunk feltölteni. Ha ezt a fémgömböt egy töltetlen másik fémgömbhöz érintjük, akkor annak Q_2 töltést ad át. Folytatva az eljárást – az első gömböt mindig előbb a szalaggenerátorhoz, azután a másik gömbhöz érintjük, – legfeljebb mennyi töltést lehet felhalmozni a második gömbön?*

(4 pont) *Közli: Sütt Dezső,* Budapest

I. megoldás. A fémgömböket összeérintve a potenciáljuk egyenlő lesz, a rajtuk levő össztöltés tehát mindig ugyanolyan (a kapacitásuknak megfelelő) arányban oszlik meg közöttük. Ez az α arány az első összeérintés előtti és utáni adatokból számítható ki:

$$\alpha = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}.$$

Ha a második összeérintéskor Q_3 töltés kerül a második fémgömbre, akkor fennáll

$$\alpha = \frac{Q_2 + Q_3}{Q_1 - Q_3}, \qquad \text{ahonnan} \qquad Q_3 = \frac{Q_2}{Q_1} Q_2.$$

Hasonlóan számítható, hogy az n-edik összeérintés során átadott töltés

$$Q_{n+1} = \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^{n-1} Q_2,$$

a második fémgömbre kerülő össztöltés pedig

$$Q = Q_2 \left[1 + \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right) + \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^2 + \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^3 + \ldots\right].$$

Ennek a végtelen mértani sornak az összege:

$$Q = \frac{1}{1-(Q_2/Q_1)} Q_2 = \frac{Q_1 Q_2}{Q_1 - Q_2}.$$

Szima Ernő (Debrecen, Tóth Á. Gimn., 11. o.t.)

II. megoldás. Egy fémtest U elektromos potenciálja a fémen levő Q töltéssel arányos: $Q/U = C$ az adott fémtestre jellemző állandó (a test kapacitása).

Két fémtest összeérintésekor a potenciálok kiegyenlítődnek. Ez a fémgömbök első összeérintéskor is teljesült, tehát fennállt, hogy

$$\frac{Q_1 - Q_2}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2},$$

ahol C_1 az első, C_2 pedig a második test kapacitása.

A második gömbre akkor nem tudunk már több töltést felvinni, ha a rajta levő Q töltés mellett akkora a potenciálja, mint az első testnek Q_1 töltésen:

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q}{C_2}.$$

A fenti két egyenletet elosztva egymással a keresett Q töltésre $Q_1 Q_2/(Q_1 - Q_2)$ adódik.

Bankó Krisztián (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn, 11. o.t.) és
Gajdos Béla (Beregszász, Bethlen G. Gimn, 11. o.t.) dolgozata alapján

41 dolgozat érkezett. Helyes 31 megoldás. Hiányos (2 pont) 2, hibás 6, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 3277. *Tarzan egy szikla széléről elrugaszkodva* 18 m *hosszú indán lendül egy másik sziklaszirt felé. A szikla tetejéről a pálya legmélyebb pontjáig* 3 *métert süllyed. Kibírja-e az inda a* 900 N *súlyú Tarzan ugrását, ha az inda szakítószilárdsága* 1200 N*?*

(4 pont) *Budó Ágoston verseny,* Szeged

Megoldás. Tekintsünk el először Tarzan méreteitől és az elrugaszkodás kezdősebességétől! Tarzan sebessége $h = 3$ m nagyságú magasságváltozás után (az energiamegmaradás tételéből) $v = \sqrt{2gh}$. Ekkora sebességgel mozgó testre az $R = 18$ m sugarú körpálya legmélyebb pontjában az indának

$$K = mg + \frac{mv^2}{R} = mg\left(1 + \frac{2h}{R}\right) = 1200 \text{ N}$$

nagyságú erőt kellene kifejtenie. Ez éppen a szakítószilárdságának megfelelő érték, tehát (ebben a közelítésben) a kérdésre nem tudunk egyértelmű választ adni.

Vegyük most figyelembe, hogy Tarzan *elrugaszkodik* a szikla szélétől, kezdősebessége tehát nem nulla. Emiatt a pálya legmélyebb pontjában a sebessége a fenti értéknél nagyobb, tehát az indát feszítő erő is nagyobb, mint a szakítószilárdsága, következésképpen elszakad.

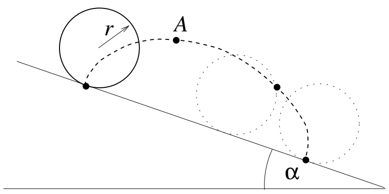
Ha azt is figyelembe vennénk, hogy Tarzan nem pontszerű, hanem kb. 2 méter magas, karjai pedig mintegy 1 méteresek, akkor a tömegközéppontja pályájának sugarára $R\approx 20$ m adódna. Ezzel az adattal számolva az indát feszítő legnagyobb erőre (elrugaszkodás nélkül) a szakítószilárdságnál kisebb érték adódik. Ha mind az elrugaszkodás tényét, mind pedig Tarzan véges méreteit, esetleg még a légellenállást is figyelembe vesszük, akkor a feladat ismét határozatlanná válik: az elrugaszkodás mértékétől függ, hogy elszakad-e az inda, vagy sem.

