A KöMaL szerkesztőség elköltözött!

Új címünk: ELTE TTK 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.

I. emelet 1.66, Telefon: 209-0555/6154

Elektromos címeink változatlanok.

Az 1999/2000. tanévi matematika pontverseny állása a februárig feldolgozott feladatok alapján

A nehezebb feladatok

Szeptembertől decemberig, feladatonként egy helyes megoldással elérhető: 60 pont.

1. *Gyenes Zoltán* 12. o.t. 60 pont; **2.** *Harangi Viktor* 10. o.t. 53 pont; **3.** *Zábrádi Gergely* 12. o.t. 50 pont; **4.** *Kiss 345 Gergely* 12. o.t. 44 pont; **5.** *Pálvölgyi Dömötör* 12. o.t. 38 pont; **6.** *Varjú Péter* 11. o.t. 37 pont; **7.** *Kunszenti-Kovács Dávid* 9. o.t. 30 pont; **8.** *Vizer Máté* 12. o.t. 29 pont; **9.** *Csóka Endre* 9. o.t. 25 pont; **10.** *Ambrus Gergely* 11. o.t. 18 pont; **11.** *Reviczky Ádám János* 11. o.t. 17 pont; **12.** *Dezső Balázs* 12. o.t. 15 pont; **13–15.** *Baharev Ali* 12. o.t., *Keszegh Balázs* 12. o.t., *Tóth 498 Ferenc* 12. o.t. 10 pont; **16.** *Nagy 444 Zoltán* 9. o.t. 9 pont; **17.** *Koch Dénes* 11. o.t. 7 pont; **18.** *Sidó Péter* 12. o.t. 6 pont; **19–25.** *Breuer János* 11. o.t., *Dénes Attila* 12. o.t., *Iván Szabolcs* 12. o.t., *Papp Dávid* 12. o.t., *Pozsár Balázs* 12. o.t., *Ta Vinh Thong* 10. o.t., *Vígh Viktor* 11. o.t. 5 pont; **26.** *Székelyhidi Tamás* 11. o.t. 4 pont; **27–28.** *Antal Ágnes* 11. o.t., *Enyedi Gábor* 11. o.t. 3 pont; **29–33.** *Babos Attila* 11. o.t., *Bartha Tamás Árpád* 11. o.t., *Mics Zoltán* 11. o.t., *Pesti Gábor* 11. o.t., *Spanczér Ilona* 10. o.t. 2 pont.

Kevesebb pontja van 21 versenyzőnek.

B feladatok

A szeptember–októberi összesítés után, a maximális elérhető pontszám: 53 pont.

Általános iskolások

1. *Hablicsek Márton* 8. o.t. 50 pont; **2.** *Pach Péter Pál* 8. o.t. 45 pont; **3–4.** *Horváth 424 Márton* 8. o.t., *Rácz Béla András* 8. o.t. 44 pont; **5.** *Puskás Anna* 8. o.t. 43 pont; **6–7.** *Birkner Tamás* 7. o.t., *Paulin Dániel* 8. o.t. 42 pont; **8.** *Pál 213 Ágnes* 8. o.t. 37 pont; **9.** *Bauer Péter* 8. o.t. 36 pont; **10.** *Nyeste Szabolcs* 8. o.t. 34 pont; **11.** *Seress Bence* 8. o.t. 33 pont; **12.** *Szilágyi Péter* 8. o.t. 30 pont; **13.** *Sarusi Annamária* 8. o.t. 29 pont;

14–15. *Klobb Maja* 8. o.t., *Kovács Dóra Judit* 8. o.t. 28 pont; **16–18.** *Halbrucker Tamás* 8. o.t., *Matyuska Ferenc* 8. o.t., *Steinbach Cecília* 8. o.t. 24 pont; **19.** *Hudáky Zsuzsanna* 8. o.t. 21 pont; **20.** *Horváth Tamás* 6. o.t. 20 pont; **21.** *Árokszállási László* 7. o.t. 19 pont; **22–23.** *György András* 8. o.t., *Kádár András* 7. o.t. 15 pont; **24–25.** *Kovács 666 Gábor* 8. o.t., *Vámossy Viktória* 7. o.t. 14 pont; **26–27.** *Bengery Zsófia* 7. o.t., *Fehér Gábor* 8. o.t. 13 pont; **28–29.** *Kutasi Dávid* 8. o.t., *Varga 711 Nóra* 8. o.t. 12 pont; **30.** *Sebestyén Krisztián* 8. o.t. 10 pont.

Kevesebb pontja van 35 versenyzőnek.

9. osztályosok

1. *Kunszenti-Kovács Dávid* 53 pont; **2–4.** *Bérczi Kristóf*, *Csóka Endre*, *Nagy 444 Zoltán* 46 pont; **5.** *Bergmann Gábor* 45 pont; **6–9.** *Komjáthy Júlia*, *Malakuczi Viktor*, *Módos András*, *Szekeres Balázs* 43 pont; **10–11.** *Backhausz Ágnes*, *Ureczky Dóra* 42 pont; **12.** *Szalai Attila* 41 pont; **13–17.** *Balogh 126 Zoltán*, *Kiss Zsuzsanna*, *Mándy Péter*, *Rácz Judit*, *Szilágyi Zoltán* 40 pont; **18–20.** *Bartha Ferenc*, *Gábor Sámuel*, *Ruppert László* 39 pont; **21–22.** *Honti Edit Anna*, *Varga 840511 András* 38 pont; **23–24.** *Belső Róbert*, *Nagy 625 Tibor* 37 pont; **25–28.** *Balogh Ágnes*, *Jankó András*, *Salát Máté*, *Sipos Gábor* 36 pont; **29–32.** *Antal 627 Áron*, *Herr Annamária*, *Jelitai Kálmán*, *Sparing Dániel* 35 pont; **33–38.** *Bisztray Márta*, *Borbély Attila*, *Buti Tamás*, *Kovács 494 Andrea*, *Sevecsek Zsuzsanna*, *Surján Veronika* 34 pont; **39–44.** *Csetri András*, *Hanzséros Eszter*, *Horváth 997 Eszter*, *Nyul Balázs*, *Prekopcsák Zoltán*, *Tábor Áron* 33 pont; **45–47.** *Besenyei Balázs*, *Budai Dénes*, *Kalcsú Áron* 32 pont; **48–52.** *Fülöp Anita*, *Hajdú Huba*, *Márton Noémi Petra*, *Márton Sándor*, *Molnár Kolos* 31 pont; **53–57.** *Blastik Márta*, *Kiss Demeter*, *Lang Péter*, *Markó Roland*, *Rácz Éva* 30 pont; **58–61.** *Balogh 947 László*, *Csekő Anna*, *Koltai Péter*, *Vadas Réka* 29 pont; **62–64.** *Hellinger Péter*, *Pomázi Krisztina*, *Tölgyesi Csaba* 28 pont; **65–69.** *Derts Zsófia*, *Gáthy Lajos*, *Lakatos Szilvia*, *Pusztai János*, *Töreki 123 Péter* 27 pont; **70–75.** *Fehér Ádám*, *Gáspár Orsolya*, *Pinczehelyi Tamás*, *Sepler Gábor*, *Vági Andrea*, *Varga 523 Noémi* 26 pont; **76–80.** *Farkasházi Nóra*, *Kovács 123 Áron*, *Lakatos Kristóf*, *Ökrös András*, *Urbán 300 Krisztián* 25 pont; **81–82.** *Kormos Attila*, *Salamon Péter* 24 pont; **83–86.** *Boldog Richárd*, *Gál Veronika*, *Király Anna Katalin*, *Molnár 712 Ágnes* 23 pont; **87–89.** *Herczegh Attila*, *Maróti László*, *Palkovics Márta* 22 pont; **90–96.** *Bakonyi Lídia*, *Hangai Attila*, *Köber Csaba*, *Kukel Imre*, *Kutnyánszky Edit*, *Reiss Tibor*, *Winter Zsolt* 21 pont; **97–105.** *Balaton Attila*, *Jurecska Laura*, *Kutnyánszky Vera*, *Mihók Péter*, *Nyikos József*, *Pál Bese*, *Simon Zsolt*, *Szabó László*, *Szöllősi Ádám* 20 pont; **106–113.** *Csécs Levente*, *Csiszer Ildikó*, *Kalcsó Kitti*, *Sándor Nóra*, *Sipos Kinga*, *Szalay Gergely*, *Szőke Csongor*, *Varga Veronika* 19 pont; **114–120.** *Csákberényi Nagy Dorottya*, *Drüszler Anikó*, *Molnár 999 László*, *Orencsák Izabella Judit*, *Pálvölgyi Dénes*, *Pótsa Mátyás*, *Siket Bence* 18 pont; **121–134.** *Andrásik Miklós*, *Balog Boglárka*, *Bíró Zoltán*, *Fliszár Vilmos*, *Jurácsik Nikoletta*, *Neudold Soma*, *Pálinkás Zoltán*, *Petrás Attila*, *Pintér Balázs*, *Rauscher Anna*, *Szabados Katalin*, *Szalai Zsuzsanna*, *Szaniszló Boglárka*, *Vakulya Gergely* 17 pont; **135–138.** *Karches Tamás*, *Márton Szabolcs*, *Tar Orsolya Rita*, *Varga István* 16 pont; **139–142.** *Erdős Dóra*, *Kis 761 László*, *Simon 111 Attila*, *Vidor Sára* 15 pont; **143–145.** *Bakonyi Ákos*, *Hegedűs Viktor*, *Horváth Zsolt* 14 pont; **146–154.** *Bálint Márton*, *Gálosfai Krisztina*, *Hudetz György*, *Kopányi Dávid*, *Lajkó Miklós*, *Makray Bálint*, *Persics Bálint*, *Petrovszki Judit*, *Tukacs Lívia* 13 pont; **155–168.** *Ary Árpád*, *Bárkai János*, *Bartha Zsolt*, *Fehér Mátyás*, *Ferzsigán A. Gergő*, *Gabler Gergely*, *Garab Ábel*, *Gyurity Igor*, *Iszli Ernő*, *Komlósi 985 Gergely*, *Szabados Gábor*, *Szeghő Ágnes*, *Takó Tibor*, *Várallyay Linda* 12 pont; **169–174.** *Baráth Géza*, *Gábor István*, *Gyenese Péter*, *Horváth Katalin*, *Luka Adorján*, *Tamás Katalin* 11 pont.

Kevesebb pontja van 169 versenyzőnek.

10. osztályosok

1. *Csikvári Péter* 52 pont; **2.** *Somogyi Dávid* 50 pont; **3–4.** *Gerencsér Balázs*, *Tran Thanh Long* 49 pont; **5–6.** *Koreck Ferenc*, *Kovács Erika Renáta* 47 pont; **7–10.** *Csernenszky András*, *Hamar Gergő*, *Ta Vinh Thong*, *Zséger Ádám* 46 pont; **11–14.** *Béky Bence*, *Hargitai Gábor*, *Pallos Péter*, *Szalay Zsófia* 45 pont; **15–19.** *Boros Vazul*, *Csötönyi Nóra*, *Kőrösi Attila*, *Siska Ádám*, *Szirtes Péter* 44 pont; **20–22.** *Horváth Illés*, *Jesch Dávid*, *Porcs-Makkay Ákos* 43 pont; **23–24.** *Baur Eszter*, *Boróczki Lajos* 42 pont; **25–26.** *Farkas Viktor*, *Zsbán Ambrus* 41 pont; **27–31.** *Ábel Dániel*, *Dobler Csaba*, *Madár Ivett*, *Siroki László*, *Spanczér Ilona* 40 pont; **32–33.** *Klein Andrea*, *Márton Eszter* 39 pont; **34–35.** *Czeininger Zoltán*, *Kádár Cecília* 38 pont; **36–39.** *Asztalos Gyula*, *Gyulasi Tamás*, *Takács Gergő*, *Tolvaj Nóra* 37 pont; **40–47.** *Fűrész Gábor*, *Kádas Attila*, *Kőrizs András*, *Molnár 354 Tamás*, *Raikovich Tamás*, *Vajk Tamás*, *Váradi Vajk*, *Zsurkó Mátyás* 36 pont; **48–52.** *Antal 193 Péter*, *Kerékfy Péter*, *Radochay Imre*, *Szabó 984 Attila*, *Zavarkó Gábor* 35 pont; **53–59.** *Asztalos Márk*, *Czinder Attila*, *Dömötör Csilla*, *Kevei Péter*, *Leicht Zoltán*, *Szügyi Hajnalka*, *Tankovics Gábor* 34 pont; **60–68.** *Farkas Máté*, *Gottlasz Valér*, *Keszi-Petik János*, *Kucsera Dénes*, *Nagy 469 Ambrus*, *Németh 999 Antal*, *Szintai Judit*, *Szirmay Márta*, *Várnai Anikó* 33 pont; **69–74.** *Dombi Adrienn*, *Farkas 327 Dóra*, *Kovács 625 Erika*, *Nagy 144 Ferenc*, *Soproni Péter*, *Vasas Éva Zsuzsanna* 32 pont; **75–78.** *Devecsery Ágnes*, *Embersics László*, *Hauser Edit*, *Reiss Attila* 31 pont; **79–90.** *Barta 679 Zsolt*, *Botka Bea*, *Erdélyi Dániel*, *Iván Szilárd*, *Kepe Gábor*, *Kiss Gergely Péter*, *Kovács 721 Péter*, *Major Gergely*, *Potzauf Krisztina*, *Sándorfi Erika*, *Sipos Szabó Eszter*, *Walfisch Dávid* 30 pont; **91–98.** *Ambrus Nóra*, *Beke Krisztina*, *Kertész Zsuzsanna*, *Kórus Gergely*, *Pajna Gabriella*, *Simon András*, *Tóth Rudolf*, *Varga Lajos* 29 pont; **99–100.** *Gémes Norbert*, *Szente Dávid* 28 pont; **101–102.** *Berta Balázs*, *Tóth Mihály* 27 pont; **103–107.** *Balog Gergely*, *Csáky Attila*, *Kiss 214 Ákos*, *Steinbach Gergely*, *Várnai Csilla* 26 pont; **108–116.** *Bartha 321 Ágnes*, *Bede Viktória*, *Csordás Hunor*, *Horváth 119 Beáta*, *Pszota Zsolt*, *Rischák Rózsa*, *Szabó 406 Tamás*, *Vámi Petra*, *Völgyi Krisztina* 25 pont; **117–120.** *Erős Péter*, *Holicska Ádám*, *Izsák Andrea*, *Pongrácz Júlia* 24 pont; **121–130.** *Balogh 225 Gabriella*, *Farkas Melinda*, *Gábris Gergely*, *Káposztás Dániel*, *Kovács 444 György*, *Lehoczki Csaba*, *Ócsai Katalin*, *Palotás Bálint*, *Rabb Gergely*, *Riez Dóra* 23 pont; **131–135.** *Fischer Noémi*, *Kocsis Mária*, *Molnár 475 Viktor*, *Nagy 725 János*, *Szabó 213 Adrienn* 22 pont; **136–142.** *Bognár Attila*, *Buza Krisztián Antal*, *Dajka Tamás*, *Hetesi Péter*, *Szabó 314 Zsolt*, *Szebelédi Csaba*, *Zirkelbach Kinga* 21 pont; **143–149.** *Bartke Judit*, *Cseke Péter*, *Makk Péter*, *Mult Attila*, *Vágó Gábor*, *Vígh Róbert*, *Vukov Katalin* 20 pont; **150–162.** *Bedekovich Dániel*, *Fási Erika*, *Flórea György*, *Kőber Péter*, *Nagy 206 István*, *Nagy 701 Mária*, *Nagy 039 Péter*, *Németh Katalin*, *Pernek Ákos*, *Szilágyi Örs*, *Tombor Júlia*, *Varga 846 Petra*, *Weisz Gyula* 19 pont; **163–167.** *Györkő Roland*, *Kurtz Orsolya*, *Somodi Gergely*, *Stogicza Ákos*, *Szalai Bence* 18 pont; **168–178.** *Bakó Eszter*, *Czakó Péter*, *Keszthelyi Vilmos*, *Markó Máté*, *Németh 278 Andrea*, *Pilissy György*, *Somlai Ágnes*, *Szabados Réka*, *Szabó 127 Andrea*, *Terlaky András*, *Turchányi Márton* 17 pont; **179–185.** *Ács Bernadett*, *Iberpaker Péter*, *Kárpáti Zsuzsanna*, *Mátyási Domonkos*, *Noszák Csaba*, *Tóth*

KöMaL – 2000/3 MAT0003 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 15:29 (3. lap)

Georgina Zsófia, *Zoltán Illés* 16 pont; **186–192.** *Borosán Péter*, *Gyökeres Ágnes*, *Komlós Gábor*, *Mészöly Tamás*, *Nachtigál Károly*, *Nagy 984 Krisztina*, *Németh Ildikó* 15 pont; **193–208.** *Bein Márton*, *Dumitrasc Alina Lavinia*, *Haydu Lénárt*, *Imre Tamás*, *Keresztes Bence*, *László Tamás*, *Molnár Géza*, *Mónus Orsolya*, *Olgyay Margit*, *Sipos Alexandra*, *Szabó 930 Krisztina*, *Számadó István*, *Tordai Zsolt*, *Vajda Gábor*, *Varga Gábor*, *Várnai Tímea* 14 pont; **209–216.** *Bede Hajnalka*, *Bíró Ádám*, *Lánczi Levente*, *Láng Ervin*, *Morvai Krisztina*, *Sára Péter*, *Springer Éva*, *Szabó 970 Tamás* 13 pont; **217–222.** *Fábián Zsuzsa*, *Kazó Csaba*, *Ritzinger György*, *Sikló Bernadett*, *Székely Zsuzsa*, *Takáts Marcella* 12 pont.

Kevesebb pontja van 163 versenyzőnek.

