Harmadrendű görbék

. . . számomra egy geometriai probléma megoldása egyenletekkel éppen olyan, mint egy fogantyú forgatásával játszani le egy dallamot. Amikor első alkalommal jutottam számítás útján arra az eredményre, hogy két tag négyzete a részek négyzetéből és kétszeres szorzatukból áll, akkor szorzásom kifogástalansága ellenére sem akartam elhinni ezt mindaddig, amíg ábráját el nem készítettem. Nem mintha nem lett volna nagy kedvem az algebrához mint az elvont mennyiségek tudományához, de a térben alkalmazva a műveleteket vonalakban akartam látni, másként nem értettem belőlük semmit. [1]

Jean-Jacques Rousseau: Vallomások

Descartes azzal, hogy megismertette a világgal koordinátarendszerét egyben kapcsolatot létesített a matematikán belül két terület, az algebra és a geometria között. Koordinátarendszerében az $5x+6y-7$ kétváltozós elsőfokú polinomnak megfelel egy egyenes, a polinom zérushelyeinek halmaza, az x^2+y^2-1 másodfokú polinomnak egy kör.

A definiáló polinom foka alapján elsőrendű görbéknek nevezzük az egyeneseket, másodrendű görbéknek a kört, ellipszist, hiperbolát, parabolát és az egyenespárokat. Az egyenespárok egyenletében szereplő polinom a párt alkotó két egyenes polinomjának szorzata, ezért másodfokú. Az egyenespárok ennek alapján *reducibilis*, azaz felbontható görbék, hiszen előállíthatók náluk kisebb fokú görbék uniójaként. Ezzel szemben az összes korábban említett görbe *irreducibilis*, azaz felbonthatatlan.

A másodrendű görbéket (nem ezen az összefoglaló néven) már a görögök is jól ismerték, többek között azt is tudták róluk, hogy kúpszeletek. *Kepler* a Descartes-ot megelőző évszázadban adott különleges jelentőséget ennek a görbeosztálynak azzal, hogy rámutatott a bolygómozgásban játszott szerepükre. Descartes kortársai közül *Desargues* és *Pascal* tett sokat e görbék megismeréséért, az utóbbi nevezetes tételéről a KöMaL-ban is olvashattunk (1998/8., 454. o.)

De milyen görbét rejt magában az x^3+y^2-1 polinom? Hányféle harmadrendű görbe van? Milyen általános tulajdonságaik vannak? Hogyan olvashatók le speciális jellemzőik definiáló polinomjuk együtthatóiból? Mindezek a kérdések föl sem merülhettek Descartes előtt.

Már a XIX. században rájöttek, hogy Pascal tétele a harmadrendű görbékre vonatkozó egyik legalapvetőbb állítás speciális esete, és azóta már sok más geometriai összefüggésről is tudjuk, hogy olyan általános tételek speciális esetei, amelyek a harmadrendű görbe tulajdonságaival függenek össze. Néhány matematikus úgy egy évtizede rájött, hogy Descartes kortársának, *Fermat*-nak nevezetes sejtése bebizonyítható a harmadrendű

[1] Benedek István és Benedek Marcell fordítása

görbe mélyebb ismerete alapján. Hiába olyan híres és friss ez az eredmény, ma, az internetes kereső programok a harmadrendű görbe angol megfelelőjére, az „elliptic curve” kulcsszóra többségében mégis olyan címeket írnak ki, melyek a *kriptográfiáról*, a titkosírás tudományáról szólnak. Ez a témakör éppen internetes felhasználása miatt népszerű. Lehet, hogy a harmadrendű görbe szerepet kap a modern kommunikációban?

Ebben a cikkben megpróbáljuk megérteni e manapság is széleskörűen vizsgált görbe néhány tulajdonságát.

A félszemű rajzoló

Vizsgálódásunkat egy klasszikus problémával kezdjük. Megkeressük az összes pitagoraszi számhármast, vagyis az

$$x^2+y^2-z^2=0 \tag{1}$$

egyenlet összes pozitív egész megoldásait. Mielőtt belemennénk a számelméleti részletekbe, megvizsgáljuk az (1) egyenletet algebrai és geometriai szemszögből, hogy bemutassuk rajta a hasonló típusú problémák kezelésének *projektív geometriai* megközelítési módját.

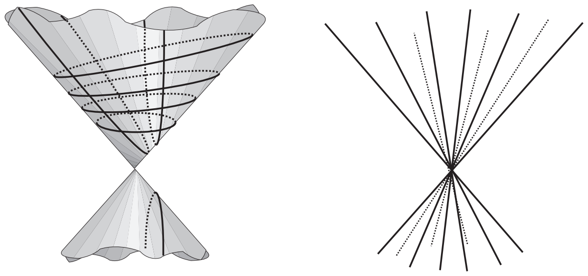
Az egyenlet bal oldalán szereplő $P(x,y,z)$ polinom *homogén*, azaz a benne szereplő tagok mindegyikének ugyanakkora a foka. Ez azt jelenti, hogy ha a polinomban minden változó értékét ugyanazzal a λ számmal szorozzuk, akkor a kifejezés értéke λ^2-tel szorzódik: $P(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^2P(x,y,z)$. Következésképpen, ha (x_0,y_0,z_0) megoldása az (1) egyenletnek, akkor $(\lambda x_0,\lambda y_0,\lambda z_0)$ is megoldás bármely λ esetén. Speciálisan, az egyenlet egy triviális megoldása a $(0,0,0)$ számhármas.

Geometriai nézőpontból először is azt mondhatjuk, hogy az (1) egyenlet egy térbeli ponthalmaz egyenlete, hiszen a számhármasokat a tér pontjaival reprezentálhatjuk. A homogenitásból következik, hogy egy origó csúcsú kúpszerű alakzatról van szó, azaz bármely pontjával együtt a pontot az origóval összekötő egyenes is része a megoldáshalmaznak.

Tekintsünk úgy erre a kúpra, mint fénysugarak nyalábjára, melyek talán épp egy síkgörbéről érkeznek szemünkbe, az origóba. Ha magunk elé teszünk egy (nagyon nagy) papírt, a sugarak ezen kijelölnek egy görbét, a papír síkjának és a kúpnak a metszésvonalát. Olyan ez, mint amikor egy félszemű ember rajzol. [2]

Persze, ha máshová helyezzük a papírt, azaz az origót nem tartalmazó másik síkkal metsszük a kúpot, akkor egy másik görbét fogunk kapni. A félszemű rajzoló nem tudja kitalálni a távoli görbe tényleges alakját, csak a látványról tud hűséges képet adni. Például abban sohasem lehet biztos, hogy kört lát-e, de fel tudja ismerni az egyenest (ha megmondják neki, hogy síkbeli alakzatról van szó). Általánosabban, azt is meg tudja mondani, hogy hányadrendű görbét lát, hiszen a rend a szemébe érkező fénysugarak által meghatározott kúpfelület tulajdonsága. Ha pedig egy egyenest és egy másik (algebrai) görbét is érzékel, akkor el tudja dönteni, hogy egy adott (látott) pontban metszik, vagy pedig érintik egymást.

[2] Analógiánk annyiban félrevezető, hogy míg az ember megfordulva más tájat lát maga előtt, addig az (1) egyenlet által definiált kúp kettős kúp, az origóra középpontosan tükrös.



1. ábra

Tehát a homogén polinomok fent leírt geometriájában, amit a projektív geometria *sugárnyaláb modelljének* is hívnak, a pontokat a tér origón átmenő egyeneseiként érzékeljük. Amíg szokásos (affin) értelemben n-edrendű síkgörbén egy két ismeretlenes n-edfokú polinomot, illetve a polinom zérushelyeinek halmazát értjük, addig a projektív megközelítésben n-edrendű síkgörbéről beszélve egy háromváltozós homogén n-edfokú polinomra és annak zérushelyeire gondolunk.

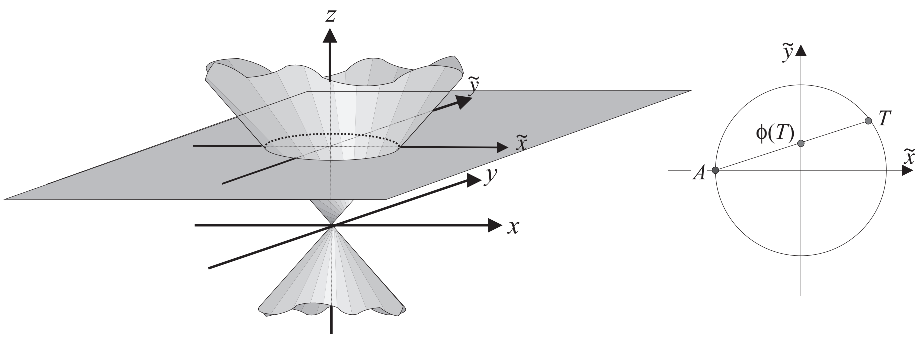
Másodrendű görbék számelmélete

Vegyük észre, hogy ha (x_0, y_0, z_0) nem a triviális (azonosan 0) pitagoraszi számhármas, akkor az $\tilde{x}_0 = \dfrac{x_0}{z_0}$, $\tilde{y}_0 = \dfrac{y_0}{z_0}$ racionális számpárra

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - 1 = 0. \tag{2}$$

Másrészt, ha $(\tilde{x}, \tilde{y})$ a (2) egyenlet racionális megoldásai, akkor a $(z \cdot \tilde{x}, z \cdot \tilde{y}, z)$ az (1) egyenlet racionális megoldásai lesznek bármely z racionális szám esetén. Ha itt z az $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ törtek nevezőinek legkisebb közös többszöröse, akkor az (1) olyan egész megoldásait kapjuk, amelyben a tagok relatív prímek. Az ilyen számhármasokat nevezik az (1) egyenlet *alapmegoldásainak.*

Most már csak a (2) egyenlet racionális megoldásait keressük, azaz kúpunk és a $z = 1$ egyenletű Π sík metszésvonalának racionális koordinátájú pontjait.



2. ábra

Ez a metszésvonal egy egység sugarú kör. Tekintsük a kör $A(-1;0)$ pontját és a kör többi pontját vetítsük A-ból az $\tilde{y}$ tengelyre, azaz a kör T pontjának feleltessük meg az $\tilde{y}$ tengelynek azt a $\varphi(T)$ pontját, amely illeszkedik az AT egyenesre. A φ leképezés kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést ad meg a kör A-tól különböző pontjainak halmaza és az $\tilde{y}$ tengely pontjainak halmaza között. Állítjuk, hogy ezen belül a kör racionális pontjai a tengely racionális pontjainak felelnek meg.

Valóban, ha $T(\tilde{x}_0;\tilde{y}_0)$ racionális pont, akkor $\varphi(T)$ ordinátája épp az AT egyenes meredeksége, nevezetesen $\dfrac{\tilde{y}_0}{\tilde{x}_0+1}$, azaz racionális.

Másrészt, a tengely racionális pontját A-val összekötő egyenes egyenletének együtthatói két pontjának koordinátáiból alapműveletekkel számíthatók ki, így racionálisak. Az egyenes és a kör metszéspontjainak kiszámítása ugyan másodfokú egyenletre vezet, de ennek egyik gyöke az A pont megfelelő koordinátája, ami racionális. A keresett másik gyök bármelyik Viète-formulából alapművelettel meghatározható, így az is racionális. A konkrét számolást a pitagoraszi számhármasokat előállító formula kedvéért el is végezzük.

Ha $\varphi(T)$ ordinátája $r=\dfrac{m}{n}$ ($m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}^+$, $(m,n)=1$, vagy $m=0$ és $n=1$), akkor T koordinátáit úgy kaphatjuk, hogy az AT egyenes

$$\tilde{y}=r(\tilde{x}+1) \tag{3}$$

egyenletének jobb oldalával helyettesítjük $\tilde{y}$-t a (2) egyenletben. A két gyök szorzata az

$$(r^2+1)\tilde{x}^2+2r^2\tilde{x}+(r^2-1)=0 \tag{4}$$

egyenletben: $(-1)\cdot\tilde{x}_0=\dfrac{r^2-1}{r^2+1}$, ahonnan (3) alapján $\tilde{y}_0$ is adódik:

$$\tilde{x}_0=\frac{n^2-m^2}{n^2+m^2},\quad \tilde{y}_0=\frac{2nm}{n^2+m^2}.$$

Tehát $x_0=\tilde{x}_0$, $y_0=\tilde{y}_0$, $z_0=1$ az (1) egyenlet racionális megoldásai a $z=1$ egyenletű Π síkban. Az (1) egyenlet egész megoldásait úgy kapjuk, hogy a most kapott törteket szorozzuk a közös nevezővel, illetve annak bármely többszörösével.

Nem nehéz igazolni, hogy ha $(m,n)=1$, akkor a kapott törtek nem egyszerűsíthetőek, ha m és n paritása különböző, illetve csak 2-vel egyszerűsíthetőek, ha n és m is páratlan. Ennek alapján kaphatjuk meg az (1) egyenlet alapmegoldásait szolgáltató jól ismert képleteket:

$$x_0=n^2-m^2,\quad y_0=2nm,\quad z_0=n^2+m^2, \tag{5}$$

ha n és m paritása különböző, illetve

$$x_0=\frac{n^2-m^2}{2},\quad y_0=nm,\quad z_0=\frac{n^2+m^2}{2}, \tag{6}$$

ha n és m páratlanok. Minden további megoldás úgy kapható, hogy ezen számhármasok valamelyikét egy egész számmal szorozzuk. Ha x_0 és y_0 sorrendje nem érdekes, akkor itt minden megoldás kétszer van fölsorolva: egyszer fent, egyszer lent. Fönt ugyanis x_0 páratlan és y_0 páros, míg lent éppen fordítva van. Ha feltesszük azt is, hogy $n>m$, akkor a negatív megoldásoktól is megszabadulunk.

$n=3$, $m=1$ esetén kapjuk a nevezetes 4, 3, 5 számhármast.

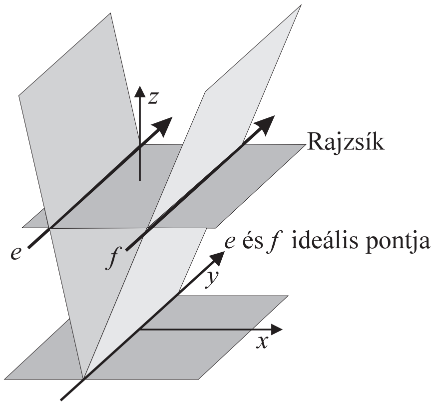
A megoldás lényege a φ bijekció volt, amely a kör racionális pontjai és az egyenes racionális pontjai között teremtett egy-egyértelmű megfeleltetést. Ilyen megfeleltetés minden racionális együtthatós irreducibilis másodrendű görbe esetén megadható, ha találunk a görbén egyetlen racionális pontot, a vetítés centrumát. Tehát, ha egy racionális együtthatós másodrendű görbén van legalább egy racionális pont, akkor végtelen sok van belőle.

Sokkal nehezebb azt eldönteni, hogy létezik-e egyáltalán ilyen pont egy adott másodrendű görbén. Erre először *Legendre* talált módszert a XIX. század elején, amit a XX. század első felében *Hasse* és *Minkowski* általánosított több változó esetére.

Egyenesek, ideális pontok

Térjünk most vissza a Π rajzsíkra és tekintsük rajta az egymással párhuzamos $\tilde{x}-a=0$ egyeneseket. Ha az a paraméter értékét változtatjuk, akkor egymással párhuzamos egyeneseket kapunk. Ha kiválasztjuk ezen egyenesek bármelyikét és az origóból a kiválasztott egyenes (pozitív irányban) egyre távolabbi pontjai felé nézünk, akkor tekintetünk az y tengely (pozitív) irányát közelíti meg. Mintha ebben az irányban lenne a vizsgált egyeneseknek egy közös „végtelen távoli" pontja. Ha negatív irányba fordulunk az egyenesek távoli pontjai felé, akkor tekintetünk ugyanazt az egyenest, de épp az ellenkező irányt (ugyanazt a „fénysugarat") közelíti meg.

Algebrailag is eljuthatunk a „végtelen távoli" pont fogalmához. Ahogyan az $x^2+y^2-z^2=0$ egyenletből nyertük a Π síkban az $\tilde{x}^2+\tilde{y}^2-1=0$ egyenletet, ugyanúgy az $\tilde{x}-a=0$ egyenlet „hátterében" az $x-az=0$ homogén egyenlet áll. Ezen egyenleteknek van közös megoldása például a $(0;1;0)$ számhármas (értsd $x=z=0$, és $y=1$), de az y tengely bármely másik pontja is megfelelő.