Reischig Péter (Budapest, Eötvös J. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

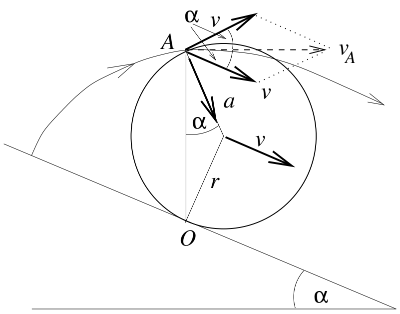
505 dolgozat érkezett. Helyes 55 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 334, hiányos (1–2 pont) 75, hibás 21, nem versenyszerű 20 (!) dolgozat.

P. 3281. *Határozzuk meg a lejtőn csúszás nélkül legördülő karika egy pontja által leírt pálya legfelső A pontjában a görbületi sugarat!*

(*5 pont*) *Orosz feladat nyomán*



I. megoldás A karika adott pontjának pályagörbéjét nyilván nem befolyásolja az, hogy a karika gyorsul-e vagy nem. Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy a karika egyenletes v sebességgel gördül le a lejtőn.



1. ábra

Az A pont a pálya legmagasabb pontja, ezért itt kérdéses (éppen itt levő) tömegpontnak nem lehet függőlegesen felfele mutató sebességkomponense. (Ha nem így lenne, akkor egy kicsivel később még magasabbra kerülne). Hasonló okokból lefelé mutató sem lehet a függőleges sebesség-összetevője. A karika kérdéses darabkájának sebesség tehát vízszintes kell legyen az A pontban.

A karika bármely pontjának sebessége a karika középpontjának v nagyságú, a vízszinteshez képest α szögben lefelé irányuló sebességéből, valamint a középpont körüli forgómozgás ugyancsak v nagyságú kerületi sebességéből tevődik össze. A két sebesség vektori összege akkor lesz vízszintes, ha a kerületi sebesség vektora a vízszintessel ugyancsak α szöget zár be (emelkedő irányban). Az eredő sebesség nagysága ezek szerint

$$v_A = 2v\cos\alpha.$$

A vizsgált pont gyorsulása a karikával együtt mozgó vonatkoztatási rendszerből nézve forgómozgás centripetális gyorsulása, tehát

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

Ez a gyorsulásvektor a karika középpontja felé mutat, tehát a függőlegessel α szöget zár be.

A gyorsulás a lejtőhöz rögzített (álló) koordináta-rendszerből nézve ugyanakkora, mint az egyenletesen mozgó rendszerben. Az álló rendszerben a vizsgált pont gyorsulása két összetevőre bontható. A sebességre merőleges (tehát függőleges) komponens a pálya R görbületi sugarával így fejezhető ki:

$$a_f = \frac{v_A^2}{R}.$$

Másrészt viszont ugyanez a mennyiség a gyorsulás nagyságának és irányának ismeretében

$$a_f = a\cos\alpha = \frac{v^2}{r}\cos\alpha$$

módon is megadható. A kétféle kifejezés összevetéséből (v_A korábban kiszámított értékének felhasználásával) a pálya görbületi sugarára

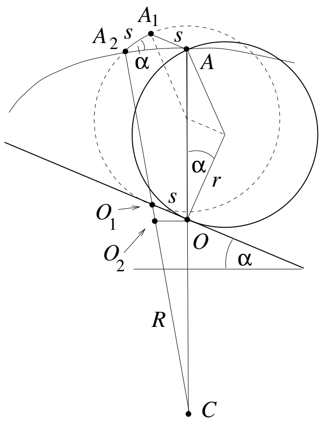
$$R = 4r\cos\alpha$$

adódik.

Patay Gergely (Debrecen, Tóth Á. Gimn., 12. o.t.)

Megjegyzés. A karika vizsgált pontja ciklois alakú görbén mozog. A karikának a lejtővel éppen érintkező O pontja nem mozog (sebessége nulla), tehát ezen a ponton halad át a karika pillanatnyi forgástengelye. Ennek ellenére nem mondhatjuk, hogy a pályagörbe görbületi sugara az A pontban az AO szakasz hosszával (tehát $2r\cos\alpha$-val) egyenlő, hanem – mint az a fenti megoldásból kiderült – annak éppen a kétszerese. A meglepőnek tűnő eltérés onnan származik, hogy a karika és a lejtő érintkezési pontja nem rögzített pont, hanem a karika elfordulása közben maga is elmozdul.

Jól szemlélteti a pillanatnyi forgástengelyre hivatkozó (hibás) érvelés tarthatatlanságát a következő példa: Egy kerékpár valamelyik kerekének tengelye is mindig a keréknek a talajjal érintkező pontja körül fordul el, mégsem állíthatjuk, hogy a tengely által leírt pályagörbe (ami egyenes) a kerék sugarával egyenlő görbületi sugárral rendelkezne!



2. ábra

II. megoldás. A cikloisnak, mint egy egyenesen gördülő kör egy pontja által leírt görbének az A pontbeli érintője vízszintes. A karika ebben a helyzetben az O pont körül fordul el, az AO szakasz tehát függőleges kell legyen.

Rajzoljuk fel a karika *kicsit korábbi* helyzetét is, amikor a lejtővel még az O_1 pontban érintkezett, és jelöljük az OO_1 távolságot s-sel ($s \ll r$). Ha a karikát elfordulás nélkül eltolnánk a lejtőn felfelé s távolsággal, akkor az A pont A_1-be kerülne ($AA_1 = s$). Ebben a korábbi helyzetben a cikloist leíró pont (a tiszta gördülés feltétele miatt) nem A_1-ben, hanem attól (a kör mentén ívesen mérve) s távolságban levő az A_2 pontban helyezkedik el. A kicsiny íveket egyenes szakaszokkal közelítve megállapíthatjuk, hogy az AA_1A_2 $\triangle$ egyenlőszárú, melynek s hosszú szárai α szöget zárnak be a vízszintes AA_2 oldallal.