11. osztályosok

1–6. *Ambrus Gergely*, *Babos Attila*, *Bálint Gergely*, *Simon 812 Győző*, *Vígh Viktor*, *Vörös László* 51 pont; **7.** *Deli Lajos* 50 pont; **8–10.** *Koch Dénes*, *Lovrics Anna*, *Nagy Tamás* 49 pont; **11.** *Boros M. Mátyás* 48 pont; **12.** *Pacz Bence Tamás* 47 pont; **13–19.** *Balka Richárd*, *Fehér Gergely*, *Fodor 133 Gyula*, *Horváth Szilárd*, *Pogátsa Attila*, *Szilasi Zoltán*, *Veres Péter* 45 pont; **20–22.** *Fekete 110 Árpád*, *Lovrics Klára*, *Mics Zoltán* 44 pont; **23–24.** *Breuer János*, *Zalán Péter* 43 pont; **25–31.** *Antal Ágnes*, *Árvay Eszter*, *Börcsök József*, *Gelencsér Gábor*, *Horváth Balázs*, *Lajtha Balázs*, *Toka László* 42 pont; **32–35.** *Soós 740 Károly*, *Szamosújvári Ilona*, *Tóth Szilveszter*, *Várkonyi Dániel* 41 pont; **36–38.** *Andrássy Zoltán*, *Nagy 139 Gergely*, *Novák Zoltán* 40 pont; **39–41.** *Ádám Zoltán*, *Budai Erika*, *Eördegh Péter* 39 pont; **42–43.** *Siklósi Dávid*, *Székelyhidi Tamás* 38 pont; **44–49.** *Görföl Tamás*, *Hegedűs Vera*, *Hegyi Márta*, *Mátyási Péter*, *Szintai Balázs*, *Vonnák Dzsamila* 37 pont; **50–52.** *Kisfügedi Viktória*, *Nagy 729 Dávid*, *Wéber Zoltán* 36 pont; **53–56.** *Csaszny Tamás*, *Enyedi Gábor*, *Gyurcsek András*, *Vizer Tibor* 35 pont; **57–59.** *Bartos Imre*, *Czibik Ágnes*, *Tóth 124 Péter* 34 pont; **60–66.** *Csereklei Gábor*, *Győző Miklós*, *Horváth 713 György*, *Kovács Krisztián*, *Paál Csaba*, *Sofró Csaba*, *Vajda Péter* 33 pont; **67–71.** *Bakó Dániel*, *Bohák András*, *Fellegi Zoltán*, *Imrefi József*, *Szilágyi Tamás* 32 pont; **72–74.** *Germán Tibor*, *Jakab Zsolt*, *Zajdó Csaba* 30 pont; **75–78.** *Börzsönyi Ádám*, *Durai Pál*, *Nagy 314 Ádám*, *Pálinkó Szabolcs* 29 pont; **79–82.** *Csabina Csilla*, *Kiss 414 Norbert*, *Szekeres 761 András*, *Varga 832 Erzsébet* 28 pont; **83–86.** *Darabos Andrea*, *Kazinczi Csaba*, *Király Attila*, *Legány Csaba* 27 pont; **87–91.** *Arany Sándor*, *Ekler Márton*, *Fenyvesi Zsuzsanna*, *Kurucz Endre*, *Tóth 007 Balázs* 26 pont; **92–95.** *Bogatin György*, *Peresztegi Márton*, *Roszol László*, *Varga 274 Károly* 25 pont; **96–104.** *Béhm A. Diana*, *Garai Zsolt*, *Karácsonyi József Sándor*, *Kiss Árpád*, *Laczay Zsolt*, *Medgyesi László*, *Porkoláb Dániel*, *Szabó Géza*, *Wéner Balázs* 24 pont; **105–110.** *Almási Angelika*, *Kalmár Levente*, *Németh 512 Róbert*, *Székelyi Szabolcs*, *Tóth 575 Árpád*, *Varga Máté* 23 pont; **111–117.** *Cseri István*, *Hank Sándor*, *Horváth 724 Zoltán*, *Karácsony Veronika*, *Rácz László*, *Szentpéteri Zsolt*, *Vörös Krisztina* 22 pont; **118–122.** *Erényi Stella*, *Gönczöl Ágnes*, *Kántor András*, *Mitcsenkov Attila*, *Stépán József* 21 pont; **123–127.** *Braun Melinda*, *Király Ferenc*, *Márkus Balázs*, *Mészáros Gergely*, *Somlai Henrietta* 20 pont; **128–132.** *Gerő László*, *Imre Ildikó*, *Kádár Csaba*, *Reiczigel Zsófia*, *Tölgyes István* 19 pont; **133–137.** *Kánya Dávid*, *Kapitány Benedek*, *Nagy 777 Péter*, *Sándor 027 Attila*, *Szána Linda* 18 pont; **138–145.** *Baka Nóra*, *Csapó Adelinda*, *Horváth 004 Tamás*, *Karaszi Mihály*, *Palojtay Eszter*, *Ráfael Balázs*, *Schmidt András*, *Tóth 666 Balázs* 17 pont; **146–152.** *Dőrr Zsuzsanna*, *Forgó Béla*, *Gál Dénes*, *Harcz Ádám*, *Szobota Péter*, *Tabajdi Márton*, *Tigyi Árpád* 16 pont; **153–156.** *Czigány Balázs*, *Kiss 189 Csaba*, *László 218 Előd*, *Rakamazi Richárd* 15 pont; **157–162.** *Bicskei László*, *Hömöstrei Mihály*, *Medve Kinga Sára*, *Perger Valéria*, *Veres Dániel*, *Zrínyi Dániel* 14 pont.

Kevesebb pontja van 127 versenyzőnek.

12. osztályosok

1–3. *Ivaskó György*, *Máthé András*, *Vizer Máté* 52 pont; **4–8.** *Hegedűs Ákos*, *Keszegh Balázs*, *Kiss 345 Gergely*, *Papp Dávid*, *Tóth 498 Ferenc* 51 pont; **9–10.** *Dénes Attila*, *Győri Nikolett* 50 pont; **11–14.** *Baharev Ali*, *Iván Szabolcs*, *Sidó Péter*, *Venter György* 49 pont; **15.** *Bákor Krisztina* 48 pont; **16.** *Besenyei Ádám* 47 pont; **17–18.** *Gáspár Merse Előd*, *Sipos Ádám* 46 pont; **19.** *Pozsonyi Gergő* 44 pont; **20.** *Taraza Busra* 43 pont; **21.** *Friedl Zita* 41 pont; **22–23.** *Borbíró Levente*, *Vitéz Ildikó* 40 pont; **24–27.** *Bódai Zoltán*, *Flach Attila*, *Herczegh Géza*, *Horváth 413 László* 39 pont; **28–29.** *Antal István*, *Schlotter Ildikó* 38 pont; **30–33.** *Agócs Judit*, *Gyürki István*, *Kiss 360 Sándor*, *Szabó 968 Lóránt* 36 pont; **34–36.** *Gáspár Endre*, *Kasztner Tamás*, *Zombori Zsolt* 34 pont; **37–39.** *Gömöri Péter*, *Horváth Gergely*, *Tarcsi Tamás* 33 pont; **40–42.** *Balázs Péter*, *Kiss Ferenc Emánuel*, *Koczka Gergely* 32 pont; **43–44.** *Tolvaj Nándor*, *Törőcsik Andrea* 31 pont; **45–47.** *Matin Tamás*, *Szabó Gergely*, *Szélig Nikoletta* 30 pont; **48–49.** *Hegedüs 008 Péter*, *Torda Péter* 29 pont; **50–53.** *Gyarmati-Szabó István*, *Kriston Vízi Gábor*, *Varga Balázs*, *Wilfing András* 28 pont; **54–55.** *Jósvai Szilárd*, *Tóth 587 Viktória* 27 pont; **56–58.** *Bokros Krisztián*, *Horváth Lajos*, *Micskei Zoltán* 26 pont; **59.** *Móczó Péter* 25 pont; **60–63.** *Berta Andrea*, *Nagy 831 Gábor*, *Papp Eszter*, *Szever Ádám* 24 pont; **64.** *Mészáros Fruzsina* 23 pont; **65–68.** *Hitre Renáta*, *Menyhért Bálint*, *Molnár László Milán* , *Szabó 777 Pál* 22 pont; **69.** *Sors Erika* 21 pont; **70–72.** *Barák Róbert*, *Fodor Erzsébet*, *Radics László* 20 pont; **73–76.** *Baranyai 248 Gábor*, *Kovács 751 Róbert*, *Pesti 421 Péter*, *Sinkovicz Katalin* 19 pont; **77–79.** *Bíró Annamária Mása*, *Németh 555 Lajos*, *Tóth 888 János* 18 pont; **80–83.** *Juhász Miklós*, *Robotka Zsolt*, *Szűcs Jenő*, *Takáts Gergely* 17 pont; **84–88.** *Csuka Bernát*, *Horváth Hedvig*, *Kegyes Tamás*, *Oláh András*, *Till Gyöngyi* 16 pont; **89.** *Révai Balázs* 15 pont; **90–94.** *Boga Áron*, *Edőcs Eszter*, *Jungbauer Alexandra*, *Kaltenecker Szilvia*, *Soós István* 14 pont.

Kevesebb pontja van 73 versenyzőnek.

C gyakorlatok

A szeptember–októberi összesítés után, a maximális elérhető pontszám: 50 pont.

Legfeljebb 10. osztályosok

1–3. *Bóka Gergely* 9. o.t., *Erdei Zsuzsa* 10. o.t., *Tóth 370 Ágnes* 10. o.t. 50 pont; **4–6.** *Ellenbacher Péter* 10. o.t., *Kiss-Tóth Christian* 7. o.t., *Szabó 314 Zsolt* 10. o.t. 49 pont; **7–12.** *Bérczi Kristóf* 9. o.t., *Boros Balázs* 9. o.t., *Borsódi Éva* 9. o.t., *Fehér Gábor* 9. o.t., *Koreck Ferenc* 10. o.t., *Tímár Gábor* 10. o.t. 48 pont; **13–20.** *Birkner Tamás* 7. o.t., *Lelovics András* 10. o.t., *Marton József* 10. o.t., *Németh 864 Márk* 8. o.t., *Siroki László* 10. o.t., *Szekeres Balázs* 9. o.t., *Szűcs Mónika* 9. o.t., *Várnai Csilla* 10. o.t. 47 pont; **21–22.** *Fehér Ádám* 9. o.t., *Paulin Dániel* 8. o.t 46 pont; **23–30.** *Bedzsula Bálint*

9. o.t., *Bérces Péter* 9. o.t., *Hargitai Gábor* 10. o.t., *Horváth 424 Márton* 8. o.t., *László L. András* 10. o.t., *Márton Zsuzsanna* 9. o.t., *Papp Gábor* 10. o.t., *Zámbó Virág* 10. o.t. 45 pont; **31–40.** *Baranyai Tamás* 9. o.t., *Baur Eszter* 10. o.t., *Bertus-Barcza Tímea* 10. o.t., *Durham Patrick* 9. o.t., *Farkas Viktor* 10. o.t., *Pach Péter Pál* 8. o.t., *Pszota Zsolt* 10. o.t., *Sándor Nóra* 9. o.t., *Tisch Dániel* 10. o.t., *Várnai Anikó* 10. o.t. 44 pont; **41–50.** *Barsi Mária* 9. o.t., *Farkas 327 Dóra* 10. o.t., *Farkas Máté* 10. o.t., *Gottlasz Valér* 10. o.t., *Kórus Péter* 8. o.t., *Kotnyek Barbara* 10. o.t., *Moór Anikó* 9. o.t., *Nagy 625 Tibor* 9. o.t., *Szalay Zsófia* 10. o.t., *Szilágyi Zoltán* 9. o.t. 43 pont; **51–60.** *Aczél Anna* 10. o.t., *Buthi Irma* 10. o.t., *Kádas Attila* 10. o.t., *Karches Tamás* 9. o.t., *Lakatos Szilvia* 9. o.t., *Márton Noémi Petra* 9. o.t., *Rácz Béla András* 8. o.t., *Ruppert László* 9. o.t., *Salát Máté* 9. o.t., *Tollner Dávid* 9. o.t. 42 pont; **61–64.** *Jankó András* 9. o.t., *Nagy 124 Ágnes* 10. o.t., *Szabó 127 Andrea* 10. o.t., *Tál Balázs* 10. o.t. 41 pont; **65–75.** *Ásványi Katalin* 10. o.t., *Bikov András* 9. o.t., *Blastik Márta* 9. o.t., *Bozsik Judit* 10. o.t., *Erdélyi Dániel* 10. o.t., *Hofgárt Gergely* 9. o.t., *Kocsis Mária* 10. o.t., *Nagy 359 Gábor* 9. o.t., *Nagy 701 Mária* 10. o.t., *Nyul Balázs* 9. o.t., *Reiss Attila* 10. o.t. 40 pont; **76–85.** *Besenyei Balázs* 9. o.t., *Hajdú Huba* 9. o.t., *Horváth 274 Ágnes* 10. o.t., *Jesch Dávid* 10. o.t., *Klement Balázs* 9. o.t., *Mihalik Szabolcs* 10. o.t., *Petrás Attila* 9. o.t., *Pintér Miklós* 10. o.t., *Tóth 143 Anett* 8. o.t., *Vehovszky Balázs* 9. o.t. 39 pont; **86–97.** *Bauer Péter* 8. o.t., *Czakó Péter* 10. o.t., *Gáthy Lajos* 9. o.t., *Hablicsek Márton* 8. o.t., *Nagy 666 Károly* 9. o.t., *Nagy Zsanett* 9. o.t., *Németh Adrián* 8. o.t., *Pajna Gabriella* 10. o.t., *Patyi Éva* 10. o.t., *Sparing Dániel* 9. o.t., *Szabados Katalin* 9. o.t., *Varga Lajos* 10. o.t. 38 pont; **98–109.** *Csáky Attila* 10. o.t., *Csatári Zsolt* 10. o.t., *Fülöp Anita* 9. o.t., *Lehoczki Csaba* 10. o.t., *Mándy Péter* 9. o.t., *Matyuska Ferenc* 8. o.t., *Nagy 213 Gergely* 10. o.t., *Sarkadi Tamás* 9. o.t., *Schuster Ágnes* 9. o.t., *Sipőcz Éva* 9. o.t., *Szirmay Márta* 10. o.t., *Vona Péter* 8. o.t. 37 pont; **110–120.** *Erős Péter* 10. o.t., *Konfár András* 8. o.t., *Kovács 651 István* 9. o.t., *Kovács 721 Péter* 10. o.t., *László Andrea* 9. o.t., *Márton Szabolcs* 9. o.t., *Penha Felizardo Renáta* 9. o.t., *Sarusi Annamária* 8. o.t., *Sipka Bálint* 8. o.t., *Sipos Kinga* 9. o.t., *Szalai Bence* 10. o.t. 36 pont; **121–132.** *Bácsi Ádám* 8. o.t., *Csekő Anna* 9. o.t., *Csizmazia Eszter* 9. o.t., *Karlik Zsuzsanna* 9. o.t., *Nagy Mónika* 10. o.t., *Nemeskéri Tamás* 9. o.t., *Ócsai Katalin* 10. o.t., *Szemján Zoltán* 9. o.t., *Szita Bernadett* 9. o.t., *Sztrányóczki Dávid* 10. o.t., *Szücs András* 9. o.t., *Virasztó Zsolt* 9. o.t. 35 pont; **133–149.** *Bodnár Csaba* 9. o.t., *Caimacan Dávid* 8. o.t., *Fekete 132 Krisztián* 9. o.t., *Fonyódi György* 9. o.t., *Hantal György* 10. o.t., *Herczeg Lynda* 9. o.t., *Komáromy Dávid* 9. o.t., *Nyolczas Viktor* 10. o.t., *Pluhár Gabriella* 9. o.t., *Prekopcsák Zoltán* 9. o.t., *Rabb Gergely* 10. o.t., *Rischák Rózsa* 10. o.t., *Seress Bence* 8. o.t., *Spanczér Ilona* 10. o.t., *Széll Károly* 9. o.t., *Szrnka Éva* 9. o.t., *Vadai Zsolt* 10. o.t. 34 pont; **150–162.** *Bartha 321 Ágnes* 10. o.t., *Bíró Zoltán* 9. o.t., *Gál Dénes* 9. o.t., *Hangya Miklós* 8. o.t., *Kárpáti Zsuzsanna* 10. o.t., *Kormos Attila* 9. o.t., *Kovács István* 10. o.t., *Kovács 954 Szabolcs* 10. o.t., *Lang Péter* 9. o.t., *Móra Péter* 9. o.t., *Olvasztó Lajos* 10. o.t., *Varga Előd* 10. o.t., *Varga 846 Petra* 10. o.t. 33 pont; **163–172.** *Buza Krisztián Antal* 10. o.t., *Dombi Nóra* 9. o.t., *Keszler Anita* 9. o.t., *Komlósi 985 Gergely* 9. o.t., *Kovács 985 Zsuzsanna* 9. o.t., *Nagy András* 9. o.t., *Péter Noémi* 9. o.t., *Sára Péter* 10. o.t., *Szilágyi Örs* 10. o.t., *Visnovitz Péter* 9. o.t. 32 pont; **173–182.** *Dombai Balázs* 9. o.t., *Farkas Tamás* 9. o.t., *Gulyás József* 10. o.t., *Kiss-Parciu Péter* 10. o.t., *Makai Andrea* 9. o.t., *Petrovszki Judit* 9. o.t., *Puskás Anna* 8. o.t., *Reiss Tibor* 9. o.t., *Schlakker Eszter* 9. o.t., *Tóth Georgina Zsófia* 10. o.t. 31 pont; **183–201.** *Bán Zoltán* 10. o.t., *Bedő Anett* 9. o.t., *Benczúr Zsolt* 10. o.t., *Forgács Tamás* 9. o.t., *Horváth 007 János* 9. o.t., *Juhász Sándor* 10. o.t., *Kárnyáczki Zsuzsanna* 10. o.t., *Kéri Sophia* 10. o.t., *Lantos Norbert* 9. o.t., *Mult Attila* 10. o.t., *Nótári Péter* 10. o.t., *Patzkó Ágnes* 10. o.t.,

KöMaL – 2000/3 MAT0003 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 15:29 (6. lap)

Péczeli Viktor 10. o.t., *Rückert Péter* 9. o.t., *Sándor István* 9. o.t., *Somlai Ágnes* 10. o.t., *Szabó 182 Katalin* 9. o.t., *Szerényi Zsuzsa* 9. o.t., *Szever Márton* 9. o.t. 30 pont; **202–213.** *Cseke Péter* 10. o.t., *Gál András* 9. o.t., *Gere Ágota* 10. o.t., *Láda Zoltán* 10. o.t., *Márki Éva* 10. o.t., *Szabó 528 Dávid* 10. o.t., *Szabó Marcell* 9. o.t., *Szalay Gergely* 9. o.t., *Szendrői Zsolt* 9. o.t., *Varga 236 Szabolcs* 9. o.t., *Vilim Tamás* 10. o.t., *Zsigmond Zsuzsa* 10. o.t. 29 pont; **214–228.** *Agócs Angéla* 10. o.t., *Beke Krisztina* 10. o.t., *Bencze Zoltán* 10. o.t., *Erdei Katalin* 9. o.t., *Filep Gergely* 10. o.t., *Kristóf Katalin* 9. o.t., *Lakatos Kristóf* 9. o.t., *Mattyasovszky Nóra* 10. o.t., *Mészáros Zsolt* 10. o.t., *Molnár András* 10. o.t., *Nagy 144 Ferenc* 10. o.t., *Varga 123 Áron* 10. o.t., *Veress Eszter Abigél* 9. o.t., *Vukov Katalin* 10. o.t., *Zoltán Illés* 10. o.t. 28 pont.

Kevesebb pontja van 845 versenyzőnek.

