A matematika és fizika totó eredménye

A múlt havi számunkban közreadtuk az 1999. évi Téli Ankét totó-kérdéseit. A telitalálatos szelvény:

2,2,X, 1,X,2, 2,2,X, 2,2,X, 2,1.

Az alábbiakban rövid útmutatást adunk a feladatok megoldásához.

1. A $0+999$, $1+998$, $\ldots$, $499+500$ számpárokban a jegyek összege 27, és mivel 500 ilyen pár van, ezek számjegyeinek összege $50\cdot 27=13\,500$. Az $1000+1999$, $1001+1999$, $\ldots$ $1499+1500$ párok jegyeinek összege $50\cdot 29=14\,500$, s ha ezekhez hozzáadjuk 2000 számjegyeinek összegét, megkapjuk a 28 002-es végeredményt.

2. A vízszintesen, egyenletes sebességgel mozgó mézescsuporban a bubororék v_1 emelkedési sebessége a felhajtóerővel, az pedig a nehézségi gyorsulással arányos: $v_1=k\cdot g$. Amikor a v_2 sebességű szánkó (és vele együtt a csupor is) lefékeződik, a buborék a vízszintes gyorsulással arányos tehetetlenségi erő hatására vízszintes irányban elmozdul. A buborék pillanatnyi vízszintes sebessége a szánkó pillanatnyi vízszintes gyorsulásával arányos:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=-k\frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Összegezve a vízszintes elmozdulásokat:

$$\sum\Delta x=-k\sum\Delta v=-k\cdot(-v_2)=\frac{v_1\cdot v_2}{g}.$$

A megadott számadatokkal ez az elmozdulás 1 mm.

3. Az 5-ös lottónál a nem nyerés esélye (vagyis annak valószínűsége, hogy vagy 0, vagy 1 találatunk legyen):

$$\frac{\binom{85}{5}+5\binom{85}{4}}{\binom{90}{5}}\approx 0{,}977,$$

a nyerés esélye ezek szerint 2,3 %.

A 6-os lottónál a megfelelő valószínűség:

$$\frac{\binom{45}{6}-\left[\binom{39}{6}+6\binom{39}{5}\right]}{\binom{45}{6}}\approx 0{,}176,$$

a legalább 2 találat esélye: 17,6 %. Hasonlóan számítható ki, hogy a nyerés (legalább 3 találat) esélye: 2,4 %.

A skandináv lottónál annak valószínűsége, hogy egy húzásnál legalább 2 találatunk legyen:

$$p=\frac{\binom{35}{7}-\left[\binom{28}{7}+7\binom{28}{6}\right]}{\binom{35}{7}}\approx 0{,}432.$$

Mivel két húzáson vesz részt minden szelvény, ezek valamelyikén elért 2 találat esélye: $1-(1-p)^2=2p-p^2=0{,}677$. A nyerés (2 sorsolás valamelyikén legalább 4 találat) valószínűsége itt 3,6 %.

4. Átlagosan ugyanannyi autó közlekedik keletről nyugatra, mint nyugatról keletre, ezek azonban (az utak, autópályák véges szélessége miatt) különböző távolságra vannak a Föld forgástengelyétől, tehát eredő perdületük nem nulla. Ha valamennyi angliai jármű ellentétes irányban haladna, az impulzusnyomatékuk megváltozna, emiatt a Föld szögsebességének is változnia kellene. A nap hossza igen kicsiny mértékben, de megnőne.

5. Az a pont, ahol a háromszögbe írt kör érinti az AB oldalt, az eredeti helyzetébe kerül vissza, ez a transzformáció fixpontja.

6. A v sebességgel haladó láda egységnyi idő alatt a sebességével arányos számú görgőt hoz mozgásba, s ezek mindegyike a láda sebességével megegyező kerületi sebességre gyorsul fel, összes mozgási energiájuk tehát a sebesség köbével arányos. Belátható, hogy a görgők felgyorsítása közben a súrlódás miatt fejlődő hő ugyanakkora, mint a görgők forgási energiája, tehát a fékezőerő összteljesítménye is a sebesség köbével arányos. Másrészt viszont ez a teljesítmény a fékezőerő és a sebesség szorzataként is felírható, a fékezőerő tehát (a közegellenállási erőhöz hasonlóan) a sebesség négyzetével arányos.

7. Az $a_{mn}=m\cdot n(m^4-n^4)=m\cdot n(m-n)(m+n)(m^2+n^2)$ $(1\le n<m)$ számok oszthatók 2-vel, 3-mal és 5-tel, másrészt közülük a legkisebb: $a_{21}=30$, a legnagyobb közös osztójuk tehát 30.

8. A két rúdmágnes különböző nagyságú, *azonos* irányú forgatónyomatékot fejt ki egymásra! (Vajon forgásba jön-e a két mágnesből álló rendszer, ha a megadott elrendezésben egy műanyagvonalzóhoz erősítjük őket és a vonalzót a tömegközéppontjánál csapágyazzuk?)

9. Belátható, hogy ha a dézsában egyetlen pohár úszik, akkor akár a pohárba, akár a dézsába öntünk bele adott mennyiségű vizet, a pohárban levő víz szintje a dézsa aljához viszonyítva mindkét esetben ugyanolyan magasra kerül. Eszerint sok pohár esetén sem számít, hogy a legkisebb alapterületűbe, valamelyik nagyobb pohárba, vagy akár a dézsába öntjük a vizet, a legkisebb pohár vízszintje ugyanolyan magasságba kerül.

Ha az 1 m^2 alapterületű dézsába öntünk 3 cm^3 vizet, valamennyi pohár és valamennyi vízszint 0,003 mm-t emelkedik fel. Ha a legkisebb pohárba öntjük a 3 cm^3-nyi vizet, a benne levő víz szintje ugyanennyit (0,003 mm-t) emelkedik, a pohár maga pedig (1 cm $-$ 0,003 mm)-t süllyed. A feltett kérdésre tehát további adatok ismerete *nélkül* is válaszolhatunk.

10. A mérleg a teljes rendszer által a mérlegre kifejtett erőt F mutatja. Ugyanilyen nagyságú (de ellentétes irányú) erőt fejt ki a mérleg is a hordóból, az állványból a kádból és a sörből „álló" rendszerre. A rendszerre ható eredő erő (a függőlegesen lefelé mutató irányt tekintve pozitívnak): $mg-F$. Ha a rendszer tömegközéppontja *áll* (vagy egyenletes sebességgel mozog), akkor $mg-F=0$, ha viszont a tömegközéppont gyorsulása (lefelé) a, akkor az $mg-F=ma$ mozgásegyenletből $F=mg-ma$. Jelen esetben a rendszer tömegközéppontja (a sör mozgása miatt) lassan süllyed lefelé, de ez a mozgás nem egyenletes, hanem lassuló, hiszen a hordóban levő sörszint csökkenése miatt a kiáramlás sebessége fokozatosan csökken. Eszerint $a<0$, tehát $F>mg$. (Ugyanez az effektus mérlegre állított homokóránál nem lépne fel, mert a homok lepergési sebessége — a folyamat kezdeti és végső pillanatait leszámítva — nem függ a homokréteg magasságától.)

11. 20 000 ember közül átlagosan 0,95 bizonyul pozitívnak és ténylegesen betegnek, a tévesen betegnek diagnosztizáltak száma pedig átlagosan $0{,}05\cdot 19\,999$. Így a betegek és a pozitívok aránya:

$$\frac{0{,}95}{0{,}95+0{,}05\cdot 19\,999}\approx 0{,}001=0{,}1\,\%.$$

12. Ha egy homogén henger fedőlapjának közepénél g a nehézségi gyorsulás, akkor onnan egy egységnyi tömegű (kicsiny) testet Δx magasságra emelve $W=g\Delta x$ munkát kell végeznünk. Ez a munka a rendszer gravitációs helyzeti energiájának megváltozásával egyenlő, és úgy is kiszámítható, mintha egy Δx vastag réteget gondolatban levágtunk volna a henger egyik „végéről”, s a henger másik végére helyeztük volna át. Az áthelyezés során a helyzeti energia éppen annyit változik meg, mint amennyi munkát az egész henger δx távolságra történő elmozdításakor végzünk. Ez a munka integrálszámítás segítségével adható meg:

$$W=g_{\text{henger}}\Delta x=2\pi f\varrho\left(R+H-\sqrt{R^2+H^2}\right)\cdot\Delta x.$$

A fenti képletnek megfelelő g akkor egyezik meg az R sugarú, ϱ sűrűségű gömb alakú Föld felszínén mérhető $g=\frac{4}{3}\pi f\varrho R$ gyorsulással, ha $H=\frac{4}{3}R$.