3. ábra

A sugárnyaláb modellben az egyenesek homogén elsőfokú egyenleteknek felelnek meg, amelyek megoldáshalmaza a térben egy-egy origón átmenő sík. Bármely két origón átmenő síknak van metszésvonala, egy origón átmenő egyenes, egy „fénysugár". Így a projektív geometriában bármely két egyenesnek van metszéspontja. De előfordul, hogy egy-egy „rajzon", tehát az origót nem tartalmazó síkmetszeten két egyenes nem találkozik, párhuzamos. Ekkor azt is mondhatjuk, hogy ezek ez egyenesek a sík egy végtelen távoli, *ideális* pontjában metszik egymást. A rajzsíkon minden irányhoz tartozik egy ideális pont (az egymással ellentétes irányokhoz ugyanaz), ami a modellben az origóból induló, az adott iránnyal párhuzamos fénysugár. A rajzsík ideális pontjaihoz tartozó fénysugarak a rajzsíkkal párhuzamos, origón átmenő síkban fekszenek, tehát – projektív értelemben – egy egyenesen, az *ideális egyenesen* vannak.

Szinguláris harmadrendű görbék

A harmadrendű görbék racionális pontjai csak egyes speciális esetekben feleltethetők meg az egyenes racionális pontjainak úgy, ahogy a másodrendű görbéknél láttuk. Hiába találjuk meg ugyanis a görbe egy racionális pontját, az ezen átmenő, a görbét még egyszer metsző egyenesek általában még harmadszor is metszik a görbét. Így magát a φ leképezést meg tudnánk adni, bár a görbe két-két racionális pontjához rendelnénk az egyenes egy racionális pontját, de az inverz megfeleltetéssel gondunk lenne. Gondoljuk meg, most a (4) egyenlet helyén egy harmadfokú egyenlet áll, amelynek csak egy gyökét ismerjük így a másik kettő meghatározásához az általános eljárásban gyökvonásra is szükség lenne. Ez pedig bajba sodorja a racionalitást.

Más a helyzet az úgynevezett *szinguláris görbéknél*, azaz azoknál a harmadrendű görbéknél, amelyeken található szinguláris, azaz kettős pont. A harmadrendű görbe $P(x_0, y_0)$ pontját akkor nevezzük szingulárisnak, ha a rajta áthaladó egyenesek a görbét még legfeljebb egy pontban metszik. Ez úgy eshet meg, hogy a fent leírt metszéspont számítási eljárásban a (4) helyett kapott harmadfokú egyenletnek x_0 minden esetben legalább kettős gyöke, és így a harmadik gyök az egyenlet együtthatóiból a Vièta-formulák segítségével gyökvonás nélkül meghatározható, így racionális lesz. Ekkor, ha x_0, y_0 és a görbe együtthatói is racionális számok, úgy alkalmazható a másodrendű görbéknél látott megfeleltetés.

Erre nemrég láttunk példát a KöMaL-ban, az egyik feladat megoldásában. Elevenítsük föl a feladatot.

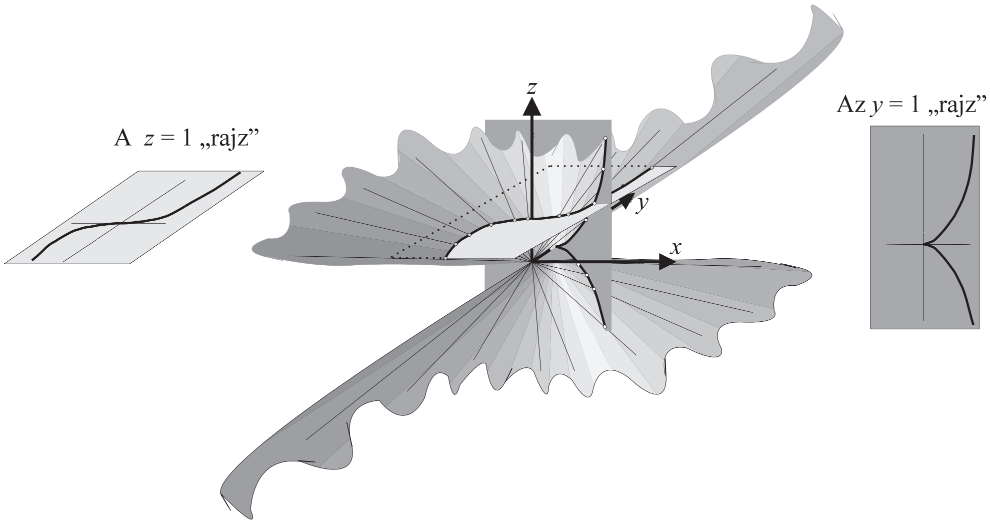
F. 3278. *Az $y=x^3$ görbe pontjain egy $*$ műveletet értelmezünk a következőképpen. Ha A és B a görbe két pontja, akkor legyen $A*B$ az AB egyenes és a görbe harmadik metszéspontjának az origóra vonatkozó tükörképe. (Ha a definícióban szereplő valamelyik két pont egybeesik, akkor összekötő egyenesük helyett vegyük a görbe adott pontbeli érintőjét). Mutassuk meg, hogy a $*$ művelet asszociatív.*

A KöMaL 2000. évi első számának 28. oldalán megjelent megoldásban Székelyhidi Gábor és Terpai Tamás hozzárendelték a görbe $A(a; a^3)$ pontjához annak x tengelyre vonatkozó $\varphi(A)=a$ merőleges vetületét és megmutatták, hogy ez a leképezés a görbe pontjait kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésbe hozza a valós számokkal és a $*$ műveletnek a valós számok összeadása felel meg.

Nyilvánvaló, hogy itt is megfeleltettük egymásnak a görbe és az egyenes racionális pontjait, de nem világos, hogy hol van a szinguláris pont. Végtelen messze van, de már közel vagyunk hozzá, hogy meglássuk.

Az $\tilde{y}=\tilde{x}^3$ egyenlet homogén megfelelője az $yz^2-x^3=0$ egyenlet. Ennek megoldása az $(0; 1; 0)$ számhármas, tehát a feladatban vizsgált $\tilde{y}-\tilde{x}^3=0$ görbének pontja az $\tilde{y}$ tengellyel párhuzamos egyenesek ideális pontja. A közölt megoldásban alkalmazott $\tilde{x}$ tengelyre való merőleges vetítés nem más, mint ebből az ideális pontból való vetítés.

Az ideális pont szingularitásának vizsgálatához egy másik rajzot készítsünk ugyanerről a görbéről, most az $y=1$ egyenletű síkban. Itt görbénk egyenlete $\tilde{z}'^2 - \tilde{x}'^3 = 0$, a korábban talált ideális pont itt az origó. Ez a pont szinguláris, hiszen az origón áthaladó $\tilde{z}' = r\tilde{x}'$ egyenes és a görbe metszéspontjaira: $r\tilde{x}'^2 - \tilde{x}'^3$, aminek $\tilde{x}' = 0$ mindig legalább kétszeres gyöke.



4. ábra. Az $yz^2 = x^3$ kúp egy részlete és két „rajza”

Javaslom, hogy az olvasó próbálkozzék először maga az előbb említett feladat alábbi variációjával:

F. 3278′. *Az $xy = (x-1)^3$ görbe pontjain értelmezzük a $*$ műveletet a következőképpen. Ha A és B a görbe két pontja, akkor jelölje C az AB egyenes és a görbe harmadik metszéspontját, $A * B$ pedig legyen C-t a görbe $E(1;0)$ pontjával összekötő egyenes és a görbe harmadik metszéspontja. (Ha a definícióban szereplő valamelyik két pont egybeesik, akkor összekötő egyenesük helyett vegyük a görbe adott pontbeli érintőjét). Mutassuk meg, hogy a $*$ művelet asszociatív.*

Az alábbi bizonyítást az **F. 3278.** feladat már említett megoldásának mintájára végezzük.

Görbénk pontjait egyértelműen jellemezhetjük abszcisszájukkal. Ez még világosabban látszik az eredetivel ekvivalens

$$y = \frac{(x-1)^3}{x} \qquad x \neq 0$$

egyenletből.

Legyen $\odot$ az a művelet a valós számok halmazán, amely a görbe a és b abszcisszájú A és B pontjai esetén $a \odot b$-nek az $A * B$ pont abszcisszáját felelteti meg. A $*$ művelet pontosan akkor asszociatív, ha a $\odot$ művelet is az a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon. Megmutatjuk, hogy $\odot$ épp a szorzás, amiből az állítás következik.

Ha az A, B, C különböző pontok görbénkre és az $y=\alpha x+\beta$ egyenesre is illeszkednek, akkor a, b, c abszcisszáik kielégítik az

$$x(\alpha x+\beta)=(x-1)^3 \tag{7}$$

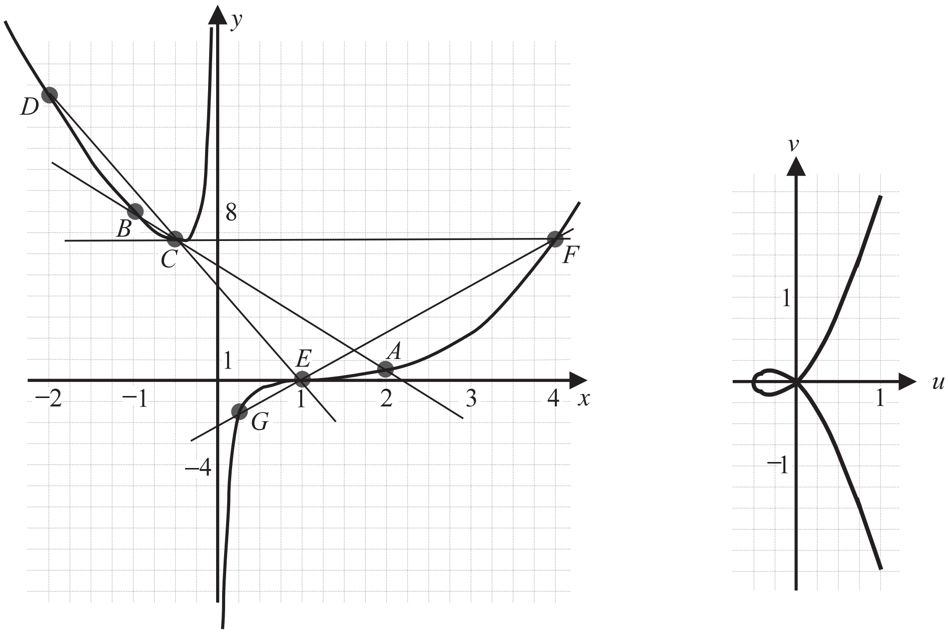
egyenletet. A gyökök és együtthatók közti összefüggések alapján

$$1=a\cdot b\cdot c.$$

((7)-et és a vele ekvivalens $0=(x-a)(x-b)(x-c)$ egyenlet konstans tagjait hasonlítottuk össze.) Ugyanezt a gondolatmenetet alkalmazhatjuk a C, E, $A*B$ pontokra, amiből kapjuk, hogy

$$1=c\cdot 1\cdot(a\odot b).$$

A két egyenlet összevetéséből adódik, hogy $a\odot b=a\cdot b$, amint azt korábban állítottuk.



5. ábra. $A*B=D$, azaz $2\cdot(-1)=-2$ és $C*C=G$, azaz $\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Az állítás akkor is érvényes, ha bizonyos pontok, pl. A és B, egybeesnek. Ilyenkor az AB egyenes „határhelyzeteként” a görbe A pontbeli érintőjét húzzuk meg, azt az $y=\alpha x+\beta$ egyenletű egyenest, amelyre a (7) egyenletnek az a abszcissza legalább kétszeres gyöke. Így az általános esethez hasonlóan alkalmazhatjuk a (7) egyenletet a további számolásokhoz.

Ebben a feladatban is az x tengelyre merőleges vetítést alkalmaztunk, amely fölfogható a görbe $(0;1;0)$ ideális és egyben szinguláris pontjából való vetítésként. A görbe és az egyenes racionális pontjai most is egymásnak felelnek meg.

A görbe homogén egyenlete: $xyz-(x-z)^3=0$. Ezt valóban kielégíti a $(0;1;0)$ számhármas. Az $y=1$ síkmetszeten az origóba kerül a szinguláris pont. A görbe egyenlete itt: $\tilde{x}\tilde{z}=(\tilde{x}-\tilde{z})^3$. Jobban megérthető a görbe viselkedése, ha áttérünk az $u=\tilde{x}-\tilde{z}$, $v=\tilde{x}+\tilde{z}$ változókra, ami a koordinátarendszer 45°-os forgatását és $\frac{1}{\sqrt{2}}$ arányú nyújtását jelenti. Itt az egyenlet: $v^2=u^2\cdot(1+4u)$, amiből leolvasható, hogy az u változó $-\frac{1}{4}$ és 0 közötti és a pozitív értékeihez v-nek két értéke is tartozik, míg $u=-\frac{1}{4}$-hez és $u=0$-hoz csak $v=0$ megfelelő. A grafikon $u=-\frac{1}{4}$-nál „megfordul", $u=0$-nál pedig „önmagát metszi". Itt máshogy „néz ki" a szingularitás.

Egyszer összeadás és egyszer szorzás. És ezek még csak a szinguláris görbék!

Harmadrendű görbe mint csoport

A szinguláris ponttal nem rendelkező, ezért nem szingulárisnak is nevezett görbék nem vetíthetők kölcsönösen egyértelmű módon az egyenesre, de a szingulárisakéhoz hasonló (projektív) geometriai úton definiálható, csak még rejtélyesebb műveleti tulajdonságaik vannak.

Tétel. *Bármely irreducibilis harmadrendű görbe, és annak tetszőleges E nemszinguláris pontja esetén a görbe nemszinguláris pontjain az* **F. 3278$'$**. *feladatban leírt módon értelmezett $*$ művelet az alábbi tulajdonságokkal bír:*

1. *asszociatív;*
2. *$E*A=A*E=A$, a görbe bármely A pontja esetén. (Azaz az E pont úgy viselkedik, mint az összeadásnál a 0, vagy mint a szorzásnál az 1.*
3. *Bármely A pontnak van inverze (mint az összeadásnál az ellentett, a szorzásnál a reciprok), azaz olyan A^{-1} pont, amelyre $A*A^{-1}=A^{-1}*A=E$.*

Ha egy halmazon értelmezett kétváltozós művelet a fenti (1., 2., 3.) tulajdonságokkal rendelkezik, akkor azt mondjuk, hogy a halmaz a műveletre nézve *csoportot alkot.* A tétel lényegében azt mondja ki, hogy a harmadrendű görbe nemszinguláris pontjainak $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}$ halmaza a $*$ műveletre nézve csoportot alkot. Ez a csoport a $*$ művelet definíciójának egyenes következményeként még kommutatív is, azaz $A*B=B*A$ bármely A és B pont esetén.

A fenti tételt itt nem bizonyítjuk. Az állítás számelméleti jelentősége abban van, hogy ha a görbe egyenletének együtthatói és az E pont koordinátái is racionális számok, akkor a görbe racionális pontjai egymás között „$*$-szorzódnak". Valóban, ha A és B koordinátái racionálisak, akkor az AB egyenes együtthatói is azok, így az **F. 3278$'$.** feladat megoldásában leírt módon a racionális koordináták és együtthatókkal végzett alapműveletekkel meghatározhatók a C, majd az $A*B$ pont koordinátái is. Tehát a görbe racionális pontjainak $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ halmaza is csoport a $*$ műveletre nézve, az $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}$ csoport egy *részcsoportja.*

Lássunk egy konkrét példát. A 2000 évi Arany Dániel Matematikaverseny Kezdők kategóriájának 3. feladata így szólt:

Bizonyítsd be, hogy három egymást követő pozitív egész szám szorzata nem lehet köbszám.

Nem nehéz megmutatni, hogy három egymást követő egész szám szorzata csak akkor lehet köbszám, ha 0 ez a szorzat.

Most általánosítjuk ezt a kérdést. *Lehet-e egy egész számokból álló háromelemű számtani sorozat tagjainak szorzata* 0*-tól különböző köbszám?*

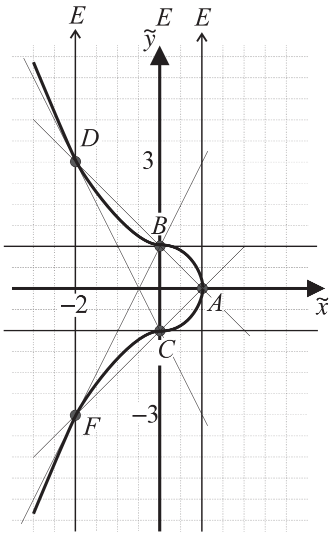
Jelöljük a sorozat középső elemét z-vel, a differenciát y-nal, a szorzatként kapott szám köbgyökét x-szel. Az $(z-y)z(z+y)=x^3$ egyenlet egész megoldásait keressük. Tekintsük az ezzel ekvivalens $x^3+zy^2-z^3=0$ homogén egyenletet, és térjünk át a $z=1$ síkon található rajzra. Most már a

$$\tilde{x}^3+\tilde{y}^2-1=0 \tag{8}$$

görbe racionális pontjait keressük.

Van négy kézenfekvő megoldás: $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(0;-1)$ és a homogén egyenletre visszapillantva láthatjuk, hogy az $\tilde{y}$ tengely E ideális pontja most is megfelelő. Mindezek azonban olyan megoldáshoz tartoznak, amelyben a köbszám a 0.