11–12. osztályosok

1–4. *Csató György* 11. o.t., *Gajdos Béla* 12. o.t., *Kardos Péter* 12. o.t., *Kegyes Tamás* 12. o.t. 50 pont; **5–12.** *Bankó Krisztián* 12. o.t., *Besenyei Ádám* 12. o.t., *Braun Melinda* 11. o.t., *Germán Tibor* 11. o.t., *Nagy 281 Dávid* 11. o.t., *Szintai Balázs* 11. o.t., *Tóth 498 Ferenc* 12. o.t., *Zalán Péter* 11. o.t. 49 pont; **13–22.** *Antal Ágnes* 11. o.t., *Gyarmati-Szabó István* 12. o.t., *Káldy Nóra* 12. o.t., *Kriston Vízi Gábor* 12. o.t., *Nagy 219 András* 12. o.t., *Soltész Kata* 11. o.t., *Strobl Apolka* 12. o.t., *Végh Anita* 11. o.t., *Vígh Attila* 11. o.t., *Vörös Krisztina* 11. o.t. 48 pont; **23–29.** *Baranyi Tibor* 12. o.t., *Horváth Balázs* 11. o.t., *Karácsonyi József Sándor* 11. o.t., *Kisfügedi Viktória* 11. o.t., *Koczka Gergely* 12. o.t., *Torda Péter* 12. o.t., *Tóth 777 Balázs* 11. o.t. 47 pont; **30–37.** *Árvay Eszter* 11. o.t., *Fazekas Gábor* 12. o.t., *Fenyvesi Zsuzsanna* 11. o.t., *Jakab Gyula* 11. o.t., *Kármán Péter* 11. o.t., *Patay Gergely* 12. o.t., *Soós 740 Károly* 11. o.t., *Szekeres 761 András* 11. o.t. 46 pont; **38–41.** *Agócs Judit* 12. o.t., *Kismődi Péter* 11. o.t., *Matin Tamás* 12. o.t., *Révai Balázs* 12. o.t. 45 pont; **42–48.** *Csornai Gyula* 12. o.t., *Dinnyés Gábor* 11. o.t., *Fehérvári Sándor* 12. o.t., *Horváth Lajos* 12. o.t., *Kmellár Béla* 11. o.t., *Koch Dénes* 11. o.t., *Paál Csaba* 11. o.t. 44 pont; **49–57.** *Béhm A. Diana* 11. o.t., *Horváth István* 12. o.t., *Kápolnai Richárd* 12. o.t., *Karika Róbert* 12. o.t., *Papp András* 11. o.t., *Pintér Zsuzsanna* 12. o.t., *Rácz László* 11. o.t., *Robotka Zsolt* 12. o.t., *Vanya Ádám* 11. o.t. 43 pont; **58–67.** *Bíró László* 12. o.t., *Bohák András* 11. o.t., *Buti András* 11. o.t., *Ivánszki Szilvia* 12. o.t., *Kiss Árpád* 11. o.t., *Klausz Ferenc* 12. o.t., *Kormos Zoltán* 12. o.t., *Medgyesi László* 11. o.t., *Oláh Tibor Benjámin* 12. o.t., *Rozovits Zoltán* 12. o.t. 42 pont; **68–78.** *Borda Máté* 11. o.t., *Gérecz Balázs* 11. o.t., *Horváth 413 László* 12. o.t., *Juhász 113 Ágnes* 12. o.t., *Sajtos Erika* 11. o.t., *Schmeiszer Krisztián* 12. o.t., *Soltész Noémi* 12. o.t., *Töviskes Péter* 12. o.t., *Varga 951 Attila* 12. o.t., *Wéner Balázs* 11. o.t., *Wilfing András* 12. o.t. 41 pont; **79–87.** *Fiedler Ágnes* 12. o.t., *Hancsók Réka* 12. o.t., *Havran Dániel* 12. o.t., *Huszár Zsuzsanna* 12. o.t., *Legány Csaba* 11. o.t., *Pólik Márta* 12. o.t., *Somlai Henrietta* 11. o.t., *Szászi Zsuzsanna* 12. o.t., *Zsédely Eszter* 12. o.t. 40 pont; **88–95.** *Döme Botond* 12. o.t., *Harangi Norbert* 12. o.t., *Kőszegi Katalin Adrienn* 11. o.t., *Medve Kinga Sára* 11. o.t., *Molnár 222 István* 12. o.t., *Nagy Zoltán* 12. o.t., *Sörös Csaba* 11. o.t., *Vukman Krisztina* 11. o.t. 39 pont; **96–100.** *Karaszi Mihály* 11. o.t., *Király Péter* 12. o.t., *Rádi Krisztina* 12. o.t., *Szépe Bálint* 12. o.t., *Takács Nóra* 12. o.t. 38 pont; **101–110.** *Antal István* 12. o.t., *Balázs Györgyi* 11. o.t., *Hankó András* 11. o.t., *Kalmár Levente* 11. o.t., *Kulbert István* 12. o.t., *Pótó Júlia* 11. o.t., *Simon Hajnalka* 11. o.t., *Somodi Katalin* 12. o.t., *Veres Tímea* 12. o.t., *Vörös 163 Csaba* 12. o.t. 37 pont; **111–114.** *Gaál Zoltán* 12. o.t., *Lévai István* 12. o.t., *Schmeiszer Kornél* 12. o.t., *Török Tímea*

12. o.t. 36 pont; **115–126.** *Csurdi Abigél* 12. o.t., *Kolláth Endre* 11. o.t., *Kulcsár Tibor* 12. o.t., *Láda Judit* 11. o.t., *Menyhárt Ferenc* 12. o.t., *Reményi Zsolt* 11. o.t., *Sebestyén Zita* 11. o.t., *Sinkovicz Katalin* 12. o.t., *Sofró Csaba* 11. o.t., *Somodi Zoltán* 12. o.t., *Szabó 415 Ágnes* 12. o.t., *Tóth 613 Marcella* 11. o.t. 35 pont; **127–134.** *Gáspár Katalin* 12. o.t., *Gönczöl Katalin* 12. o.t., *Kiss 123 József* 12. o.t., *Márkus Viktória* 12. o.t., *Mihics Henrik* 12. o.t., *Mitcsenkov Attila* 11. o.t., *Murguly Hajnalka* 11. o.t., *Szőke Antal* 11. o.t. 34 pont; **135–143.** *Gáspár Krisztina* 12. o.t., *Kiss Adrienn* 11. o.t., *Lükő Sára* 12. o.t., *Menyhárt Sándor* 12. o.t., *Nagy Emőke* 12. o.t., *Pintér Csaba* 11. o.t., *Prantner Attila* 12. o.t., *Szabó Gergely* 12. o.t., *Tóth Balázs* 12. o.t. 33 pont; **144–152.** *Dömötör Piroska* 11. o.t., *Frey Dóra* 11. o.t., *Hitre Renáta* 12. o.t., *Lődör Zoltán* 12. o.t., *Mehrl Nándor* 12. o.t., *Monostori Eszter* 11. o.t., *Nagy 331 Zsuzsanna* 11. o.t., *Németh 512 Róbert* 11. o.t., *Szekeres Nóra* 12. o.t. 32 pont.

Kevesebb pontja van 313 versenyzőnek.

A Carmichael-számokról

1. Bevezetés

A számítógépes hálózatokon keresztül történő kommunikáció térhódítása nyomán előtérbe került az ún. *nyilvános jelkulcsú* titkosítási eljárások iránti igény. A nyilvánosság ebben az esetben azt jelenti, hogy a titkosítás módja (az üzenetek kódolásának és dekódolásának elve) minden, a kommunikációban résztvevő szereplő számára ismert, így a rendszerhez bárki csatlakozhat, ha készít magának egy csakis általa ismert titkos „kulcsot” (bizonyos, a rendszer által előírt szabványok szerint) és nyilvánosságra hoz (mintegy a saját „telefonszámaként”) egy másik kulcsot; az előbbi és a címzett nyilvános kulcsa segítségével titkosítja az általa elküldött üzenetet, amelyet a címzett a saját titkos és a feladó nyilvános kulcsa segítségével tud megfejteni. E „kétkulcsos” rendszernek a részletes leírása helyett itt csupán arra a tényre utalunk, hogy az egyik ilyen, széles körben elterjedt rendszer (az RSA-séma) esetében a kulcsok előállításához két nagy (több száz jegyből álló) prímszámra van szükség, és a rendszer eleget tesz annak a kívánalomnak, hogy az A által B-nek írt üzenetet csak B képes megfejteni, viszont bárki képes meggyőződni arról, hogy az üzenet csakis A-tól származhatott, tehát hamisíthatatlan. Ezek az egymásnak ellentmondani látszó követelmények egy roppant „negatív” ténynek köszönhetően elégíthetők ki: jelenleg nem ismert olyan algoritmus, amellyel egy sokszáz jegyű számot prímszámok szorzatára lehetne bontani — természetesen számítógéppel — kevesebb, mint néhány milliárd év leforgása alatt!

Hogyan készíthet viszont magának egy résztvevő ilyen nagy prímszámot? Tegyük fel, hogy találomra választ sok nagy számot, és megnézi, van-e közöttük prím. Megmutatható, hogy ha „elég sokat” választ, akkor a számok között nagy valószínűséggel talál prímet. A kérdés azonban az, hogyan döntse el egy kiválasztott n számról, hogy az prímszám-e. A szám prímtényezőkre bontása, mint arra már utaltunk, reménytelennek látszó próbálkozás.

Fermat tétele szerint $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, ha $(a,p)=1$ és p prím. Ennek nyomán kézenfekvőnek tűnik a következő: választ egy, az n-hez relatív prím a egészet (ez valóban megtehető) majd kiszámítja a^{n-1}-nek az n-nel való osztási maradékát (géppel ez könnyűszerrel elvégezhető). Ha a kapott maradék nem az 1, akkor n bizonyosan nem prím. A másik esetben, ha a maradék 1, nagyon egyszerű lenne feltételezni, hogy n prím; csakhogy néhány összetett n szám is rendelkezik a következő tulajdonsággal:

$$a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n} \qquad \text{minden } a\text{-ra, amelyre } (a, n) = 1. \tag{1}$$

Ezeket a számokat *Carmichael-számoknak* nevezzük. Ha (1) teljesül n-re, akkor csak abban lehetünk biztosak, hogy a kérdéses szám prím vagy Carmichael-szám.

Azt hogy Carmichael-szám létezik, 1910 óta tudjuk, amikor is R. D. Carmichael megadott néhány ilyen tulajdonságú számot. Bár az első példák 1910-ből valók, az ún. *Korselt-kritérium* 1899-re datálódik:

Egy összetett n szám pontosan akkor Carmichael-szám, ha n négyzetmentes, és minden p prímre $p \mid n$-ből $(p-1) \mid (n-1)$ következik.

Az alábbiakban ezt be is fogjuk bizonyítani. A legkisebb Carmichael-szám $3 \cdot 11 \cdot 17 = 561$, továbbiak: $5 \cdot 13 \cdot 17 = 1105$, $7 \cdot 31 \cdot 73 = 15\,841$.

Ezt követően 1939-ben Chernick [6] talált egy univerzális formulát, amelynek segítségével Carmichael-számokat kaphatunk:

$$U_k(m) = (6m+1)(12m+1)\prod_{i=1}^{k-2}(9 \cdot 2^i m + 1),$$

ha az összes tényező prím.

Mások sok prímtényezős Carmichael-számokat állítottak elő: 1978-ban Yorinaga [7] legfeljebb 15 tényezősöket, Zhang [8] 1305 tényezős, Guillame és Morain [9] 5104 tényezős számokat konstruáltak. Szisztematikus kereséssel Pinch [2] megtalálta az összes Carmichael-számot 10^{16}-ig. Manapság az egyik legnagyobb ismert Carmichael-számnak 1 101 518 tényezője van, Günter Löh és Wolfgang Niebuhr [1] találta 1996-ban.

Persze a legfontosabb kérdés az, hogy van-e végtelen sok Carmichael-szám. A válasz: igen. Ezt W. R. Alford, A. Granville és C. Pomerance [3] bizonyította be 1994-ben, nem elemi úton. A bizonyítás alapjául szolgáló heurisztikus algoritmus Erdős Páltól származik, erre később még vissza fogunk térni.

Az alábbiakban megemlítünk néhány, Carmichael-számot konstruáló algoritmust:

1. Definiáljuk először a λ függvényt: ez n-hez azt a legkisebb $\lambda(n)$ pozitív egészet rendeli, amelyre $a^{\lambda(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ minden, az n-hez relatív prím a egészre teljesül. A λ függvénynek fontos tulajdonsága, hogy $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ esetén

$$\lambda(n) = \left[\lambda(p_1^{\alpha_1}), \ldots, \lambda(p_k^{\alpha_k})\right],$$

és az is belátható, hogy

$$\lambda(p_i^{\alpha_i}) = \begin{cases} \varphi(p_i^{\alpha_i}) = p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1), \text{ ha } p_i > 2 \text{ vagy } \alpha_i \le 2 \\ 2^{\alpha_i - 2}, \text{ ha } p_i = 2 \text{ és } \alpha_i > 2 \end{cases}$$

(φ az Euler-függvényt és $[\ldots]$ a legkisebb közös többszöröst jelöli). Löh és Niebhur algoritmusának alapja R. D. Carmichael tétele, mely szerint *egy összetett N szám pontosan akkor Carmichael-szám, ha* $N \equiv 1 \pmod{\lambda(N)}$.

Legyen N a keresett Carmichael-szám. Az algoritmus egy adott L számmal indul, amelyre $L = \lambda(N)$ teljesül majd. Ezután meghatározzuk N összes lehetséges prímosztóját, tekintetbe véve a Carmichael-féle λ függvény tulajdonságait és a Korselt-kritérium alábbi következményét:

Legyen S az N prímosztóinak a halmaza, az S-beli prímek szorzatának a maradéka L-lel osztva legyen k.

Ha $k = 1$, akkor S elemeinek szorzata Carmichael-szám.

Ha $k > 1$, akkor megkeressük az S-nek egy olyan valódi T részhalmazát, amelyben az elemek szorzata szintén k maradékot ad L-lel osztva. Az S-nek a T-be nem tartozó elemeit összeszorozva kapunk Carmichael-számot.

2. A következő eljárás segítségével határozta meg R. G. E. Pinch [2] a Carmichael-számokat 10^{15}-ig. Két eredményt használt: az egyik N. G. W. H. Beeger [11]-től származik 1950-ből: *ha $r > q > p$ prímek és pqr Carmichael-szám, akkor $2p^2 > q$ és $p^3 > r$.* Ezt később Duparc [12] általánosította: *ha q, r prímek és mqr Carmichael-szám, akkor $2m^2 > q$ és $m^3 > r$.* Ezeket speciális esetekre egyébként R. G. E. Pinch is belátja az említett cikkben, az általános eset szép és rövid bizonyítása például [10]-ben található meg. Az eljárás tulajdonképpen megkeresi minden rögzített d-re a d prímtényezős Carmichael-számokat 10^{15}-ig úgy, hogy rögzít $d-2$ darab prímet a Korselt-kritérium már említett következményét figyelembe véve, és ezekhez keres a fenti tulajdonságok és még néhány egyéb tulajdonság segítségével két új prímtényezőt.

3. H. Dubner [4] is foglalkozott Carmichael-szám konstrukciós algoritmusokkal, cikkében egyiptomi törtek segítségével állít elő Carmichael-számokat. Konstrukciójának az a lényege, hogy minden p_i prímtényezőt a_iSM+1 alakban ír fel. Ekkor a Korselt-kritériumból kapjuk, hogy minden prímtényezőre $\dfrac{SG}{a_i}$ egész, ahol S az a_i-k összege, G pedig egy igen bonyolult kifejezés. Ekkor, mivel G tulajdonságai nehezen meghatározhatóak, S-re teszünk feltételt. Ha S-nek osztója minden a_i, akkor a kritérium teljesül, és a prímek szorzata Carmichael-szám lesz. Ez a feltétel elvezet a tökéletes és a majdnem tökéletes számok elméletéhez, ami kapcsolódik az egyiptomi törtek kérdésköréhez.

4. A legfontosabb algoritmus Erdős Pál nevéhez fűződik. Mint már említettük, végül ennek alapján sikerült bizonyítani azt, hogy végtelen sok Carmichael-szám létezik. A heurisztikus eljárásban olyan L-et keresünk, amelyhez sok olyan p prímszám van, amelyre $p-1$ osztója L-nek. Ha ezek közül néhánynak a szorzata L-lel osztva 1 maradékot ad, akkor ez a szorzat Carmichael-szám. Valóban, a $p-1$ számok osztják L-et, amire nézve a szorzat 1-gyel kongruens, így a Korselt-kritérium alapján a szorzat Carmichael-szám.

A Carmichael-számok elméletében nagyon fontos a Korselt-kritérium. Ennek nem elemi bizonyítása ismert, ld. [10] (a kritériumot csoportelméleti eszközökkel bizonyítja a szerző). Ebben a cikkben olyan bizonyítást mutatunk be a kritériumra, amely nem használja a csoport fogalmát, és rámutatunk néhány fontosabb következményre, mint például arra, hogy miért nincs páros Carmichael-szám. A cikk második részében egy olyan algoritmust írunk le, amely viszonylag gyorsan tud már ismert Carmichael-számokból továbbiakat előállítani . A legnagyobb így konstruált Carmichael-szám a

$$7\cdot 37\cdot 541\cdot 12739\cdot 10317781\cdot 22554667081\cdot 447063138358143121\cdot$$
$$\cdot 309508589089767668781759436022139311882371 21=$$
$$=57477340032203190007788994991884733995704235434402463914610420136262833719214383930 26241.$$

2. A Korselt-kritérium elemi bizonyítása

Az alábbiakban bebizonyítjuk a Korselt-kritériumot. Ehhez két segédtételen keresztül jutunk el. Közülük igazán csak az elsőre lesz szükségünk, a másodikat csupán arra fogjuk használni, hogy az egyik tételre kétféle bizonyítást is adhassunk.

1. Lemma. *Legyenek* a, n, x, y *pozitív egészek,* $(a,n)=1$, $x>y$ *és*

(1) $$a^x\equiv 1 \pmod{n},$$

(2) $$a^y\equiv 1 \pmod{n}.$$

Ekkor $a^{(x,y)}\equiv 1 \pmod{n}$.

Bizonyítás. Felhasználjuk, hogy ha $z=(x,y)$, akkor léteznek olyan c, d egészek, amelyekre $z=cx+dy$. Ha (1)-et és (2)-t ezekre a hatványokra emeljük, akkor azt kapjuk, hogy $a^{|c|x}\equiv 1 \pmod{n}$ és $a^{|d|y}\equiv 1 \pmod{n}$. Legyen $r=|c|x$ és $s=|d|y$, ekkor az előzőek $a^r\equiv 1 \pmod{n}$ és $a^s\equiv 1 \pmod{n}$ alakba írhatóak; tegyük fel, hogy például $r>s$, akkor $r-s=cx+dy=z$. Kivonva az utolsó kongruenciát az előzőből: $a^r-a^s=a^s(a^{r-s}-1)\equiv 0 \pmod{n}$, és így $a^s(a^{r-s}-1)=kn$ egy alkalmas egész k-ra. De $(a,n)=1$, így $n\mid a^{r-s}-1$, vagyis $a^z=a^{r-s}\equiv 1 \pmod{n}$.