A cikloist leíró pont A_2-beli sebessége merőleges az A_2O_1 egyenesre (hiszen O_1 pillanatnyi sebessége nulla), az A-beli sebesség pedig AO-ra merőleges. Ha a ciklois az A pont kis környezetében jól közelíthető egy alkalmasan választott körrel (a simulókörrel), akkor annak C középpontja nem lehet máshol, mint az AO egyenes és az A_2O_1 egyenes metszéspontjában.

Húzzunk az O pontból egy vízszintes egyenest, és jelöljük ezen egyenes és az A_2O_1 egyenes metszéspontját O_2-vel. A COO_2 és a CAA_2 háromszögek hasonlóságából

$$\frac{OC}{AC}=\frac{OO_2}{AA_2}$$

következik, ami $OO_2\approx s\cos\alpha$, $AA_2\approx 2s\cos\alpha$ és $AO=2r\cos\alpha$ felhasználásával meghatározza a keresett $R=AC$ görbületi sugarat:

$$\frac{R-2r\cos\alpha}{R}=\frac{s\cos\alpha}{2s\cos\alpha}=\frac{1}{2},\qquad \text{azaz}\qquad R=4r\cos\alpha.$$

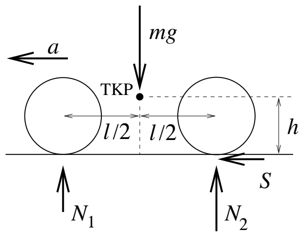
Belkovits Katalin (Marosvásárhely, Bolyai Farkas Elm. Líceum, 11. o.t.) dolgozata alapján

64 dolgozat érkezett. Helyes 32, kissé hiányos (3–4 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 6, hibás 20, nem versenyszerű 3 dolgozat.

P. 3288. *Mekkora lehet a nagyon erős motorú motorkerékpár indulási gyorsulása vízszintes úton, ha a tengelytávolság l, a tömegközéppont magassága h, a talaj és a kerekek közötti súrlódási tényező μ? A kerekek tehetetlenségi nyomatéka kicsi, terhelésük – egyensúlyi helyzetben – egyenlő.*

(*5 pont*) Közli: *Bakonyi Gábor,* Budapest

Megoldás. A kerekek terhelése álló helyzetben akkor egyenlő, ha a tömegközéppont függőleges vetülete éppen a kerekek között középen, azoktól (vízszintes mérve) $l/2$ távolságban helyezkedik el.



A gyorsuló motorkerékpárra az *ábrán* látható erők hatnak. A mozgásegyenletek:

(1) $$S=ma,$$

(2) $$N_1+N_2=mg,$$

továbbá a forgómozgás hiányának feltétele (a tömegközéppontra vonatkoztatott forgatónyomatékok egyensúlya):

(3) $$N_1\frac{l}{2}+Sh-N_2\frac{l}{2}=0.$$

Ennek az egyenletrendszernek

(4) $$N_1=\frac{1}{2}mg-\frac{h}{l}ma,$$

(5) $$N_2=\frac{1}{2}mg+\frac{h}{l}ma$$

a megoldása. A továbbiakban két esetet kell megkülönböztetnünk:

a) Kis μ esetén a meghajtó kerék „kipörgése” szab határt a gyorsítóerőnek (indulási gyorsulásnak). A hátsó kerék tapadásának feltétele: $\mu N_2 \geq S$, vagyis (1) és (5) felhasználásával:

$$(A) \qquad a \leq \frac{l\mu g}{2l - 2\mu h}.$$

b) Ha (A) teljesül, tehát a hátsó kerék nem csúszik meg, de túlságosan nagy a gyorsulás, a motorkerékpár eleje felemelkedhet. Ez akkor nem következik be, ha $N_1 \geq 0$, vagyis (4) szerint

$$(B) \qquad a \leq \frac{g\,l}{2h}.$$

A két feltétel közül $\mu < l/(2h)$ esetén (A) az élesebb (tehát megcsúszásveszély áll fenn), míg $\mu > l/(2h)$ esetén (B) megsérülése (a motorkerékpár felborulásának veszélye) szab határt a gyorsulás növelésének.

Komjáthy Júlia (Szekszárd, Garay J. Gimn., 9. o.t.) és
Nagy Ádám (Budapest, Szent István Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

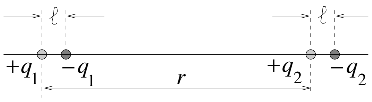
Megjegyzés. (B) határesetének megfelelő gyorsulás instabil helyzetnek felel meg, hiszen a kiszámított gyorsulást tetszőlegesen kicsiny mértékben túllépve a motorkerékpár „felágaskodik”, majd hátrafelé átfordul (hacsak a motoros nem változtatja meg a motorhoz viszonyított helyzetét, nem dől előre).

84 dolgozat érkezett. Helyes 11 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 45, hiányos (1–3 pont) 24, hibás 4 dolgozat.