Megjegyzés. Vigyázat: a henger gravitációs tere nem számolható úgy, mintha a teljes tömege a tömegközéppontban helyezkedne el. Ha mégis így tennénk, akkor a $H=3R$ hibás eredményt kapnánk.

13. Az $\left[\frac{x}{2000}\right]=\left[\frac{x}{1999}\right]$ egyenletnek 1 999 000 nemnegatív egész megoldása van.

Legyen $a=1999$, akkor az

$$\left[\frac{x}{a+1}\right]=\left[\frac{x}{a}\right]=0$$

egyenletnek $x=0$, 1, …, $a-1$, tehát a darab megoldása van, az

$$\left[\frac{x}{a+1}\right]=\left[\frac{x}{a}\right]=1$$

egyenletnek $a+1\le x<2a$, azaz $a-1$ darab megoldása van, s általában az

$$\left[\frac{x}{a+1}\right]=\left[\frac{x}{a}\right]=k$$

egyenletnek egyenletnek $a-k$ megoldása (ha $a>k$). Az összes megoldás száma

$$\sum_{k=0}^{a}(a-k)=1+2+\ldots+1999=1\,999\,000.$$

13 + 1. *John Leech* mutatta meg, hogy van olyan tetraéder, amelynek egészek az élei, egész szám a felszíne és egész a térfogata is. Az $a=148$, $b=195$, $c=203$ oldalú háromszög hegyesszögű, és a területe egész (nevezetesen 13 650). Igaz továbbá, hogy ha ABC egy hegyesszögű háromszög, akkor létezik egy olyan tetraéder, melynek minden lapja egybevágó az ABC háromszöggel, és az ilyen tetraéder térfogata

$$V=\sqrt{\frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}{72}},$$

ami most 611 520. (Ez a pótkérdés igazából „lottó-kérdés” volt, itt logikus gondolkodás helyett inkább szerencsés tippelésre volt szükség!)

Fizika gyakorlatok és feladatok megoldása

FGy. 3196. *Másodpercenként* 100 MJ *elektromos energiát kell a fogyasztókhoz eljuttatni* 20 km *hosszú,* 100 mm^2 *keresztmetszetű alumínium távvezetéken. Mekkora a veszteség, ha a felhasználás helyén* 100 kV *a feszültség? Mekkora lenne a veszteség* 380 V *feszültségnél?*

(4 pont) (**Á**) Komárom-Esztergom megyei *„Ifjú fizikus”* verseny

Megoldás. A vezeték elektromos ellenállása (a táblázatban található adatok közül a legkisebb értékkel számolva)

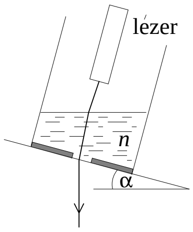
$$R=\varrho\frac{l}{A}=5{,}6\ \Omega.$$

(Ha a 20 km-es adatot az energiatovábbítás távolságaként, nem pedig a vezeték(pár) teljes hosszaként értelmeznénk, akkor a fenti ellenállás kétszeresét kellene figyelembe vennünk.) A felhasznált elektromos teljesítmény $P=100$ MW. Ha a felhasználás helyén a feszültség $U=100$ kV, akkor az áramerősség a fogyasztón $I=P/U=1000$ A. Mivel a távvezetéken is ugyanekkora áram folyik, a „veszteségi teljesítmény” $P_{\text{veszt}}=I^2R=$ $=5{,}6$ MW, ez a teljes teljesítménynek 5 százaléka.

Hasonló számítással adódik, hogy 380 voltos (felhasználói) feszültség esetén az áramerősség $2{,}6\cdot 10^5$ A lenne, ami kb. $4\cdot 10^{11}$ W-os veszteségi teljesítménynek, a felhasznált teljesítmény 4000-szeresének (!) felelne meg. Ez még akkor is nagyon gazdaságtalan energiatovábbítási eljárás lenne, ha ilyen nagy áramerősség műszakilag ténylegesen megvalósítható volna.

Szilágyi Tamás (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn. 10 o.t.)

292 dolgozat érkezett. Helyes 200, kissé hiányos (3 pont) 23, hiányos (1–2 pont) 55, hibás 14 dolgozat.



FF. 3242. *Egy nemrég szabadalmaztatott „függőón” egy hengeres edénybe töltött megfelelő törésmutatójú folyadékból és egy kis lézerből áll. Hogyan kell megválasztani az n törésmutatót, ha azt akarjuk elérni, hogy a fény a folyadékprizmán megtörve gyakorlatilag függőlegesen lépjen ki a berendezésből, ha $|\alpha| < 10°$. Milyen pontos lehet ez a berendezés?*

(5 pont) Közli: *Mara József,* Budapest

Megoldás. A vízszinteshez képest α szögben megdöntött berendezés tengelye mentén haladó fénysugár α beesési szöggel ér a folyadék felszínéhez (*1. ábra*), a β törési szögre tehát fennáll, hogy

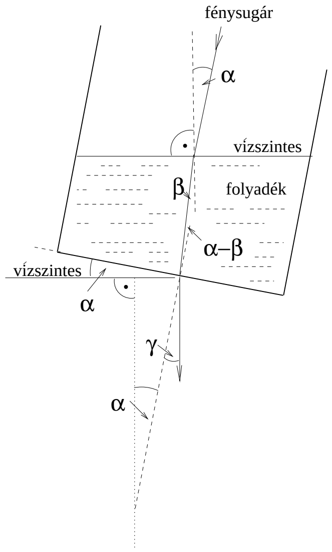
$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}. \tag{1}$$

A megtört fénysugár $\alpha-\beta$ szöget zár be az első beesési merőlegessel, s mivel az merőleges a berendezés fenéklapjának síkjára, a folyadék elhagyásakor fellépő irányváltoztatás beesési szöge is $\alpha-\beta$. A folyadékból kilépő fénysugár törési szögét γ-val jelölve a törési törvény szerint

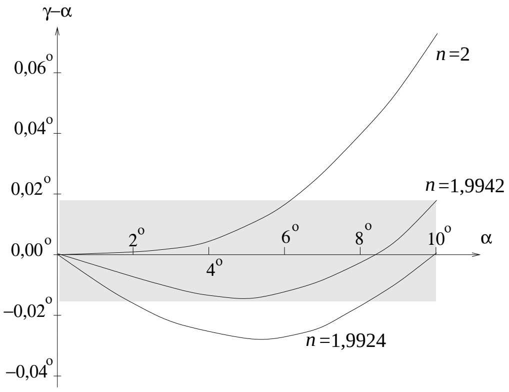
$$\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha-\beta)} = n. \tag{2}$$

Innen (1) felhasználásával

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \sqrt{n^2-\sin^2\alpha} - \cos\alpha. \tag{3}$$



1. ábra



2. ábra

A berendezés fenéklapjára merőleges egyenes a függőlegessel α, a kilépő fénysugárral pedig γ szöget zár be. A „függőón” tehát akkor működik jól, ha a vizsgált tartományba eső α szögekre $\gamma \approx \alpha$ teljesül, vagyis (3) jobb oldalán álló kifejezés jó közelítéssel 1-nek tekinthető. Ez kis szögekre ($\sin\alpha \approx \alpha$ és $\cos\alpha \approx 1$ miatt) valóban fennállhat, ha $n=2$. Ilyen törésmutató mellett a legnagyobb ($\alpha = 10°$-hoz tartozó) hiba: $\gamma - \alpha = 0{,}077°$.

Az $n=2$-es törésmutatójú folyadékkal készített berendezés kicsiny szögeknél egyre pontosabbá válik, de az egész $0 \le \alpha \le 10°$ intervallumon *nem a legjobb* megoldás. Ha olyan törésmutatót választunk, amely $\alpha = 10°$-nál teszi pontossá a készüléket (ennek (3) szerint $n = 1{,}9924$ felel meg), akkor az 5° körül a legpontatlanabb, azonban ott is csak 0,03° az eltérés, máshol kisebb. Meglepőnek tünhet, de még ennél jobb „függőón” is készíthető! Ha a törésmutatót $n=1{,}9942$-re állítjuk be, akkor (lásd a *2. ábrát*) a fénysugár eltérése a függőlegestől nem nagyobb $0{,}02^\circ$-nál!