2. Lemma. *Legyenek* $p_1, \ldots, p_k$ *páronként különböző prímek, és legyen* $n=p_1\cdot\ldots\cdot p_k$. *Ekkor*

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{n}{p_i}\right)^{p_i-1}\equiv 1 \pmod{n}.$$

Bizonyítás. Mivel $\left(\frac{n}{p_i},p_i\right)=1$, felírhatjuk minden i-re a kis Fermat tételt:

$$\left(\frac{n}{p_i}\right)^{p_i-1}\equiv 1 \pmod{p_i},$$

azaz

$$\left(\frac{n}{p_i}\right)^{p_i-1}-1=c_i\cdot p_i,$$

alkalmas c_i pozitív egészekkel. Szorozzuk össze ezeket az egyenlőségeket:

$$\prod_{i=1}^{k}\left(\left(\frac{n}{p_i}\right)^{p_i-1}-1\right)=n\cdot\prod_{i=1}^{k}c_i.$$

A bal oldalon a szorzások elvégzése után egy szorzatokból álló összeget kapunk; ezt az összeget három részre oszthatjuk: az első részben szerepeljenek azok a tagok, amelyek két vagy több $\left(\dfrac{n}{p_i}\right)^{p_i-1}$ alakú tényezőt tartalmaznak. Ezek a tagok oszthatóak n-nel, így átvihetjük őket a jobb oldalra, ami így osztható marad n-nel. A második rész a

$$(-1)^{k-1}\cdot\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{n}{p_i}\right)^{p_i-1}$$

tag, a harmadik pedig $(-1)^k$. Ezek után az egyenletet így írhatjuk:

$$(-1)^{k-1}\cdot\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{n}{p_i}\right)^{p_i-1}+(-1)^k=A\cdot n,$$

vagyis

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{n}{p_i}\right)^{p_i-1}-1\equiv 0\pmod{n}.$$

Most pedig következik a Korselt-kritérium bizonyítása. Ezt három lépésben tesszük meg.

1. Tétel. *Ha n Carmichael-szám, akkor négyzetmentes.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $n=p^2m$, ahol p prím, és m egész. Írjuk fel n prímtényezős felbontását:

$$n=p^{\alpha}\cdot\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i},$$

ahol $\alpha\ge 2$. Az n Carmichael-szám, így ha $(a,n)=1$, akkor $a^{n-1}\equiv 1\pmod{n}$. Az $(a,n)=1$ miatt $(a,p)=1$, és az előző kongruenciából $a^{n-1}\equiv 1\pmod{p}$. Felírhatjuk az Euler–Fermat tételt a-ra és p^{α} -ra, mivel $(a,p^{\alpha})=1$:

$$a^{p^{\alpha-1}(p-1)}\equiv 1\pmod{p^{\alpha}}.$$

Felhasználva az első lemmát: ha $z=(n-1,p^{\alpha-1}(p-1))$, akkor $a^z\equiv 1\pmod{p^{\alpha}}$. Vizsgáljuk meg z-t! Látható, hogy $z=(n-1,p^{\alpha-1}(p-1))=(n-1,p-1)$, mivel ha $p^{\alpha-1}\mid n$, akkor p nem oszthatja $(n-1)$-et. Mivel $\alpha\ge 2$, azért $a^z\equiv 1\pmod{p^2}$. Viszont $z=(n-1,p-1)$, így létezik olyan $t\in\mathbf{Z}^+$, hogy $p-1=zt$. Így ha az utolsó kongruenciát a t-edik hatványra emeljük, akkor azt kapjuk, hogy $a^{p-1}\equiv 1\pmod{p^2}$. Legyen $c=p-p^{\varphi(m)+1}$, ekkor az Euler–Fermat tétel szerint $c\equiv p-p=0\pmod{m}$, és nyilván $c\equiv p\pmod{p^2}$; speciálisan $(c+1,n)=1$. Legyen $a=c+1$; a binomiális tétel szerint (alkalmas b pozitív egésszel)

$$a^{p-1}=(c+1)^{p-1}=bc^2+(p-1)c+1\equiv(p-1)p+1=p^2-p+1\equiv 1-p\not\equiv 1\pmod{p^2}.$$

Ellentmondásra jutottunk, tehát nincs olyan p prím, amelyre $p^2\mid n$.

2. Tétel. *Ha n Carmichael-szám, és p az n prímosztója, akkor* $(p-1)\,|\,(n-1)$.

Bizonyítás. Mivel n Carmichael-szám, n négyzetmentes, és $a^{n-1}\equiv 1 \pmod{n}$ minden a-ra, ha $(a,n)=1$. Felhasználva a Carmichael-féle λ függvényt és tulajdonságait, azt kapjuk, hogy $a^{\lambda(n)}\equiv 1 \pmod{n}$. Mivel $n=p_1\cdot\ldots\cdot p_k$, azért $\lambda(n)=[p_1-1,\ldots,p_k-1]$, és az 1. lemma miatt $\lambda(n)\,|\,(n-1)$. Így ha $p\,|\,n$ és n Carmichael-szám, akkor $(p-1)\,|\,(n-1)$.

3. Tétel. *Ha $n=p_1\cdot\ldots\cdot p_k$, ahol $p_1,\ \ldots,\ p_k$ páronként különböző prímek, továbbá $(p_i-1)\,|\,(n-1)$ ($i=1,\ \ldots,\ k$), akkor n Carmichael-szám.*

Bizonyítás. Legyen $(a,n)=1$, és írjuk fel a kis Fermat tételt minden p_i-re ($(a,p_i)=1$, $i=1,\ \ldots,\ k$):

$$1\equiv a^{p_1-1} \pmod{p_1},$$
$$\vdots$$
$$1\equiv a^{p_k-1} \pmod{p_k}.$$

Emeljük az i-edik kongruenciát a $c_i=\dfrac{(n-1)}{(p_i-1)}$-edik hatványra:

$$a^{n-1}\equiv 1 \pmod{p_1},$$
$$\vdots$$
$$a^{n-1}\equiv 1 \pmod{p_k}.$$

Ezen a ponton két lehetőség közül választhatunk: Először nézzük meg az egyszerűbbet. A fenti kongruenciákból következik, hogy $a^{n-1}-1$ osztható $p_1,\ \ldots,\ p_k$-val, tehát $a^{n-1}\equiv 1 \pmod{n}$. A másik lehetőség kissé hosszabb. Tekintsük a kongruenciákat úgy, mint egy szimultán kongruenciarendszert az a^{n-1}-re mint ismeretlenre nézve. Ezek után, felhasználva a kínai maradéktételt és a 2. lemmát, kapjuk, hogy $a^{n-1}\equiv 1 \pmod{n}$.

A Korselt-kritérium bizonyítása után lássuk annak néhány következményét:

1. p_j nem oszthatja (p_i-1)-et $(1\le j<i\le k)$, mert ez ellentmondana annak, hogy $(p_i-1)\,|\,(n-1)$ és $p_j\,|\,n$ egyszerre teljesül. Ezért nincs páros Carmichael-szám.
2. Ha n Carmichael-szám és van $4k+1$ alakú prímosztója, akkor a $4k-1$ alakú prímosztóinak száma páros. Hasonló igaz 4 helyett 6-ra is. Belátása hosszadalmas.
3. Minden Carmichael-számnak legalább három különböző prímosztója van. Ha ugyanis csak két prímosztója lenne, azaz $n=pq$, ahol p, q prímek, akkor:

$$\frac{pq-1}{q-1}=\frac{pq-p+p-1}{q-1}=p+\frac{p-1}{q-1}\ \text{egész},$$

így $\dfrac{p-1}{q-1}$ egész, és ugyanígy $\dfrac{q-1}{p-1}$ is egész; tehát $\dfrac{p-1}{q-1}=1$, amiből $p=q$ következik, de ez ellentmond a négyzetmentes tulajdonságnak.

KöMaL – 2000/3 MAT0003 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 15:29 (13. lap)

3. Carmichael-számok konstruálása Carmichael-számokból

Az alábbiakban azt vizsgáljuk meg, miként lehet és érdemes Carmichael-számokat konstruálni már ismertekből. Elsőként a számtani sorozat lehetőségét vizsgáljuk. Megmutatjuk, hogy ilyen módon csak nagyon korlátozott mértékben juthatunk Carmichael-számokhoz, sőt az azoknál lényegesen gyakoribb négyzetmentes számokhoz.

4. Tétel. *A négyzetmentes számok halmazában nincs végtelen számtani sorozat.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik egy kívánt sorozat. Legyen $p_1 p_2 \ldots p_n$ az első elem és d a differencia. Ekkor a sorozat minden eleme $p_1 p_2 \ldots p_n + kd$ alakba írható, és ezek a számok négyzetmentesek. Tehát p_i^2 nem lehet osztója $p_1 \ldots p_n + kd$-nek semmilyen i-re és k-ra. Minden i-re két lehetőség van: $(d, p_i) = 1$ vagy $(d, p_i) = p_i$. Ha $(d, p_i) = 1$, akkor létezik olyan x, amelyre

$$xd \equiv -p_1 \ldots p_{i-1} p_{i+1} \ldots p_n \pmod{p_i},$$

így p_i-vel beszorozva:

$$p_1 \ldots p_n + p_i x d \equiv 0 \pmod{p_i^2};$$

tehát ekkor $k = p_i x$ választással egy olyan tagját találtuk meg a sorozatnak, amelynek van négyzetszám osztója. Ezért minden i-re $(d, p_i) = p_i$, tehát $d = p_1 \ldots p_n d_1$.

A sorozat k-adik eleme:

$$p_1 \ldots p_n + kd = p_1 \ldots p_n + k p_1 \ldots p_n d_1 = p_1 \ldots p_n (1 + k d_1).$$

A fenti okoskodást folytathatjuk d_1-re: ha $(d_1, p_i) = 1$, akkor p_i-hez létezik olyan x_i, amelyre

$$x_i d_1 \equiv -1 \pmod{p_i},$$

és akkor $p_i \mid x_i d_1 + 1$, tehát $p_i^2 \mid p_1 \ldots p_n (x_i d_1 + 1)$, ellentmondás.

Tehát azt kaptuk, hogy $p_i^2 \mid d$ minden $i = 1, \ldots, n$-re. Legyen $a = p_1 \ldots p_n$; ezzel a jelöléssel minden elem $a + k a^2 d_2$ alakba írható. De $a + k a^2 d_2 = a(1 + k a d_2)$-ben $k = a d_2 + 2$-t helyettesítve:

$$a(1 + k a d_2) = a(1 + (a d_2 + 2) a d_2) = a(1 + 2 a d_2 + (a d_2)^2) = a(1 + a d_2)^2.$$

Így ellentmondásra jutottunk, megmutattuk hogy minden végtelen számtani sorozatban van olyan elem, amelynek osztója egy négyzetszám.

Megjegyzés. Ugyanennek a tételnek egy elegánsabb és jól általánosítható bizonyítását adta Wladyslaw Narkiewicz egy levelében, a tétel bizonyítását egy két tagból álló szimultán kongruenciarendszer megoldására vezetve vissza.

A következőkben megvizsgáljuk, mikor lehet két Carmichael-szám szorzata is Carmichael-szám. Ezzel azonban a négyzetmentes tulajdonság miatt Carmichael-számok véges halmazából csak véges halmazt tudunk előállítani. A $\lambda(N)$ függvény segítségével egyszerű választ adhatunk a fenti kérdésre. A kapott feltétel a Korselt-kritérium következménye.

5. Tétel. *Legyenek N és Q Carmichael-számok. Az NQ szám pontosan akkor Carmichael-szám, ha $(N, Q) = 1$, valamint $N \equiv 1 \pmod{\lambda(Q)}$ és $Q \equiv 1 \pmod{\lambda(N)}$.*

Bizonyítás. $(N, Q) = 1$ szükséges a szorzat négyzetmentességéhez. A Korselt-kritériumot fogjuk használni: NQ Carmichael-szám, ha $p \mid NQ$-ból $p-1 \mid NQ-1$ következik. Legyen $N = p_1 \dots p_k$, $Q = q_1 \dots q_s$. Ezzel a jelöléssel a feltétel az, hogy az $\dfrac{NQ-1}{p_i-1}$ és az $\dfrac{NQ-1}{q_j-1}$ hányadosok értéke egész legyen.

Alakítsuk át ezeket a kifejezéseket:

$$\frac{NQ-1}{p_i-1} = \frac{NQ-Q+Q-1}{p_i-1} = \frac{Q(N-1)}{p_i-1} + \frac{Q-1}{p_i-1}.$$

Mivel N Carmichael-szám, azért $\dfrac{N-1}{p_i-1}$ egész, így $\dfrac{Q-1}{p_i-1}$-nek kell egésznek lennie, ha $i = 1, \dots, k$; ez viszont akkor és csak akkor teljesül, ha $Q \equiv 1 \pmod{[p_1-1, \dots, p_k-1]}$. A Carmichael-függvényt használva ez éppen azt jelenti, hogy $Q \equiv 1 \pmod{\lambda(N)}$. A másik kongruencia ugyanígy látható be.

A következőkben azt az esetet vizsgáljuk meg, amikor nem egy Q Carmichael számot, hanem csupán egy négyzetmentes R számot választunk az N-hez szorzónak. Ekkor, ha $N = p_1 \dots p_k$, $R = q_1 \dots q_s$, annyit mondhatunk, hogy

$$\frac{NR-R+R-1}{p_i-1} = \frac{R(N-1)}{p_i-1} + \frac{R-1}{p_i-1}$$

szerint $R \equiv 1 \pmod{\lambda(N)}$ szükséges, de a másik esetben ez nem működik, mivel nem tudjuk, van-e egyáltalán olyan j, amelyre $\dfrac{R-1}{q_j-1}$ egész. Az előző bizonyítás gondolatmenetét használva mindössze annyit állíthatunk, hogy $\dfrac{\frac{NR}{q_j}-1}{q_j-1}$ egész kell legyen minden $j = 1, \dots, s$-re. Ezek alapján konstruálhatunk egy algoritmust ilyen R-ek keresésére, de az bonyolult és lassú lenne a négyzetmentesség vizsgálata miatt. Ezért N-et csak egyetlen prímmel szorozzuk; legyen ez a prím q. Ekkor a Korselt-kritérium alapján

$$\frac{Nq-1}{q-1} = \frac{Nq-N+N-1}{q-1} = N + \frac{N-1}{q-1} \text{ egész,}$$

így $\dfrac{N-1}{q-1}$ egész, és ha $N = p_1 \dots p_k$ és $i = 1, \dots, k$, akkor

$$\frac{Nq-1}{p_i-1} = \frac{Nq-q+q-1}{p_i-1} = \frac{q(N-1)}{p_i-1} + \frac{q-1}{p_i-1} \text{ egész.}$$

Mivel N Carmichael-szám, azért $\dfrac{q-1}{p_i-1}$ egész kell legyen minden $i = 1, \dots, k$-ra. Ez azt jelenti, hogy $[p_1-1, \dots, p_k-1] \mid q-1$, vagyis $\lambda(N) \mid (q-1)$.

Ezek és az előző megállapítások alapján, ha létezik olyan k, amelyre $q=k\lambda(N)+1$ prím, és $\dfrac{N-1}{k\lambda(N)}$ egész, akkor Nq Carmichael-szám. *Dirichlet* tétele szerint az $n\lambda(N)+1$ ($n\in\mathbf{Z}^+$) számtani sorozatban végtelen sok prímszám található, így van rá esélyünk, hogy kívánt alakú prímet találjunk. Vajon találhatunk-e egy újabb p prímet Nq-hoz? Talán igen. Az előzőek alapján p-t így kereshetjük: kiszámítjuk $\lambda(Nq)$-t és $\dfrac{Nq-1}{\lambda(Nq)}$-t, meghatározzuk $\dfrac{Nq-1}{\lambda(Nq)}$ összes osztóját, ezeket megszorozzuk $\lambda(Nq)$-val, és hozzáadunk 1-et, végül megnézzük, hogy ezek közül melyik prím. Ebben az algoritmusban $\lambda(Nq)$ nagyon fontos, és úgy tűnik, nehéz kiszámítani. Szerencsére ez nincs így. Ha ismerjük $\lambda(N)$-et az előző ciklusból, akkor könnyen kiszámítható $\lambda(Nq)$:

$$\lambda(N)=[p_1-1,\ldots,p_k-1],$$
$$\lambda(Nq)=[p_1-1,\ldots,p_k-1,q-1],\qquad \text{de } q=k_1\lambda(N)+1, \text{ így}$$
$$\lambda(Nq)=\big[p_1-1,\ldots,p_k-1,k_1[p_1-1,\ldots,p_k-1]\big]=k_1[p_1-1,\ldots,p_k-1]=k_1\lambda(N).$$

Ezek alapján a következő algoritmust alkothatjuk meg:

1. [inicializálás] $m_0:=\lambda(N)$, $i:=1$, $k_0:=1$;
2. [a Carmichael függvény értéke] $m_i:=k_{i-1}^{(j)}m_{i-1}$;
3. $r_i:=\dfrac{N_{i-1}^{(j)}-1}{m_i}$;
4. meghatározzuk az összes olyan j-t, amelyre $k_i^{(j)}\mid r_i$; legyen a megfelelő j indexek halmaza J;
5. [prímtesztek] a $k_i^{(j)}m_i+1$ számok prímségi tesztelése; legyen A azon j indexek halmaza, amelyekre $k_i^{(j)}m_i+1$ prím; ha A üres, akkor a ciklus véget ér;
6. [az újabb Carmichael-szám] $N_i^{(j)}:=N_{i-1}^{(l)}(k_i^{(j)}m_i+1)$;
7. [ciklusléptetés] vissza a 2. lépésre: $i:=i+1$;

Az első lépés előtt $m_0=\lambda(N)$-et és $k_0=1$-et kell megadni az induláshoz, ahol N a kiindulásul vett Carmichael-szám. Mivel egy ciklusban több $k_i^{(j)}m_i+1$ alakú prímet is találhatunk, azért ezt az algoritmust kombinálni kell egy *backtrack* (visszaléptető) algoritmussal, hogy megtaláljuk az összes lehetséges Carmichael-számot. Ez az algoritmus egyszerűnek tűnik, azonban tartalmaz néhány bonyolult számítást, amelyek hosszú időt vehetnek igénybe.

A kritikus lépések a következők:

1. $\dfrac{N_{i-1}^{(l)}-1}{m_i}$ kiszámítása;
2. $k_i^{(j)}$-k keresése;
3. a $k_i^{(j)}m_i+1$ számok prímségi tesztelése.

Az utolsó problémára nagyon jó és gyors tesztek vannak. Véleményem szerint, ha a három esetet párhuzamosan kezeljük, akkor ezzel eléggé meggyorsíthatjuk az algoritmust. Az összekötő kapocs a számok ábrázolása. Ha a számokat prímhatványok szorzataként ábrázolnánk, akkor nagyon gyorsan lehetne osztani, osztókat meghatározni és $n-1$ prímfelbontása ismeretében viszonylag gyorsan meg lehet határozni n prím voltát. Tehát ha találnánk egy viszonylag gyors algoritmust n prímfelbontására $n-1$ prímfelbontásának ismeretében, akkor az egész algoritmus sokat gyorsulna. A prímtesztben a $k_i^{(j)}m_i+1$ kifejezésben $k_i^{(j)}$ is nagyon fontos. Szerencsére r_i nagyságát jól tudjuk becsülni N_{i-2} nagyságával:

$$r_i=\frac{N_{i-1}-1}{m_i}=\frac{N_{i-2}(k_{i-1}^{(j)}m_{i-1}+1)-1}{k_{i-1}^{(j)}m_{i-1}}=N_{i-2}+\frac{N_{i-2}-1}{m_{i-1}}\frac{1}{k_{i-1}^{(j)}}=N_{i-2}+\frac{r_{i-1}}{k_{i-1}^{(j)}},$$

ezért $r_i\geq N_{i-2}$ minden lehetséges i-re, N_{i-2} értéke pedig minden ciklusban egy prímszorzóval növekszik, r_i is legalább így növekszik, és minden reményünk megvan arra, hogy egy nagy számnak sok $k_i^{(j)}$ osztója legyen.