P. 3289. *Vákuumban egymástól* 3 m *távolságra két elektromos dipólus helyezkedik el, dipólnyomatékuk* $6 \cdot 10^{-6}$ C m, *illetve* $2 \cdot 10^{-7}$ C m. *(A dipólusokat közelítsük töltéspárokkal.) Mennyi a két dipólus kölcsönhatási energiájának legkisebb és legnagyobb értéke? A dipólokat alkotó pontszerű töltések mindkét esetben egy egyenesen helyezkednek el.)*

(*6 pont*) Közli: *Légrádi Imre,* Sopron

Megoldás. Tekintsük az egyik dipólt $\pm q_1$ nagyságú, egymástól ℓ távol elhelyezkedő pontszerű töltésekből álló rendszernek, melynek dipólnyomatéka $p_1 = q_1\ell$, s hasonlóan a másik dipólt $\pm q_2$ és $p_2 = q_2\ell$ jellemzőkkel.



A két dipól kölcsönhatási energiáján azt az energiát értjük, ami ahhoz kell, hogy őket a végtelenből a megadott távolságra közelítsük, azaz az egyik dipól töltéseinek a másik dipól töltései terében vett potenciális energiáját. (Egy-egy dipólt alkotó töltések egymás terében vett potenciális energiáját a dipól „sajátenergiájának” nevezik; ennek nagysága a feladat szempontjából érdektelen.)

Vizsgáljuk meg az *ábrán* látható elrendezést, melyben a dipólok irányítása megegyezik, távolságuk pedig r ($r \gg \ell$). A dipólok kölcsönhatási energiája

$$W_1 = kq_1q_2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+\ell} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r-\ell}\right) = -2k\frac{(q_1\ell)\cdot(q_2\ell)}{r(r^2-\ell^2)} \approx -2k\frac{p_1p_2}{r^3},$$

a megadott számadatokkal $W_1 = -8 \cdot 10^{-4}$ J.

Ha valamelyik dipólt megfordítjuk, az a töltéseinek előjelváltásával egyenértékű, ekkor tehát a kölcsönhatási energia is előjelet vált, $W_2 = +8 \cdot 10^{-4}$ J lesz.

Belkovits Katalin (Marosvásárhely, Bolyai Farkas Líceum, 11. o.t.)

Megjegyzés. A megoldásban leírtakhoz hasonló számítással belátható, hogy ha a dipólok tengelye α illetve β szöget zár be a dipólokat összekötő egyenessel, akkor a kölcsönhatási energiájuk

$$W = k\frac{p_1p_2}{r^3}(-2\cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta).$$

A feladatban vizsgált energiaminimum (energiamaximum) nemcsak az egy egyenesben elhelyezkedő töltések legkisebb (legnagyobb) kölcsönhatási energiája, hanem (adott nagyságú és adott távolságra levő) tetszőlegesen álló dipólokra is szélsőérték.

Differenciálszámítás segítségével az is megmutatható, hogy ha az egyik (α szögben álló) dipólt lerögzítjük, de a másik állása változhat, akkor a rendszer legkisebb energiájú állapotát a $2\,\mathrm{tg}\,\beta = -\mathrm{tg}\,\alpha$ összefüggés jellemzi. Érdekes, hogy ez az összefüggés α és β felcserélésére nézve *nem szimmetrikus,* vagyis amikor az egyik mágnes nem fejt ki forgatónyomatékot a másikra, akkor a másik által az elsőre gyakorolt forgatónyomaték *nem* nulla.

(G. P.)

21 dolgozat érkezett. Helyes 12 megoldás. Kicsit hiányos (5 pont) 6, hiányos (3–4 pont) 2, hibás 1 dolgozat.

A mérési feladat megoldása

M. 211. *Egy rosszul elzárt vízcsapból lecseppenő cseppek látszólag egyenlő időközönként követik egymást. Figyeljük meg hosszabb időn keresztül ezt a jelenséget! Milyen módon jellemezhetjük az időközök különbözőségét?*

(*6 pont*) Közli: *Rajkovits Zsuzsa,* Budapest

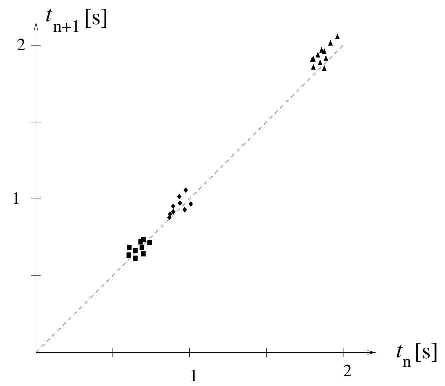
Megoldás. A csöpögő csap cseppenéseinek időpontjai (valamely önkényesen kiválasztott kezdőponttól számítva) stopperral, számítógép belső órájának felhasználásával, vagy fénykapu segítségével meghatározhatók, s az időpontok különbségéből a cseppek „követési távolsága” kiszámítható. A feladat ezen időközök mérése és jellemzése (tehát a mérési adatok feldolgozása, áttekinthető csoportosítása és bemutatása) volt.

A feladat szövege utalt rá, hogy az időközök *látszólag* egyenletesek, érdemes volt tehát az időtartamok *ingadozásait* vizsgálni. A véletlenszerűen változó jelenségek tanulmányozásakor a sok mérés átlagolása csökkenti az ingadozásokat; ez a mérés kiértékelésénél általában hasznos, hacsak nem éppen az ingadozások vizsgálata a mérés célja.