Harangi Viktor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.)

Katona Gergely (Budapest, ELTE Trefort Á. Gyakorlóiskola 12. o.t.) és
Kurucz Keve (Révkomárom, Selye J. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Létezik ugyan olyan anyag (folyadék-keverék), amelynek törésmutatója 2-höz közeli érték, de az robbanásveszélyes és mérgező, ezért a kívánt célra nem lehet felhasználni. Megoldható azonban a kérdés úgy, hogy több, egymás felett elhelyezkedő folyadékprizmát alkalmazunk, melyek mindegyikének felső felülete egyensúlyban vízszintesre áll be. Belátható, hogy N réteg esetén a megfelelő törésmutató $n=1+1/N$ (pontosabban ahhoz igen közeli érték) kell legyen, tehát $N=2$ réteg esetén $n\approx 1{,}5$. Ilyen tulajdonságú folyadék-keverék már a gyakorlatban alkalmazható anyagok között is található.

2. Megfelelő toldalák (fénysugár-elforgató) segítségével a függőlegesen kilépő lézerfény nagyon jó közelítéssel vízszintessé tehető, s így lézeres „vízszintmérő” készíthető. Az úgynevezett pentaprizma a törőéleire merőleges síkban beeső fényt 90°-kal elforgatja, függetlenül attól, hogy milyen szögben éri a fény a prizmát. A pentaprizma tehát egy bizonyos irányban történő kibillenésre érzéketlen, a másik irányban való megfelelő beállását pedig egy alkalmas (hajóhintaszerű) felfüggesztéssel a $\pm 10^\circ$-os intervallumon belül biztosítani lehet.

(M. J.)

45 dolgozat érkezett. Helyes 36, kissé hiányos (4 pont) 4, hiányos (1–3 pont) 3, hibás 2 dolgozat.

FGy. 3245. *Szódavíz készítésekor a szén-dioxid* 22 % *-a oldódik fel az* 1 *liter vízben, mely felett betöltéskor még* 2 *dl „üres” tér maradt. Legalább hány gramm* CO_2 *-nek kell lennie a patronban, hogy a szifonból kinyomja a vizet?*

(4 pont) Közli: *Szilágyi György,* Budapest

Megoldás. A szódavíz még „éppen” kinyomható az üvegből, akkor, ha a $V=1{,}2$ liter térfogatú üres palackban levő gáz nyomása közelítőleg a külső $p_0=10^5$ Pa nyomásával egyezik meg (ténylegesen egy kicsit nagyobb annál). A levegő és szén-dioxid keverékéből álló gáz n mólszáma a $p_0V=nRT$ összefüggésből ($T=293$ K-nel számolva) 0,05-nek adódik. Ez a gázmennyiség tartalmazza a kezdetben már a palackban levő levegőt, (ez a fenti érték $\frac{1}{6}$-a), a szén-dioxid mennyisége tehát a kiürült palackban 0,042 mol. A patronból betöltött szén-dioxidnak csak 78 %-a marad a palackban, a CO_2 mólszáma tehát legalább $\frac{0{,}042}{0{,}78}=0{,}054$, tömege pedig minimum $0{,}054\cdot 44\ \mathrm{g}=2{,}4$ g kell legyen.

Molnár Tamás (Szekszárd, Garay J. Gimn., 9. o.t.)

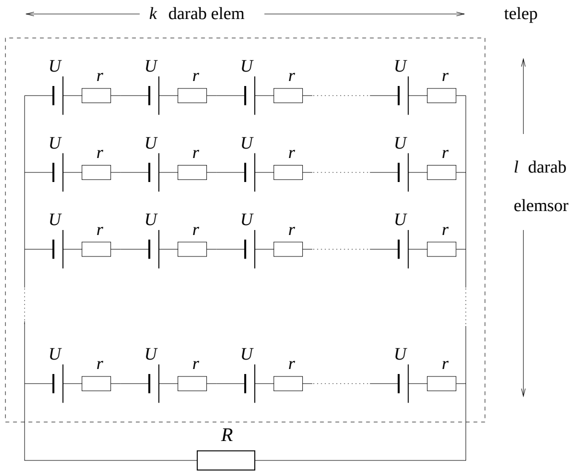
Megjegyzés. Voltak, akik úgy tekintették, hogy a víz feletti „üres” részt kezdetben nem levegő, hanem szén-dioxid tölti ki. Ez a szódavíz „gyártástechnológiájának” ismeretében vitatható. Igaz ugyan, hogy az előző adag szódavíz kinyomása után szén-dioxid marad a palackban, ez azonban a víz betöltése során jelentős mértékben keveredik a levegővel.

176 dolgozat érkezett. Helyes 112, kissé hiányos (3 pont) 12, hiányos (1–2 pont) 12, hibás 40 dolgozat.

FF. 3249. *Egy galvánelem maximálisan P teljesítményt tud leadni, és van* 60 *darab ilyen galvánelemünk. Az elemek milyen kapcsolásai esetén és mekkora külső ellenállásokon vehető ki belőlük pontosan* $60\,P$ *teljesítmény?*

(4 pont) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

Megoldás. Ismeretes, hogy egy U elektromotoros erejű és r belső ellenállású áramforrásból akkor tudjuk a legnagyobb teljesítményt „kivenni”, ha éppen a belső ellenállásával megegyező nagyságú terhelő ellenállást kapcsoljuk rá, és ez teljesítmény $P = U^2/(4r)$.



Kapcsoljunk sorba k darab egyforma elemet, majd l számú ilyen elemsort párhuzamosan kapcsolva készítsünk (az *ábrán* látható módon) telepet. A telep minden sora egyetlen kU kapocsfeszültségű, kr belső ellenállású elemmel helyettesíthető. Párhuzamosan kapcsolva ezeket az elemeket, a telep eredő belső ellenállása $R_b = kr/l$, a kapocsfeszültsége pedig kU lesz.

A telepet helyettesítő elemből akkor vehető ki a legnagyobb teljesítmény, ha az R terhelő ellenállás éppen a telep belső ellenállása (vagyis kr/l). Ilyenkor a teljesítmény

$$P_{\max} = \frac{(kU)^2}{4\cdot(k/l)r} = kl\,\frac{U^2}{4r} = kl\cdot P.$$

Mivel 60 darab elem áll rendelkezésünkre ($kl = 60$), a leírt kapcsolás annyiféleképpen valósítható meg, ahány különböző módon bontható fel 60 egész számok szorzatára. Tekintettel arra, hogy a sorrend is számít, 12 különböző eset van: $(k,l) = (1,60)$ (tisztán párhuzamos kapcsolás), $(k,l) = (2,30)$, $(k,l) = (3,20)$, …, $(k,l) = (30,2)$ és végül a tisztán soros kapcsolás: $k = 60$, $l = 1$. Ezek mindegyikében a maximális kivehető teljesítmény $60\,P$, de a terhelő ellenállások különbözőek: $\frac{1}{60}r$, $\frac{1}{15}r$, $\frac{3}{20}r$, …, $15\,r$ és végül $60\,r$.

Bartha Ágnes (Kézdivásárhely, Nagy Mózes Líceum, 9. o.t.) dolgozata alapján

61 dolgozat érkezett. Helyes 34, kissé hiányos (3 pont) 9, hiányos (1–2 pont) 13, hibás 5 dolgozat.

P. 3266. *Jégesőben egy jégdarab* 6 m/s *sebességgel csapódik egy parkoló autó tetejére. Legfeljebb milyen magasra csapódik vissza, ha ütközéskor elveszti mozgási energiájának* 60 %*-át?*

(3 pont) *Frank János verseny,* Szeged

Megoldás. A v sebességgel becsapódó jégdarab mozgási energiája $E_1=\frac{1}{2}mv^2$, ebből csak $E_2=0{,}4\cdot E_1=0{,}2\cdot mv^2$ marad meg az ütközés után. Ezt az energiát $E_2=mgh$ alakban felírva a maximális emelkedési magasságra

$$h=\frac{E_2}{mg}=\frac{0{,}2\,mv^2}{mg}=0{,}73\ \mathrm{m}$$

adódik. A jég tehát (ha függőlegesen felfelé pattan vissza) legfeljebb 73 cm magasra emelkedhet az autó teteje fölé.