Irodalomjegyzék

[1] *G. Löh* és *W. Niebuhr:* A new algorithm for constructing large Carmichael numbers, Math. of Comput. 65 (1996) 823–836.

[2] *R. G. E. Pinch:* The Carmichael numbers up to 10^{15}, Math. of Comput. **61** (1993), 381–391.

[3] *W. R. Alford, A. Granville* és *C. Pomerance:* There are infinitely many Carmichael numbers, Annals of Math., **140** (1994), 703–722.

[4] *H. Dubner:* Carmichael numbers and egyptian fractions, Math. Japonica **43** (1996), 411–419.

[5] *D. E. Knuth:* The art of computer programming, Vol 2., 2. edition, section 4.5.4.

[6] *J. Chernick:* On Fermat's simple theorem, Bull. Amer. Math. Soc. **45** (1939), 269–274.

[7] *M. Yorinaga:* Numerical computations of Carmichael numbers, Math. J. Okayama Univ. **20** (1978), 151–163.

[8] *M. Zhang:* Searching for large Carmichael numbers, Sichuan Daxue Xuebao **29,** 472–474 (1992).

[9] *D. Guillame* és *F. Morain:* Building Carmichael numbers with a large number of prime factors and generalization to other numbers, preprint, June (1992).

[10] *C. Pomerance:* Carmichael numbers, 28th Nederlands Matematisch Congres, Delft, April 22, 1992.

[11] *N. G. W. H. Beeger:* On composite numbers n for which $an-1\equiv 1 \pmod{n}$ for every a prime to n, Scripta Math. **16,** (1950) 133–135.

[12] *H. J. A. Duparc:* On Carmichael numbers, Simon Stevin **29,** (1952) 21–24.

Járási István
matematikus egyetemi hallgató,
Debreceni Egyetem

A Hajdú-Bihar megyei Matematikai Versenyről

1975 és 1987 között a BJMT Hajdú-Bihar megyei Tagozata és a Megyei Művelődés- és Oktatási Osztály támogatásával évente megrendezésre került a Hajdú-Bihar megyei Matematikai Verseny, amelyen a megye középiskolásai vettek részt. 10 éves kihagyás után sikerült a versenyt a KLTE Matematikai és Informatikai Intézete és a Felsőoktatási Programfinanszírozási Pályázat tehetséggondozó programja keretében feléleszteni (a program vezetője *Dr. Lajkó Károly*). Az 1999/2000. tanévben 1999. november 18-án rendeztük meg a megye összes középiskolája (gimnázium, szakközépiskola) 9–12. évfolyamos tanulói számára a versenyt, amelyen közel 1000 tanuló írt versenydolgozatot.

A versenyfeladatokat a KLTE oktatói állították össze (9. évfolyam: *Dr. Kántor Sándor,* 10. évfolyam: *Dr. Kovács András,* 11. évfolyam: *Dr. Páles Zsolt,* 12. évfolyam: *Dr. Kántor Sándorné*). Mindegyik évfolyamon 5 feladatot kaptak a tanulók, amelyek kidolgozására 2 órát fordíthattak. Egy-egy feladatsor összpontértéke 60 pont volt.

A verseny igen eredményes volt. 29 tanár 48 diákja ért el helyezést, kapott dicséretet, maximális pontszámot 7-en értek el (*Csóka Endre, Nagy Tibor, Siroki László, Varga Éva, Csige Sándor, Csillag Kristóf, Patay Gergely*).

A verseny eredményei:

9. évfolyam

1. *Csóka Endre,* Fazekas Mihály Gimn., Debrecen; *Nagy Tibor,* Fazekas Mihály Gimn., Debrecen;

2. *Nagy András,* Fazekas Mihály Gimn., Debrecen; *Nagy Erika,* Bethlen G. Szakközépiskola, Debrecen;

3. *Lakatos Kristóf,* KLTE Gyak. Gimn., Debrecen; *Krusper Balázs,* Tóth Árpád Gimn., Debrecen; *Hofgárt Gergely,* Hőgyes E. Gimn., Hajdúszoboszló; *Hajdú Gábor,* Mechwart A. Szakközépiskola, Debrecen.

Dicséret: *Kormos Attila* (Fazekas Mihály Gimn., Debrecen), *Nyul Balázs* (Fazekas Mihály Gimn., Debrecen), *Dombi Nóra* (Tóth Árpád Gimn., Debrecen).

10. évfolyam

1. *Siroki László,* Fazekas Mihály Gimn., Debrecen; *Timár Gábor,* Fazekas Mihály Gimn., Debrecen;

2. *Kovács Zoltán,* Tóth Árpád Gimn., Debrecen; *Erdei Zsuzsa,* Hőgyes E. Gimn., Hajdúszoboszló; *Tóth Ágnes,* Hőgyes E. Gimn., Hajdúszoboszló; *Guta Balázs,* Ady E. Gimn., Debrecen;

3. *Szakácsi János,* Fazekas Mihály Gimn., Debrecen; *Pajna Gabriella,* Tóth Árpád Gimn., Debrecen; *Szaszkó Viktor,* Bethlen G. Szakközépiskola, Debrecen; *Gál Zoltán,* Gábor

D. Szakközépiskola, Debrecen; *Varga Balázs,* Bethlen G. Szakközépiskola, Debrecen; *Hajdú János,* Mechwart A. Szakközépiskola, Debrecen;

Dicséret: *Borosi Aranka* (Svetits Katolikus Gimn., Debrecen), *Dombi Tímea* (Tóth Árpád Gimn., Debrecen), *Csirmaz Viktor* (Hőgyes E. Gimn., Hajdúszoboszló).

11. évfolyam

1. *Varga Éva,* Tóth Árpád Gimn., Debrecen;

2. *Csató György,* Hőgyes E. Gimn., Hajdúszoboszló; *Patalenszki Attila,* Bethlen G. Szakközépisk., Debrecen;

3. *Nagy Dávid,* Fazekas Mihály Gimn., Debrecen; *Vona Gábor,* Fazekas Mihály Gimn., Debrecen; *Zajdó Csaba,* Tóth Árpád Gimn., Debrecen; *Szilasi Zoltán,* KLTE Gyak. Gimn., Debrecen;

Dicséret: *Parádi Gábor* (Tóth Árpád Gimn., Debrecen), *Illés Péter* (Tóth Árpád Gimn., Debrecen), *Sajtos Erika* (Református Koll. Gimn., Debrecen).

12. évfolyam

1. *Csige Sándor,* KLTE Gyak. Gimn., Debrecen; *Csillag Kristóf,* Karacs F. Gimn., Püspökladány; *Patay Gergely,* Tóth Árpád Gimn., Debrecen;

2. *Fábián Ákos,* KLTE. Gyak. Gimn., Debrecen; *Nagy István,* KLTE Gyak. Gimn., Debrecen; *Oláh Gusztáv,* Mechwart A. Szakközépiskola, Debrecen;

3. *Vadkerti József,* KLTE Gyak. Gimn., Debrecen; *Kiss Norbert,* Fazekas Mihály Gimn., Debrecen; *Buday Tamás,* Tóth Árpád Gimn., Debrecen; *Lakatos Norbert,* Bethlen G. Szakközépiskola, Debrecen;

Dicséret: *Szilágyi Csaba* (Tóth Árpád Gimn., Debrecen), *Gunda Lénárd* (KLTE Gyak. Gimn., Debrecen).

A verseny feladatai

9. évfolyam

1. Mennyi ebben az évszázadban (1901-gyel kezdve és 2000-rel bezárva) az évszámok számjegyeinek az összege? *10 pont*

2. Három gyerek: A, B, C úgy osztozik egy tortán, hogy egymás után elveszik a maradék egy részét: A elveszi a torta egynegyedét, B a maradék egyharmadát, C a maradék felét. Ezután újra A következik: elveszi a maradék felét, B annak a felét, ami még megmaradt, és C azt viszi el, ami ezután még megmaradt. Ki mennyi részt kapott a tortából? *10 pont*

3. Mely $n>1$ természetes számra igaz, hogy n^3-n osztható 24-gyel? *11 pont*

4. Egy derékszögű háromszög köré írható körének sugara R, beírt körének sugara r. Mennyi a háromszög területe? *12 pont*

5. Egy téglatest egyik csúcsából induló éleinek hossza a, b, c. A téglatest térfogata 60. Tudjuk, hogy

$$3\le a\le 4,\qquad 4\le b\le 6.$$

Van-e ezeket a feltételeket teljesítő mindegyik a, b, c számhármas esetén olyan háromszög, amelyik oldalainak hossza a, b, c? *17 pont*

10. évfolyam

1. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely osztható az

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15

számok mindegyikével? *8 pont*

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\big||x|-2\big|=1$$

egyenletet! *10 pont*

3. Jóska órájának leesett a kismutatója. Sebaj – gondolja –, napjában néhányszor, amikor a nagymutató eltakarja a kicsit, a többi órán is ugyanezt lehet látni. Hányszor fordul elő ez az eset egy „jó" órával egy nap alatt, és mely időpontokban? *12 pont*

4. Egy paralelogrammába rajzoljunk egy másik paralelogrammát. A két paralelogrammának a középpontja vajon minden esetben egybeesik? (Egy paralelogramma akkor van egy másikba rajzolva, ha a berajzolt alakzat csúcspontjai a másik paralelogramma különböző oldalain találhatók.) *14 pont*

5. Pista a

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+x}+\sqrt[3]{\sqrt{5}-x}=\sqrt[3]{5\sqrt{5}}$$

egyenlet megoldására az $x=2$ gyököt kapta. Győződjünk meg arról, hogy az $x=2$ valóban gyök-e, és vizsgáljuk meg, nincs-e más gyöke az egyenletnek! *16 pont*

11. évfolyam

1. Állapítsuk meg, hogy 20!-nak a 6-os számrendszerbeli alakja hány nullára végződik ($20!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 20$). *10 pont*

2. Oldjuk meg a

$$\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{x^2+12x+36}=\sqrt{x^2+8x+16}+\sqrt{x^2+10x+25}$$

egyenletet a valós számok halmazán. *11 pont*

3. Oldjuk meg a

$$\left(\log_{\sin x}\sin 2x\right)\left(\log_{\sin 2x}\sin 3x\right)\left(\log_{\sin 3x}\sin 4x\right)=1$$

egyenletet a $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ intervallumon. *12 pont*

4. Szerkesszük meg az ABC háromszöget, ha ismerjük BC hosszát, valamint az $ASB\sphericalangle$ és az $ASC\sphericalangle$ szögek értékét, ahol S a háromszög súlypontja. *13 pont*

5. Legyen egy $ABCD$ négyzet alapú szabályos gúla csúcsa E. Tegyük fel, hogy $AEB\sphericalangle=30^\circ$. Legyenek P, Q, R rendre a BE, CE, DE élek olyan belső pontjai, amelyekre az $APQRA$ töröttvonal hossza minimális. Igazoljuk, hogy ekkor Q a CE él felezőpontja. *14 pont*

12. évfolyam

1. Az a_1 és a_2 valós számokból kiindulva képezzük az

$$a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n,\, a_{n+1},\, a_{n+2},\, \ldots$$

sorozatot úgy, hogy

$$a_3 = a_2 - a_1,\, a_4 = a_3 - a_2,\, \ldots,\, a_{n+2} = a_{n+1} - a_n,\, \ldots \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Számoljuk ki a sorozat első 2004 tagjának összegét! *10 pont*

2. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az y tengelyt az origóban érinti, és érinti az $x - y = -1$ egyenletű egyenest is. *10 pont*

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

$$8\sqrt{1 - 2^x + 2^{2x-2}} > 2^{2x} - 2^{x+2} + 7.$$

12 pont

4. Legyen P az a oldalhosszúságú $ABCD$ négyzet köré írható körnek, Q pedig a négyzetbe írható körnek egy tetszőleges pontja. Bizonyítsuk be, hogy

$$3\left(d_{PA}^2 + d_{PB}^2 + d_{PC}^2 + d_{PD}^2\right) = 4\left(d_{QA}^2 + d_{QB}^2 + d_{QC}^2 + d_{QD}^2\right).$$

14 pont

5. Négy gömb alakú golyó fekszik egy asztallapon úgy, hogy mindegyik golyó érinti az asztallapot és a másik három golyót. A négy golyó közül három sugarának a hossza R. Határozzuk meg a negyedik golyó sugarának a hosszát. *14 pont*

Kántor Sándorné
a Versenybizottság vezetője

Beszámoló a III. Hegyi Lajos Matematikai Emlékversenyről

Marosvásárhely, 1999. december 11.

Az emlékversenyre évente, decemberben kerül sor a marosvásárhelyi *Bolyai Farkas Líceumban.* Iskolánk vezetősége és matematika tanárai így állítanak emléket a líceum egykori diákjának, a nyolcvanas években rendezett számos helyi és országos matematika verseny díjazottjának, Hegyi Lajosnak, aki – máig is tisztázatlan körülmények között – hősi halált halt 1989. december 21-én, városunk főterén.

A idei versenyen Erdély nagyhírű iskoláiból közel száz, matematikát kedvelő és színvonalasan művelő diák vett részt. Sajnos a verseny kezdetekor vasutassztrájk bénította meg részlegesen a közlekedést, így néhány csapat nem tehetett eleget a meghívásnak.

Az ünnepélyes eredményhirdetést *Fodor Imre,* Marosvásárhely polgármestere is megtisztelte jelenlétével.

Díjazottak:

IX. osztály

I. díj: *Dáné Andrea*, Bolyai Farkas Líceum, Marosvásárhely;
II. díj: *Szilágyi Márta*, Báthory István Líceum, Kolozsvár;
III. díj: *Sebe Attila*, Báthory István Líceum, Kolozsvár;

Dicséretek: *Kiss Zsuzsa*, Tamási Áron Líceum, Székelyudvarhely; *Klein Cristian*, Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely; *Orbán György*, Báthory István Líceum, Kolozsvár; *Kovács Károly*, Tamási Áron Líceum, Székelyudvarhely.

X. osztály

I. díj: *Buksa Szilárd*, Baróti Szabó Dávid Líceum, Barót;
II. díj: *Bâtiu Daria*, Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely;
III. díj: *Pol Marius*, Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely;

Dicséretek: *Sipos István*, Ady Endre Líceum, Nagyvárad; *Berekméri Melinda*, Bolyai Farkas Líceum, Marosvásárhely; *Gyöngyösi Éva*, Tamási Áron Líceum, Székelyudvarhely; *László Tamás*, Tamási Áron Líceum, Székelyudvarhely; *Szőcs Emese*, Márton Áron Líceum, Csíkszereda.

XI. osztály

I. díj: *Dávid László*, Bolyai Farkas Líceum, Marosvásárhely;
II. díj: *Măşăşan Alexandru*, Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely;
III. díj: *Csibi Attila*, Bolyai Farkas Líceum, Marosvásárhely;

Dicséretek: *Babu Andreea*, Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely; *Mátis Anikó*, Apáczai Csere János Líceum, Kolozsvár; *Ogrean Mihai*, Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely.

XII. osztály

I. díj: *Demeter Albert*, Orbán Balázs Líceum, Székelykeresztúr;
I. díj: *Stoica Emanuel*, Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely;
III. díj: *Mátis István*, Apáczai Csere János Líceum, Kolozsvár;
III. díj: *Popa Daniel*, Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely;

Dicséretek: *Kósa Gergely*, Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely; *Molnár Róbert*, Németh László Líceum, Nagybánya; *Tamás Levente*, Bolyai Farkas Líceum, Marosvásárhely; *Găbudean Călin*, Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely.

Dáné Károly

A III. Hegyi Lajos Emlékverseny feladatai

IX. osztály

1. Egy hétjegyű telefonszámot ($a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$) megjegyezhetőnek nevezünk, ha az $a_1a_2a_3$ számjegysorozat megegyezik az $a_4a_5a_6$ vagy $a_5a_6a_7$ számjegysorozatok valamelyikével (esetleg mindkettővel). Minden egyes a_i a 0, 1, 2, …, 9 számjegyek bármelyike lehet. Hány megjegyezhető telefonszám van összesen?

2. Határozzátok meg az x, y és z valós számokat, ha:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{x+y+z}{2}.$$

3. Oldjátok meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$(x+y)^2-4(x-y)=13.$$

4. Adott a síkban két háromszög: ABC és $A'B'C'$, súlypontjaik G, illetve G'. Bizonyítsátok be, hogy:

a) $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\cdot\overrightarrow{GG'}$;

b) ha $\overrightarrow{A'B}=k\cdot\overrightarrow{A'C}$, $\overrightarrow{B'C}=k\cdot\overrightarrow{B'A}$, $\overrightarrow{C'A}=k\cdot\overrightarrow{C'B}$ ($k\in\mathbf{R}$, $k\neq 1$), akkor G és G' egybeesnek.

X. osztály

1. Bizonyítsátok be, hogy ha $z_1, z_2, \ldots, z_n\in\mathbf{C}$, és $|z_1|=|z_2|=\ldots=|z_n|$, akkor

$$\left(1+\frac{z_2}{z_1}\right)\left(1+\frac{z_3}{z_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{z_n}{z_{n-1}}\right)\left(1+\frac{z_1}{z_n}\right)\in\mathbf{R}.$$

2. Oldjátok meg a következő egyenletet: $\log_3\left(2^x+1\right)=\log_2\left(3^x-1\right)$.

3. Két szabályos háromoldalú gúla alapja közös. Két oldalél által bezárt szög mértéke az egyik gúlán α, a másikon β. A közös alapháromszög köré írt kör sugara a két gúla magasságának mértani középarányosa. Igazoljátok, hogy:

$$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}.$$

4. Egy konvex négyszögben AB és CD szemben fekvő oldalak. Mindkettőt 3 egyenlő részre osztjuk, és a megfelelő szemben fekvő osztópontokat összekötjük. (A keletkezett szakaszok nem metszik egymást.) Bizonyítsuk be, hogy az így keletkezett 3 négyszög között van olyan, amelyiknek a területe egyenlő az adott négyszög területének egyharmadával.

XI. osztály

1. Adott egy $n\times n$ mezőből álló sakktábla. Legkevesebb hány mezőt kell találomra kifesteni hogy biztosan létezzen legalább egy teljesen befestett sor vagy oszlop?

2. Legyen $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$; $A^2=0_n$. (A $n\times n$-es valós mátrix, a négyzete az azonosan 0 mátrix.) Igazoljátok, hogy:

a) $\det(A+I_n)\geq 0$;

b) ha n páratlan szám, akkor $\det(A+I_n)\geq\det(A-I_n)$.