Sok versenyző több (5–10) vízcsepp lecseppenésének összidejét mérte, vagy meghatározott idő (mondjuk 1 perc) alatt lecseppenő cseppek számát adta meg, s ezekből számolt átlagos időkülönbséget. Így viszonylag könnyen jutottak meglehetősen pontos *átlagolt* időtartamokhoz, de eközben elmosódott a cseppek időközeinek egyedi változása, ingadozása.

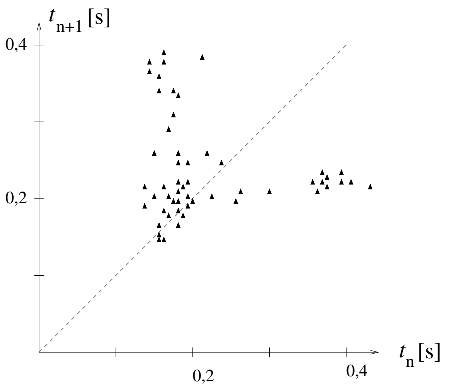
A mérés pontosságát az időmérés pontossága határozza meg. Hacsak nem áll rendelkezésünkre automatizált berendezés (pl. fénykapuval vezérelt elektronikus időmérő), akkor célszerű a mérési hiba csökkentése érdekében „apró trükköket” alkalmazni. *Soós Péter* (Kiskunhalas, Bibó I. Gimn., 10. o.t.) a következő módon járt el. Egy teljes napig tartó mérése során a vízcsapot csak egyszer állította be, a továbbiakban nem ért hozzá. A vízcseppek alá egy felfordított, üres vajasdobozt állított, hogy a leérkező vízcsepp hangosan koppanjon, így füllel is érzékelhetővé váljon. Feltételezte, hogy a vízcsap csepegésének üteme függ a hálózati víznyomástól (ami a többi lakás vízfogyasztásától is függően ingadozik). Egy kémcsőből és egy meghajlított vékony gumicsőből egyszerű berendezést állított össze, amellyel folyamatosan figyelni tudta a víznyomás ingadozását. A kémcsőbe (egy másik csapból) vékony sugárban folyamatosan vizet engedett, az egyik végével a vízbe merülő gumicsövön keresztül pedig kifolyhatott a víz a kémcsőből. A kifolyás sebessége függ a vízszint (egyensúlyi) magasságától, annak könnyen leolvasható értékéből pedig a befolyó víz sebességére, tehát a hálózati víznyomásra lehet következtetni.

A mérési adatok (időkülönbségek) birtokában a következő lépés az adatok feldolgozása, kiértékelése. A legtöbben a cseppenések sorszámának vagy a mérés kezdete (a csap beállítása) óta eltelt időnek a függvényében adták meg (ábrázolták) az időkülönbségek alakulását. Megállapították, hogy az időtartamok általában növekednek, tehát a cseppek egyre ritkábban követik egymást. Ez a tendencia nyilván nem folytatódhat sokáig. *Gáspár Merse Előd* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12 o.t.) azt tapasztalta, hogy az időtartamok a cseppenések számának függvényében egy darabig monoton (nagyjából egyenletesen) növekednek, majd hirtelen lecsökken a két egymás utáni csepp közötti időkülönbség, ezután pedig ismét egyenletesen növekszik, s több fűrészfog” majdnem periodikusan követi egymást.

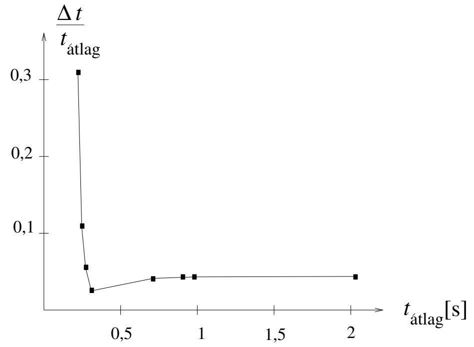


1. ábra

Másféle kiértékelési eljárást választott *Geresdi Attila* (Pécs, Árpád Fejedelem Gimn., 10. o.t.). Az $n+1$-edik cseppenés utáni t_{n+1} időközt ábrázolta az előző t_n függvényében. A mérési eredmények a $t_{n+1}(t_n)$ síkon különböző n-ekre pontok, vagy ha a mérési hibát is érzékeltetni akarjuk, akkor kis téglalapok lesznek. Ha a cseppek (közel) egyenlő időközökben követik egymást, akkor a pontsereg kis területen (egy kupacban) található. A pontkupac a diagram 45°-os egyenesén helyezkedik el, a csap elzártságától függő helyen. Ezt mutatja az (*1. ábra*). Ha a csapot annyira elzárjuk, hogy a cseppek kb. 0,2 s időközökben követik egymást, a kép lényegesen megváltozik. A mérési pontok a $t_{n+1}(t_n)$ diagramon egy nagyobb tartományban szétszórva, „összevissza” helyezkednek el, a vízcseppek „kaotikusan” követik egymást (*2. ábra*). A szabályos és a kaotikus tartományt közötti átmenetet a *3. ábrán* látható grafikonnal is illusztrálta Geresdi Attila. Ezen a cseppek közötti *átlagos időtartam* és az átlag körüli relatív ingadozás (relatív szórás) látható. Megfigyelhetjük, hogy $t_{\text{átlag}} > 0{,}3$ s esetén a relatív ingadozás viszonylag kicsi és állandó, ha viszont $t_{\text{átlag}} \approx 0{,}2$ s, az ingadozás lényegesen nagyobb.