Keressük meg az AB egyenes és a görbe harmadik metszéspontját! Így a $D(-2;3)$ pontot kapjuk, ami valódi megoldást ad feladatunkra: $(1-3)\cdot 1\cdot(1+3)=(-2)^3$. ED és AC is az $F(-2;-3)$ pontban metszi a görbét, ami az előző megoldást adja, csak a tényezők sorrendje más. Próbálkozzunk még a görbe érintőivel!



6. ábra

A B pontbeli érintő az az $y=r\tilde{x}+1$ alakú egyenes, amelyre a $\tilde{x}^3+(r\tilde{x}+1)^2-1$ polinomnak, azaz $\tilde{x}^3+r^2\tilde{x}^2+2r\tilde{x}$-nek a 0 kétszeres gyöke. Ezért $r=0$, amiből azt kapjuk, hogy a görbe és az érintő metszéspontjainak $\tilde{x}$ koordinátái kielégítik az $\tilde{x}^3=0$ egyenletet. Itt tehát egy harmadrendű érintésről (*inflexiós pontról*) van szó, az érintőnek más közös pontja nincs a görbével. Ugyanez a helyzet – más „rajzon” számolva – az E pontbeli érintővel, a D-beli érintő pedig C-n megy át. Több megoldást nem, de egy szép geometriai konfigurációt kaptunk. Csoportunkban: $D*D=B$, $D*D*D=B*D=A$, $D*D*D*D=A*D=C$, $D*D*D*D*D=C*D=F$, végül $D*D*D*D*D*D=E$.

Van-e más megoldás? Ez általában nagyon nehéz kérdés. A konkrét esetben talán eldönthető, de a szerző sem tudja pontosan a választ.

A hat vizsgált pont az $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}$ (és az $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$) csoport egy részcsoportját alkotja, lehet, hogy a teljes $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$-t. Ilyen hatelemű részcsoport a valós számokon belül sem az összeadásnál, sem a szorzásnál nincsen, most vizsgált görbénk algebrai struktúrája különbözik az előzőekétől.

Nézzünk egy másik példát! Nevezetes, hogy az

$$x^3 + y^3 = z^3 \tag{9}$$

egyenletnek az egész számok halmazán csak a triviális (0; 0; 0) és a (0; 1; 1), (1; 0; 1) alapmegoldásai vannak. Ezt P. Fermat állította, miután elolvasta *Diophantosz:* Arithmetica című könyvében a pitagoraszi számhármasokról szóló részt. Tovább is általánosított, nevezetes sejtése azt mondja ki, hogy az $x^n + y^n = z^n$ egyenletnek $n > 2$ esetén csak olyan megoldásai vannak, amelyben legalább az egyik változó értéke 0. Hogy lássuk, milyen éles is Fermat sejtése vizsgáljuk meg a (9) egyenlettől alig különböző

$$7x^3 + y^3 = z^3 \tag{10}$$

diofantikus egyenletet!

Vegyük észre, hogy most $E(0;1;1)$ mellett $A(1;1;2)$ is megoldás. Így a már ismertetett geometriai módszerekkel bármelyik rajzon számolva meghatározhatjuk A „$*$-hatványait" (vagy „$*$-többszöröseit", ahogy tetszik). Az alábbi értéket egy konkrét rajzon véghezvitt számolást követően, a közös nevezővel való átszorzás útján nyertük:

$$A*A(-4;3;5),\quad A*A*A(-73;38;17),\quad A*A*A*A(-1265;183;-1256),$$
$$A*A*A*A*A(65882;40049;90271),$$
$$A*A*A*A*A*A(-4381019;4989780;9226981),\quad \dots$$

Ebben az esetben alapmegoldások végtelen sorát kapjuk.

A XX. század elején *Mordell* bebizonyította, hogy a nemszinguláris harmadrendű görbén mindig kiválasztható véges sok racionális pont úgy, hogy a görbe bármely racionális pontja megkapható legyen ezekből kiindulva, már megtalált pontok összekötésével, megtalált pontbeli érintők behúzásával, ezeknek és a görbe harmadik metszéspontjának megkeresésével.

Mordell azt is sejtette, hogy csak véges sok racionális pont lehet mindazokon a 3-nál magasabbfokú görbéken (affin görbéken, azaz bármelyik „rajzon") amelyek nem hozhatók a cikkben leírt φ bijekcióhoz hasonló megfeleltetésbe az egyenessel vagy valamely harmadrendű görbével. Ezt 1984-ben *Gerd Faltingsnak* sikerült igazolnia. Ez egyben azt is jelentette, hogy a Fermat-féle egyenletnek $n > 3$ esetén csak véges sok alapmegoldása lehet. Mégsem Faltings megközelítése vezetett el a Fermat sejtés megoldásához.

A harmadrendű görbék kaptak döntő szerepet a megoldásban, amikor ugyanabban az évben, 1984-ben *Gerhard Frey* rámutatott, hogy ha a Fermat egyenletnek létezik a nemtriviális $A^n + B^n = C^n$ megoldása, akkor az $y^2 = x^3 + (A^n - B^n)x^2 - A^nB^n$ harmadrendű görbe ellenpéldát adna *Taniyama* és *Shimura* egy sejtésére. *Andrew Wiles* 1993-ban ez utóbbi sejtés igazolásával egyúttal bebizonyította Fermat állítását is.

Mindazok, akik idáig jutottak a cikk olvasásában bizonyára nagy örömüket fogják lelni *Rónyai Lajos:* Egy igazán csudálatos bizonyítás című írásában, amely a *Hódi Endre* szerkesztette Matematikai mozaikban jelent meg (Typotex Kiadó, 1999), és *Simon Singh:* A nagy Fermat-sejtés címen megjelent könyvében (Park Kiadó, 1997). A témához kapcsolódik még *Kollár János:* Algebrai geometria című cikke a Természet Világa Matematika Különszámában (1998).

Feladatok

1. Az 1, 25, és a 49 olyan négyzetszámok, amelyek egyben egy számtani sorozat egymást követő elemei. Állítsuk elő az összes ilyen számhármast.

2. Bizonyítsuk be, hogy irreducibilis harmadrendű görbének csak legfeljebb egy szinguláris pontja lehet.

3. Keressünk 7, egészekből álló megoldást az $y^2=6(x^3-x)$ egyenlethez. Keressünk még 4 megoldást a racionális számok halmazán.

4. Keressünk olyan négy elemből álló számtani sorozatokat, amelynek tagjai közül kiválasztható három olyan, amelyek szorzata köbszám!

Ajánlott internet címek

Fermat tétele:

`http://www.mbay.net/~cgd/flt/flt01.htm`

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Fermat's_last_theorem.html`

`http://www.prometheus.demon.co.uk/01/01fermat.htm`

`http://mathworld.wolfram.com/FermatsLastTheorem.html`

Kriptográfia:

`http://world.std.com/~dpj/elliptic.html`

`http://ds.dial.pipex.com/george.barwood/ec_faq.htm`

Hraskó András

Az 1999. évi Izsák Imre Gyula komplex természettudományi verseny

A zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium 1992 óta minden évben megrendezi komplex természettudományos versenyét matematika, fizika és számítástechnika tárgyakból neves gimnáziumok tanulóinak részvételével.

A legutóbbi versenyt 1999. október 21–22-én tartottuk meg: 13 iskolából 2-2 fő (11. vagy 12. osztályos tanuló) vett rajta részt.

A versenyzők mindhárom tantárgyból kaptak feladatot, amelynek megoldására két-két óra állt rendelkezésre. A tanulók az OKTV-n meghatározott segédanyagokat használhatták, a számítástechnika versenyen IBM-PC gépen dolgozhattak PASCAL, C vagy BASIC nyelven. A versenyt a napfogyatkozással kapcsolatos csillagászati TOTÓ is színesítette. A feladatokat a zsűri tagjai, az Eötvös Loránd Tudományegyetem oktatói, *Dr. Bérczes György* (fizika), *Dr. Hortobágyi István* (matematika) és *Dr. Zsakó László* (számítástechnika) tűzték ki.

A verseny győztesei értékes jutalmakat kaptak a rendezvényt támogató zalaegerszegi számítástechnikai cégektől (ProComp Kft, STARTUP Kft, Zalaszám Kft). A verseny támogatói: a Pro Renovanda Cultura Hungariae Alapítvány, a ZALAHÚS RT és a Zala Megyei Pedagógiai Intézet voltak.

Az összesített verseny eredménye

1. helyezett: *Dezső Balázs,* Teleki Blanka Gimnázium, Székesfehérvár;

2. helyezett: *Pesti Gábor,* Batthyány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa;

3. helyezett: *Kertész Péter,* Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg.

Különdíjak:

Matematika: *Babos Attila,* Radnóti Miklós Gimnázium, Budapest;
Fizika: *Zábrádi Gergely,* Révai Miklós Gimnázium, Győr;
Számítástechnika: *Nepusz Tamás,* Teleki Blanka Gimnázium, Székesfehérvár.

A versenyről információk találhatók a `www.zmgzeg.sulinet.hu` címen. Tel/Fax: 92/313-490, e-mail: `kiss@gamow.zmgzeg.sulinet.hu`

A versenyt 2000-ben is szeretnénk megrendezni az Informatika és Számítástechnika Tanárok Egyesülete támogatásának köszönhetően két újabb gimnázium részvételével.

Kiss Zsolt
a verseny szervezője

Matematika versenyfeladatok

1. Az ABC háromszög C csúcsánál levő szöge 135°. Jelöljük A-ból a BC oldalegyenesre, illetve B-ből az AC oldalegyenesre bocsátott merőleges szakasz talppontját A_1-gyel, illetve B_1-gyel. Bizonyítsuk be, hogy az A_1B_1 szakasz hossza egyenlő az ABC háromszög csúcspontjain áthaladó kör sugarával.

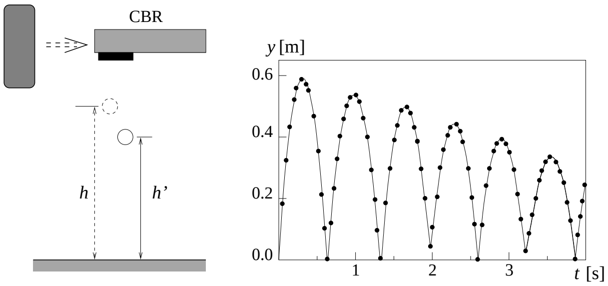
2. Nevezzük az $\frac{1}{n}$ alakú törteket (n pozitív egész) törzstörteknek. Bizonyítsuk be, hogy bármely 0 és 1 közé eső racionális szám felírható véges sok különböző törzstört összegeként.

3. Hat kör úgy helyezkedik el a síkon, hogy egyik sem tartalmazza másik kör középpontját. Bizonyítsuk be, hogy ekkor nem lehet a síknak olyan pontja, amelyet mind a hat kör tartalmaz.

4. Egy sorozatról tudjuk, hogy $a_1=1$ és $n\ge 2$ esetén $a_n=2a_{n-1}+\sqrt{3a_{n-1}^2+1}$. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat elemei egész számok.

Fizika versenyfeladatok

1. A mellékelt ábra egy elejtett, pattogó labda helyének időfüggését mutatja. A mérést a Texas Instruments cég – oktatási célokra kifejlesztett – ultrahangos mozgásérzékelőjével (CBR) vettük fel az *ábrán* látható elrendezésben.



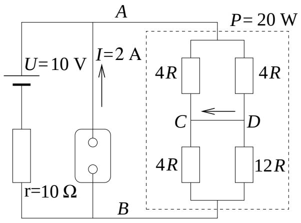
a) Határozzuk meg a labdára és talajra jellemző $\varepsilon = \dfrac{mv'}{mv} = \sqrt{\dfrac{h'}{h}}$ ütközési számot!

b) Az ε ütközési szám segítségével adjuk meg, hogy mennyi a labda átlagsebessége a teljes mozgás időtartama alatt, ha $h_0 = 1$ m magasságról történik az ejtés ($g = 10\ \mathrm{m/s^2}$)).

2. Az α hajlásszögű lejtő tetejéről kezdősebesség nélkül indítunk egy R sugarú m tömegű homogén korongot, amely végig tisztán gördülve mozog. A leérkezés ideje megegyezik azzal az idővel, amelyet akkor kapunk, ha a korongot a lapjára fektetve csúsztatjuk le a lejtőn:

a) Mennyi a test és a lejtő közötti μ csúszási súrlódási együttható?

b) Csökkentve a lejtő hajlásszögét, melyik helyzetből indítva ér a test rövidebb idő alatt a lejtő aljára?

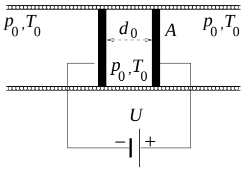


3. Az *ábrán* látható kapcsolásban az A és B vezetékek között egy egyenáramot adó tápegység és egy négy ellenállásból álló híd látható. Ezen utóbbin $P = 20$ W elektromos teljesítmény esik.

a) Határozzuk meg R értékét.

b) Adjuk meg a C–D ágban folyó áram erősségét.

4. Elektromosan szigetelő, vékonyfalú hengerben két könnyen mozgó, A felületű fémdugattyú helyezkedik el egymástól d_0 távolságra. A dugattyúk kezdetben egyensúlyban vannak, és p_0 nyomású, T_0 hőmérsékletű levegőrészeket választanak el egymástól. A két dugattyúra U egyenfeszültséget kapcsolunk.



a) Mennyi lesz a két dugattyú közti d távolság a telep rákapcsolása után?

b) Diszkutáljuk a feladatot!

Számítástechnika versenyfeladatok

1. *Faktoriális prímtényezős felbontása.* A Faktoriális (N) függvény rendkívül gyorsan növekszik. Míg az $5!=120$, addig már a $10!=73\ 628\ 800$ ábrázolásához 4 byte-os egész számokra van szükség. A 100! azonban sem 4, sem 8, ... byte-os egész számként nem ábrázolható a számítógépben.

Tudjuk azonban, hogy minden természetes számnak elkészíthető a prímtényezős felbontása. Például:

$$5!=2^3\cdot 3\cdot 5 \qquad\qquad 10!=2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$$

Készíts programot, amely beolvassa billentyűzetről N értékét ($1\le N\le 10\,000$), majd kiírja a képernyőre az N! prímtényezős felbontását!

2. *Szakaszok metszéspontjai.* Egy téglalap alakú területre N db ($1\le N\le 100$) szakaszt rajzoltunk. Az egyes szakaszok végpontjainak koordinátái 0 és 100 közötti egész számok. Két szakasz akkor metszi egymást, ha pontosan egy közös pontjuk van.

Készíts programot, amely meghatározza a szakaszok metszéspontjait! Ha egy pont kettőnél több szakasznak is a metszéspontja, akkor is csak egyszer szabad feltüntetni az eredményben.

A `SZAKASZ.BE` állomány első sorában a szakaszok száma van. A következő N sor mindegyike 4 számot tartalmaz (x_1, y_1, x_2, y_2), a szakasz kezdő és végpontjának egész koordinátáit, egy-egy szóközzel elválasztva.

A `SZAKASZ.KI` állományba és a képernyőre a szakaszok metszéspontjait kell írni: az első sorba a metszéspontok K számát, a következő K sorba pedig az egyes metszéspontok koordinátáit, 3 tizedesjegyre kerekítve.

Példa:

```
SZAKASZ.BE:      SZAKASZ.KI:
3                2
2 2 3 8          2.361  4.167
1 3 8 9          6.239  7.537
6 9 7 4
```

Mérőlap felvételire készülőknek V.

1. Adjuk meg az A, B és C értékét egyszerűbb alakban, majd rakjuk növekedő sorrendbe őket:

$$A=\operatorname{tg}(0\cdot 12^\circ)+\operatorname{tg}(1\cdot 12^\circ)+\operatorname{tg}(2\cdot 12^\circ)+\ldots+\operatorname{tg}(15\cdot 12^\circ),$$

$$B=\sqrt[3]{6\cdot\sqrt{3}-10},$$

$$C=\log_2\sqrt{\frac{2}{a}\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{2}\cdot\sqrt[4]{\frac{a^8}{32}}}},\qquad \text{ahol}\quad a=\sqrt{7}-1.$$

2. Az $ABCDE$ konvex ötszögben AE felezőpontja F, FD felezőpontja H, HC felezőpontja J, továbbá BE felezőpontja G, GD felezőpontja I, IC felezőpontja K.

Határozzuk meg a $JK:AB$ arányt!

3. Mutassuk meg, hogy a következő egyenletnek pontosan két egész gyöke van:

$$\sqrt{1-\frac{x^2-2000x+1999}{x-1}}+\sqrt{-1+\frac{x^2-1999x+1998}{x-1}}=1.$$

4. Az $y^2-6y-x+11=0$ egyenletű parabolának és egy körnek három közös pontja van, amelyek egy szabályos háromszög csúcsai. Adjuk meg a kör egyenletét, ha a középpontja illeszkedik a parabola tengelyére!