3. Legyen $x_n=\sin\pi\sqrt[3]{n^3+n+\pi}$, $y_n=\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$, $z_n=nx_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$. Tanulmányozzátok az $(x_n)_{n>0}$, $(y_n)_{n>0}$ és $(z_n)_{n>0}$ sorozatok konvergenciáját, és amelyiknek van, számítsátok ki a határértékét!

4. Adott $a_0=a_1=0$, $a_{n+1}-2a_n+a_{n-1}=n$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$. Bizonyítsátok be, hogy a $b_n=\sqrt[n]{\dfrac{a_n}{n(n-1)}}$ összefüggéssel értelmezett $(b_n)_{n\ge 2}$ sorozat konvergens, és számítsátok ki a határértékét!

XII. osztály

1. Az $f:(0,\pi)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{\sin 2nx}{\sin x}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ függvény egyik primitív függvénye F. Bizonyítsátok be, hogy ha $\lim\limits_{\substack{n\to 0\\ n>0}} F(x)=0$, akkor $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\ldots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\right)$.

2. Legyen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, és $s_n=\sin^2\alpha_1+\sin^2\alpha_2+\ldots+\sin^2\alpha_n$. Bizonyítsátok be, hogy

$$\operatorname{tg}^2\alpha_1+\operatorname{tg}^2\alpha_2+\ldots+\operatorname{tg}^2\alpha_n\ge\frac{n\cdot s_n}{n-s_n}\qquad(n\in\mathbf{N}^*).$$

3. Legyen $(G,\cdot\,)$ egy csoport, amely rendelkezik a következő tulajdonsággal:

$$\exists a\in G\qquad \text{úgy, hogy } \forall x\in G \text{ esetén } a\cdot x^n\cdot a=x.$$

Bizonyítsátok be, hogy, ha $n=2$, akkor G csak egy elemből áll, ha pedig $n=3$, akkor G kommutatív csoport.

4. Hány megoldása van az egész számok halmazában az $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{10^n}$ egyenletnek $(n\in\mathbf{N}^*)$?

Mérőlap felvételire készülőknek IV.

A Juhász Gyula Tanárképző Főiskola tiszteletére, ahol első diplomámat szereztem, és először tanítottam.

1. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\sqrt{x^2-3x+6}+\sqrt{x^2-3x+3}=3$$

egyenletet.

2. Egymillió forintot helyezünk el egy bankban évi 14%-os kamatos kamatra. 3 év múlva kiveszünk egymillió forintot. Ekkor a kamatlábat 12%-ra csökkentik. Ezt követően legalább hány teljes évet kell várnunk, hogy a pénzünk 600 000 Ft-ra növekedjen?

3. Egy derékszögű háromszög befogóit érintő félkör középpontja az átfogón van. Mekkora ennek a félkörnek a sugara, ha a középpontja az átfogót 1,8 és 2,4 egységnyi szakaszokra osztja.

4. Az $ABCD$ rombusz BD átlójának egyenlete $2x-y=3$, a rombusz oldalának hossza 5 egység és $A(6;4)$. Határozza meg a többi csúcspont koordinátáit és a rombusz területét.

5. Oldja meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{8}{3}, \qquad \log_2(x+y)-\log_2(x-y)=1.$$

6. Egy szabályos négyoldalú gúla alapéle $2a$, magassága a egység. A gúlába írt kocka alaplapja a gúla alaplapján van, fedőlapjának csúcsai pedig a gúla oldalélein. Hányszorosa a gúla térfogata a kocka térfogatának?

7. Igazolja, hogy a p valós paraméter tetszőleges értékénél pontosan egy valós gyöke van az $x|x-2p|+p=0$ egyenletnek.

8. Jelölje a, b és c a háromszög oldalainak hosszát. Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{1}{4}<\frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2}\le\frac{1}{3}.$$

Rábai Imre

Megoldásvázlatok, eredmények a III. mérőlap (2000/2. sz.) feladataihoz

1. Az első egyenlet $(x-y)(x+y-2)=0$ alakban is írható. Ha $x=y$, akkor $2x^2=10x$, így a megoldások $x_1=0$, $y_1=0$ és $x_2=5$, $y_2=5$.

Ha $x+y=2$, akkor $x^2+(2-x)^2=10$, a megoldások $x_3=3$, $y_3=-1$ és $x_4=-1$, $y_4=3$.

2. Ha az első elem a, a hányados q, akkor

$$a\cdot aq^4=12^2 \quad \text{és} \quad aq-aq^3=18,$$

azaz $(aq^2)^2=12^2$, tehát a harmadik elem $a_3=12$ vagy $a_3=-12$, így

$$\frac{12}{q}-12q=18 \qquad \text{vagy} \qquad \frac{-12}{q}+12q=18;$$

$$2q^2+3q-2=0 \qquad \text{vagy} \qquad 2q^2-3q-2=0.$$

A megoldások: Ha $q=\frac{1}{2}$, akkor $a=48$, ha $q=-2$, akkor $a=3$, ha $q=2$, akkor $a=-3$ és ha $q=-\frac{1}{2}$, akkor $a=-48$.

3. Az y tengelyt az origóban érintő körök egyenlete $(x-u)^2+y^2=u^2$. Ezen körök közül azok érintik az $y=1-x$ egyenletű egyenest, amelyekre a két vonal egyenlete által alkotott egyenletrendszer megoldása során kapott (x-re vagy y-ra) másodfokú egyenlet diszkriminánsa nulla.

$$(x-u)^2+(1-x)^2=u^2, \qquad 2x^2-2(1+u)x+1=0,$$

$D=4(u+1)^2-8$. $D=0$ pontosan akkor, ha $u=-1+\sqrt{2}$ vagy $u=-1-\sqrt{2}$. A feltételeknek két kör felel meg, ezek egyenlete:

$$x^2+y^2+(2-2\sqrt{2})x=0 \qquad \text{vagy} \qquad x^2+y^2+(2+2\sqrt{2})x=0.$$

(A feladat sokféleképpen oldható meg. Keressen más módszereket is.)

4. Az egyenlet gyökei akkor valós számok, ha az egyenlet D diszkriminánsa nem negatív, azaz ha

$$(2-2m)^2-4\cdot 2\cdot(m^2-4m+1)\ge 0, \quad \text{azaz ha} \quad 3-2\sqrt{2}\le m\le 3+2\sqrt{2}.$$

Most $x_1x_2=\dfrac{m^2-4m+1}{2}\equiv\dfrac{1}{2}(m-2)^2-\dfrac{3}{2}$, így az m-re vonatkozó feltételből $(m-2)$-re

$$1-2\sqrt{2}\le m-2\le 1+2\sqrt{2}, \quad \text{tehát} \quad 0\le(m-2)^2\le(1+2\sqrt{2})^2.$$

Így

$$-\frac{3}{2}\le\frac{1}{2}(m-2)^2-\frac{3}{2}=x_1x_2\le\frac{1}{2}(1+2\sqrt{2})^2-\frac{3}{2}=3+2\sqrt{2}.$$

x_1x_2 legkisebb értéke tehát $-\dfrac{3}{2}$ (ha $m=2$), legnagyobb értéke $3+2\sqrt{2}$, ha $m=3+2\sqrt{2}$.

5. Ha $x>0$, $y>0$ és $x+y=4$, akkor az $x+y\ge 2\sqrt{xy}$ azonos egyenlőtlenség alkalmazásával $4\ge 2\sqrt{xy}$, tehát $xy\le 4$, $\dfrac{1}{xy}\ge\dfrac{1}{4}$ és így

$$\left(3+\frac{1}{x}\right)\left(3+\frac{1}{y}\right)=9+\frac{1}{xy}+3\cdot\frac{x+y}{xy}=9+\frac{13}{xy}\ge 9+\frac{13}{4}=\left(\frac{7}{2}\right)^2.$$

Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x=y=2$.

6. A háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt az őt közbezáró két oldal arányában osztja, így az ismeretlen két oldal két részét jelölje x, illetve $2x$, a keresett szög γ. A két részháromszögben felírhatjuk a koszinusztételt.

$$x^2=12^2+8^2-2\cdot 8\cdot 12\cdot\cos\frac{\gamma}{2},$$
$$4x^2=24^2+8^2-2\cdot 8\cdot 24\cdot\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Az egyenlő együtthatók módszerével $\cos\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{1}{2}$, $x=4\sqrt{7}$. Így $\dfrac{\gamma}{2}=60^\circ$, $\gamma=120^\circ$; a harmadik oldal $3x=12\sqrt{7}$ egység.
(A feladat más módokon is megoldható.)

7. Az *elemző* ábrán vegyük fel a P pontot az AB szakaszon belül és legyen $AP=x$, a négyzet oldalát jelölje a. (Az AB szakasz egyenesét tekintsünk olyan *számegyenesnek*, amelynek origója az A pont. Így a P pontnak az x valós szám felel meg.) Ezek szerint $PB=a-x$, $PD=\sqrt{17}$, $PC=5$, $AD=BC=a$.

Az APD és a BPC derékszögű háromszögre alkalmazhatjuk Pitagorasz tételét. $a^2+x^2=17$, $a^2+(a-x)^2=25$, ahonnan $x=\dfrac{a^2-8}{2a}$, tehát $a^2+\left(\dfrac{a^2-8}{2a}\right)^2=17$.

$5a^4-84a^2+64=0$, $a^2=16$ vagy $a^2=\frac{4}{5}$.

Így $a=4$ és ekkor $x=1$ vagy $a=\frac{2}{\sqrt{5}}$ és ekkor $x=-\frac{9}{\sqrt{5}}$.

Az első esetben a P pont az AB szakaszon belül van, a második esetben az A végpontú AB félegyenes kiegészítő félegyenesén.

8. Azonos átalakításokkal ($\cos^2 x=1-\sin^2 x$) és rendezéssel az egyenlet

$$(2\sin x+\sin y)^2+\cos^2 y=0$$

alakban írható, így $\cos y=0$ és $2\sin x+\sin y=0$. $\cos y=0$, ha $y=\frac{\pi}{2}+l\pi$, $l\in\mathbf{Z}$.

Ha $y=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, akkor $\sin y=1$, $\sin x=-\frac{1}{2}$, így $x=-\frac{\pi}{6}+2n\pi$ vagy $x=-\frac{5\pi}{6}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$; ha $y=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, akkor $\sin y=-1$, $\sin x=\frac{1}{2}$, így $x=\frac{\pi}{6}+2n\pi$ vagy $x=\frac{5\pi}{6}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$.

(Más módokon is megoldható a feladat.)

Rábai Imre

A C gyakorlatok megoldása

C. 550. *Egy horgász a napi zsákmánya össztömegének 35%-át kitevő három legnagyobb halat a mélyhűtőbe tette. A három legkisebb halat, amelyek együttesen a megmaradt rész $\frac{5}{13}$-át tették ki, elvitte a macska, a többit pedig megfőzték ebédre. Hány halat fogott a horgász?*

Javasolta: *Dobos Sándor* Budapest

Megoldás. Jelölje a zsákmány össztömegét M. A mélyhűtőbe tett három legnagyobb hal össztömege: $0{,}35M$.

A három legkisebb hal össztömege – ezeket vitte el a macska – a megmaradt rész $\frac{5}{13}$-a, azaz

$$\frac{5}{13}(M-0{,}35M)=0{,}25M.$$

Az ebédre megfőzött halak össztömege:

$$M-(0{,}35+0{,}25)M=0{,}4M.$$

Ez legalább 4 halat jelent, hiszen a 3 legnagyobb hal össztömege is csak $0{,}35M$. Összesen tehát legalább 10 hal volt.

Tegyük fel, hogy n darab halat fogott a horgász ($n \geq 10$). Mivel a 3 legnagyobb hal össztömege nagyobb, mint azoké, amiket megfőztek, ez viszont nagyobb azokénál, amit a macska elvitt, az átlagukra igazak az alábbi egyenlőtlenségek:

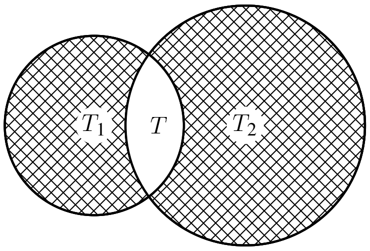
$$\frac{0{,}35M}{3} \geq \frac{0{,}4M}{n-6} \geq \frac{0{,}25M}{3}.$$

Az első egyenlőtlenségből $n \geq 9{,}428$, a második egyenlőtlenségből $n < 10{,}8$, s mivel n egész szám, $n = 10$.

Csató György (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., 11. o.t.)

840 dolgozat érkezett. 5 pontos 276, 4 pontos 173, 3 pontos 69, 2 pontos 38, 1 pontos 52, 0 pontos 227. Nem versenyszerű 5 dolgozat.

C. 552. *Az ábrán látható két kör középpontja* 5 cm*-re van egymástól, sugaraik hossza* 3 cm *és* 4 cm*. Mekkora a két satírozott terület különbsége?*



Megoldás. Jelölje a két kör közös területét T, a körök kiegészítő részeinek a területét $T_1 < T_2$.

A keresett területek különbsége:

$$T_2 - T_1 = (T_2 + T) - (T_1 + T) = 4^2\pi - 3^2\pi = \\ = 7\pi \approx 21{,}99\ \text{cm}^2.$$

Az eredmény független a körök középpontjainak távolságától, ami természetesen kisebb kell legyen, mint a körök sugarának összege, ha azt akarjuk, hogy a két körnek legyen közös része.

874 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 636, 4 pontot 150, 3 pontot 16, 2 pontot 12, 1 pontot 34, 0 pontot 25 versenyző. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

C. 554. *Mutassuk meg, hogy van olyan a szám, hogy* $\log_2 x + \log_3 x = \log_a x$ *teljesül minden pozitív x-re.*

Megoldás. Használjuk fel a logaritmus ismert azonosságai közül a következőt:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Az azonosság felhasználásával írjuk át az egyenletünket 10-es alapú logaritmusra:

$$\frac{\lg x}{\lg 2} + \frac{\lg x}{\lg 3} = \frac{\lg x}{\lg a};$$

$x = 1$ esetén ez minden 1-től különböző pozitív a-ra teljesül, $\lg x \neq 0$ esetén pedig végigoszthatjuk az egyenletet $\lg x$-szel:

$$\frac{1}{\lg 2} + \frac{1}{\lg 3} = \frac{1}{\lg a}.$$

Mindkét oldal reciprokát véve kapjuk, hogy

$$\lg a = \frac{\lg 2 \lg 3}{\lg 2 + \lg 3} \approx 0{,}184\ 57,$$

ahonnan $a \approx 1{,}529\ 59$.

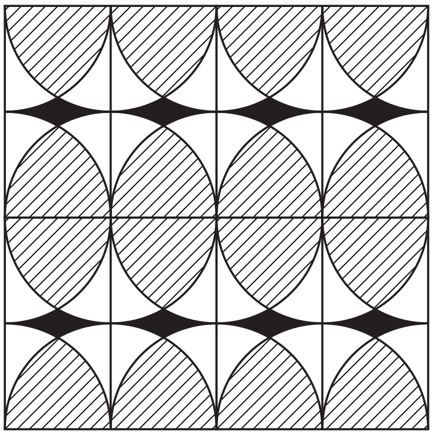
354 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 230, 4 pontot 72, 3 pontot 17, 2 pontot 15, 1 pontot 3, 0 pontot 12 beküldő. Nem versenyszerű 5 dolgozat.

Matematika gyakorlatok megoldása

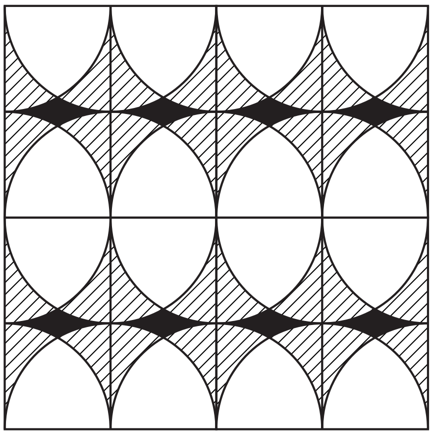
B. 3292. *A család a két gyerekre bízta a felújítandó konyha kövezetének kiválasztását. Egyiküknek az első, másikuknak a hátsó borítón látható színezés tetszik jobban (lásd az 1. ábrát és 2. ábrát). Végül úgy döntenek, azt választják, amelyikben több a barna szín (a satírozott rész). Melyiket választották?*

(*3 pont*)

Megoldás. A kétféle csempemintát az *1.*, illetve a *2. ábrán* láthatjuk.

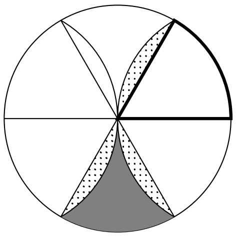


1. ábra



2. ábra

A *3. ábrán* a szürke rész területének 16-szorosa a *2. ábrán* látható csempézés satírozott területe. A vastagon kihúzott egyhatod körcikk és a pettyezett körszelet összterületének 16-szorosa pedig az *1. ábra* satírozott mintáját adja. Ez utóbbi terület nyilvánvalóan nagyobb (mégpedig a pettyezett körszelet területével), mint a kör területének hatoda, a szürke terület pedig kisebb (mégpedig a két pettyezett körszelet-területtel).



3. ábra

Tehát a gyerekek az *1. ábrának* megfelelő mintát választották.

Gábor Sámuel (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 9. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Az eredetileg barna, megoldásunkban satírozott területeket a legtöbben ki is számolták: az 1. ábrán a terület $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\approx 0{,}6142$, a 2. ábrán $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\approx 0{,}3424$ 16-szorosa.

659 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 557, 2 pontot 49, 1 pontot 26, 0 pontot 26 beküldő. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

B. 3297. *Egy derékszögű háromszög befogói a és b, átfogója c. Bizonyítsuk be, hogy*

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{ab(a+b+c)}\ge\sqrt{2}.$$

(*4 pont*) Javasolta: *Paulovics Illés,* Kunszentmárton

Megoldás. Alakítsuk át a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalán lévő kifejezést az $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ azonosságot és a Pitagorasz-tételt felhasználva:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{ab(a+b+c)}=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)+(a^2+b^2)c}{ab(a+b+c)}=$$
$$=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2)-(a+b)ab}{ab(a+b+c)}=\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a+b}{a+b+c}.$$

Elegendő tehát megmutatnunk, hogy

$$\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a+b}{a+b+c}\ge\sqrt{2}. \tag{1}$$

Ismert, hogy $a^2+b^2\ge 2ab$, amiből következik, hogy $\frac{a^2+b^2}{ab}\ge 2$, hiszen a és b pozitív számok. Belátjuk, hogy $\frac{a+b}{a+b+c}\le 2-\sqrt{2}$. Átszorozva és rendezve:

$$\left(\sqrt{2}-1\right)(a+b)\le\left(2-\sqrt{2}\right)c.$$

Ezt elosztva $(\sqrt{2}-1)$-gyel kapjuk, hogy $(a+b)\le\sqrt{2}c$.