2. ábra



3. ábra

Mások is megfigyelték, hogy bizonyos esetekben (bizonyos csapnyílás esetén) a cseppek úgy követik egymást, hogy az időközök periodikusan váltakozva egy rövidebb és egy hosszabb érték között „ugrálnak”. *Coc Károly* (Marosvásárhely, Bolyai F. Líceum 9. o.t.) egy kis villanymotor segítségével papírszalagot húzott el a vízcsap alatt. A vízcseppek nyomot hagytak a papírszalagon. A nyomok távolságát utólag lemérte, majd kiszámította a vízcseppek időkülönbségeket. Azt tapasztalta, hogy az átlagos vízhozamtól függően a cseppek többé-kevésbé egyenletesen is csepeghetnek, de (nagyobb vízhozamnál) rendszertelenül, szemmel láthatóan erősen ingadozva is követhetik egymást.

Úgy is lehetett volna jellemezni az időtartamokat, hogy megadjuk az „eloszlásukat”. Ez annyit jelent, hogy bizonyos számú (lehetőleg jó sok) mérési adatot aszerint osztályozunk, hogy mennyi esik közülük egy bizonyos (pl. az 5 és az 5,5 másodperc közötti) időintervallumba. Az eloszlásdiagram „szélessége” az ingadozásokra jellemző, az egymás utáni időközök közötti kapcsolatot (az ún. korrelációt) azonban nem mutatja meg.

Megjegyzés. A cseppek követési idejének változatos alakulását több (részben még nem eléggé ismert) jelenség okozhatja. A kérdésről és a kaotikus jelenségek különböző megközelítési módjairól részletesebben olvashatunk *I. Stewart:* A természet számai (A matematikai képzelet irreális realitása) című könyvében (Kulturtrade Kiadó, 1995.).

37 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Geresdi Attila megoldása. Kicsit hiányos (5 pont) Coc Károly, Flender Gyöngyi, Gáspár Merse Előd, Patay Gergely és Soós Péter megoldása. Hiányos (1–4 pont) 18, hibás (nem tartalmaz mérési adatokat) 3, nem versenyszerű (másolt) 10 (!) dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 216. *„Miképp fejthetni meg azt, hogy a delejes acél-rúd hatása a rúd közepe táján semmi, a rúd végei felé pedig mindinkább növekszik?* – kérdezte Jedlik Ányos egy vizsgán 1871-ben.

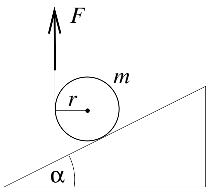
Mérjük meg egy iskolai rúdmágnes környezetében a B mágneses indukció irányát, és szemléltessük a mágneses mezőt B-vonalakkal.

(*6 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 3344. A kerékpárdinamó vízszintes forgó tárcsája az R sugarú kerék tengelyétől r távolságra, pontosan a tengely fölött ér hozzá a kerékhez. A tárcsa és a kerék csúszás nélkül gördülnek egymáson, s a kerék is csúszás nélkül gördül a talajon. Mekkora sebességgel halad előre a tárcsának az érintkezéssel átellenes pontja, ha a kerékpár v sebességgel halad?

(*5 pont*) *Lánczos Kornél verseny,* Székesfehérvár

P. 3345. Egy $\alpha=30^\circ$-os hajlásszögű lejtőn lévő, $m=6$ kg tömegű, $r=0{,}1$ m sugarú tömör hengert a palástjához rögzített fonál segítségével tartunk egyensúlyban. A henger a lejtőn nem csúszik meg.



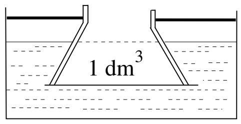
a) Mekkora F erővel tudjuk egyensúlyban tartani a hengert, ha a fonalat függőlegesen tartjuk?

b) Milyen irányban kell húzni a fonalat, hogy a lehető legkisebb erővel tarthassuk a hengert? Mekkora ez az erő?

c) Legalább mekkorának kell lennie a súrlódási együtthatónak az *a*), illetve *b*) esetben?

(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

P. 3346. Egy csonkakúp-palást alakú, lefelé szélesedő edény fenéklapjához elhanyagolható súlyú, jól illeszkedő korongot szorítunk, majd az edényt az *ábrán* látható víztartályba merítjük, és a palástjánál fogva a tartályhoz rögzítjük. A kiszorított víz térfogata 1 dm^3. Ezután a korongra egy 1 kg-nál kicsit nagyobb tömegű jégdarabot helyezünk. Mi történik, ha a jég elolvad? (Az olvadó jég nem ér hozzá az edény oldalához.)

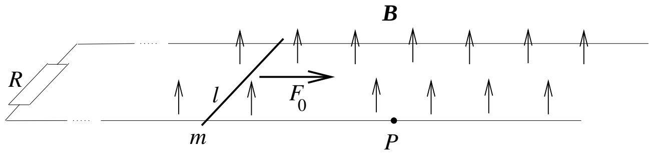


(*5 pont*) Közli: *Gálfi László,* Budapest

P. 3347. Legalább hányszorosa legyen a fonálinga végén lévő, pontszerűnek tekinthető test tömege a fonál tömegének, hogy az inga lengésideje legfeljebb 1 %-kal térjen csak el a matematikai inga lengésidejétől?