5. Határozzuk meg azokat a rácspontokat a koordinátarendszerben, amelyek koordinátáira teljesülnek a következő feltételek:

$$x^3-x^2y-xy+y^2=0, \qquad x^2+y^2-4x-2y-4\le 0.$$

6. Egy bevásárlóközpont egy év alatt 54%-kal növelte a bevételét. A nagyobb bevételt a vásárlók számának és az egy főre eső vásárlás értékének a növekedése eredményezte. Hány százalékkal emelkedett a vásárlók száma, ha az egy főre eső vásárlás értéke négyszer akkora százalékkal nőtt, mint a vásárlók száma?

7. Az a, b, c valós paraméterekre a és c különböző előjelű, továbbá $a+c\ne b$. Tekintsük az alábbi egyenletet:

$$(a^2+b^2+c^2)\cdot x^2-2b(a+c)\cdot x+2ac=0.$$

Mutassuk meg, hogy az egyenletnek van két valós gyöke, és a nagyobbik a $(0;1)$ intervallumban van.

8. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogója egységnyi. Megrajzoljuk kifelé az $ACDE$ és az $ABFG$ négyzeteket. Mekkora az ABC háromszög A-nál lévő belső szöge, ha az $ECBG$ négyszög területe maximális?

Számadó László

Megoldásvázlatok, eredmények a IV. mérőlap (2000/3. sz.) feladataihoz

1. Legyen $\sqrt{x^2-3x+3}=z$ és $\sqrt{x^2-3x+6}=y$ ($z\ge 0$, $y>0$); ekkor $y+z=3$ és $y^2-z^2=3$, tehát $y-z=1$, $y=2$, $z=1$. $x^2-3x+3=1$. Az adott egyenlet megoldásai $x_1=1$, $x_2=2$.

2. A feltétel szerint, millió forintban számolva

$$(1\cdot 1{,}14^3-1)\cdot 1{,}2^n>0{,}6 \qquad n>1{,}94.$$

Két teljes évet kell várnunk. (Ekkor 604 049 forint lesz a bankban.)

3. A félkör középpontjából a befogókra bocsássunk merőleges szakaszokat. Ezek hossza a félkör sugarával egyezik meg. Így két hasonló derékszögű háromszöget kapunk, amelyekben az átfogó 1,8, illetve 2,4, tehát a hasonlóság aránya 3 : 4. A kör sugara legyen $4x$, a kisebb derékszögű háromszög két befogója $3x$, illetve $4x$, átfogója így $5x = 1{,}8$, $x = \frac{1{,}8}{5}$. A félkör sugara $4x = 4 \cdot \frac{1{,}8}{5} = 1{,}44$ egység.

4. A BD átló egyenesének egy pontja: $x = t$, $y = 2t - 3$, $t \in \mathbf{R}$. Azokat a P pontokat (B, D) keressük, amelyekre $PA^2 = 25$, azaz $(t-6)^2 + (2t-3-4)^2 = 25$, $t^2 - 8t + 12 = 0$, $t_1 = 6$, $t_2 = 2$. Így $B(6;9)$ és $D(2;1)$. Mivel $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}$ és $\overrightarrow{OD} = (2;1)$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = (0;5)$, ezért $\overrightarrow{OC} = (2;1) + (0;5) = (2;6)$, tehát $C(2;6)$, $AB = 9 - 4 = 5$, a hozzá tartozó magasság $6 - 2 = 4$ egység, a rombusz területe $T = 20$ területegység.

5. Nyilván $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x + y > 0$ és $x - y > 0$. A második egyenletből

$$\log_2(x+y) = \log_2 2 + \log_2(x-y), \qquad \log_2(x+y) = \log_2 2(x-y), \qquad x + y = 2(x-y), \qquad x = 3y.$$

Az első egyenletből $\frac{x}{y} = 3$ vagy $\frac{x}{y} = -\frac{1}{3}$, azaz $x = 3y$, $x > 0$, $y > 0$, hiszen $y = -3x$ nem lehetséges.

Az egyenletrendszer megoldásai: $x = 3t$, $y = t$, $t \in \mathbf{R}^+$.

6. Vegyük fel a gúlának az alapnégyzet két szemközti oldalának a felezőpontján átmenő tengelysíkmetszetét. Ez egy egyenlő szárú derékszögű háromszög az alapra állított beírt négyzettel, hiszen az egyenlő szárú háromszög alapja $2a$, magassága a. Ha a négyzet oldala x, akkor $2a = 3x$, $x = \frac{2}{3}a$.

A gúla térfogata: $V_g = \frac{4a^2 \cdot a}{3} = \frac{4}{3}a^3$; a kocka térfogata $V_k = \frac{8}{27}a^3$.

$$\frac{V_g}{V_k} = \frac{4}{3}a^3 : \frac{8}{27}a^3 = \frac{9}{2}.$$

A gúla térfogata a kocka térfogatának a 4,5-szerese.

7. Ha $p = 0$, akkor $x|x| = 0$; ennek egyetlen megoldása $x = 0$.

Ha $p > 0$, akkor az egyenletnek csak olyan x szám lehet megoldása, amelyikre $x < 0$, így $x - 2p < 0$. Ekkor az egyenlet: $x(2p - x) + p = 0$, $x^2 - 2px - p = 0$. Ennek az egyenletnek a diszkriminánsa $D = 4p^2 + 4p > 0$, gyökeinek szorzata $x_1x_2 = -p < 0$, így különböző előjelűek; mivel most $x < 0$, azért csak a negatív gyök a megfelelő.

Ha $p < 0$, akkor az egyenletnek csak olyan x szám lehet a megoldása, amelyikre $x > 0$, így $x - 2p > 0$. Ekkor az egyenlet: $x(x - 2p) + p = 0$, $x^2 - 2px + p = 0$. Ennek az egyenletnek a diszkriminánsa $D = 4p^2 - 4p > 0$, gyökeinek szorzata $x_3x_4 = p < 0$, így különböző előjelűek; mivel most $x > 0$, azért csak a pozitív gyök a megfelelő.

(A pontosan egy megoldást a $p = 0$, $p > 0$, $p < 0$ esetekben a grafikus megoldás jól szemlélteti.)

8. Mivel $(a+b+c)^2 > 0$, azért egyrészt azt kell igazolni, hogy $(a+b+c)^2 < 4(ab+bc+ca)$, azaz

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca < 0, \tag{1}$$

másrészt, hogy $3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2$, azaz

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca. \tag{2}$$

Alkalmazzuk a háromszögegyenlőtlenség(ek)et. Ezek szerint

$$0 \le |a-b| < c, \qquad 0 \le |b-c| < a, \qquad 0 \le |c-a| < b,$$

így négyzetre emelve:

$$0 \le a^2+b^2-2ab < c^2, \qquad 0 \le b^2+c^2-2bc < a^2, \qquad 0 \le c^2+a^2-2ca < b^2.$$

Ez utóbbi három egyenlőtlenséget összeadva kapjuk, hogy

$$0 \le 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca < a^2+b^2+c^2.$$

Innen rendezés után kapjuk, hogy

$$ab+bc+ca \le a^2+b^2+c^2 < 2ab+2bc+2ca,$$

éppen a két bizonyítandó egyenlőtlenség.

Rábai Imre

A C gyakorlatok megoldása

C. 551. *Határozzuk meg az $x^2+y^2=x$, $2xy=y$ egyenletrendszer összes megoldását.*

Javasolta: *Fried Ervin* Budapest

Megoldás. Adjuk össze a két egyenletet:

$$x^2+y^2=x, \tag{1}$$

$$2xy=y, \tag{2}$$

azt kapjuk, hogy

$$(x+y)^2=x+y. \tag{3}$$

Ha $x+y\neq 0$, akkor egyszerűsíthetünk vele, így az $x+y=1$ egyenlethez jutunk, ahonnan $x=1-y$ helyettesítéssel

$$2y(1-y)=y, \tag{2'}$$

Ha $y\neq 0$, akkor egyszerűsítve y-nal a $2(1-y)=1$ egyenletet kapjuk. Innen $y=\frac{1}{2}$ és (2)-ből $x=\frac{1}{2}$.

Ha $y=0$, akkor (1)-ből $x=1$ (hiszen feltettük, hogy $x+y\neq 0$).

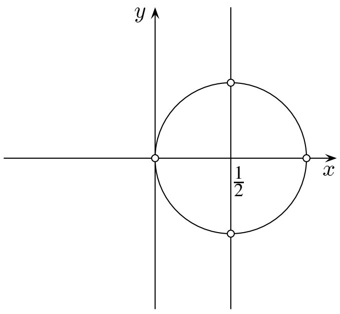
Most térjünk vissza arra az esetre, ha $x+y=0$, vagyis $x=-y$. Ekkor a (2) egyenletből $-2y^2=y$ $(y\neq 0)$ és így $y=-\frac{1}{2}$ és $x=\frac{1}{2}$, vagy $y=0=x$.

Az egyenletrendszernek 4 számpár tesz eleget:

$$x_1=\frac{1}{2},\ y_1=\frac{1}{2};\qquad x_2=0,\ y_2=0;\qquad x_3=\frac{1}{2},\ y_3=-\frac{1}{2};\qquad x_4=1,\ y_4=0.$$

Helyettesítéssel könnyen igazolhatjuk, hogy mind a 4 számpár valóban megoldása az egyenletrendszernek.

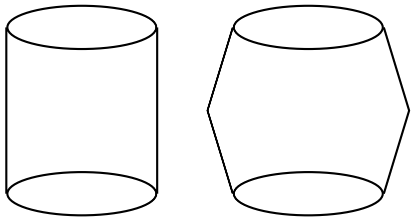
Megjegyzés. Koordinátageometriai úton szemléltethető az egyenletrendszer, azt is láthatjuk, hogy négy megoldást kapunk, és maguk a megoldások is szinte azonnal adódnak: (1)-et $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$ alakba írva egy $C\left(\frac{1}{2};0\right)$ középpontú, $\frac{1}{2}$ sugarú kört kapunk, (2)-t szorzattá alakítva $2y\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$, egy metsző egyenespár egyenlete. (A metszéspont a kör középpontja.)



Az egyik megoldáspárt az x tengely és a kör metszéspontjaként kapjuk: $(0,0)$, $(1,0)$; a másik az $x=\frac{1}{2}$ egyenletű egyenes és a kör metszéspontjaként olvasható le: $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ és $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

972 dolgozat érkezett. 5 pontos 205, 4 pontos 417, 3 pontos 101, 2 pontos 123, 1 pontos 85, 0 pontos 37. Nem versenyszerű 4 dolgozat.

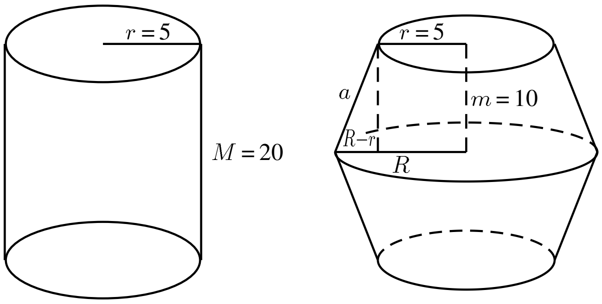
C. 553. *Egy* 20 cm *magas,* 10 cm *átmérőjű henger „meghízott". Magassága és alapjai nem változtak, alkotója viszont* 1 mm*-rel megnyúlt, és így két egybevágó csonkakúppá formálódott. Hány százalékkal nőtt a henger térfogata?*



Megoldás. A henger alapkörének sugara $r=5$ cm, a magassága $M=20$ cm, a térfogata: $V_{\mathrm{h}}=5^2\pi\cdot 20$.

A „meghízott" henger két csonkakúpból áll, alapkörük sugara $r=5$ cm, magasságuk $m=10$ cm, alkotójuk $a=10{,}05$ cm. A fedőkör R sugara az ábrán látható derékszögű háromszögből:

$$(R-r)^2=a^2-m^2=10{,}05^2-10^2=20{,}05\cdot 0{,}05=1{,}0025,$$
$$R-r=\sqrt{1{,}0025}\approx 1{,}0012,\qquad \text{ahonnan}\qquad R=6{,}0012.$$



A csonkakúp térfogata $V_{\text{csk}} = \frac{m\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2)$. A két csonkakúp együttes térfogata:

$$V \approx \frac{1}{3} 20\pi \cdot 91{,}0204.$$

A két térfogat aránya:

$$\frac{\frac{1}{3}20\pi \cdot 91{,}0204}{25 \cdot \pi \cdot 20} \approx \frac{91{,}0204}{75} \approx 1{,}2136.$$

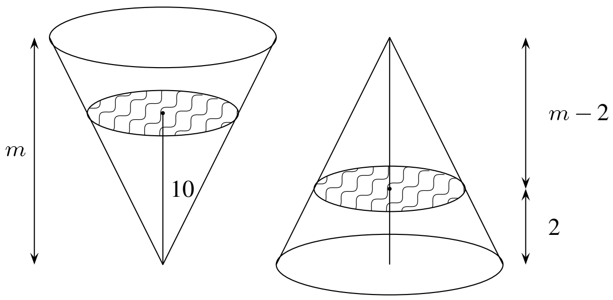
A henger térfogata tehát közelítőleg 21,36%-kal nőtt meg.

904 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 385, 4 pontot 216, 3 pontot 112, 2 pontot 31, 1 pontot 34, 0 pontot 118 beküldő. Nem versenyszerű 8 dolgozat.

C. 559. *Egy kúpba (csúcsával lefelé tartva) vizet töltünk, így a víz* 10 cm *magasan áll benne. Nyílását lezárva alaplapjára állítjuk a kúpot, így most* 2 cm *magasan áll benne a víz. Milyen magas a kúp?*

Javasolta: *Koncz Levente,* Budapest

Megoldás. Az első esetben a víz térfogata V_1, egyenlő egy olyan kúp térfogatával, amelynek magassága 10 cm. Jelöljük az eredeti kúp magasságát m-mel és a térfogatát V-vel.



Ismeretes, hogy $\frac{V_1}{V} = \frac{10^3}{m^3}$, innen $V_1 = V\frac{10^3}{m^3}$.

A második esetben az üres kúprész térfogata V_2, és $\dfrac{V_2}{V}=\dfrac{(m-2)^3}{m^3}$. Mivel a víz térfogata nem változott közben, nyilván igaz, hogy $V_1+V_2=V$, azaz

$$V\frac{10^3}{m^3}+V\frac{(m-2)^3}{m^3}=V.$$

V-vel egyszerűsítve ($V\neq 0$) és rendezve az egyenletet, azt kapjuk, hogy

$$6m^2-12m-992=0.$$

Az egyenlet két valós gyökének a szorzata negatív, így az egyértelmű pozitív gyököt kell figyelembe venni. A kúp magassága 13,897 cm.

383 dolgozat érkezett. 5 pontos 290, 4 pontos 35, 3 pontos 16, 2 pontos 18, 1 pontos 17, 0 pontos 5 dolgozat. Nem versenyszerű 2.

Matematika gyakorlatok megoldása

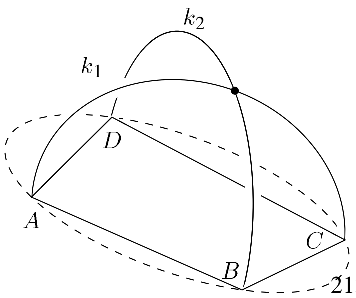
Gy. 3261. *Adott az $ABCD$ konvex négyszög a síkban. Bizonyítsuk be, hogy a síkra merőlegesen állított AC és BD átmérőjű körök akkor és csak akkor metszik egymást, ha $ABCD$ húrnégyszög.* **(H)**

Megoldás. Először belátjuk, hogy ha a körök metszik egymást, akkor a négyszög húrnégyszög. A konvex négyszög átlói metszik egymást, ezért az AC és BD átlók felező merőlegesei is: legyen ezek közös pontja O. Jelölje a feladatban szereplő AC átmérőjű kört k_1, a BD átmérőjű kört pedig k_2.

Ha az O pontot összekötjük a k_1, illetve a k_2 körök pontjaival, egy-egy forgáskúpot kapunk. Az O-t a k_1 és k_2 metszéspontjaival összekötő szakaszok mindkét forgáskúpnak alkotói, tehát a két forgáskúp alkotói egyenlő hosszúságúak. (Ha O egybeesik valamelyik átló felezőpontjával, akkor az egyik (esetleg mindkét) fogáskúp alkotója helyett a k_1, illetve a k_2 kör sugara értendő.) A k_1 és k_2 körök pontjai tehát egyenlő távolságra vannak O-tól, így van olyan O középpontú gömb, amelyen k_1 és k_2 összes pontja, tehát A, B, C, D is rajta van.

A, B, C, D e gömb különböző, egy síkban levő pontjai, és mivel a gömb minden síkmetszete kör, azért van olyan kör, amelyen mind a négy pont rajta van. Így az $ABCD$ négyszög valóban húrnégyszög.