Ismét használva Pitagorasz tételét, majd mindkét oldalt 2-vel osztva:

$$\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

ami a számtani és a négyzetes közép közti ismert egyenlőtlenség. Ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az eredeti $\frac{a+b}{a+b+c}\le 2-\sqrt{2}$ egyenlőtlenség is teljesül. Az (1) egyenlőtlenség ezután már egyszerűen adódik:

$$\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a+b}{a+b+c}\ge 2-\left(2-\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}.$$

Ezzel az eredeti egyenlőtlenséget is bebizonyítottuk. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=b$, azaz ha a derékszögű háromszög egyenlő szárú.

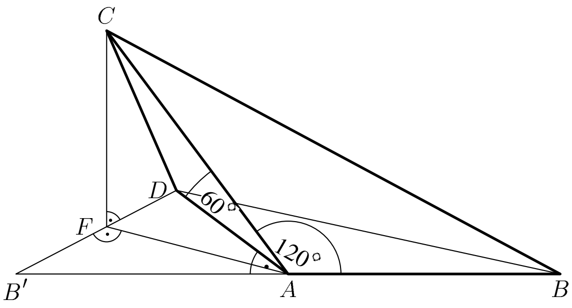
Hablicsek Márton (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.) dolgozata alapján

203 dolgozat érkezett, 4 pontos 155, 3 pontos 4, 2 pontos 7, 1 pontos 6, 0 pontos 31.

B. 3298. *Egy háromszög alapú gúla oldalélei egységnyi hosszúságúak, az oldalélek által bezárt szögek rendre* 60°, 90°, *illetve* 120°. *Mekkora a gúla térfogata?*

(*4 pont*) Javasolta: *Vajda Szilárd,* Kolozsvár

Megoldás. Legyen a gúla alaplapja a BCD háromszög, negyedik csúcsa A, és válasszuk úgy a jelölést, hogy $CAD\sphericalangle=60^\circ$, $BAD\sphericalangle=90^\circ$ és $BAC\sphericalangle=120^\circ$. Legyen B-nek az AD egyenesre vonatkozó tükörképe B'. Mivel AD és BA egymásra merőlegesek, azért B, A és B' egy egyenesen vannak, és $B'A=AB=1$. Mivel $BAC\sphericalangle=120^\circ$, azért $CAB'\sphericalangle=60^\circ$, s így $CA=AB'=1$ miatt a CAB' háromszög szabályos. A CAD háromszög is szabályos, mert $CA=DA=1$ és $CAD=60^\circ$. Ezért a C pont a DAB' egyenlő szárú derékszögű háromszög mindhárom csúcsától egyenlő távolságra van, vagyis rajta van a háromszög köré írható kör középpontjában a háromszög síkjára állított merőleges egyenesen.



1. ábra

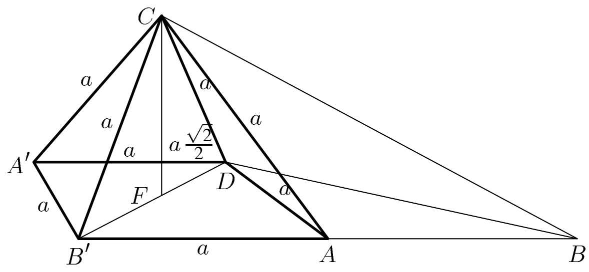
A DAB' háromszög köré írható körének középpontja a DB' szakasz F felezőpontja, $FA=FB'=FD=\dfrac{DB'}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. A CF szakasz hosszát a CFA derékszögű háromszögből Pitagorasz tételével számolhatjuk ki:

$$CF=\sqrt{AC^2-AF^2}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Az $ABCD$ gúla ABD lapjához tartozó magassága CF, ezért a gúla térfogata:

$$V=\frac{T_{ABD}\cdot CF}{3}=\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{12}.$$

Megjegyzés. Ha az A pont $B'D$ egyenesre való tükörképe A', akkor könnyen látható, hogy az $ADA'B'C$ test négyzet alapú szabályos gúla (*2. ábra*). Ismert, hogy ennek C-ből induló magassága $a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$, ahol a az élek hossza.



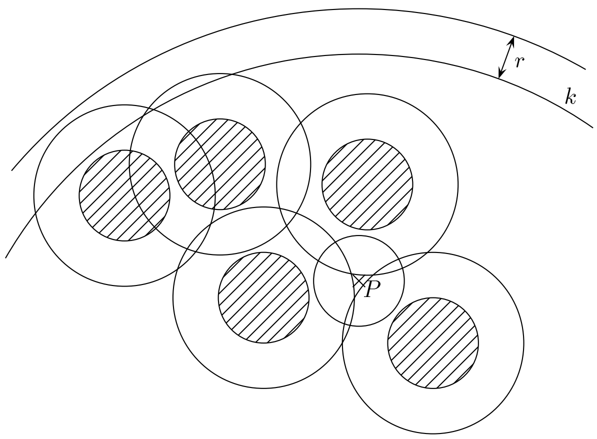
2. ábra

Horváth Gergely (Fonyód, Mátyás Király Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

398 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 241, 3 pontot 71, 2 pontot 28, 1 pontot 26, 0 pontot 32 versenyző.

B. 3299. *Egy R sugarú kerek asztalon elhelyeztünk n darab r sugarú pénzérmét úgy, hogy minden érme egy teljes lapjával az asztalon fekszik. Az asztalra újabb érme már nem helyezhető el. Mutassuk meg, hogy* $\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}-1\right) \le \sqrt{n} \le \frac{R}{r}$.

(*5 pont*) Javasolta: *Róka Sándor,* Nyíregyháza



Megoldás. Mivel minden érme egy teljes lapjával az asztalon fekszik, azért az érmék lapjának összterülete legfeljebb akkora, mint az asztallap területe, azaz $n \cdot r^2\pi \le R^2\pi$. Ebből rendezéssel kapjuk a

$$\sqrt{n} \le \frac{R}{r}$$

egyenlőtlenséget.

Rajzoljunk az érmék középpontjai körül $2r$ sugarú köröket, az asztal középpontja körül pedig egy $R-r$ sugarú k kört. Ha ennek a k körnek lenne egy olyan P pontja, amit a $2r$ sugarú körök egyike sem tartalmaz, akkor a P középpontú r sugarú kör egyik érmét sem metszené, és teljes egészében az asztalon volna (lásd az *ábrát*). Vagyis egy újabb érmét helyezhetnénk az asztalra úgy, hogy középpontja egybeesne P-vel. A feladat feltételei szerint ez nem lehetséges, ezért a $2r$ sugarú körök teljes egészében lefedik k-t. Emiatt a területük legalább akkora, mint k területe:

$$(R-r)^2\cdot\pi\le n(2r)^2\cdot\pi.$$

Ezt átrendezve éppen a bizonyítandó

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}-1\right)\le\sqrt{n}$$

egyenlőtlenséget kapjuk.

Csóka Endre (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 9. o.t.) dolgozata alapján

206 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 75, 4 pontot 2, 3 pontot 6, 2 pontot 4, 1 pontot 98, 0 pontot 19 beküldő. Nem versenyszerű 2 dolgozat.

B. 3300. *Egy konvex poliéder egyik lapjának csúcsait pirosra, a többi csúcsot pedig kékre színeztük. Bizonyítsuk be, hogy van olyan kék csúcs, amelyből legfeljebb* 5 *él indul ki, vagy pedig van olyan piros csúcs, amelyből pontosan* 3 *él indul ki.*

(*5 pont*)

Megoldás. Tegyük fel – a bizonyítandó állítással szemben –, hogy minden kék színű csúcsból legalább 6, és minden piros színűből legalább 4 él indul ki. A konvex poliéder éleinek számát jelölje e, a lapok számát l, a piros és kék csúcsok számát pedig rendre c_p és c_k. Az Euler-féle poliéder-tétel szerint

$$c_p+c_k+l=e+2. \tag{1}$$

Az egyes csúcsokból kiinduló élek számát összegezve az összes élek számának kétszeresét kapjuk, hiszen minden él két csúcsot köt össze. Indirekt feltevésünk értelmében a csúcsokból kiinduló élek számának összege legalább $4c_p+6c_k$, ezért

$$e\ge\frac{1}{2}(4c_p+6c_k)=2c_p+3c_k. \tag{2}$$

Minden él két lapot határol, így a lapok oldalszámának összege is az élek számának a kétszerese. A piros csúcsokkal rendelkező lapnak c_p, a többi lapnak legalább 3 oldala lévén, $2e\ge c_p+(l-1)3$, azaz

$$l\le 1+\frac{2e-c_p}{3}. \tag{3}$$

A (3) és (1) összevetésével

$$e+2-c_p-c_k=l\le 1+\frac{2e-c_p}{3},$$

innen pedig

$$e\le 2c_p+3c_k-3;$$

ez ellentmond (2)-nek, ami a feladat állítását bizonyítja.

Ivaskó György (Baja, III. Béla Gimn., 12. o.t.) megoldása alapján

Megjegyzés. *Ambrus Gergely* (Szeged, Radnóti M. Kísérl. Gimn., 11. o.t.) megjegyezte, hogy a bizonyításból az is következik, hogy nemcsak egy, hanem legalább két csúcs létezik, amely az előírt tulajdonságú. Egy példával azt is megmutatja, hogy általában ennél több már nem követelhető meg.

36 dolgozat érkezett, 5 pontos 21, 3 pontos 1, 2 pontos 3, 1 pontos 7, 0 pontos 4.

B. 3301. *Egy H halmaz elemeinek száma: $|H|=n$. Mutassuk meg, hogy*

$$\sum_{A\subseteq H}\sum_{B\subseteq H}|A\cap B|=n\cdot 4^{n-1}.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Róka Sándor,* Nyíregyháza

I. megoldás. A H halmaz tetszőleges R részhalmazára jelölje $\overline{R}$ az R komplementerét, azaz H azon elemeinek a halmazát, amelyek nem elemei R-nek. Képezzünk H részhalmazaiból (A,B) rendezett párokat; H-nak 2^n darab részhalmaza lévén e rendezett párok száma $2^n\cdot 2^n=4^n$. A rendezett párokat négyes csoportokra osztjuk; minden ilyen csoport álljon az (A,B), $(\overline{A},B)$, $(A,\overline{B})$, $(\overline{A},\overline{B})$ párokból, ahol A, $B\subseteq H$. Könnyen látható, hogy minden rendezett pár pontosan egy ilyen csoporthoz tartozik, így e csoportok száma $\frac{1}{4}\cdot 4^n=4^{n-1}$. Tekintsük H-nak egy h elemét, és az A, $B\subseteq H$ halmazokat; mivel h az A és $\overline{A}$ közül pontosan az egyiknek eleme (hasonlóan B és $\overline{B}$ közül is), azért h az $A\cap B$, $\overline{A}\cap B$, $A\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cap\overline{B}$ halmazoknak is pontosan az egyikében van benne. Tehát az $A\cap B$, $\overline{A}\cap B$, $A\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cap\overline{B}$ halmazok elemszámának összege $|H|=n$. A számlálást a 4^{n-1} csoport mindegyikére elvégezve az elemszámok összegének összegére $n\cdot 4^{n-1}$ adódik, és ez éppen a feladat állítása.

Gyürki István (Zseliz, Magyar Tannyelvű Gimn., 12. o.t.)

II. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit. A H elemeit sorbarendezzük, és minden A, $B\subseteq H$ halmazpárhoz hozzárendeljük azt a 4-es számrendszerbeli n-jegyű számot, amelynek i-edik jegye 0, 1, 2 vagy 3 aszerint, hogy a H halmaz i-edik eleme az $A\cap B$, $\overline{A}\cap B$, $A\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cap\overline{B}$ halmazok melyikéhez tartozik. Így összesen 4^n darab különböző számot kapunk, vagyis az összes n-jegyű szám előáll ezen a módon. Ezekben a számokban összesen ugyanannyi 0 van, mint ahány 1-es vagy ahány 2-es vagy amennyi 3-as. Tehát a bennük előforduló 0 jegyek száma összesen $\frac{1}{4}\cdot 4^n\cdot n=4^{n-1}\cdot n$; másrészt a nullák együttes száma éppen az $|A\cap B|$ elemszámoknak az összege.

Breuer János (Budapest, ELTE Apáczai Cs. J. Gyak. Gimn., 11. o.t.)

III. megoldás. A H mindegyik x eleméhez meghatározzuk azoknak az A, B pároknak (A, $B\subseteq H$) a számát, amelyekre $x\in A\cap B$; a kapott számokat az x elemekre összegezve éppen a feladatban szereplő összeghez jutunk.

Ha $x\in A$, akkor a H minden további eleme vagy eleme A-nak, vagy nem; ez két lehetőség, tehát A megválasztása 2^{n-1}-féleképpen történhet, akárcsak a B halmazé. Az

x-et tartalmazó (A, B) halmazokból tehát $2^{n-1} \cdot 2^{n-1} = 4^{n-1}$ rendezett pár készíthető, a H elemeire pedig összesen $n \cdot 4^{n-1}$.

Kiss 345 Gergely (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

133 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 67 versenyző, 4 pontot 36, 3 pontot 14, 2 pontot 6, 1 pontot 3, 0 pontot 6. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

B. 3304. *Meg lehet-e számozni egy kocka éleit az* 1, 2, 3, ..., 11, 12 *számokkal úgy, hogy mindegyik csúcsban ugyanannyi legyen az ide befutó élekre írt számok összege?*

(*4 pont*) Javasolta: *Reményi Gusztáv* Budapest

Megoldás. Tegyük fel, hogy sikerült a kocka éleire számokat írni a kívánt módon. Legyen az egy csúcsba befutó élekre írt számok összege X – ez nyilván egész szám. Ha összeadjuk az összes csúcsba befutó élekre írt számokat, akkor – mivel minden élet pontosan két csúcsnál (a két végpontjánál) vettünk figyelembe – megkapjuk 1-től 12-ig az egész számok összegének kétszeresét:

$$8X = 2(1 + 2 + \ldots + 12) = 2 \cdot \frac{12 \cdot 13}{2} = 12 \cdot 13,$$

innen $2X = 3 \cdot 13$, ami lehetetlen, hiszen a bal oldal páros, a jobb oldal pedig páratlan. Ellentmondásra jutottunk, tehát nincs a feladat feltételeinek megfelelő számozás.

Medve Kinga Sára (Eger, Dobó I. Gimn., 11. o.t.)

Megjegyzések. 1. Csak azok kaptak maximális pontszámot, akik számolásuk mellé *indoklást* is írtak.

2. *Medve Kinga Sára* megoldásában azt is megmutatta, hogy tetszőleges egymás után következő 12 egész számmal sem lehet a kocka éleit úgy megszámozni, hogy mindegyik csúcsban ugyanannyi legyen az oda befutó élekre írt számok összege.

3. *Horváth Szilárd* (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., 11. o.t.) második megoldása a 13-mal való oszthatóságra támaszkodott.

4. *Papp Dávid* (Budapest, Szent István Gimn., 12. o.t.) azt is belátta, hogy nemcsak azokra a testekre megvalósíthatatlan a számozás, amelyeknek c csúcsára és e élére $\frac{e(e+1)}{c}$ nem egész, hanem például a páratlan oldalú sokszög alapú hasábokra is.

775 dolgozat érkezett. 4 pontos 685, 3 pontos 34, 2 pontos 4, 1 pontos 38, 0 pontos 14 dolgozat.

B. 3305. *Sándor Mátyás esetéből okulva a hazafiak vezére egy egyenletet küldött barátainak:*

$$2x^2 + 4xy + 7y^2 - 12x - 2y + N = 0.$$

A titkos üzenet az volt, hogy a hónap N-edik napján legyen a felkelés. A hazafiak gyakran mondogatták, hogy a felkelés az egyetlen megoldás. Ez jellemezte N-et is: az egyenletet egyetlen (x, y) valós számpár elégítette ki. Mennyi N értéke?

(*4 pont*)

I. megoldás. Tekintsük az adott egyenletet y változójú másodfokú paraméteres egyenletnek. Ha a kétismeretlenes egyenletnek egyetlen számpár a megoldása, akkor a

$$7y^2+(4x-2)y+2x^2-12x+N=0$$

egyenletnek is csak egyetlen y_0 megoldása lehet, azaz a diszkriminánsa, $D_1=0$:

$$\begin{aligned} D_1=(4x-2)^2-28(2x^2-12x+N)&=\\ -40x^2+320x-28N+4&=0, \qquad \text{rendezve}\\ 10x^2-80x+(7N-1)&=0. \end{aligned}$$

Mivel az eredeti egyenletet csak egyetlen x_0 elégítette ki, azért ennek is csak egyetlen megoldása lehet, azaz diszkriminánsa, $D_2=0$:

$$\begin{aligned} D_2=80^2-40(7N-1)&=0\\ 161&=7N, \end{aligned}$$

tehát $N=23$.

Azt kaptuk, hogy ha az (1)-nek egyetlen (x_0,y_0) megoldása van, akkor az N értéke 23 kell legyen. Meg kell azonban néznünk, hogy $N=23$ esetén valóban kapunk-e megoldást: visszahelyettesítve $x=4$ és $y=-1$ valóban az egyenlet megoldását adják.

Tehát (október) 23-án volt a felkelés.

Szilasi Zoltán (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 11. o.t.)

II. megoldás. Alakítsuk át az egyenletet az eredetivel ekvivalenssé:

$$2(x+y-3)^2+5(y+1)^2+N-23=0.$$

Ennek az egyenletnek pontosan akkor van egy megoldása, ha $N=23$. Bevezethetjük ugyanis az új $x_1=x+y-3$, $y_1=y+1$ ismeretleneket, ezekre $x=x_1-y_1+4$ és $y=y_1-1$, tehát az (x,y) és (x_1,y_1) számpárok megfeleltetése kölcsönösen egyértelmű. Az pedig világos, hogy a $2x_1^2+5y_1^2=M$ egyenletnek páros sok megoldása van, ha $M\neq 0$, hiszen ha pl. $x_1\neq 0$ egy megoldáshoz tartozik, akkor $-x_1$ is.

Megjegyzések. 1. Azok, akik nem vizsgálták meg, $N=23$ esetén valóban van-e egyetlen megoldás, csak 3 pontot kaptak.

2. Az (1) egyenlet egyébként egy úgynevezett *másodrendű elliptikus görbe* egyenlete, amelynek csak akkor lesz egyetlen megoldása, ha a görbe *pontellipszis*, azaz ha mátrixának determinánsa 0. *Szilasi Zoltán* második megoldásában ebből számolta ki N értékét.

442 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 49, 3 pontot 335, 2 pontot 15, 1 pontot 5, 0 pontot 30 versenyző. Nem versenyszerű 8 dolgozat.

B. 3308. *Hány olyan ikerprím számpár van, amelyek összege prímhatvány? (Ikerprímnek nevezünk két prímszámot, ha a különbségük 2.)*

(*4 pont*) Javasolta: *Kovács Ádám,* Budapest

Megoldás. Legyenek p és $p+2$ olyan ikerprímek, amelyeknek összege valamely q prímszám hatványa:

$$p+(p+2)=q^k \qquad (k\ge 1 \text{ egész szám}).$$

Ekkor $2(p+1)=q^k$, tehát q 2-vel osztható, így csak $q=2$ lehet:

$$2(p+1)=2^k,$$

ahonnan

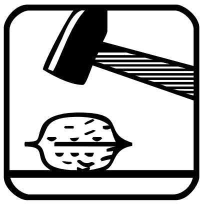
$$p=2^{k-1}-1 \qquad \text{és} \qquad p+2=2^{k-1}+1$$

egyaránt prímek. Mivel 2^{k-1} nem osztható 3-mal, de három egymást követő természetes szám közül az egyik biztosan osztható, így vagy $3\mid p$, vagy $3\mid p+2$, és mivel mindkettő prím, csak $p=3$ lehet. Ekkor $p+2=5$ is prím, és összegük $8=2^3$.