Több dolgozat alapján

770 dolgozat érkezett. Helyes 667, hiányos (1–2 pont) 71, hibás 31, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 3269. *Könnyen mozgó, M tömegű kiskocsira fonálingát függesztettünk. Az ingatest tömege m, a fonál hossza l. A kocsit rögzítve az ingát kicsit kitérítjük, majd magára hagyjuk. A lengésidő megmérése után megismételjük a kísérletet úgy is, hogy a kiskocsit nem rögzítjük. Hogyan változik az inga lengésideje?*

(4 pont) *Károly Ireneusz verseny,* Sárospatak

Megoldás. A rögzített kiskocsin a fonálinga lengésideje:

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

A második kísérlet során a kocsiból és az ingatestből álló rendszerre nem hat vízszintes irányú külső erő, ezért a kezdetben álló tömegközéppont vízszintes irányban nem mozdul el. Az ingatest tehát úgy mozog, mintha az inga fonala a tömegközéppontban, az ingatesttől $l'=lM/(m+M)$ távolságban lenne felfüggesztve. (A kis kitérések miatt a tömegközéppont másodrendűen kicsiny függőleges mozgásáról megfeledkezhetünk.) Ennek a „redukált fonálhosszúságú” ingának a lengésideje:

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\,\frac{M}{(m+M)}}=T_0\sqrt{\frac{M}{m+M}}.$$

Klinda Gábor (Budapest, Eötvös J. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

80 dolgozat érkezett. Helyes 45, hiányos (1–2 pont) 14, hibás 17, nem versenyszerű 4 dolgozat.

P. 3270. *Az $R=6370$ km sugarú Föld körül $r=2R$ sugarú körpályán kering egy mesterséges hold. Egy adott pillanatban a Föld középpontja felé irányuló sebességet kap. A lendületváltozás nagysága megegyezik a mesterséges hold korábbi lendületének nagyságával.*

a) *Határozzuk meg a mesterséges hold sebességét a lendületváltozás utáni pillanatban!*

b) *Milyen távolságra közelíti meg a mesterséges hold a Föld középpontját?*

c) *Mekkora a sebessége a Földhöz legközelebbi pontban?*

(5 pont) *Párkányi László verseny,* Pécs

I. megoldás. A körpályán való keringés dinamikai feltétele:

$$ma_{\mathrm{cp}} = m\frac{v_0^2}{2R} = \frac{fmM}{(2R)^2}\quad,\qquad v_0 = \sqrt{\frac{fM}{2R}}.$$

Mivel a lendületváltozás iránya merőleges az eredeti lendületre, Pitagorasz tétele szerint

$$mv_1 = \sqrt{(mv_0)^2 + \Delta I^2} = \sqrt{2(mv_0)^2},$$

ahonnan a műhold tömegével egyszerűsítve

$$v_1 = \sqrt{2}v_0 = \sqrt{\frac{fM}{R}} = 7925\ \mathrm{m/s}$$

adódik. A műhold mechanikai energiája a lendületváltozás után

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{fmM}{2R} = 0,$$

vagyis v_1 éppen a szökési sebesség. Eszerint a műhold a továbbiakban parabolapályán mozog.

A műhold sebessége a Földhöz legközelebbi pontban a legnagyobb. Ekkor az energia- és a perdületmegmaradás miatt

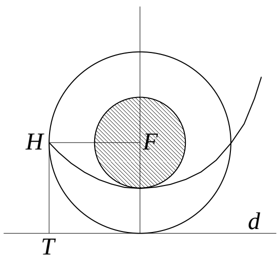
$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2fM}{r_{\min}}}\quad,\qquad 2Rv_0 = r_{\min}v_{\max}.$$

Összevetve a két egyenletet

$$r_{\min} = \frac{4R^2}{2fM}\,\frac{fM}{2R} = R = 6370\ \mathrm{km},$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2fM}{R}} = 11\,208\ \mathrm{m/s}.$$

Szilágyi Tamás (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján



II. megoldás. A parabolapálya Földhöz legközelebb eső pontját tisztán geometriai megfontolásokból is megkaphatjuk. A lendületváltozás utáni pillanatban a műhold sebessége (amely érintőirányú) 45° szöget zár be a fókuszba húzott sugárral. A parabola ismert tulajdonságai miatt az érintő felezi a THF szöget, így ez derékszög (lásd az *ábrát*). Mivel HF párhuzamos a d vezéregyenessel, F és H egyenlő ($2R$-nyi) távolságra vannak d-től, ami azt jelenti, hogy a parabola csúcspontja egyaránt R távolságra lesz F-től és d-től.

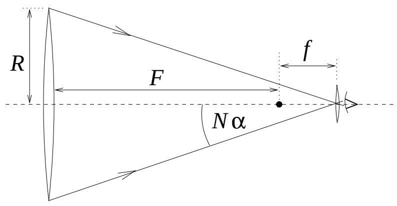
Ambrus Gergely (Szeged, Radnóti M. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

88 dolgozat érkezett. Helyes 41, kissé hiányos (4 pont) 9, hiányos (1–3 pont) 23, hibás 15 dolgozat.

P. 3271. *Egy* 5*-szörös nagyítású Kepler-távcső objektívjének átmérője* 84 mm*, fókusztávolsága* 1 m*, az okulár átmérője* 12 mm*. Legfeljebb mekkora látószögben levő csillagokat lehet ezzel a távcsővel egyszerre látni?*

(5 pont) *Kulin György verseny,* Székesfehérvár

Megoldás. A képalkotásban csak azok a fénysugarak vesznek részt, melyek az objektíven is és az okuláron is keresztül haladnak, és a szemünkbe is bejutnak. Amikor egy távcsőbe nézünk, a szemünk általában az okulárhoz közel helyezkedik el. A pupillánk mérete (kb. $5-6$ mm) kisebb, mint az okulár átmérője, így a látómezőt nem az okulár mérete, hanem a pupillánk átmérője korlátozza.



1. ábra

Az objektívből az okulár közepéhez (középső tartományához) érkező fénysugarak közül azok zárnak be legnagyobb szöget egymással, melyek az objektív szélső átellenes pontjain haladnak keresztül (*1. ábra*.)

Ezek szöge az objektív $D=2R$ átmérőjének és a távcső $f+F$ hosszának aránya:

$$N\alpha=\frac{D}{f+F}=\frac{D}{F+(F/N)}=\frac{84\ \text{mm}}{1000\ \text{mm}+200\ \text{mm}}=0{,}07.$$

A távcső szögnagyítása $N=5$, tehát a még éppen látszó csillagok szögtávolsága

$$2\alpha=0{,}028\ \ \text{radián}=1{,}6^\circ$$

Több dolgozat alapján

Megjegyzések. 1. Ha megvizsgáljuk annak feltételét, hogy az objektíven áthaladó fénysugarak közül egy éppen elérje az okulárt, akkor a csillag iránya és az optikai tengely közötti szögre a *2. ábra* jelöléseit használva a következők írhatók fel:

$$\frac{F\alpha-r}{f}=\frac{R-F\alpha}{F},$$

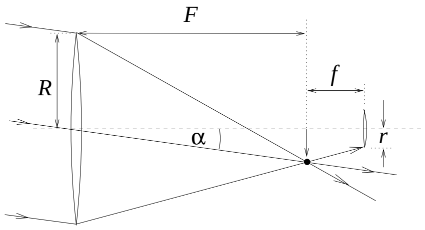
ahonnan

$$\alpha=\frac{(R/N)+r}{f+F}=0{,}012,$$

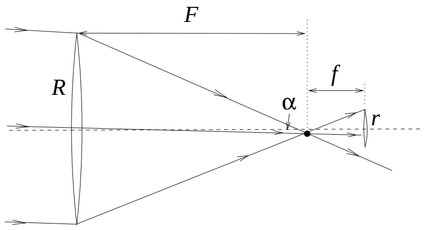
két ilyen (átellenesen elhelyezkedő) csillag szögtávolsága $2\alpha=0{,}024=1{,}4^\circ$. (Ez a látószög a félárnyékban és a teljes árnyékban levő tartományok határát adja meg.) Az ilyen (pontosabban: az ehhez közeli) látószögben elhelyezkedő csillagokat csak „nagyon tágra nyitott” szemmel (12 mm-esnél is nagyobb pupillával) lehetne látni. A fenti képlet $r\to 0$ határesetben visszaadja a szűk pupillának megfelelő megoldást.