Most bebizonyítjuk, hogy ha az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, akkor a k_1 és k_2 körök metszik egymást. Használjuk az eddigi jelöléseket, és legyen $\mathcal{S}$ az $ABCD$ húrnégyszög síkja. Az O középpontú, OA sugarú gömb metszete $\mathcal{S}$-sel (a gömb főköre) adja a húrnégyszög körülírt körét. Ezt a gömböt az AC és a BD átlókat tartalmazó, $\mathcal{S}$-re merőleges síkok egy-egy körben metszik:



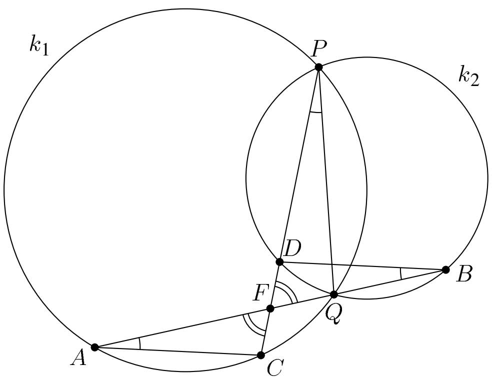
mivel átmérőjük AC, illetve BD, ezek a körök éppen k_1 és k_2.

Ekkor az AD és BD átlók metszéspontjában az $\mathcal{S}$ síkra állított merőleges egyenes két pontban metszi a gömböt: ezek a pontok egyúttal k_1 és k_2 pontjai is, tehát az AC és BD átmérőjű, $\mathcal{S}$-re merőleges körök valóban metszik egymást.

Bálint Gergely (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 10. o.t.)

106 dolgozat érkezett. 7 pontos Baharev Ali megoldása. 5 pontos 53, 4 pontos 20, 3 pontos 26, 2 pontos 4, 0 pontos 2 dolgozat.

Gy. 3267. *A k_1 és k_2 körök a P és Q pontokban metszik egymást. Az A a k_1, a B pedig a k_2 kör egy-egy pontja úgy, hogy az AB szakasz a belsejében tartalmazza Q-t. Legyen AB felezőpontja F. A PF egyenes két új metszéspontja a körökkel C, illetve D. Bizonyítsuk be, hogy F a CD szakaszt is felezi.*



I. megoldás. Az F pontnak a k_1 körre vonatkozó hatványa:

$$FC \cdot FP = FA \cdot FQ,$$

a k_2 körre vonatkozó hatványa pedig

$$FD \cdot FP = FB \cdot FQ.$$

A felírt egyenlőségek jobb oldalai $FA = FB$ miatt egyenlőek, így

$$FC \cdot FP = FD \cdot FP.$$

Ha $FP \neq 0$, akkor innen valóban $FC = FD$ következik. A C és D pontok nem eshetnek egybe, ugyanis az egyik a k_1-en van, a másik a k_2-n. F tehát felezi CD-t.

Ha $FP = 0$, $F = P$, akkor az $AB (= FQ)$ egyenes egybeesik a PQ egyenessel, tehát az A és B pont a P, illetve a Q pontok valamelyike. AB-t ezért csak úgy felezhetné P, ha $A = B = P$ volna, ekkor viszont nem teljesül a feladatnak az a feltétele, hogy AB tartalmazza Q-t.

II. megoldás. Alkalmazzuk a kerületi szögek tételét:

$$CAQ\sphericalangle = CPQ\sphericalangle = DPQ\sphericalangle = DBQ\sphericalangle,$$

így az AFC és BFD háromszögeknek a feltétel szerint egyenlő AF és BF oldalán fekvő megfelelő szögek is egyenlők.

A két háromszög tehát egybevágó, így $FC = FD$.

Megjegyzés. A második megoldás hasonló diszkussziójánál azt kell megvizsgálni, hogy a felhasznált szögek, szakaszok és háromszögek nem fajulnak-e el. Ez elkerülhető: tekintsük úgy a feladatot, hogy az AB egyenes forog Q körül. Csak véges sok helyzetben fajul el az ábra, a szakaszok hossza pedig folytonosan változik, így az állítás az elfajuló esetekben is igaz.

136 dolgozat érkezett. 6 pontos Boros Vazul, 5 pontos Andrássy Zoltán, Babos Attila, Bálint Gergely, Balogh 126 Zoltán, Béky Bence, Fodor 133 Gyula, Hauser Edit, Horváth Szilárd, Kovács Erika Renáta, Kucsera Dénes, Kunszenti-Kovács Dávid, Nagy Tamás, Siska Ádám, Sparing Dániel, Szente Dávid, Szűcs Zsófia, Tran Thanh Long, Zalán Péter és Zséger Ádám megoldása. 4 pontot kapott 102, 3 pontot 2, 2 pontot 1, 1 pontot 5, 0 pontot 4 beküldő. Nem versenyszerű 2 dolgozat.

Gy. 3275. *Egy négyszög területét felezik az átlói. Igazoljuk, hogy együtt négy egyenlő területű részre bontják a négyszöget.*

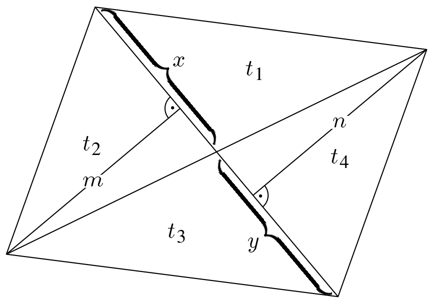
I. megoldás. A feltételből következik, hogy négyszög konvex.

Használjuk az *1. ábra* jelöléseit!

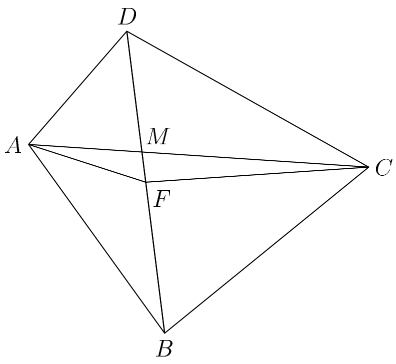
$$t_1=\frac{1}{2}xn,\qquad t_2=\frac{1}{2}xm,\qquad t_3=\frac{1}{2}ym,\qquad t_4=\frac{1}{2}yn.$$

Ebből látható, hogy $t_1t_3=t_2t_4$. Az átlók felezik a területet, azaz $t_1+t_2=t_3+t_4$, és $t_1+t_4=t_2+t_3$. E két egyenlőség összeadásából $t_1=t_3$, ezért $t_2=t_4$. A területek szorzatára kapott egyenlőségek szerint így $t_1^2=t_2^2$, tehát $t_1=t_2$. Innen pedig azonnal adódik, hogy mind a négy terület egyenlő.

Fischer Noémi (Budapest, Árpád Gimn., 9. o.t.)



1. ábra



2. ábra

II. megoldás. Belátjuk, hogy a feltétel teljesülésekor a négyszög paralelogramma. Tegyük fel, hogy nem az, vagyis valamelyik átló nem felezi a másikat, például a BD átló F felezőpontja nem esik AC-re, hanem pl. az ABC háromszög belsejében van (*2. ábra*).

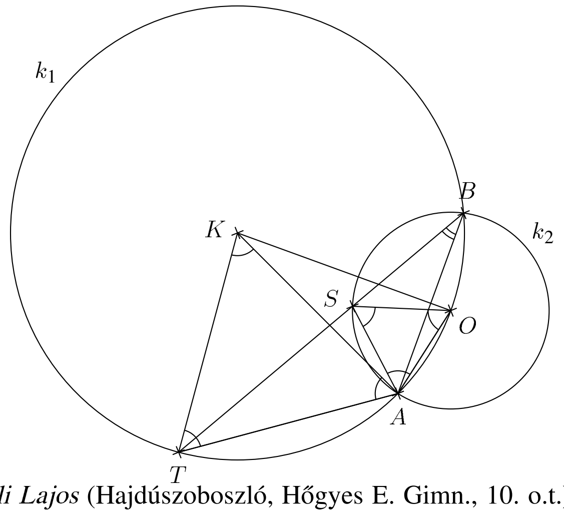
Az AF súlyvonal felezi ABD területét, FC pedig BCD-ét. Ebből adódik, hogy $t_{ABF}+t_{BCF}$ a négyszög területének a fele, ami egyenlő t_{ABC}-vel. A két felírt terület különbségeként azt kapjuk, hogy $t_{AFC}=0$, ami azt jelenti, hogy az átlók felezik egymást.

Az $ABCD$ négyszög tehát paralelogramma, amelyben az átlók által létrehozott négy háromszög területe nyilván egyenlő.

210 dolgozat érkezett. 6 pontos Bálint Gergely, Balka Richárd, Deli Lajos, Horváth Balázs, Horváth Szilárd, Nagy 444 Zoltán, Rácz Judit és Zalán Péter megoldása. 5 pontot kapott 162, 4 pontot 9, 3 pontot 4, 2 pontot 14, 1 pontot 8, 0 pontot 5 versenyző.

Gy. 3276. *Az r sugarú k_1 kör kerületének egy O pontja a k_2 kör középpontja. A két kör metszéspontjai A és B, S pedig a k_1 belső pontja. A BS egyenes másik metszéspontja k_1-gyel T. Bizonyítsuk be, hogy ha az AOS háromszög szabályos, akkor $TS=r$.* (**H**)

Megoldás. Ha az AOS háromszög szabályos, akkor $AO=SO$, tehát S is a k_2 körön van. A k_2 körben az $\overset{\frown}{SA}$ ívhez tartozó középponti szög $SOA\sphericalangle=60^\circ$, az ugyanehhez az ívhez tartozó kerületi szög $SBA\sphericalangle=30^\circ$. Így a k_1 körben a $\overset{\frown}{TA}$ ívhez is $TBA\sphericalangle=SBA\sphericalangle=30^\circ$-os kerületi szög tartozik, tehát a $\overset{\frown}{TA}$ ívhez tartozó középponti szög, $TKA\sphericalangle=60^\circ$, vagyis a TKA háromszög is szabályos. Ezért, ha az AKO háromszöget (amelyben $KA=KO=r$) az óramutató járásával ellentétes (pozitív) irányban elforgatjuk A körül 60°-kal, akkor a K pont képe T, az O ponté pedig S lesz, A helyben marad. Az AKO háromszög elforgatottja tehát az ATS háromszög lesz, így e két háromszög egybevágó, és $TS=KO=r$.



Deli Lajos (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzések. 1. A gyakorlatra sokféle más megoldás is érkezett: az AKO és ATS háromszögek egybevágóságát a szögek kiszámításával látták be; volt, aki a pont körre vonatkozó hatványát írta fel, mások koordinátageometriai eszközökkel számolták ki TS hosszát.

2. Akik a számolás során kihasználták, hogy a k_2 kör sugara kisebb, mint a k_1 köré, azok megoldása nem teljes.

3. *Fiers Márton* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) észrevette, hogy az állítás akkor is igaz, ha S nem belső pontja k_1-nek.

122 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Fiers Márton, Kovács Erika Renáta és Papp Dávid. 5 pontos 74 4 pontos 13 3 pontos 22 2 pontos 3 1 pontos 2 0 pontos 5 dolgozat.

B. 3293. *Az a és b pozitív egész számokra teljesül, hogy $34a=43b$. Mutassuk meg, hogy $a+b$ összetett szám.*

(*3 pont*) Javasolta: *Róka Sándor,* Nyíregyháza

I. megoldás. Alakítsuk át az egyenlőséget:

$$(33+1)a=(44-1)b,$$
$$33a+a=44b-b,$$

ahonnan

$$a+b=11(4b-3a).$$

Az a és b pozitív egész számok, tehát $a+b$ is az. A fentiek szerint $a+b$ osztható 11-gyel, így csak akkor lehet prím, ha $4b-3a=1$.

De ekkor $b=\dfrac{3a+1}{4}$-et az eredeti egyenlőségbe helyettesítve $34a=43\cdot\dfrac{3a+1}{4}$-ből $a=\dfrac{43}{7}$ következik, ami nem egész szám; így $a+b$ valóban összetett szám.

Kovács Veronika (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., 11. o.t.)

Megjegyzések. 1. Hasonló gondolatmenettel így is átalakítható az eredeti egyenlőség: $a+b=7(5a-6b)$. Itt is belátható, hogy $5a-6b=1$ nem lehetséges, de ha mindkét módon felírjuk $(a+b)$-t, akkor az is látható, hogy 11-gyel és 7-tel is osztható, tehát legalább két prímosztója van, így összetett.

Vígh Viktor (Szeged, JATE Ságvári E. Gyak. Gimn., 11. o.t.)

2. Kissé más átalakítással bizonyították többen is:

$$34(a+b)=34a+34b=43b+34b=77b,$$

azaz $34(a+b)$ osztható 77-tel, de 34 és 77 relatív prímek, így $a+b$ osztható 77-tel, tehát összetett szám.

II. megoldás. A 34 és a 43 relatív prímek, azaz legnagyobb közös osztójuk 1. Ezért, ha $34a$ felírható $43b$ alakban, akkor $43\mid 34a$, így $43\mid a$, azaz $a=43d$ egy alkalmas d pozitív egész számmal. Ekkor

$$b=\frac{34a}{43}=\frac{34\cdot 43d}{43}=34d,$$

így $a+b=43d+34d=77d$, tehát $a+b$ 7-tel is, 11-gyel is osztható, így összetett szám.

Megjegyzés. Nagy különbség van aközött, hogy két szám prím, vagy két szám *relatív prím*: ez utóbbi esetben ugyanis lehet mindkettő összetett szám is: csak az kell, hogy ne legyen 1-nél nagyobb *közös* osztójuk. Sajnos több beküldőnk indult ki a következő hamis állításból, s emiatt pontokat veszített: „43 és 34 prímek…”

798 dolgozat érkezett. 3 pontos 385, 2 pontos 285, 1 pontos 75, 0 pontos 48. Nem versenyszerű 5 dolgozat.

B. 3302. *Egy jegypénztárnál nyolcan állnak sorba. Négyüknél egy-egy* 100 Ft*-os, a másik négynél egy-egy* 200 Ft*-os van, sorrendjük véletlenszerű. A jegy ára* 100 Ft*, a kassza kezdetben üres. Mindenki egy jegyet szeretne vásárolni. A lehetséges sorrendek hányadrésze olyan, hogy a pénztáros fennakadás nélkül ki tudja adni a jegyeket?*

(*3 pont*)

I. megoldás. Akkor nincsen fennakadás, ha bármeddig tekintjük is a sort, legalább annyian várakoznak 100 forintossal, mint 200 forintossal.

Jelöljük az előbbieket s, utóbbiakat pedig k betűvel, és számoljuk meg, hány olyan permutációja van a négy s és négy k betűnek, amikor nincsen fennakadás. Egy ilyen jó sorrendben az elsőnek érkező százassal, az utolsó pedig 200 forintossal kell fizessen, ezért egy tetszőleges jó sorrend $s\_\_\_\_\_\_\,k$ alakú.

Csoportosítsuk a jó sorrendeket aszerint, hogy hányadik helyen áll az első néző, aki 200 forintossal akar fizetni. Ha ez K, akkor $2 \le K \le 5$.

(i) $K=5$. Egyetlen ilyen sorrend van: $s\,s\,s\,s\,k\,k\,k\,k$, és ez nyilván jó.

(ii) $K=4$: $s\,s\,s\,k\,\_\,\_\,\_\,k$. A három lehetséges pozíció bármelyikére beírva a negyedik s betűt, jó sorrendhez jutunk, így ebben az esetben 3 jó sorrendet kapunk.

(iii) $K=3$: $s\,s\,k\,\_\,\_\,\_\,\_\,k$. A megmaradó két s betűt $\binom{4}{2}=6$-féleképpen írhatjuk a négy szabad pozíció közül kettőbe. E 6 sorrend közül csak 1 nem lesz jó, az, amikor a két s betű az utolsó két szabad pozíción van. Ebben az esetben tehát 5 jó sorrendet kapunk.

(iv) $K=2$: $s\,k\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,k$. A harmadik pozícióra ezután csak s betű kerülhet, másképpen itt elakadna a sor: $s\,k\,s\,\_\,\_\,\_\,\_\,k$. Így viszont lényegében az előző esethez, vagyis újabb 5 jó sorrendhez jutunk.

Minden lehetőséget megvizsgálva összesen 14 jó sorrendet kaptunk. Mivel a 8 pozícióból $\binom{8}{4}=70$-féleképpen választhatjuk ki azt a négyet, ahol s betű áll, a pénztáros az összes sorrendek $\frac{14}{70}=\frac{1}{5}$-ében tudja csak fennakadás nélkül kiadni a jegyeket.

II. megoldás. Az előző megoldás jelöléseit használva most a „rossz” sorrendeket számoljuk össze. Az elakadás előtt egyenlő számú s és k betű szerepel, az elakadás helyén pedig k betű áll. Maga az elakadás így a $(2m+1)$-edik várakozónál következett be ($m=1, 2, 3, 4$).