(*4 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

P. 3348. Az *ábrán* látható hosszú, vízszintes sínpárt R ellenállással hidaljuk át. A sínek távolsága l, elektromos ellenállásuk elhanyagolható. A sínpáron súrlódás nélkül csúszhat egy m tömegű, l hosszúságú vezető rúd, függőleges, **B** indukciójú homogén mágneses térben.



A vezető rúdra már hosszú ideje F_0 nagyságú erőt fejtünk ki, melynek hatására állandósult sebességgel csúszik. Egy bizonyos P pontnál a külső erőhatást megszüntetjük. Mekkora utat tesz meg a vezető rúd a P ponttól a megállásig?

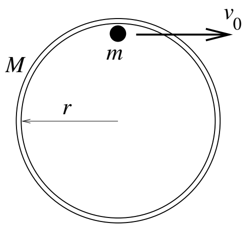
(*5 pont*) *Varga István,* Békéscsaba feladata alapján

P. 3349. Egymástól jó távol helyezkedik el két egyforma szupravezető gyűrű. Az egyik (A) gyűrűben I_0 erősségű áram folyik, a másikban (B) nem folyik áram. A két gyűrűt lassan közelítjük egymáshoz. Mekkora áram fog folyni A-ban, amikor a másik gyűrűben I_1 erősségű áram folyik? (Egy szupravezető gyűrű által körülfogott mágneses fluxus értéke nem változhat meg.)

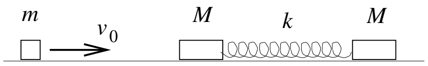
(*5 pont*) Közli: *Bodor András,* Budapest

P. 3350. Vízszintes asztallapon fekvő M tömegű, r sugarú vékony, keskeny abroncs belsejében, az abroncshoz érintkezve áll egy m tömegű kis test. Hogyan fog mozogni az abroncs középpontja, ha a kis testet érintő irányú, v_0 nagyságú kezdősebességgel elindítjuk? Mennyi idő múlva és hol lesz újra zérus az abroncs sebessége? (A súrlódás mindenütt elhanyagolható.)

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Budapest



P. 3351. v_0 sebességgel, súrlódás nélkül mozgó m tömegű pontszerű test rugalmasan ütközik a k rugóállandójú rugóval összekapcsolt két, egyenként M tömegű, pontszerű testből álló R rendszerrel.



a) Legalább mekkora legyen a m/M arány, hogy egy második ütközés is létrejöjjön az m tömegű test és az R rendszer között?

b) Legfeljebb mennyi idő telik el a két ütközés között?

(*6 pont*) *Francia felvételi feladat* (Ècole Normale Superieure, Párizs)

❄

A fizika feladatok megoldásai a következő címre küldendők:
Eötvös Loránd Fizikai Társulat, KöMaL feladatok
Budapest, Pf. 433. 1371
A beküldési határidő: **2000. június 11.**

Physics

M. 216. “Why does a magnetic steel rod have no effect at its middle, but a stronger and stronger effect towards its ends?” — asked Ányos Jedlik (1800 – 1895) famous Hungarian professor of Physics in the course of an examination, in 1871. Measure the direction of the magnetic induction B around a rod magnet and represent the field using B-lines.

P. 3344. The horizontal rotating disc of a bicycle dynamo touches the wheel of radius R exactly above the axle of the wheel, at distance r from the axle. The disc and the wheel roll without sliding on each other, and the wheel rolls similarly on the ground. At what speed does the point of the disc opposite to the touching point travel forward when the bicycle travels at speed v? **P. 3345.** A solid cylinder of mass $m=6$ kg and radius $r=0.1$ m is kept in balance on a slope of inclination $\alpha=30^\circ$ with the help of a thread fastened to its jacket. The cylinder does not slip on the slope. a) What force F is required to keep the cylinder in balance when the thread is held vertically? b) In what direction should the thread be pulled to minimise the force required to hold the cylinder? What is the magnitude of this force? c) What is the minimum required coefficient of friction in cases a) and b)? **P. 3346.** A well-fitting disc of negligible mass is pressed against the bottom of a cone-frustum jacket type vessel broader at the bottom. The vessel is then immersed into the water container shown in the figure and fastened to the container by its jacket. The volume of the displaced water is 1 dm^3. A piece of ice with a mass slightly greater than 1 kg is then placed onto the disc. What happens when the ice melts? **P. 3347.** How many times should the mass of the point-like body hanging on a thread be greater than that of the thread so that the period of such a pendulum differs by no more than 1 % from that of a mathematical pendulum? **P. 3348.** The long, horizontal pair of rails shown in the figure is connected using resistance R. The distance between the rails is l, the electrical resistance of the rails is negligible. A conducting rod of mass m and length l can slide without friction on the pair of rails, in a vertical, homogeneous magnetic field of induction **B**. A force of magnitude F_0 is exerted for a long time onto the conducting rod, therefore the speed of the rod is constant. The external force stops at a certain point P. What distance does the conducting rod cover from point P before stopping? **P. 3349.** There are two identical superconducting rings at a large distance from each other. Current I_0 flows in one of them (A), and no current flows in the other one (B). The two rings are slowly approached to each other. What is the current flowing in A when current I_1 flows in the other ring? (The value of the magnetic flux surrounded by a superconducting ring cannot change.) **P. 3350.** A small body of mass m is at rest inside a thin, narrow tyre of mass M and radius r lying on a horizontal table, touching the tyre. How does the centre of the tyre move if the small body starts to move at a tangential initial velocity v_0? How much later and where will the velocity of the tyre be zero again? (Friction is everywhere negligible.) **P. 3351.** A point-like body of mass m moving without friction at speed v_0 collides elastically with a system S consisting of two point-like bodies of mass M each, joined to each other by a spring of directional force k. a) What should the minimum value of the proportion m/M be so that a second collision occurs between the body of mass m and the system S? b) What is the maximum time elapsing between the two collisions?