Ambrus Gergely (Szeged, Radnóti M. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

KöMaL – 2000/3 FIZ0003 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 20:43 (10. lap)



2. ábra



3. ábra

2. Ha megvizsgáljuk annak feltételét, hogy az objektíven áthaladó fénysugarak az okulár teljes felületét megvilágítsák, akkor a csillag iránya és az optikai tengely közötti szögre (lásd a *3. ábrát*) a következő áll fenn:

$$\frac{F\alpha + r}{f} = \frac{R - F\alpha}{F},$$

ahonnan

$$\alpha = \frac{(R/N) - r}{f + F} = 0{,}002,$$

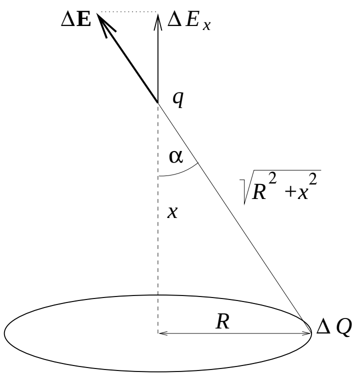
két ilyen (átellenesen elhelyezkedő) csillag szögtávolsága $2\alpha = 0{,}004 = 0{,}23^\circ$. Ennél kisebb látószögű csillagok a félárnyékos tartományon belülre esnek, ezek látszólagos fényességét nem torzítja el a távcső. A Kepler-távcső fókuszsíkjába egy (az itt kiszámított szögnek megfelelő) $F\alpha$ sugarú fekete blendét szoktak elhelyezni, ezzel (a félárnyékban levő csillagok képének letakarásával) biztosítják a fényerősségek megfelelő arányosságát.

Darabos Andrea (Budapest, Petőfi S. Gimn. és Szki. 11. o.t.) dolgozata alapján

41 dolgozat érkezett. Helyes 15, kissé hiányos (4 pont) 6, hiányos (2–3 pont) 20 dolgozat.

P. 3282. *Egy R sugarú, kör alakú vezetőt Q töltéssel elektromosan feltöltöttünk. Hogyan változik a térerősség a kör középpontján átmenő, a kör síkjára merőleges egyenes mentén? Hol éri el a legnagyobb értékét?*

(5 pont) *Bródy Imre verseny*, Ajka



1. ábra

Megoldás. Helyezzünk el a szimmetriatengelyen a kör középpontjától x távolságban egy kicsiny q töltést. Erre a próbatöltésre a kör alakú vezeték valamely ΔQ nagyságú töltésdarabkája a Coulomb-törvénynek megfelelő

$$q \cdot |\Delta\mathbf{E}| = k\frac{q\Delta Q}{R^2 + x^2}$$

nagyságú erőt fejt ki (*1. ábra*).

Ezen erők összege (szimmetria-okok) a szimmetriatengely irányába mutat, emiatt úgy is kiszámítható, hogy az az elemi erőhatások x tengely irányú vetületeit összegezzük:

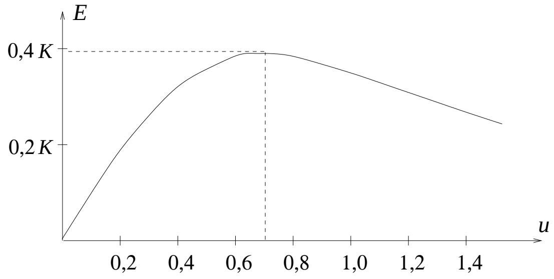
$$qE = \sum qE_x = \sum q|\Delta\mathbf{E}| \cdot \cos\alpha = \sum kq\Delta Q\,\frac{x}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}} = kq\frac{Q}{R^2}\,\frac{(x/R)}{\left(1 + (x/R)^2\right)^{3/2}}.$$

Bevezetve az $u=x/R$ dimenziótlan változót, az elektromos térerősséget a szimmetriatengely mentén az

$$E(u)=k\frac{Q}{R^2}\,\frac{u}{\left(1+u^2\right)^{3/2}}=K\cdot\frac{u}{\left(1+u^2\right)^{3/2}}$$

formulával adhatjuk meg. Ennek a kifejezésnek keressük a maximumát, vagyis azt az u értéket, ahol a K (állandó) szám mellett álló kifejezés a legnagyobb értékét veszi fel.

Ábrázolva az $u/(1+u^2)^{3/2}$ kifejezést u függvényében (*2. ábra*) megállapíthatjuk, hogy a maximumát $u\approx 0{,}7$-nél éri el. Az elektromos térerősség tehát a kör középpontjától $x\approx 0{,}7\,R$ távolságban a legerősebb. A maximum helye (pl. a függvény $u=0{,}7$ körüli részének kinagyításával) természetesen pontosabban is meghatározható.



2. ábra

Madas Balázs (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzés. A szélsőérték helye differenciálszámítás segítségével is meghatározható. A térerősség az *1. ábrán* látható α szöggel is kifejezhető:

$$E=K\cdot\sin^2\alpha\cos\alpha=K\cdot(\cos\alpha-\cos^3\alpha)=K\,(y-y^3),$$

ahol $y=\cos\alpha$. Az $E(y)$ függvény lokális maximumánál az $E'(y)=K(1-3y^2)$ derivált nulla kell legyen, ez pedig $\cos\alpha=1/\sqrt{3}$, azaz $x=R/\sqrt{2}\approx 0{,}707\,R$ távolságnál teljesül.

Fábián Ákos (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn. 12. o.t.)

86 dolgozat érkezett. Helyes 60, kissé hiányos (4 pont) 9, hiányos (1–3 pont) 13, hibás 2, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 3283. *Egy gépkocsi mindegyik kerekének ugyanolyan erős felfüggesztő rugója van. Mennyit emelkedik meg az autó merevnek tekinthető karosszériája a kerekek felett, ha a kocsi a jobb első kerekével egy* 8 cm *magas járdaszegélyre áll? Hogyan módosul az eredmény, ha a gépkocsi mindkét jobb oldali kerekével felhajt a járdára? Függ-e az eredmény attól, hogy hányan és hol ülnek a kocsiban?*

(6 pont) Közli: *Gnädig András,* Budapest (Olimpiai válogatóverseny, 1999.)

Megoldás. Jelöljük a jobb első kerék rugója által kifejtett függőleges erőt (a gépkocsi eredeti, vízszintes helyzetében) F_{JE}-vel, a többi keréknél fellépő erők pedig legyenek rendre F_{BE}, F_{JH} és F_{BH}. Ezen erők a gépkocsira ható többi erővel (a gépkocsi és a benne ülő személyek súlyával) tartanak egyensúlyt, és a forgatónyomatékuk a súlypontra vonatkoztatva nulla.

Ha a gépkocsi a jobb első kerekével a járdára áll, a rugóerők megváltoznak, nagyságuk $F'_{\mathrm{JE}}=F_{\mathrm{JE}}+\Delta F_{\mathrm{JE}}$ stb. lesz (irányuk azonban jó közelítéssel továbbra is függőleges marad). Az új (vesszővel jelölt) erőrendszerre ugyanaz érvényes, mint a vesszőtlenre (eredője és forgatónyomatéka változatlan), emiatt a ΔF_i erők rendszerének hatása az eredő erőt és az eredő forgatónyomatékot tekintve egyaránt nulla.

Az erőnövekmények forgatónyomatéka nem csak a tömegközéppontra, de bármely tengelyre, így például a jobb első és a bal hátsó kerék közepét összekötő egyenesre vonatkoztatva nulla kell legyen. Ez akkor teljesül, ha

$$\Delta F_{\mathrm{BE}} = \Delta F_{\mathrm{JH}} = F_0.$$

Hasonló megfontolással (a másik átlóra vonatkoztatott forgatónyomaték eltűnéséből) kapjuk, hogy

$$\Delta F_{\mathrm{BH}} = \Delta F_{\mathrm{JE}} = -F_0.$$

(Kihasználtuk azt is, hogy a négy erő összege nulla kell egyen.)

A rugóerők megváltozása a rugók hosszának megváltozásával arányos. A rugóerők megváltozására kapott összefüggések tehát azt jelentik, hogy ha a bal hátsó kerék rugója (a korábbi, egyenes úton álló autó helyzetéhez képest) összenyomódik valamekkora $\Delta_{BH} = x$ értéket, akkor ugyanennyivel nyomódik össze a jobb első kerék rugója is, a másik két keréknél pedig x-szel tágulnak a rugók.