Módosítsuk most az ilyen sorozatokat a következőképpen: ha a $(2m+1)$-edik helyen kerül sor az elakadásra, akkor az első $(2m+1)$ pozíción az s betűket cseréljük k betűkre, a k betűket pedig s-ekre. Az elakadás utáni pozíciókon ne változtassuk a betűket.

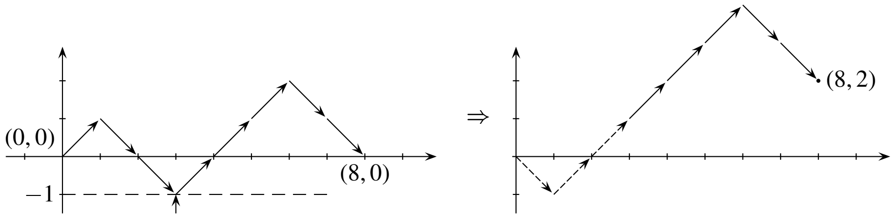
$$s\,s\,k\,k\,k\,|\,\_\_\_\_\_ \quad \rightarrow \quad k\,k\,s\,s\,s\,|\,\_\_\_\_\_.$$

Így olyan sorozathoz jutunk, amely 5 darab s és 3 darab k betűből áll. Megfordítva, ha tekintünk egy $(5s, 3k)$ sorozatot, akkor ebből egyértelműen kaphatunk egy rossz sorozatot: mivel több az s, mint a k, lesz egy legelső olyan pozíció, ahol az s betűk többségbe kerülnek, és erre valamelyik páratlanadik pozíción kerül sor. Az $s \leftrightarrow k$ cserét eddig a pozícióig bezárólag elvégezve egy rossz sorozathoz jutunk.

A rossz sorozatok száma így $\binom{8}{3}=56$, a jó sorozatoké pedig $\binom{8}{4}-56=14$.

Csötönyi Nóra (Bonyhád, Petőfi S. Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján

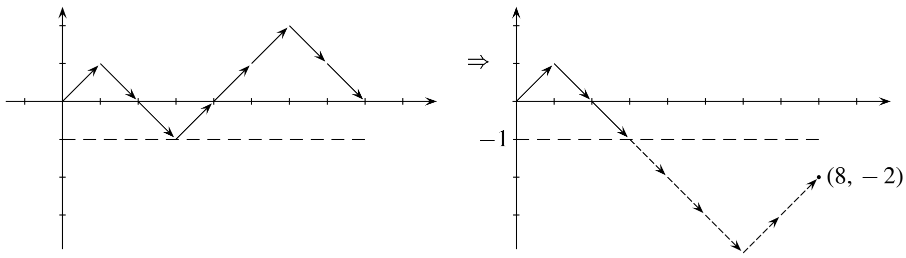
Megjegyzések. 1. A fenti leszámolásnak geometriai értelmezését is adhatjuk: egy-egy sorozatot az origóból induló töröttvonallal ábrázolhatunk: s betű esetén az $\mathbf{f}(1,1)$, k betű esetén pedig az $\mathbf{l}(1,-1)$ vektorral lépünk tovább.



1. ábra

Így az origóból induló, a $(8;0)$ pontba érkező töröttvonalakat kapunk. Egy útvonal akkor rossz, ha érinti – vagy metszi – az $y=-1$ egyenest. A „rossz” töröttvonalaknak az $y=-1$ egyenessel való első közös pontjáig haladó vektorok között hajtsuk végre az $\mathbf{f}\leftrightarrow\mathbf{l}$ cserét, így az origóból induló $(8,2)$ pontban végződő útvonalhoz jutunk. Ilyen útvonal pedig $\binom{8}{3}$ darab van.

2. A fenti „tükrözésnek” egy másik, szemléletesebb végrehajtása és az ennek megfelelő leszámolás a következő:



2. ábra

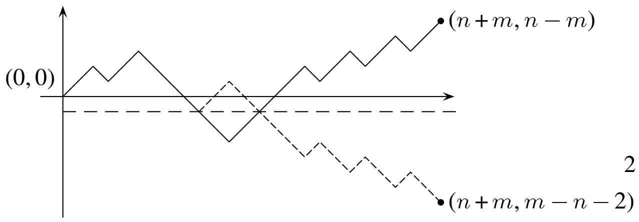
Tükrözzük egy $(0,0)\to(8;0)$ rossz útvonalnak az $y=-1$ egyenessel való első közös pontja *utáni* részét az $y=-1$ egyenesre. Így a $(0,0)$-ból induló $(8,-2)$-ben végződő $(3s,5k)$ útvonalhoz jutunk. Megfordítva, minden ilyen útvonal nyilván metszi az $y=-1$ egyenest; az első közös pontra tükrözve az út további részét egy rossz sorozatot kapunk.

A rossz sorozatok száma tehát $\binom{8}{3}$.

3. Bármelyik fenti módszerrel kapjuk, hogy ha a pénztár előtt $2n$ darab vevő várakozik, az egyik felük 100, másik felük pedig 200 forinttal, akkor az összes sorrendek száma $\binom{2n}{n}$, a rosszaké pedig $\binom{2n}{n-1}$.

A pénztáros ilyenkor az összes sorrend $\dfrac{\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}}{\binom{2n}{n}}=\dfrac{1}{n+1}$-edrészében tudja fennakadás nélkül kiadni a jegyeket.

A tükrözéses módszerrel akkor is választ kapunk a feladat kérdésére, ha a 100 forintossal és 200



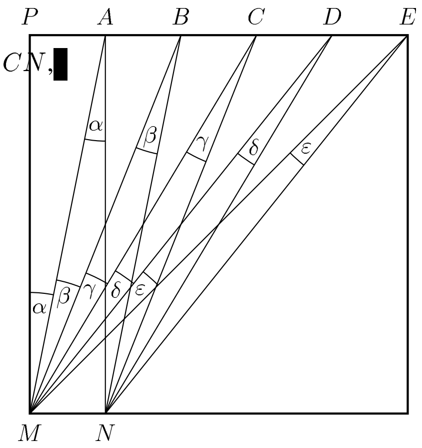
3. ábra

forintossal várakozók száma különböző. Ha n néző várakozik 100 forintossal és m 200 forintossal ($n \geq m$), akkor ugyanúgy kapjuk (*3. ábra*), hogy a rossz sorrendek száma $\binom{n+m}{m-1}$.

451 dolgozat érkezett. 3 pontos 305, 2 pontos 47, 1 pontos 29, 0 pontos 68. Nem versenyszerű 2 dolgozat.

B. 3307. *Határozzuk meg az ábrán látható négyzetben az MAN, MBN, MCN, MDN, MEN szögek összegét, ha tudjuk, hogy $PA=AB=BC=CD=DE=MN$.*

(*3 pont*) Orosz versenyfeladat



Megoldás. $PM \| AN$, tehát a $PMA\sphericalangle = MAN\sphericalangle = \alpha$ (váltószögek). $AM \parallel BN$, ezért $AMB\sphericalangle = MBN\sphericalangle = \beta$, $BM \parallel CN$, ezért $BMC\sphericalangle = MCN\sphericalangle = \gamma$, $CM \parallel DN$, ezért $CMD\sphericalangle = MDN\sphericalangle = \delta$ és $DM \parallel EN$, ezért $DME\sphericalangle = MEN\sphericalangle = \varepsilon$. Mindegyik esetben azt használtuk fel, hogy a váltószögek egyenlők, illetve hogy az ábrán paralelogrammák jöttek létre.

A kérdéses szögek összege ezért $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon = PME\sphericalangle = 45^\circ$, hiszen ME a négyzet átlója.

A négyzet oldalait 5 helyett tetszőleges $n \geq 2$ részre felbontva és MN hosszának a négyzet oldalának $\frac{1}{n}$-edrészét választva, az MN és az n részre felosztott oldalon levő osztópontok által meghatározott szögek összege mindig 45° lesz.

Szilágyi Péter (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 8.o.t.)

Megjegyzés. Négyzet helyett téglalapra is kiterjeszthetjük a feladatot, ha például ismerjük az oldalak arányát. A fentihez hasonló módon képzett szögek összege ekkor a téglalap átlója és egyik oldala által közbezárt szög lesz.

Szilágyi Tamás (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 11. o.t.)

685 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 307, 2 pontot 327, 1 pontot 27, 0 pontot 18 versenyző. Nem versenyszerű 6 dolgozat.

B. 3311. *Igazoljuk, hogy ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x$.*

(*5 pont*) *Kovács Ádám* (Budapest) javaslata alapján

I. megoldás. Rendezzük át a bizonyítandó egyenlőtlenséget:

$$\frac{\sin x}{(\cos x)^{1/3}} - x > 0.$$

Ha $x=0$, akkor a bal oldal 0. Megmutatjuk, hogy a bal oldal a $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban szigorúan monoton növő. Ez következik abból, ha a deriváltja *pozitív* a $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ szakaszon.

A bal oldalt deriválva

$$\frac{(\cos x)^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{3}(\cos x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (\sin x)^2}{(\cos x)^{\frac{2}{3}}} - 1 = \frac{1+2\cos^2 x}{3(\cos x)^{\frac{4}{3}}} - 1.$$

A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget felhasználva a deriváltban lévő tört számlálójára:

$$\frac{1+\cos^2 x + \cos^2 x}{3} > (1 \cdot \cos^2 x \cdot \cos^2 x)^{\frac{1}{3}} = (\cos x)^{\frac{4}{3}}.$$

A derivált tehát pozitív a megadott intervallumon, és ez az, amit bizonyítani akartunk.

II. megoldás. Ismeretes, hogy $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, így $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 = 1$ is igaz. Legyen $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 - \cos x$. Ekkor $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Ebből következik, hogy minden pozitív tagú, 0-hoz tartó (x_n) sorozatra $f(x_n) \to 0$. Ha $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, akkor az $x_n = \frac{x}{2^n}$ sorozatra is $f\left(\frac{x}{2^n}\right) \to 0$.

Ha megmutatjuk, hogy ez az $f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ sorozat monoton fogyó, akkor ebből következik, hogy $f(x) > 0$. Ellenkező esetben ugyanis egy negatív tagú monoton fogyó sorozat tartana nullához, ami nem lehetséges.

Azt, hogy az $f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ sorozat monoton fogyó, az $f(2x) > f(x)$ formában igazoljuk.

Meg kell tehát mutatnunk, hogy ha $0 < 2x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^3 - \cos 2x > \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 - \cos x.$$

Felhasználva, hogy $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ és hogy $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, rendezés után kapjuk, hogy

$$-2\cos^2 x + \cos x + 1 > \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 - \left(\frac{\sin x \cos x}{x}\right)^3 = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 (1 - \cos^3 x).$$

A bal oldal szorzattá alakítható, a jobb oldalon pedig $1-\cos^3 x$ az ismert módon $(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)$, tehát egyenlőtlenségünk a

$$(2\cos x+1)(1-\cos x)>\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3(1-\cos x)(1+\cos x+\cos x^2)$$

alakba írható. Ha $0<x<\frac{\pi}{2}$, akkor $1-\cos x>0$ és $0<\frac{\sin x}{x}<1$. Így $(1-\cos x)$-szel osztva $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3<1$ felhasználásával elegendő annyit bizonyítani, hogy

$$2\cos x+1>1+\cos x+\cos^2 x,$$

azaz

$$\cos x>\cos^2 x,$$

ami nyilván teljesül, hiszen az adott intervallumon $0<\cos x<1$.

Csóka Endre (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 9. o.t.)

III. megoldás. Felhasználunk két azonosságot, amelyek részletes bizonyítása megtalálható például *Denkinger Géza:* Analízis (Tankönyvkiadó, Budapest, 1987) című könyvének 316. oldalán. Eszerint minden valós x-re

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \tag{1}$$

illetve

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}. \tag{2}$$

Megmutatjuk, hogy

$$\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots=\sum_{n\ge 2}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}>0$$

és

$$-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots=\sum_{n\ge 3}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}<0.$$

Mindkét egyenlőtlenség következik az

$$\frac{x^m}{m!}>\sum_{n>m}\frac{x^n}{n!} \tag{$*$}$$

egyenlőtlenségből, amit a $0<x<2$, $m\ge 3$ feltevéssel igazolunk:

$$\frac{x^m}{m!}-\sum_{n>m}\frac{x^n}{n!}=\frac{x^m}{m!}\left(1-\sum_{n>m}\frac{x^{n-m}}{(m+1)(m+2)\ldots n}\right)>\frac{x^m}{m!}\left(1-\sum_{n>m}\frac{x^{n-m}}{(m+1)^{n-m}}\right).$$

$\sum_{n>m} \frac{x^{n-m}}{(m+1)^{n-m}}$ pozitív tagú végtelen mértani sor, amelynek hányadosa, $\frac{x}{m+1}$ kisebb 1-nél. A sor konvergens, összege

$$S=\frac{\frac{x}{m+1}}{1-\frac{x}{m+1}}=\frac{x}{m+1-x}.$$

Ha $m \geq 3$, akkor

$$S \leq \frac{x}{4-x}<1,$$

hiszen $x<4-x$ teljesül, ha $x<2$.

Visszatérve az (1), (2) formulákra, a kapott egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\sin x>x-\frac{x^3}{3!} \qquad \text{és} \qquad \cos x<1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}.$$

Eszerint, ha $x>0$,

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3>\left(1-\frac{x^2}{3!}\right)^3 \qquad \text{és} \qquad 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}>\cos x.$$

A bizonyítandó állítás most már következik, ha belátjuk, hogy $0<x<\frac{\pi}{2}$ esetén

$$\left(1-\frac{x^2}{3!}\right)^3>1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}.$$

Kifejtve, a bal oldal:

$$1-\frac{x^2}{3!}\cdot 3+\frac{x^4}{(3!)^2}\cdot 3-\frac{x^6}{(3!)^3}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{216},$$

így elég megmutatni, hogy

$$\frac{x^4}{24}>\frac{x^6}{216},$$

azaz $9>x^2$, ami pedig teljesül, ha $0<x<\frac{\pi}{2}$.

Vizer Máté (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

Megjegyzés. Kiss Gergely (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) dolgozatában indukcióval igazolta, hogy

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{6\cdot 4^n}{2\cdot 4^n+1}}>\cos x,$$

ha $n \geq -1$ egész. Ebből a bizonyítandó állítást $\lim_{n\to\infty} \frac{6\cdot 4^n}{2\cdot 4^n+1}=3$ felhasználásával kapta meg. *Ivaskó György* (Baja, III. Béla Gimn., 12. o.t.) igazolta, hogy ha a kitevőben 3-nál nagyobb szám áll, akkor az egyenlőtlenség már nem teljesül a $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ intervallum minden pontjára.

44 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Babos Attila, Baharev Ali, Csikvári Péter, Csóka Endre, Dénes Attila, Győri Nikolett, Hegedűs Ákos, Kasztner Tamás, Kiss 345 Gergely, Koch Dénes, Kunszenti-Kovács Dávid, Nagy Tamás, Papp Dávid, Simon 812 Győző, Tóth 498 Ferenc, Vígh Viktor, Vizer Máté és Vörös László. 4 pontos 7, 3 pontos 4, 2 pontos 2, 1 pontos 1, 0 pontos 9 dolgozat, nem versenyszerű 3.

B. 3312. *Szilveszter észrevette, hogy ha születési évének számjegyeit összeadja, azt a számot kapja, amely nagyapja születési évszámának utolsó két jegyéből áll. Szilveszter születési évszámának utolsó két jegyét összeolvasva pedig nagyapja jelenlegi életkorát kapjuk. Hány éves Szilveszter?*

(*3 pont*) Javasolta: *Nyul Balázs 9. o. t.,* Debrecen

Megoldás. Szilveszter nagyapja nem lehet 99 évesnél idősebb, hiszen jelenlegi életkora kétjegyű számmal felírható. Így ő is és Szilveszter is biztosan az 1900-as években születtek. (A feladatot 1999-ben tűztük ki.) Legyen Szilveszter születési éve $\overline{19ab}$. Ekkor nagyapja az $1900+1+9+a+b$ évben született, így $1999-1900-1-9-a-b=89-a-b$ éves. Tudjuk, hogy ez egyenlő $\overline{ab}$-vel, így

$$\overline{ab}=89-a-b,$$

$$10a+b=89-a-b,$$

$$11a+2b=89,$$

ahol a és b is egyjegyű számok.

$2b$ értéke legfeljebb 18, így $11a$ legalább 71, vagyis a csak 7 vagy 8 lehet. (Ha $a=9$, akkor $11a$ nagyobb, mint 89).

Ha $a=7$, akkor $2b=12$, amiből $b=6$, tehát Szilveszter 1976-ban született, nagyapja $1900+1+9+7+6=1923$-ban, így most 76 éves, ami valóban Szilveszter születési dátumának utolsó két jegye.

Ha $a=8$, akkor $2b=1$, b nem egész, így nem kapunk megoldást.

Szilveszter 1976-ban született, most 23 éves.