Tehát egyetlen megoldás van, a $(3,5)$ számpár.

590 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 436, 3 pontot 53, 2 pontot 10, 1 pontot 24, 0 pontot 62 beküldő. Nem versenyszerű 5 dolgozat.

Nehezebb feladatok megoldása



A. 218. *Határozzuk meg azokat a folytonos* $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ *függvényeket, amelyekre tetszőleges* x, y *pozitív számok esetén*

$$f\left(\frac{1}{f(xy)}\right)=f(x)f(y).$$

Megoldás. A függvényegyenletet átírva a $g(x)=\log f(e^{-x})$ függvényre

$$g\left(g(x+y)\right)=g(x)+g(y). \tag{1}$$

Ezt felírva a 0 és $x+y$ számokra is,

$$g(x)+g(y)=g(g(x+y))=g(g(0+(x+y)))=g(0)+g(x+y). \tag{2}$$

Bevezetve a $h(x)=g(x)-g(0)$ függvényt, (2) a $h(x+y)=h(x)+h(y)$ alakba írható. A h függvény folytonos és additív, tehát $h(x)=ax$ egy alkalmas x valós számmal. A $g(0)=b$ jelöléssel $g(x)=ax+b$. Ezt visszahelyettesítve (1)-be

$$(a^2-a)(x+y)+(a-1)b=0, \tag{3}$$

ami kétféleképpen lehetséges: $a=1$ és b tetszőleges valós szám, vagy $a=b=0$. Az (1) egyenletnek ezek a megoldásai.

A megoldásokat visszaírva f-be, az első esetben

$$f(x)=e^{-g(\log x)}=\frac{e^{-b}}{x},$$

a második esetben

$$f(x)=1.$$

A függvényegyenletnek tehát a konstans 1 és a $\frac{c}{x}$ alakú ($c>0$) függvények tesznek eleget.

Megjegyzés. A megoldás hasonlóan megy akkor is, ha nem kötjük ki a folytonosságot, csak a h additív függvényt nem lehet olyan egyszerűen felírni. A (3) egyenlet helyett azt kapjuk, hogy tetszőleges x-re

$$h(h(x))-h(x)=b-h(b). \tag{4}$$

Az $x=0$ helyettesítésből $h(b)=b$ és $h(h(x))=h(x)$, azaz h egy projekció. Könnyű ellenőrizni, hogy ez a két feltétel elégséges is, azaz (1) megoldásai a $g(x)=h(x+c)$ alakú függvények, ahol h tetszőleges projekció.

25 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Breuer János, Gyenes Zoltán, Harangi Viktor, Iván Szabolcs, Keszegh Balázs, Kiss 345 Gergely, Kunszenti-Kovács Dávid, Pálvölgyi Dömötör, Reviczky Ádám János, Tóth 498 Ferenc, Vizer Máté és Zábrádi Gergely. 4 pontot kapott Csóka Endre, 3 pontot Székelyhidi Tamás. 2 pontos 7, 0 pontos 4 dolgozat.

A. 220. *Jelöljük tetszőleges pozitív egész n számra $S(n)$-nel az n jegyeinek összegét tízes számrendszerben. Igazoljuk, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} S(2^n)=\infty.$$

Megoldás. Legyen k rögzített pozitív egész. Tetszőleges n-re jelölje 2^n tízes számrendszerbeli felírásában c_n az utolsó k számjegy által alkotott egészt, b_n az előtte levő $3k$ jegy által alkotott számot, végül a_n az összes ezek előtt álló számjegyből alkotott számot.

$$2^n=10^{4k}a_n+10^k b_n+c_n,$$

$$2^n=\boxed{\quad a_n \quad}\underbrace{\boxed{\qquad b_n \qquad}}_{3k\text{ jegy}}\underbrace{\boxed{\; c_n \;}}_{k\text{ jegy}},$$

ahol $0\le b_n<10^{3k}$ és $0<c_n<10^k$. (A c_n nem lehet 0, mert például 2^n utolsó jegye sem 0.)

Ha $n\ge 4k$, akkor a $10^k b_n+c_n=2^n-10^{4k}a_n$ szám osztható 2^{4k}-nal, a c_n szám viszont nem, mert $0<c_n<10^k<2^{4k}$. Emiatt b_n nem lehet 0.

Legyen most $n\ge 4^m$, és tekintsük 2^n utolsó 4^m jegyét. Az előbbi meggondolást $k=$ $=4^0, 4^1, \dots, 4^{m-1}$-re megismételve ki tudunk jelölni összesen m darab olyan páronként diszjunkt számjegyhalmazt, amelyek mindegyikében szerepel legalább egy 0-tól különböző számjegy. Ezért $n \geq 4^m$ esetén $S(2^n) > m$. A határárték tehát tetszőleges valós számnál nagyobb: ∞.

15 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Dénes Attila, Gyenes Zoltán, Harangi Viktor, Kiss 345 Gergely, Kunszenti-Kovács Dávid, Pálvölgyi Dömötör, Pozsár Balázs, Sidó Péter, Varjú Péter, Vizer Máté és Zábrádi Gergely. 3 pontot kapott Enyedi Gábor és Nagy 444 Zoltán. 2 dolgozatra 0 pontot adtunk.

A. 222. *Az a, b, c egész számok legnagyobb közös osztója* 1. *Az* (a, b, c) *számhármast más számhármasokra cserélhetjük úgy, hogy minden lépésben az egyik számot növeljük vagy csökkentjük a számhármas egy másik elemének valamilyen többszörösével. Igaz-e, hogy az a, b, c számok megválasztásától függetlenül, legfeljebb* 10 *lépésben eljuthatunk az* $(1, 0, 0)$ *számhármashoz?*

Javasolta: *Abért Miklós,* Budapest

Megoldás. Megmutatjuk, hogy legfeljebb 5 lépésben mindig eljuthatunk az $(1, 0, 0)$ számhármashoz.

Először abban az esetben oldjuk meg a feladatot, ha például b és c relatív prímek. Ekkor bármilyen szám, így az 1 is előállítható $a + xb + yc$ alakban, alkalmas x és y egész számokkal. Ezért két lépésben eljuthatunk az $(1, b, c)$ számhoz úgy, hogy a-hoz előbb b x-szeresét, majd c y-szorosát adjuk hozzá. Ezután további két triviális lépésben eljuthatunk az $(1, 0, 0)$ számhármashoz. Abban az esetben tehát, ha b és c relatív prímek, 4 lépés biztosan elegendő.

Most bebizonyítjuk, hogy egyetlen lépésben elérhető, hogy a számhármas két eleme relatív prím legyen.

Ha b vagy c nulla, akkor a másik két szám relatív prím.

Ha b és c egyike sem 0, akkor legyen d a c azon prímtényezőinek szorzata, amelyek nem osztják b-t. (Ha ilyen prímosztó nincs, akkor legyen $d = 1$.) Azt állítjuk, hogy az egy lépésben előálló $(a, b + da, c)$ számhármas megfelelő, azaz $b + da$ és c relatív prímek. Tekintsük c egy tetszőleges p prímosztóját; azt kell igazolnunk, hogy ez nem osztója a $b + da$ számnak.

Ha p osztója b-nek, akkor d definíciója szerint p nem osztója d-nek. Azt is tudjuk, hogy a, b és c relatív prímek, tehát p az a-nak sem lehet osztója. Ebben az esetben tehát a $b + da$ összeg első tagja osztható p-vel, a második tagja nem.

Ha p nem osztója b-nek, akkor d definíciója szerint p osztója d-nek. Tehát a $b + da$ összeg első tagja nem osztható p-vel, a második tagja viszont osztható vele.

Mindkét esetben azt kaptuk, hogy p nem osztója a $b + da$ számnak.

Összefoglalva: egy lépésben elérhetjük, hogy a második és a harmadik szám relatív prím legyen, innen pedig további négy lépésben eljuthatunk az $(1, 0, 0)$ számhármashoz.

Varjú Péter (Szeged, Radnóti Miklós Gimnázium, 11. o.t.) dolgozata alapján

12 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Csóka Endre, Gyenes Zoltán, Harangi Viktor, Pálvölgyi Dömötör, Varjú Péter, Vizer Máté és Zábrádi Gergely. 4 pontot kapott Kiss Gergely. 2 pontos 1, 1 pontos 1, 0 pontos 2 dolgozat.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (575–579.)

C. 575. „Nos, hát mondja meg nekem, hogy ha Pozsonyból Brassóba mindennap két postakocsi közlekednék, Brassóból Pozsonyba pedig ugyanannyi, ha mármost föltesszük, hogy az út tíz napig tart, mennyi kocsival találkozik ön útközben, míg Pozsonyból egy postakocsin ülve Brassóba ér?”☺

Javasolta: *Mikszáth Kálmán,* Fogaras

C. 576. Adjuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amellyel az 1999-et megszorozva a kapott szám utolsó 4 jegye 2001.

Braun Melinda ötlete, Szeged

C. 577. Egy fiók mélyén három pár zokni van, amelyek kissé különböznek egymástól. A fiókból egyesével kihalászva a zoknikat, mennyi annak a valószínűsége, hogy három húzás után még nem lesz a kivett zoknik között összetartozó pár?

C. 578. Egy háromszög csúcsainak koordinátái: $A(2;-1)$, $B(3;1)$, $C(2^{1999};2^{2000})$. Számítsuk ki az ABC háromszög területét.

C. 579. Egy körlapot két sugara mentén két darabra vágunk. A kapott körcikkekből kúp alakú tölcséreket formálunk. Akkor lesz-e legnagyobb a tölcsérek össztérfogata, ha félkörökből indulunk ki?

Beküldési határidő: 2000. április 17.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest, Pf. 47. 1255

A B pontversenyben kitűzött feladatok (3352–3361.)

B. 3352. Ha egy hajó legénységének létszámát megszorozzuk a legénység létszámánál eggyel kisebb számmal, akkor tizenöttel nagyobb számot kapunk, mint ha a kapitány életkorát megszoroznánk a legénység létszámánál kettővel kisebb számmal. Hogy hívják a kapitányt?☺

(*3 pont*) *Elhangzott a Repeta című műsorban*

☺ Vigyázat! „Áprilisi” feladat!

B. 3353. Mennyi

$$\left[2\sqrt{1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+1998\cdot 1999\cdot 2000}\right]$$

értéke? (Az egész rész jele [ ].)

(*4 pont*) Javasolta: *Ábrány Miklós,* Beregszász

B. 3354. Adott a síkon két metsző egyenes és egy rajtuk kívül elhelyezkedő P pont. Szerkesszük meg a két egyenesen azt az X, illetve Y pontot, amelyre az XY szakasz átmegy P-n és $PX\cdot PY$ minimális.

(*5 pont*)

B. 3355. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög pontosan akkor derékszögű, ha valamelyik két hozzáírt kör sugarának szorzata egyenlő a háromszög területével.

(*4 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint,* Eger

B. 3356. Mutassuk meg, hogy két szomszédos egész szám negyedik hatványának különbsége végtelen sok esetben bontható fel két négyzetszám összegére.

(*4 pont*)

B. 3357. Van-e olyan négyzetszám, amelynek ugyanannyi $3k+1$ alakú pozitív osztója van, mint $3k+2$ alakú?

(*4 pont*)

B. 3358. Bizonyítsuk be, hogy négy különböző valós szám között van olyan kettő: a és b, amelyekre

$$\frac{1+ab}{\sqrt{1+a^2}\cdot\sqrt{1+b^2}}>\frac{1}{2}.$$

(*5 pont*) *Mezei József,* Vác

B. 3359. Bizonyítsuk be, hogy ha az $x^3-3x-1=0$ egyenlet valós x_1, x_2, x_3 gyökeire $x_1<x_2<x_3$, akkor $x_3^2-x_2^2=x_3-x_1$.

(*5 pont*) Javasolta: *Mihalovics Sándor,* Esztergom

B. 3360. Az ABC háromszög súlypontja S, az AB és AC oldalak felezőpontja E, illetve F. Igazoljuk, hogy az $AESF$ négyszög pontosan akkor húrnégyszög, ha AB^2+ $+AC^2=2BC^2$.

(*4 pont*) Javasolta: *Kiss Sándor,* Szatmárnémeti

B. 3361. Adottak a $\mathcal{G}_1$és a $\mathcal{G}_2$ gömbök. Legyen K_1 a $\mathcal{G}_1$ gömbbe, K_2 a $\mathcal{G}_2$ gömbbe írt kocka. Mutassuk meg, hogy annak a 64 vektornak az összege, amelynek kezdőpontja a K_1 egyik csúcsa, végpontja pedig a K_2 egyik csúcsa, nem függ a kockák helyzetétől. (*3 pont*)

Beküldési határidő: 2000. április 17.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (233–235.)

A. 233. Definiáljuk az (a_n) sorozatot a következőképpen: $a_0=a_1=1$, $(n+3)a_{n+1}=(2n+3)a_n+3na_{n-1}$. Mutassuk meg, hogy a sorozat egész számokból áll.

A. 234. Az A, B, és C betűk felhasználásával szavakat (véges hosszúságú betűsorozatokat) készítünk. Egy szóval a következő műveleteket végezhetjük:

a) A szóban kiválasztunk néhány egymás utáni betűt — esetleg csak egyetlen egyet, vagy akár a teljes szót —, és „megduplázzuk”, például $B\underline{BCA}C\to BBCABCAC$;

b) Az a) lépés visszafelé: Ha valahol a szóban két egymás utáni részlet megegyezik, akkor az egyiket elhagyjuk: $\underline{ABCABC}BC\to ABCBC$.

Igazoljuk, hogy ilyen lépések sorozatával bármelyik szóból eljuthatunk egy legfeljebb 8-betűs szóhoz.

A. 235. Legyen a adott komplex szám. Mi a mértani helye azon b komplex számoknak, amelyekhez léteznek olyan nemnegatív $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valós számok és egységnyi abszolút értékű $z_1, z_2, \ldots, z_n$ komplex számok, hogy $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$, $x_1z_1+x_2z_2+\ldots+x_nz_n=a$ és $x_1z_1^2+x_2z_2^2+\ldots+x_nz_n^2=b$?

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 50. No. 4. April 2000)

New exercises for practice – competition C (see page 168): **C. 575.** “Well, I want you to answer me this. If two stage-coaches leave Pozsony for Brassó every day, and as many leave Brassó for Pozsony, and assuming that the journey takes ten days, then how many coaches would you meet on the way if you travelled in one stage-coach from Pozsony to Brassó?”☺ (Proposed by *K. Mikszáth,* Fogaras) **C. 576.** Find the smallest positive integer which, when multiplied by 1999,

☺ April’s fool!

yields a product whose last 4 digits are 2, 0, 0, 1. (Proposed by *M. Braun*) **C. 577.** Deep inside a drawer, there are 3 pairs of socks, somewhat different from each other. We try it three times to fish one sock out of the drawer. What is the probability that we end up with one sock of each pair after the 3 trials? **C. 578.** Consider the triangle whose vertices in the Cartesian system are $A(2;-1)$, $B(3;1)$ and $C(2^{1999};2^{2000})$. Calculate the area of the triangle. **C. 579.** A circular disc is cut into two sectors along two of its radii. The two pieces are then turned into cone shaped funnels. Is it true that the largest total volume is obtained from two half discs?

New problems – competition B (see page 168): **B. 3352.** The number of the crew of a certain ship, multiplied by one less the number of the crew exceeds, by 15, the product of the age of the captain and the number two less the number of the crew. What is the captain's name?☺ (*3 points*) (*Repeta*) **B. 3353.** Determine the value of the following expression: ([ ] means the integer part of the number.)

$$\left[2\sqrt{1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+1998\cdot 1999\cdot 2000}\right].$$

(*4 points*) (Proposed by *M. Ábrány,* Ukraine) **B. 3354.** Two intersecting lines and a point P outside the lines are given in the plane. Construct points X and Y on the two lines, respectively, such that P is incident to the segment XY, and $PX\cdot PY$ is minimal. (*5 points*) **B. 3355.** Prove that a triangle has a right angle if and only if the product of two of its escribed circles equals to the area of the triangle. (*4 points*) (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **B. 3356.** Demonstrate that there are an infinite number of cases when the difference between the fourth powers of two consecutive integers can be written as the sum of two perfect squares. (*4 points*) **B. 3357.** Is there any perfect square which has the same number of positive divisors of the form $3k+1$ as of the form $3k+2$? (*4 points*) **B. 3358.** Prove that among any 4 different real numbers there exist two, a and b such that

$$\frac{1+ab}{\sqrt{1+a^2}\cdot\sqrt{1+b^2}}>\frac{1}{2}.$$

(*5 points*) (Proposed by *J. Mezei,* Vác) **B. 3359.** The real roots x_1, x_2, x_3 of the equation $x^3-3x-1=0$ satisfy $x_1<x_2<x_3$. Prove that $x_3^2-x_2^2=x_3-x_1$. (*5 points*) (Proposed by *S. Mihalovics,* Esztergom) **B. 3360.** In a triangle ABC with centroid S, let E and F denote the midpoints of sides AB and AC, respectively. Prove that the quadrilateral $AESF$ is cyclic if and only if $AB^2+AC^2=2BC^2$. (*4 points*) (Proposed by *S. Kiss,* Szatmárnémeti) **B. 3361.** Two spheres $\mathcal{G}_1$ and $\mathcal{G}_2$ are given. Cubes K_1 and K_2 are inscribed into $\mathcal{G}_1$ and $\mathcal{G}_2$, respectively. Consider the 64 vectors whose starting points are the vertices of K_1 and whose endpoints are the vertices of K_2. Prove that the sum of these vectors does not depend on the position of the cubes within the spheres. (*3 points*)

New advanced problems – competition A (see page 171): **A. 233.** A sequence (a_n) is defined as follows: $a_0=a_1=1$, $(n+3)a_{n+1}=(2n+3)a_n+3na_{n-1}$. Prove that each term of the sequence is an integer. **A. 234.** Any finite sequence of the letters A, B, C is called a *word*. A word can be transformed into an other word by the following two operations: a) we choose any contiguous part of the word and double it, as in the example $B\underline{BCA}C\to BBCABCAC$; b) (the reverse of the first operation) if two consecutive contiguous parts of the word are identical, we may omit one of them, as in the example $\underline{ABCABC}BC\to ABCBC$. Prove that any word can be transformed into a word of not more than 8 letters. **A. 235.** Let a be a fixed complex number. Find the locus of all complex numbers b for which there exist nonnegative real numbers x_1, x_2, …, x_n and complex numbers z_1, z_2, …, z_n of unit modulus such that $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$, $x_1z_1+x_2z_2+\ldots+x_nz_n=a$ and $x_1z_1^2+x_2z_2^2+\ldots+x_nz_n^2=b$.

☺ April's fool!