A gépkocsi karosszériája a jobb hátsó és a bal első kerekeknél x-szel megemelkedik, ugyanennyivel kell emelkedjék a merev gépkocsi közepe is. A bal hátsó keréknél a kocsiszekrény x-szel lesüllyed, a jobb első keréknél pedig $3x$ értékkel kell megemelkedjen, hiszen a kocsi közepének emelkedése az átlósan elhelyezkedő kerekeknél észlelt emelkedések számtani közepe.) Másrészt viszont a jobb első kerék rugójának összenyomódása x, a járda magassága 8 cm, fenn kell tehát álljon, hogy

$$8\ \mathrm{cm} - x = 3x, \qquad \text{ahonnan} \qquad x = 2\ \mathrm{cm}.$$

Megfontolásaink során nem használtuk ki, hogy mekkora a gépkocsi utasainak tömege, sem pedig a tömegközéppont helyét, az eredmény tehát független az utasok számától és elhelyezkedésétől.

Ha a gépkocsi mindkét jobb oldali kerekével felhajt a járdára, akkor a rugók összenyomódása nem változik meg, a kocsi karosszériája a jobb oldalon 8 cm-rel magasabbra kerül, a bal oldalon viszont változatlan magasságban marad. Ezt pl. úgy láthatjuk be, hogy megfontoljuk: a jobb és a bal oldali rugóerő-növekmények összege és forgatónyomatékuk összege csak úgy lehet nulla, ha mindegyikük külön-külön is nulla. Úgy is érvelhetünk, hogy a két kerékkel járdaszegélyre hajtás két egymás utáni döccenésre bontható. Amikor a jobb első kerékkel hajtunk a járdára, ennél a keréknél 6 cm-t, a jobb hátsónál pedig 2 cm-t emelkedik a kocsi karosszériája. Amikor a jobb hátsó kerék kerül a járdára, a szerepek felcserélődnek. A két emelkedés szuperpozícióját képezve kapjuk, hogy mindkét jobb oldali keréknél összesen 8 cm-t emelkedik a kocsiszekrény, s hasonlóan adódik, hogy a bal oldalon nem változik a rugók hossza.

Több megoldás alapján

Megjegyzés. A leírtak érvényüket vesztik, ha az egyik kerékkel egy olyan magas járdára hajtunk, hogy valamelyik másik kerék a levegőbe kerül.

18 dolgozat érkezett. Helyes Antal Ágnes, Gáspár Merse Előd, Hegedűs Ákos, Ivaskó György, Kóbor János, Madarász Ádám, Máthé András és Pozsgay Balázs megoldása. Kissé hiányos (4 pont) 6, hiányos (2 pont) 1, hibás 3 dolgozat.

P. 3285. *Egy* 7,3 kg *tömegű ballon* 23 °C*-os hélium gázzal töltve* 2,4 m *átmérőjű gömbként lebeg a levegőben (nem emelkedik és nem is süllyed). A körülötte levő levegő sűrűsége* 1,19 kg/m^3. *Mekkora a héliumgáz nyomása?*

(*4 pont*) Közli: *Radnóti Katalin,* Budapest

Megoldás. A ballon térfogata

$$V=\frac{4}{3}r^3\pi=7{,}24\ \mathrm{m}^3,$$

a kiszorított levegő tömege pedig a ballon térfogatából és a megadott sűrűségből számolva: $m=8{,}61$ kg. A héliumgáz tömege ezek szerint 1,31 kg, a nyomása az általános gáztörvényből számítható ki:

$$p=\frac{m}{M}\cdot\frac{RT}{V}=\frac{1{,}31\ \mathrm{kg}}{0{,}004\ \mathrm{kg}}\cdot\frac{8{,}3\ (273+23)}{7{,}24}=1{,}1\cdot 10^5\ \mathrm{Pa}.$$

(Ennél pontosabban nincs értelme megadni a végeredményt, hiszen a feladat kiindulási adatainak többségét sem ismerjük 2-nél több tizedesjegyre.)

Több dolgozat alapján

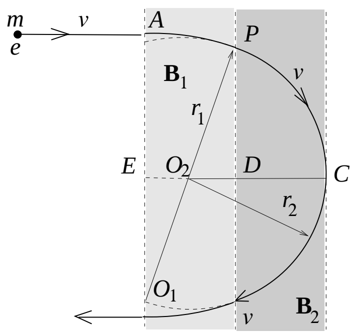
471 dolgozat érkezett. Helyes 347, kissé hiányos (3 pont) 22, hiányos (1–2 pont) 89, hibás 6, nem versenyszerű 7 dolgozat.

P. 3290. *Egy proton-nyalábnak először egy* 4 cm *szélességű, homogén,* $B_1=0{,}2$ T *indukciójú mágneses mezőn, azután egy ehhez kapcsolódó másik, ugyancsak* 4 cm *szélességű, homogén, de* $B_2=0{,}4$ T *indukciójú mágneses mezőn kell áthaladnia. A két mező* B*-vonalai párhuzamosak és ugyanolyan irányúak; a protonok kezdősebessége a* B*-vonalakra és a mágneses mezők határfelületére is merőleges.*

Mekkora gyorsítófeszültségre van szükség ahhoz, hogy a protonok át tudjanak hatolni mindkét mágneses mezőn?

(*4 pont*) Közli: *Varga István,* Békéscsaba

Megoldás. Legyen a proton tömege m, töltése e, a keresett gyorsítófeszültség pedig U. A kezdetben állónak (vagy viszonylag lassan mozgónak) tekintett protonok a gyorsítás során eU mozgási energiára tesznek szert, s ez (feltételezve, hogy a fénysebességnél sokkal lassabban mozognak, ezért a nemrelativisztikus mechanika törvényeit alkalmazhatjuk) $v=\sqrt{2eU/m}$ sebességbek felel meg.



A v sebességgel mozgó protonok a mágneses mezőben az $F=evB$ nagyságú Lorentz-erő hatására körpályán (vagy annak egy részén, köríven) mozognak. Az $evB=mv^2/r$ mozgásegyenlet szerint az állandó nagyságú sebességgel mozgó részecske pályájának görbületi sugara a mágneses mező erősségével fordítottan arányos. Ezek szerint (az ábra jelöléseit követve)

$$AO_1=BO_1=r_1=2\cdot r_2=2\cdot BO_2.$$

Az O_2 pont tehát felezi az $ED = 4$ cm-es szakaszt, ami annyit jelent, hogy a B_2 indukciójú mezőben a körpálya sugara 6 cm, a protonok sebessége tehát $v = 2{,}3 \cdot 10^6$ m/s (ez valóban nemrelativisztikus sebesség, a fénysebesség 1 százalékánál is kisebb), a gyorsítófeszültség pedig $U = 27{,}6$ kV.

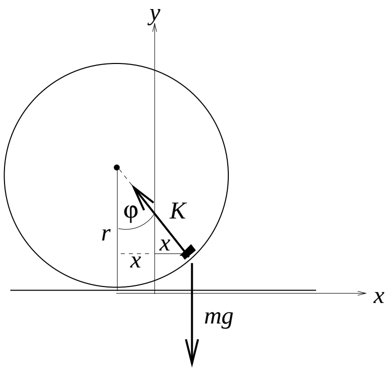
Szilágyi Tamás (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 11. o.t.)

56 dolgozat érkezett. Helyes 45, kissé hiányos (3 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 4, hibás 1 dolgozat.

P. 3293. *Vízszintes asztallapon álló m tömegű, r sugarú, vékony, keskeny abroncs alján ugyancsak m tömegű test nyugszik. A kis testet az abroncs síkjába eső vízszintes, kicsiny v_0 kezdősebességgel elindítjuk. Hogyan mozog a továbbiakban az abroncs középpontja? (A súrlódás mindenütt elhanyagolható.)*

(*6 pont*) Közli: *Balogh Péter,* Budapest

I. megoldás. A rendszerre nem hatnak vízszintes irányban külső erők, emiatt a tömegközéppont kezdeti $v_0/2$ vízszintes sebessége időben változatlan marad. Üljünk bele a tömegközépponttal együtt vízszintes irányban egyenletesen mozgó koordináta-rendszerbe. Jelöljük a kis test vízszintes elmozdulását x-szel, ekkor az abroncs középpontja ellenkező irányban ugyanennyivel kell elmozduljon, hiszen az egész rendszer tömegközéppontja vízszintes irányban mozdulatlan.