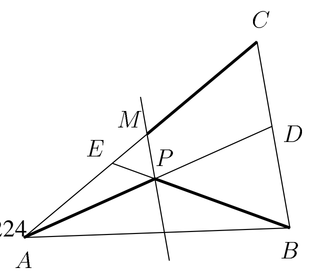
568 dolgozat érkezett. 3 pontos 214, 2 pontos 336, 1 pontos 3, 0 pontos 13. Nem versenyszerű 2 dolgozat.

B. 3316. *Legyen P az ABC háromszög egy belső pontja. Az AP és a BP egyenesek messék a háromszög szemközti oldalát a D, illetve az E pontban. Mutassuk meg, hogy ha $AP=BP$ és $BE=CE$, akkor $\frac{1}{AP}=\frac{1}{AD}+\frac{1}{AC}$.*

(*4 pont*) Javasolta: *Lee, Ho-joo,* Korea

I. megoldás. A P ponton átmenő, BC oldallal párhuzamos egyenes messe az AC oldalt az M pontban (*1. ábra*).

Mivel $MP \parallel CB$ és $EB=EC$, azért $MC=PB=AP$.



1. ábra

Írjuk fel a párhuzamos szelők tételét az ADC háromszögben:

$$\frac{AM}{AC}=\frac{AP}{AD}, \qquad \text{azaz} \qquad AM\cdot AD=AP\cdot AC.$$

Innen

$$\frac{1}{AP}=\frac{AC}{AM\cdot AD}=\frac{AM+MC}{AM\cdot AD}=\frac{AM}{AM\cdot AD}+\frac{MC}{AM\cdot AD}=$$
$$=\frac{1}{AD}+\frac{AP}{AP\cdot AC}=\frac{1}{AD}+\frac{1}{AC}.$$

Ambrus Gergely (Szeged, Radnóti M. Kísérl. Gimn., 11. o.t.)

II. megoldás. Ha $EB=EC$, akkor $ECB\sphericalangle=CBE\sphericalangle=\gamma$. Jelöljük a PDB szöget δ-val, ekkor $PDC\sphericalangle=180^\circ-\delta$ (*2. ábra*).

Írjuk fel a szinusztételt előbb az ADC, majd a PDB háromszögben:

$$\frac{\sin(180^\circ-\delta)}{\sin\gamma}=\frac{AC}{AD}$$
$$\frac{\sin\delta}{\sin\gamma}=\frac{PB}{PD}.$$

Mivel $\sin(180^\circ-\delta)=\sin\delta$, így

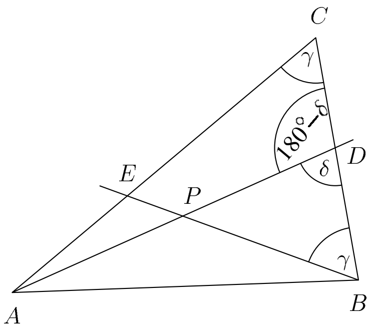
$$\frac{AC}{AD}=\frac{PB}{PD}=\frac{AP}{AD-AP},$$

ahonnan

$$\frac{AP}{AC}=\frac{AD-AP}{AD}=1-\frac{AP}{AD}.$$

Átrendezve, majd AP-vel osztva:

$$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{1}{AP}.$$



2. ábra

Bákor Krisztina (Székesfehérvár, Teleki B. Gimn., 12. o.t.)

176 dolgozat érkezett. 4 pontos 160, 3 pontos 4, 2 pontos 3, 1 pontos 5, 0 pontos 4.

B. 3320. *Oldjuk meg a következő egyenletet:*

$$x^{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Lovrics László,* Budapest

I. megoldás. Az egyenlet értelmezési tartománya a pozitív számok halmaza. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy $\frac{1}{16}$ és $\frac{1}{4}$ megoldásai az egyenletnek. Megmutatjuk, hogy más valós megoldás nincsen.

Mindkét oldal természetes alapú logaritmusát véve az eredetivel ekvivalens egyenletet kapunk, hiszen x pozitív:

$$\sqrt{x}\ln x = -\ln 2.$$

Tekintsük az $f(x)=\sqrt{x}\ln x$ függvényt $(x>0)$. f differenciálható a pozitív számok halmazán, és a függvény deriváltja $f'(x)=\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}$. Ha $0<x<e^{-2}$, akkor $f'(x)<0$; $f'(e^{-2})=0$, és ha $x>e^{-2}$, akkor $f'(x)>0$. Eszerint f szigorúan monoton fogyó, ha $0<x<e^{-2}$, és szigorúan monoton növő, ha $x>e^{-2}$.

Emiatt f egy adott értéket legfeljebb kétszer vehet föl, a talált megoldásokon kívül nincsen több; a feladatnak két megoldása van: $x_1=\frac{1}{16}$ és $x_2=\frac{1}{4}$.

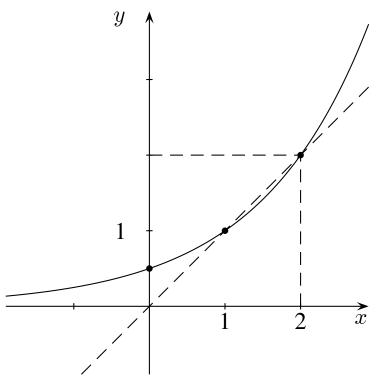
Baharev Ali (Vác. Boronkay Gy. Gimn., 11. o.t.)

Megjegyzés. A helyes megoldásokban igen változatos helyettesítésekkel egyszerűsítették a vizsgálandó függvényt. Néhány példa: az $y=\sqrt{x}$ helyettesítéssel az $y^y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ egyenletet kapjuk; ha $x=2^k$, akkor az egyenlet $k\cdot 2^{\frac{k}{2}}=-1$. Az alábbi megoldás meglepően egyszerű egyenletre jut.

II. megoldás. Ha $x>0$, akkor pontosan egy $t\in\mathbf{R}$ van, amelyre $x=2^{-2t}$. Ezzel a helyettesítéssel az egyenlet a

$$\left(2^{-2t}\right)^{2^{-t}}=\frac{1}{2}$$

alakot ölti.



Mindkét oldal 2-es alapú logaritmusára térve:

$$2^{-t}\cdot\log_2 2^{-2t}=-1,\qquad \text{azaz}$$
$$-t\cdot 2^{-t+1}=-1,\qquad \text{vagyis}$$
$$t=2^{t-1}.$$

A jobb oldalon álló függvény konvex, egy egyenes tehát legfeljebb két pontban metszi a grafikonját (*ábra*). Ha $t=1$ és $t=2$, akkor megoldást kapunk; innen $x_1=2^{-2}=\frac{1}{4}$, $x_2=2^{-4}=\frac{1}{16}$.

Az egyenlet megoldásai tehát $\frac{1}{4}$ és $\frac{1}{16}$.

Hargita Gábor (Ócsa, Bolyai J. Gimn., 10. o.t.)

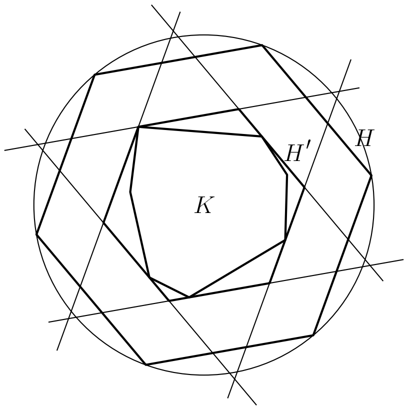
Megjegyzés. *Venter György* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) az $x = \dfrac{1}{2^n A}$ $(n \geq 0$ egész, $1 \leq A < 2)$ helyettesítéssel oldja meg a feladatot. Először igazolja, hogy $n \leq 5$, majd esetszétválasztással találja meg a két megoldást.

234 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 55, 4 pontot 30, 3 pontot 31, 2 pontot 22, 1 pontot 58, 0 pontot 32 beküldő. Nem versenyszerű 6 dolgozat.

B. 3321. *Legyen K egy konvex sokszög. Mutassuk meg, hogy elhelyezhető a síkon 6 darab K-val egybevágó sokszög úgy, hogy ezek mindegyikének van a K-val közös határpontja, de a hét sokszög közül semelyik kettőnek nincs közös belső pontja.*

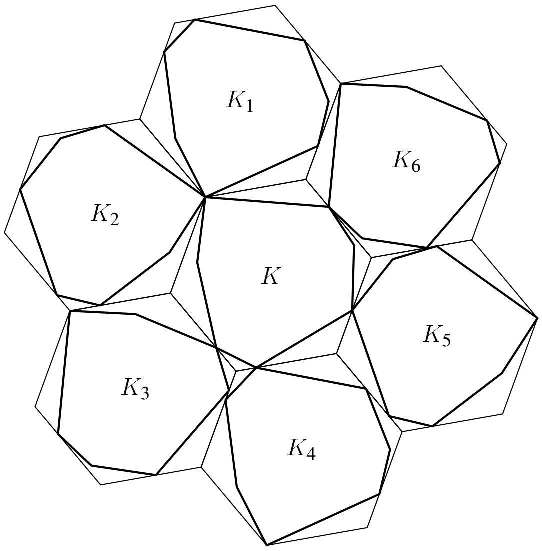
(*5 pont*)

Megoldás. Legyen H egy olyan szabályos hatszög, ami a belsejében tartalmazza K-t (ilyen biztosan létezik). Húzzunk H oldalaival párhuzamosan olyan egyeneseket, amelyeknek van K határával közös pontjuk, de nincs közös pontjuk K belsejével. Ez a hat egyenes egy olyan K-t tartalmazó H' hatszöget alkot, amelynek minden szöge $120°$-os (mert szögei egyállásúak H szögeivel), és minden oldala tartalmazza K-nak legalább egy határpontját (*1. ábra*).



1. ábra

Tekintsük H'-nek és K-nak a H' hat oldalegyenesére vonatkozó 6-6 tükörképét (*2. ábra*). Mivel H' minden szöge $120°$-os, azért H' hat tükörképének nincs közös belső pontja, így az általuk tartalmazott K-tükörképeknek sincs közös belső pontjuk sem egymással, sem pedig K-val. Másrészt H' minden oldala tartalmazza K-nak legalább egy határpontját, ezért K mind a hat tükörképének van K-val közös határpontja. A tükörképek nyilván egybevágóak K-val, ezért a feladat minden feltételét kielégítik.



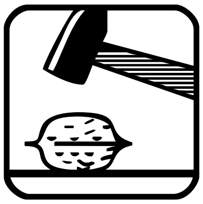
2. ábra

Megjegyzés. K-ról nem használtuk ki, hogy konvex sokszög, bizonyításunk tetszőleges síkidom esetén működik.

Pacz Bence Tamás (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., 11. o.t.)

16 dolgozat érkezett. 5 pontos Babos Attila, Keszegh Balázs, Kovács Erika Renáta, Kunszenti-Kovács Dávid, Máthé András, Pacz Bence Tamás és Vizer Máté megoldása. 4 pontot kapott 1, 2 pontot 1, 0 pontot 7 beküldő.

KöMaL – 2000/4 MAT0004 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 15:47 (36. lap)

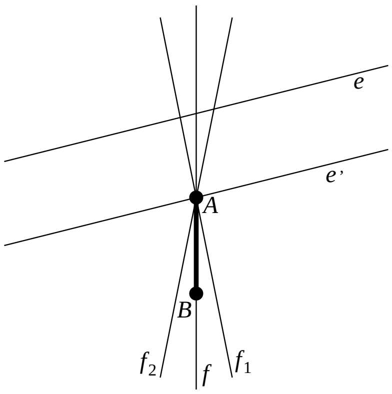


Nehezebb feladatok megoldása

A. 219. *A H ponthalmaz a sík $2n$ pontját tartalmazza, közülük semelyik három nem esik egy egyenesre. Ha P és Q két különböző H-beli pont, és H-nak pontosan ugyanannyi pontja esik a PQ egyenes két oldalára, akkor a PQ szakaszt felező szakasznak hívjuk. Bizonyítsuk be, hogy ha a felező szakaszok száma n, akkor közülük bármelyik kettő metszi egymást.*

Javasolta: *Solymosi József,* Budapest

Megoldás. Bármelyik pont körül forgatunk körbe egy egyenest, az egyenes két oldalán levő pontok számának a különbsége mindig 1-gyel nő vagy csökken, és 180 fok elfordulás után ez a különbség az ellentettjére változik. Ebből következik, hogy van olyan állása a forgó egyenesnek, amikor a szóban forgó különbség 0. Így minden pontból indul ki felező szakasz. A felező szakaszok száma ezért pontosan akkor n, ha mindegyik pontból pontosan egy felező szakasz indul ki.



Tegyük fel, hogy van két felező szakasz, amelyek nem metszik egymást. Könnyű meggondolni, hogy a két felező szakasz nem lehet párhuzamos. (A párhuzamosságot a pontok kis elmozdításával is elkerülhetnénk.) Az egyik felező szakasz egyenese (e) a másik szakasznak (AB-nek) mondjuk A-n túli meghosszabbítását metszi. Megmutatjuk, hogy ez nem lehetséges.

Húzzunk A-n keresztül párhuzamost e-vel, legyen ez e'. Ha az $AB = f$ egyenest A körül egy nagyon kis szöggel elforgatjuk pozitív és negatív irányba, akkor az így kapott f_1 és f_2 egyenesek két oldalán ugyanazok a pontok helyezkednek el, mint az f két oldalán, kivéve a B pontot. Ezért f_1-nek és f_2-nek a B-t tartalmazó oldalán eggyel több pont van, mint a másikon.

Ugyanakkor az e' egyenes B-t tartalmazó oldalán kevesebb pont van, mint a másikon, mert e egy felező, amelynek B-t tartalmazó partján van az A pont, a vele párhuzamos e' egyenes B-t tartalmazó partján viszont nincs ott az A pont, ezen kívül e'-nek a B-t nem tartalmazó oldalán van az e egyenes két H-beli pontja is.

Körbeforgatva az f egyenest A körül, az f_1 és e', illetve f_2 és e' egyenesek közti tartományban is kell lennie A kezdőpontú felező szakasznak. Az A pontból tehát legalább három felező szakasz indul ki, ami ellentmond annak az észrevételünknek, hogy a halmaz minden pontjából egy felező szakasz indul ki.

22 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Ambrus Gergely, Gyenes Zoltán, Harangi Viktor, Keszegh Balázs, Kiss 345 Gergely, Kunszenti-Kovács Dávid, Pálvölgyi Dömötör, Varjú Péter, Vizer Máté és Zábrádi Gergely. 12 versenyző 0 pontot kapott.

A. 224. *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pozitív $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokra*

$$\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\cdot\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right)\geq(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n). \tag{1}$$

I. megoldás. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$1+\frac{a_i^2}{a_{i+1}}\geq\frac{(1+a_i)^2}{1+a_{i+1}}. \tag{2}$$

(Beszorzás és rendezés után az $(a_i-a_i+1)^2\geq 0$ egyenlőtlenséget kapjuk.) A (2) egyenlőtlenséget $i=1, 2, \ldots, n$-re felírva és összeszorozva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

Csóka Endre (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 9. o.)

II. megoldás. Az állítást n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n=1$, akkor (1) mindkét oldalán $1+a_1$ áll.

Legyen most $n>1$, és tegyük fel, hogy az állítás igaz $n-1$ tényező esetén. Bebizonyítjuk, hogy ekkor n darab tényező esetén is igaz.

Az $a_1, \ldots, a_n$ számok ciklikus cseréjével a bizonyítandó állítás nem változik, ezért feltehetjük, hogy a_n az (egyik) legnagyobb. Írjuk fel az indukciós feltevést az $a_1, \ldots, a_{n-1}$ számokra:

$$\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\cdot\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{a_{n-1}^2}{a_1}\right)\geq(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_{n-1}). \tag{3}$$

Ahhoz, hogy ebből (1) következzen, elégséges, ha megmutatjuk, hogy

$$\frac{\left(1+\frac{a_{n-1}^2}{a_n}\right)\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right)}{1+\frac{a_{n-1}^2}{a_1}}\geq 1+a_n.$$

Beszorozva és rendezve:

$$(a_n+a_{n-1}^2)(a_1+a_n^2)\geq a_n(1+a_n)(a_1+a_{n-1}^2)$$
$$(a_n-a_1)(a_n-a_{n-1})(a_1+a_n)\geq 0.$$

Mivel $a_n\geq a_1$ és $a_n\geq a_{n-1}$, a bal oldalon mindhárom tényező nemnegatív. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

III. megoldás. Tetszőleges $H\subset\{1,2,\ldots,n\}$ nem üres halmaz esetén legyen $P_H=\prod_{i\in H}a_i$, illetve legyen $P_\emptyset=1$. (1) jobb oldala beszorozva nem más, mint

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)=\sum_{H\subset\{1,\ldots,n\}}P_H. \tag{4}$$

Jelölje H' azt a halmazt, amelyet úgy kapunk, hogy H mindegyik elemét 1-gyel növeljük mod n (azaz $n+1$ helyett 1-et írunk). (1) bal oldala beszorozva

$$\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\cdot\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right)=\sum_{H\subset\{1,\ldots,n\}}\frac{P_H^2}{P_{H'}}. \tag{5}$$

Azt kell tehát igazolnunk, hogy

$$\sum_{H\subset\{1,\ldots,n\}}\frac{P_H^2}{P_{H'}}\ge\sum_{H\subset\{1,\ldots,n\}}P_H. \tag{6}$$

Megmutatjuk, hogy (6) következik az úgynevezett rendezési tételből (megtalálható pl. *Matematikai Versenytételek*, II. rész, 60–61. oldal; Tankönyvkiadó, Budapest, 1988):

Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ és $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pozitív valós számok, és jelentse $z_1, z_2, \ldots, z_n$ a második sorozat egy permutációját. Az

$$S=x_1z_1+\ldots+x_nz_n$$

alakú összegek közül az a legnagyobb, amelyben a $z_1, \ldots, z_n$ számok ugyanúgy vannak rendezve, mint az $x_1, \ldots, x_n$ számok, vagyis $x_i<x_j$ esetén $z_i\le z_j$. A legkisebb összeg pedig az, amelyben a $z_1, \ldots, z_n$ számok ellentétesen vannak rendezve, mint az $x_1, \ldots, x_n$ számok, vagyis $x_i<x_j$ esetén $z_i\ge z_j$.