Matek az óceánon túl

1999. június 12, vasárnap. Megérkeztem. Két tanárnő várt a repülőtéren, hogy elvigyen engem és egy másik diákot vacsorázni. Ez volt a második dolog, ami meglepett: hogy itt nemcsak ingyen fuvaroznak bennünket 40 mérföldön át, de ha olyankor érkezünk, amikorra az egyetemi étkezde már bezárt, akkor elvisznek minket vacsorázni. Az első dolog pedig, ami meglepett, az volt, hogy az autók sokkal nagyobbak, mint nálunk.

Tavaly tavasszal akadtam rá a világhálón erre a táborra. Hat hét középiskolai szintű matekozás, angol nyelven június 12-től július 23-ig. Nagyon jól hangzott, így rögtön szombat délben írtam egy e-mailt a főszervezőnek, Max Warshauernek. Este megjött a válasz, hogy nagyon szívesen fogad, annak ellenére, hogy már május közepe volt, és április 30. a jelentkezési határidő. Max a lelkes amerikai matekos mintapéldája, hétvégén is bejár az irodába, minden levelemre fél napon belül válaszol, és szívén viseli mindenkinek a sorsát.

Vacsora közben kellemesen elbeszélgettünk. Ekkor még nem találtuk meg a közös hangot, mert én angolul tanultam, ők meg amerikaiul beszéltek. Egy pár nap alatt bele lehet szokni: csak két kifejezés van, amit minden percben hall az ember: „stuff", úgymint cucc, csomag, dolog, izé; és a „to make sense", ami jelentheti azt, hogy valami fontos, nagyjelentőségű, és azt is, hogy valaki megértett valamit. Does this stuff make sense to you? Ezenkívül minden másodpercben jelen volt az az amerikai életfelfogás, ami annyira élvezetessé tette az egész tábort. Aztán elvittek a campusra. Már eléggé fáradt voltam a tizennyolc órás út és az időeltolódás miatt, de még bemutatták nekem a tanárokat, majd körbevezettek, megmutatták a legfontosabb épületeket: a szálláshelyet, az étkezdét és az irodát. Itt találkoztam Maxszel. Kinézetre is tipikus amerikai: ritkuló hajú, sörhasú középkorú férfi. Nagyon kedves volt, ragaszkodott hozzá, hogy még egyszer hazatelefonáljak, hogy rámtaláltak, aztán adott néhány matekpéldát.

Mintegy hetvenen voltunk a táborban. Fele Texas államból, másik fele más államokból. Én voltam a külföldi, aki a tábort nemzetközivé tette. Így sokat fejlődhetett az angoltudásom, és tényleg az amerikai kultúrát ismerhettem meg. Négyes csoportokba voltunk osztva, és minden csoportot egy counselor felügyelt. Az ő irányítása alatt matekoztunk naponta négy órát, csapatmunkát tanulva. Neki lehetett panaszkodni, és ő intézett nekünk apróbb dolgokat, így nem közvetlenül a tanárokat zaklattuk. Tanított is minket, és segített egyéni fejlődésünkben.

A fő tárgy a számelmélet volt, Max előadásában. Az első hét közepén bekönyörögtem magam az analízisórákra is, amit szintén nagyon élveztem. A tananyag mindenki számára érthető volt, de nagyon tudtam azt is kamatoztatni, ami három év matektagozat alatt ragadt rám. A nehezebb példák egy része ismerős volt számomra, másik részével pedig megküzdöttem. Amit matekból tanultam odakint, azt utána itthon hasznosítottam a tanév folyamán. Amit meg egyéb dolgokról tanultam, az talán egész életemben hasznos lesz.

A táborhoz, amely már tíz éves múltra tekinthet vissza, tartozik egy konferencia is. Ennek a lényege az, hogy a diákok, akik nyáron megtanultak megsejteni, tételt kimondani, bizonyítani, és mindezt előadni, év közben „kutatást végeznek" valamilyen egyszerű, könnyen megfogható témában, majd tíz-húsz percben vázolják eredményeiket ugyanazon diákok előtt, akikkel nyáron együtt voltak. Nagy szerencsémre erre is kiutazhattam idén márciusban. A *Steiner-fákról* tartottam előadást, miközben három napig élveztem az amerikai vendégszeretet. Max meghívott a házába, eltöltöttem egy napot a családjával, és kellemesen elbeszélgettünk a jövőmről. Most nyáron egy másik táborba megyek, amit természetesen ő javasolt nekem, de aztán visszavár, hogy talán counselorként élvezhessem a legjobb nyári programot, amiben eddig részem volt, újra és újra fölidézve a régi emlékeket, és együtt matekozva éjt nappallá téve. This would be the real fun.

A jelentkezési határidő idén is április 30. Mégis minden érdeklődőt biztatok, hiszen én is csak ilyenkor kezdtem el szervezkedni tavaly. Látogass hát el a `http://www.math.swt.edu/mity/mathcamp` címre, és nyugodtan hivatkozz rám. Ha pedig bármilyen kérdésed van, elérhetsz a `bekyl@fazekas.hu` címen.

Béky Bence
Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn, 10. o.t.