1. ábra

A kis testre az (*1. ábrán*) látható erők hatnak. Ha v_0 kicsi, akkor a kis test csak kicsit mozdulhat ki vízszintes irányban, a függőleges elmozdulása (és ezzel együtt a függőleges irányú gyorsulása) tehát másodrendűen kicsiny, elhanyagolható. Emiatt a K kényszererő az mg nehézségi erővel egyezik meg, vízszintes komponense pedig

$$K_x = -K \sin\varphi \approx mg\frac{2x}{r}.$$

Newton második törvénye szerint

$$ma = -\frac{2mg}{r}x,$$

amelyben felismerhetjük az $\omega = \sqrt{2g/r}$ körfrekvenciájú harmonikus rezgések mozgásegyenletét. A kis test kezdeti sebessége (a tömegközépponti rendszerben) $v_0/2$, a kitérés időbeli alakulását tehát az

$$x(t) = \frac{v_0}{2\omega}\sin\omega t$$

függvény írja le.

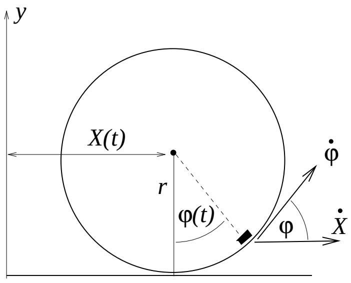
Visszatérve az eredeti (az asztallaphoz rögzített) koordináta-rendszerbe, az abroncs középpontjának elmozdulása

$$X(t) = \frac{v_0 t}{2} - \frac{v_0}{2\omega \sin\omega t},$$

a sebessége pedig

$$V(t) = v_0 (1 - \cos \omega t) .$$

II. megoldás. Jelöljük az abroncs tömegközéppontjának t pillanatbeli elmozdulását $X(t)$-vel, pillanatnyi sebességét pedig $V(t)$-vel; a kis test és az abroncs középpontját összekötő egyenes függőlegessel bezárt szögét pedig φ-vel (*2. ábra*). Ez a két (pillanatról pillanatra változó) adat leírja a rendszer mozgását, feladatunk tehát ezen függvények meghatározása.



2. ábra

Jelöljük az egyes mennyiségek idő szerinti változási sebességét (egységnyi idő alatti változást) a kérdéses mennyiség betűjele fölé írt „ponttal". Ezzel a jelöléssel az abroncs pillanatnyi (vízszintes) sebessége $\dot{X}(t)$, a kis testnek a karikához viszonyított szögsebessége $\dot{\varphi}$, érintő irányú kerületi sebessége tehát $r\dot{\varphi}$.

Az abroncsra (súrlódásmentes körülmények között) nem hat forgatónyomaték, ezért nem jön forgásba. A rendszerre vízszintes irányban nem hat külső erő, emiatt a teljes vízszintes irányú impulzus időben állandó marad.

(1) $$m\dot{X} + m(\dot{X} + r\dot{\varphi}\cos\varphi) = I = \text{állandó}.$$

Ugyancsak változatlan marad a rendszer teljes mechanikai energiája:

(2) $$\frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{X}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{X}r\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + mgr(1-\cos\varphi) = E = \text{állandó}.$$

Kezdetben $\dot{X}(t=0) = 0$ és $\dot{\varphi}(t=0) = v_0/r$, innen a két mozgásállandó: $I = mv_0$, illetve $E = \frac{1}{2}mv_0^2$. Ezek felhasználásával írhatjuk

(3) $$2\dot{X} + r\dot{\varphi}\cos\varphi = v_0,$$

valamint

(4) $$2\dot{X}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{X}r\dot{\varphi}\cos\varphi + 2rg(1-\cos\varphi) = v_0^2.$$

Fejezzük ki (3)-ból $\dot{X}(t)$-t és helyettesítsük (4)-be:

(5) $$\dot{X} = \frac{v_0 - r\dot{\varphi}\cos\varphi}{2},$$

(6) $$r^2\dot{\varphi}^2(2-\cos\varphi) + 4rg(1-\cos\varphi) = v_0^2.$$

Használjuk ki továbbá, hogy v_0 kicsiny ($v_0 \ll \sqrt{gr}$), így $1 - \cos\varphi \ll 1$, tehát

$$1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi^2}{2}.$$

Ebben a közelítésben (6) így alakul:

(7) $$\dot{\varphi}^2 + \frac{2g}{r}\varphi^2 = \left(\frac{v_0}{r}\right)^2.$$

Ez az összefüggés megegyezik egy $\omega = \sqrt{2g/r}$ körfrekvenciájú, $A = v_0/r$ maximális (szög)kitérésű harmonikus rezgőmozgás képletével, hiszen a

$$\varphi(t) = A \sin \omega t, \qquad \dot{\varphi}(t) = A\omega \cos \omega t \tag{8}$$

függvények nyilván kielégítik (7) egyenletet, továbbá a $\varphi(0) = 0$ és $\dot{\varphi}(0) = v_0/r$ kezdeti feltételeket is.

Az $X(t)$ függvény (5) és (8) felhasználásával számítható ki.

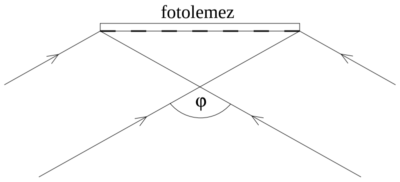
$$\dot{X}(t) = \frac{v_0}{2}(1 - \cos \omega t),$$

ahonnan az egyenletes mozgás és a harmonikus rezgőmozgás ismert út–sebesség képleteinek mintájára ($X(0) = 0$ kezdeti feltételt is figyelembe véve) a végeredmény:

$$X(t) = \frac{v_0 t}{2} - \frac{v_0}{2\omega} \sin \omega t.$$

G. P.

26 dolgozat érkezett. Helyes Hegedűs Ákos, Nagy 314 Ádám, Pozsgay Balázs és Reischig Péter megoldása. Kissé hiányos (4–5 pont) 9, hiányos (2–3 pont) 6, hibás 7 dolgozat.



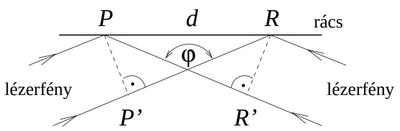
P. 3302. *Holografikus rácsot úgy készítenek, hogy egy párhuzamos lézernyalábot két egyenlő intenzitású nyalábra osztanak, majd φ szögben interferenciát hoznak létre egy fényérzékeny lemez felületén.*

Mekkora szögben találkozott a két nyaláb, ha az így elkészült optikai rácsot merőlegesen megvilágítva éppen megfigyelhetjük másodrendben a teljes látható színképet? A rács előállításához $\lambda_0 = 632$ nm-es He–Ne *lézert használtak. (A látható színképtartomány* 380 nm-*től* 760 nm-*ig terjed.)*

(*5 pont*) *Budó Ágoston verseny,* Szeged

Megoldás. Határozzuk meg először a kérdéses optikai rács d rácsállandóját! A teljes látható színkép másodrendben akkor figyelhető meg, ha a $d \sin \alpha = 2\lambda$ egyenletnek (a látható fénynek megfelelő hullámhosszakkal) van megoldása α-ra. Ez akkor áll fenn, ha $2\lambda_{max}/d \le 1$, határesetben

$$d = 2\lambda_{max} = 1{,}52\ \mu\,\mathrm{m}.$$



Ha a φ szögben találkozó lézersugarak az *ábrán* látható P pontban erősítik egymást (tehát ott a fényérzékeny lemez megfeketedik), akkor a hozzá legközelebbi R erősítési helyre az jellemző, hogy $PR' = P'R = \frac{1}{2}\lambda_0$. Ebben az esetben lesz a két fénysugár együttes útkülönbsége λ_0. Ezek szerint a $PR = d$ távolságára fennáll a

$$d \cos\left(90^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2}\lambda_0,$$

ahonnan

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\lambda_0}{4\lambda_{\max}}=0{,}208, \qquad \text{tehát} \qquad \varphi=24^\circ.$$

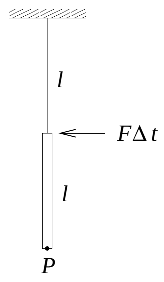
Ambrus Gergely (Szeged, Radnóti M. Gimn. 11. o.t.)