Alkalmazzuk a rendezési tételt a P_H^2, az $\frac{1}{P_H}$, illetve az $\frac{1}{P_{H'}}$ $(H\subset\{1,\ldots,n\})$ számokra. Az $\frac{1}{P_H}$ alakú számok az $\frac{1}{P_{H'}}$ alakú számok egy permutációját adják, és rendezésük éppen ellentétes a P_H^2 alakú számokéval. Ezért

$$\sum_{H\subset\{1,\ldots,n\}}\frac{P_H^2}{P_{H'}}=\sum_{H\subset\{1,\ldots,n\}}P_H^2\cdot\frac{1}{P_{H'}}\ge\sum_{H\subset\{1,\ldots,n\}}P_H^2\cdot\frac{1}{P_H}=\sum_{H\subset\{1,\ldots,n\}}P_H.$$

Baharev Ali (Vác, Boronkai Gy. Gimn., 12. o.t.) és
Gyenes Zoltán (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 12. o.t.)
dolgozata alapján

20 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Ambrus Gergely, Baharev Ali, Csóka Endre, Dezső Balázs, Gyenes Zoltán, Harangi Viktor, Kiss 345 Gergely, Koch Dénes, Kunszenti-Kovács Dávid, Pálvölgyi Dömötör, Papp Dávid, Reviczky Ádám János, Ta Vinh Tong, Tóth 498 Ferenc, Varjú Péter és Vígh Viktor. 4 pontot kapott Nagy 444 Zoltán és Vizer Máté. Két dolgozat hibás (0 pont) volt.

A. 225. *Jelölje S_1 és S_2 az $1, 2, \ldots, n$ számok páratlan, illetve páros osztói számának összegét. Igazoljuk, hogy*

$$|S_1-S_2-n\cdot\ln 2|<\sqrt{n}+1.$$

Megoldás. Tetszőleges k pozitív egész az 1, 2, ..., n számok közül pontosan $\left[\frac{n}{k}\right]$ darabnak osztója, ezért $S_1 = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{5}\right] + \ldots$ és $S_2 = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n}{6}\right] + \ldots$ (Az összegek egy idő után csupa 0-ból állnak.)

Ismeretes, hogy $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \ldots = \ln 2$, vagyis

(1) $$\frac{n}{1} - \frac{n}{2} + \frac{n}{3} - \ldots + \ldots = n \cdot \ln 2.$$

Mivel tetszőleges k pozitív egészre

$$0 < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k^2+k} < \frac{4}{4k^2+4k-3} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+3}$$

azért tetszőleges m pozitív egészre

(2) $$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+3} + \ldots - \ldots = \\ &= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) + \left(\frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+3}\right) + \ldots < \\ &< \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m+3}\right) + \left(\frac{1}{2m+3} - \frac{1}{2m+7}\right) + \ldots = \frac{1}{2m-1}. \end{aligned}$$

Legyen m tetszőleges pozitív egész. (1) és (2) felhasználásával

(3) $$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= \left[\frac{n}{1}\right] - \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n}{4}\right] + \ldots - \ldots = \\ &= \left(\left[\frac{n}{1}\right] - \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots - \ldots - \left[\frac{n}{2m}\right]\right) + \sum_{k=m}^{\infty}\left(\left[\frac{n}{2k+1}\right] - \left[\frac{n}{2k+2}\right]\right) > \\ &> \left(\frac{n}{1} - 1\right) - \frac{n}{2} + \left(\frac{n}{3} - 1\right) - \frac{n}{4} + \ldots + \left(\frac{n}{2m-1} - 1\right) - \frac{n}{2m} = \\ &= \left(\frac{n}{1} - \frac{n}{2} + \ldots - \ldots + \frac{n}{2m-1} - \frac{n}{2m}\right) - m = \\ &= n \cdot \ln 2 - \left(\frac{n}{2m+1} - \frac{n}{2m+2} + \frac{n}{2m+3} - \ldots + \ldots\right) - m > n \cdot \ln 2 - \frac{n}{4m+1} - m. \end{aligned}$$

Hasonlóképpen

(4) $$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= \left(\left[\frac{n}{1}\right] - \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots - \ldots + \left[\frac{n}{2m+1}\right]\right) - \sum_{k=m+1}^{\infty}\left(\left[\frac{n}{2k}\right] - \left[\frac{n}{2k+1}\right]\right) < \\ &< \frac{n}{1} - \left(\frac{n}{2} - 1\right) + \frac{n}{3} - \left(\frac{n}{4} - 1\right) + \ldots - \ldots - \left(\frac{n}{2m} - 1\right) + \frac{n}{2m+1} = \\ &= \left(\frac{n}{1} - \frac{n}{2} + \ldots - \ldots - \frac{n}{2m} + \frac{n}{2m+1}\right) + m = \\ &= n \cdot \ln 2 + \left(\frac{n}{2m+2} - \frac{n}{2m+3} + \frac{n}{2m+4} - \ldots + \ldots\right) + m < n \cdot \ln 2 + \frac{n}{4m+3} + m. \end{aligned}$$

A (3) és (4) egyenlőtlenségek összevetéséből

$$|S_1 - S_2 - n \cdot \ln 2| < \frac{n}{4m+1} + m, \tag{5}$$

és ez tetszőleges m pozitív egészre igaz. Az $m = \left[\frac{\sqrt{n}}{2}\right] + 1$ választással azt kapjuk, hogy

$$|S_1 - S_2 - n \cdot \ln 2| < \frac{n}{2\sqrt{n}+1} + \frac{\sqrt{n}}{2} + 1 < \sqrt{n} + 1.$$

7 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Dezső Balázs, Gyenes Zoltán, Harangi Viktor és Kiss 345 Gergely. 4 pontot kapott Varjú Péter. 3 pontot kapott Pálvölgyi Dömötör és Zábrádi Gergely.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (580–584.)

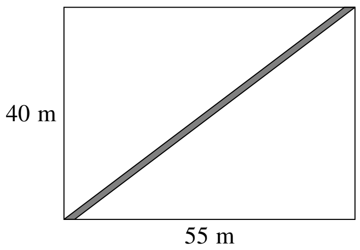
C. 580. Kati dolgozatot írt matematikából, majd még egy javító dolgozatot is írt. A tanár a két jegy helyett azok átlagát írta be az osztályozó füzetébe. Bizonyítsuk be, hogy Kati akkor jár jobban ezzel, ha a többi matematika jegyeinek átlaga nagyobb a két dolgozatjegy átlagánál.

Javasolta: *Kovács Gabriella,* Budapest

C. 581. Négy jármű egyszerre indul el A-ból, és egymást követően egyenlő időközönként érkezik meg B-be. A leggyorsabb és a leglassúbb jármű sebessége v_1, ill. v_4. Mekkora a másik két jármű sebessége?

C. 582. Az ábrán látható sáv szélessége 1 m. Mekkora a területe?

Javasolta: *Nagy Zoltán* 9. o.t., Budapest



C. 583. Egy gúla alapja egység oldalú négyzet. Egyik oldaléle szintén egységnyi hosszú és egybeesik a gúla magasságával. Mekkora a legnagyobb lapszöge?

Javasolta: *Salát Máté* 9. o.t., Budapest

C. 584. Egy körnek a területét vagy a kerületét tudjuk jobban (kisebb relatív hibával) közelíteni a körbe írt szabályos n-szög segítségével?

❄

Beküldési határidő: 2000. május 15.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest, Pf. 47. 1255

A B pontversenyben kitűzött feladatok (3362–3371.)

B. 3362. Tizennyolc gyerek megoldotta a KöMaL áprilisi számának egy-egy feladatát. A megoldásokat elektronikus levelezéssel (e-mailen keresztül) akarják megbeszélni. Legalább hány e-mailt kell küldeniük egymásnak, hogy mindegyikük megtudja mindegyik megoldást? (Minden e-mail annyiszor számít, ahány embernek küldik.)

(*5 pont*) *Gyanta Nándor* ötletéből

B. 3363. Van-e olyan háromszög, amit két vágással három egybevágó részre lehet darabolni?

(*3 pont*)

B. 3364. Tegyük fel, hogy 15 különböző (pozitív) prímszám számtani sorozatot alkot. Igazoljuk, hogy a sorozat két szomszédos tagjának a különbsége 30000-nél nagyobb.

(*3 pont*) Javasolta: *Székelyhidi Tamás* 11. o.t., Budapest

B. 3365. Bizonyítsuk be, hogy ha $abc=1$ és $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, akkor az a, b, c számok közül legalább az egyik 1-gyel egyenlő.

(*3 pont*) Javasolta: *Gyanta Nándor,* Budapest

B. 3366. Ismét útnak indul az **F. 3279.** feladat szöcskéje. Most egy r sugarú kör és egy, a kör középpontján át nem menő egyenes pontjai között ugrál, a körről az egyenesre, onnan pedig vissza a körre. Bizonyítsuk be, hogy r hosszúságú ugrásokkal legfeljebb 8 pontba juthat el.

(*5 pont*) Javasolta: *Hraskó András,* Budapest

B. 3367. Egy egyenlő szárú háromszög alakú papírlapot összehajtottunk úgy, hogy az alap A csúcsa a BC szár felezőpontjába került. Ekkor a hajtás élének egyik végpontja az AC szárat $p:q$ arányban osztja. Milyen arányban osztja a hajtás élének másik végpontja az AB alapot?

(*5 pont*) A *Magyar Hírlap* nyomán

B. 3368. Hány megoldása van a pozitív egész számok körében az $x^7+y^8=z^9$ egyenletnek?

(*4 pont*) Javasolta: *Behm Andrea,* Nagykanizsa

B. 3369. Egy tetraéder mindegyik élén kijelöljük az egyik harmadolópontot. Mekkora lehet az ezek által meghatározott konvex test és a tetraéder térfogatának hányadosa?

(*4 pont*)

KöMaL – 2000/4 MAT0004 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 15:47 (42. lap)

B. 3370. A és B két véletlen esemény. Igazoljuk, hogy

$$|P(A \cdot B) - P(A) \cdot P(B)| \leq \frac{1}{4}.$$

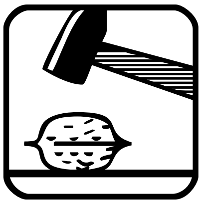
(*5 pont*)

B. 3371. Legfeljebb hány közös érintője lehet két ellipszisnek, ha közös az egyik fókuszuk?

(*5 pont*)

Beküldési határidő: 2000. május 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (227., 236–238.)



A. 227*. Létezik-e olyan pozitív egész n, hogy tetszőleges nem 0 i számjegy esetén az n, $2n$, $3n$, $\ldots$, $2000n$ számok mindegyikének tízes számrendszerbeli alakjában ugyanannyiszor fordul elő az i?

A. 236. Egy háromszög területe t, oldalai $a < b < c$, a hozzájuk tartozó súlyvonalak hossza rendre s_a, s_b, s_c. Bizonyítsuk be, hogy

$$4ac s_a s_c \geq 16t^2 + (b^2 - a^2)(c^2 - b^2).$$

A. 237. Egy konvex n-szögnek megrajzoltuk $kn+1$ különböző átlóját (n és k pozitív egészek). Igazoljuk, hogy a megrajzolt átlók közül kiválasztható $2k+1$ olyan, amelyek egy töröttvonalat alkotnak, és közülük semelyik kettő nem metszi egymást.

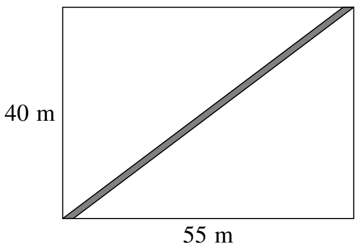
A. 238. Legyen x pozitív valós szám és k pozitív egész. Bizonyítsuk be, hogy ha $x^k + \frac{1}{x^k}$ és $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$ racionális, akkor $x + \frac{1}{x}$ is racionális.

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 50. No. 4. April 2000)

New exercises for practice – competition C (see page 232): **C. 580.** Jane took several exams in math during the academic year, and once she did quite badly. When repeating the poor exam, the teacher offered that instead of the two grades, she can have the average of the two grades. Show

* **Figyelem!** Újra kitűzzük a januárban félreérthető szövegezéssel megjelent feladatot. Beküldhető az áprilisi megoldásokkal együtt.

that this is advantageous for Jane if and only if the average of all her other grades is better than the average of these two. (Proposed by *G. Kovács,* Budapest) **C. 581.** Four vehicles start at the same time from A and arrive at B one after the other, at equal intervals. The speed of the fastest and the slowest vehicle is v_1 and v_4, respectively. Calculate the speed of the two other vehicles.



C. 582. The strip depicted on the figure is 1m wide. Calculate its area. (Proposed by *Z. Nagy,* Budapest) **C. 583.** The base of a pyramid is a unit square. One of its lateral edges is also of unit length, moreover, it coincides with the altitude of the pyramid. Calculate the largest dihedral angle of the pyramid. (Proposed by *M. Salát,* Budapest) **C. 584.** The area or the perimeter of a circle can be better approximated (that is, with the smaller relative error) using a regular n-gon inscribed the circle?

New problems – competition B (see page 233): **B. 3362.** Eighteen students solved the problems proposed in the April issue of the KöMaL, one problem each. They plan to discuss their solutions via e-mail. At least how many e-mail messages have to be sent so that each student knows each solution in the end? (An e-mail message counts as many times as many recipients it is sent to.) (*5 points*) **B. 3363.** Is there any triangle which can be dissected into three congruent parts by just two straight cuts? (*3 points*) **B. 3364.** Assume that 15 different (positive) prime numbers are consecutive terms of an arithmetic progression. Prove that the common difference is larger than 30000. (3 points) (Proposed by *T. Székelyhidi,* Budapest) **B. 3365.** Assume that $abc=1$ and $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Prove that at least one of the numbers a, b, c equals 1. (*3 points*) (Proposed by *N. Gyanta,* Budapest) **B. 3366.** The grashopper of **F. 3279.** rides again. This time it is jumping to and fro between the points of a circle and a straight line which is not passing through the center of the circle. The length of each jump is r, the radius of the circle. Prove that there are at most 8 points for the grasshopper to reach. (*5 points*) (Proposed by *A. Hraskó,* Budapest) **B. 3367.** An isosceles triangle shaped piece of paper is folded such that vertex A is moved onto the midpoint of leg BC. One endpoint of the folding edge divides leg AC into the ratio $p:q$. In what ratio does the other endpoint of the folding edge divide side AB? (*5 points*) **B. 3368.** How many positive integer solutions does the equation $x^7+y^8=z^9$ have? (*4 points*) (Proposed by *A. Behm,* Nagykanizsa) **B. 3369.** On each edge of a tetrahedron, select one of the points that trisect the given edge. What can be the ratio between the volume of the convex polyhedron determined by these points and the volume of the tetrahedron? (*4 points*) **B. 3370.** A and B are two events. Prove that $|P(A\cdot B)-P(A)\cdot P(B)|\le\frac{1}{4}$. (*5 points*) **B. 3371.** Two ellipses have a common focus. How many common tangents can the ellipses have? (*5 points*)

New advanced problems – competition A (see page 234): **A. 227.** (Modified version of the problem proposed in January 2000.) Is there a positive integer n such that for every digit i, different from 0, i appears the same number of times in the decimal form of each of the numbers n, $2n$, $3n$, …, $2000n$? **A. 236.** In a triangle of area t, let s_a, s_b and s_c denote the medians that correspond to sides a, b and c, respectively. Assume that $a<b<c$. Prove that $4acs_as_c\ge 16t^2+$ $+(b^2-a^2)(c^2-b^2)$. **A. 237.** Prove that among any $kn+1$ different diagonals of a convex n-gon there are $2k+1$ which form an opened polygon that does not intersect itself. **A. 238.** Let x be a positive real number and let k be a positive integer. Assume that $x^k+\frac{1}{x^k}$ and $x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}$ are both rational numbers. Prove that $x+\frac{1}{x}$, is also a rational number.