Megjegyzés. A megoldásban szereplő határesetben a másodrendben látható színkép vörös széle már 90°-os szögben terül el, tehát a megvilágítási irányra merőleges sík ernyőt egyáltalán nem éri el, és a színkép széléhez közeli tartomány is csak gyengén látható. Jobban megfigyelhető a színkép, ha nem sík, hanem (fél)hengerpalást alakban meghajlított ernyőt használunk.

Az is elfogadható feltétel, ha a legnagyobb (90°-os) elhajlási szöghöz nem a másodrendű erősítést, hanem az azt követő első kioltást rendeljük. Ilyen megfontolást alkalmazva a rácsállandóra $d=\frac{5}{2}\lambda_{\max}=1{,}9\ \mu$m, a φ szögre pedig 19° adódik.

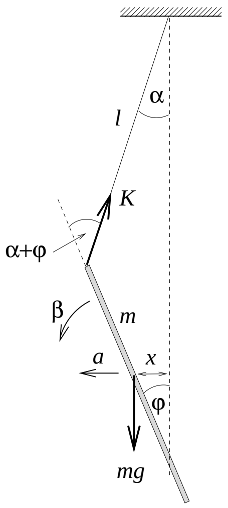
Reischig Péter (Budapest, Eötvös J. Gimn. 11. o.t.)

11 dolgozat érkezett. Helyes 8, hiányos (2–3 pont) 3 dolgozat.



P. 3303. *Egy m tömegű, l hosszúságú homogén rúd az ábrán látható módon van felfüggesztve egy l hosszú fonálra. A rúd felső végét egy kicsiny $F\Delta t$ erőlökés éri. Írjuk le a rúd legalsó P pontjának mozgását!*
(*6 pont*) Közli: *Balogh Péter,* Budapest

Megoldás. Jelöljük a rúd tömegközéppontjának pillantnyi kitérését x-szel, szögelfordulását pedig φ-vel! Ebből a két mennyiségből ki lehet számítani a fonál függőlegessel bezárt α szögét:



(1) $$l\sin\alpha-\frac{l}{2}\sin\varphi=x.$$

Ha a rudat csak kicsit lökjük meg, x, φ és α valamennyien kicsiny mennyiségek, négyzetük és magasabb hatványaik elhanyagolhatók, a szögek szinusza magukkal a szögekkel, koszinuszuk pedig 1-gyel közelíthető, (1) egyenlet pedig így írható:

(1′) $$x=l\left(\alpha-\frac{1}{2}\varphi\right).$$

A fonalat feszítő erőt K-val jelölve a következő mozgásegyenletek írhatók fel:

(2) $$mg-K=0$$

(mert a rúd függőleges irányú gyorsulása az alkalmazott közelítésben elhanyagolhatóan kicsi),

(3) $$K\alpha=-ma$$

(ez a rúd vízszintes irányú mozgásegyenlete $\sin\alpha\approx\alpha$ közelítésben), valamint a tömegközéppontra vonatkoztatott forgási egyenlet:

(4) $$\frac{1}{12}ml^2\cdot\beta=-\frac{l}{2}K(\alpha+\varphi).$$

(β a φ szög változására jellemző szöggyorsulást jelöli.)

Tételezzük fel, hogy mind $x(t)$, mind pedig $\alpha(t)$ az időnek szinuszos függvénye:

(5) $$x(t)=x_0 \sin \omega t, \qquad \text{illetve} \qquad a(t)=-x_0\omega^2 \sin \omega t,$$

(6) $$\varphi(t)=\varphi_0 \sin \omega t, \qquad \text{valamint} \qquad \beta(t)=-\varphi_0\omega^2 \sin \omega t,$$

ahol ω (a rezgés körfrekvenciája) valamekkora, később meghatározandó szám. Ha x és φ időben szinuszosan változik, akkor ($1'$) szerint ugyanilyen jellegű függvény kell legyen α is, ami annyit jelent, hogy a φ szög minden pillanatban az α szöggel arányos, annak k-szorosa:

(7) $$\varphi(t)=k\cdot\alpha(t),$$

(k időtől független állandó). Az (1)–(7) egyenletekből k-ra egy másodfokú egyenletet kaphatunk:

$$3k^2-2k-6=0,$$

amelynek gyökei:

$$k_1=\frac{1+\sqrt{19}}{3}\approx 1{,}79, \qquad \text{illetve} \qquad k_2=\frac{1-\sqrt{19}}{3}\approx -1{,}12.$$

A rezgés körfrekvenciáját az

$$\omega^2=\frac{6g}{l}\,\frac{k+1}{k}=\frac{g}{l}\left(5\pm\sqrt{19}\right)$$

összefüggést írhatjuk fel, ahonnan k kiszámított értékeinek felhasználásával

$$\omega_{1,2}=\sqrt{\frac{g}{l}\left(5\pm\sqrt{19}\right)},$$

tehát

$$\omega_1=3{,}06\sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad \omega_2=0{,}81\sqrt{\frac{g}{l}}$$

adódik*.

A rendszer általános mozgása a kétféle normálrezgés szuperpoziciója:

$$\varphi(t)=\varphi_0^{(1)}\sin\omega_1 t+\varphi_0^{(2)}\sin\omega_2 t,$$

illetve

$$\alpha(t)=\frac{\varphi_0^{(1)}}{k_1}\cdot\sin\omega_1 t+\frac{\varphi_0^{(2)}}{k_2}\cdot\sin\omega_2 t.$$

---

* Ezeket a frekvenciákat a csatolt rezgő rendszer sajátfrekvenciáinak, a megfelelő k értékek által meghatározott amplitúdó-arányokat pedig normálmódusoknak nevezik. A nagyobb frekvenciájú normálmódusban $k>0$, tehát a fonál és rúd az *ábrán* látható módon ellenkező irányban hajlik el a függőlegestől. A másik (alacsonyabb frekvenciájú normálmódusban a fonál és a rúd a függőlegeshez képest ugyanolyan irányban, de különböző mértékben hajlik. Mindkét módus tisztán periodikus mozgás, jól meghatározott frekvenciával jellemezhető.

A $\varphi_0^{(1)}$ és $\varphi_0^{(2)}$ amplitúdókat a rendszer kezdeti feltételeiből lehet meghatározni. A rúd felső végére kifejtett erőlökés hatására a rúd tömegközéppontja $F\Delta t/m$ sebességgel kezd el mozogni, az erőlökés forgatónyomatéka pedig $6F\Delta t/(ml)$ kezdeti szögsebességet hoz létre. Ez a két adat egyértelműen meghatározza a normálmódusok amplitúdóját:

$$\varphi_0^{(1,2)}=\pm 3\frac{\sqrt{5\pm\sqrt{19}}}{\sqrt{19}}\frac{F\Delta t}{m\sqrt{lg}},$$

és a szögelfordulások ismeretében megadhatjuk a rúd legalsó pontjának elmozdulását is:

$$x_P(t)=l(\alpha-\varphi)=$$

$$=\frac{F\Delta t}{m}\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\left(\frac{\left(\sqrt{19}-7\right)\sqrt{5+\sqrt{19}}}{2\sqrt{19}}\sin\omega_1 t+\frac{\left(\sqrt{19}+7\right)\sqrt{5-\sqrt{19}}}{2\sqrt{19}}\sin\omega_2 t\right)$$

6 dolgozat érkezett, közöttük teljes értékű megoldás nem volt. Kicsit hiányos (5 pont) Hegedűs Ákos megoldása, hiányos (1–3 pont) 3, hibás 2 dolgozat.

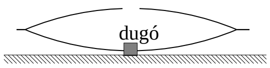
Fizikából kitűzött feladatok

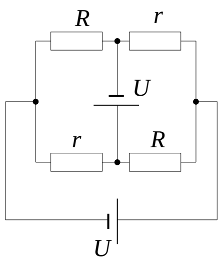
M. 214. Mérjük meg alkohol híg vizes oldatának fagyáspontját a hígítás függvényében! Milyen összetétel esetén lesz a fagyáspont -18 C°?

(*6 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 3324. Két autófényszóró-tükröt szembefordítva egymásra helyeztünk az *ábrán* látható módon. Az alsóban volt egy dugó, a felsőben nem, de úgy látszott, mintha ott is lett volna. Magyarázzuk meg a jelenséget!

(*4 pont*) Közli: *Csonka László,* Győr





P. 3325. Két-két egyforma ellenállásból és két egyforma telepből az *ábrán* látható áramkört állítjuk össze. Mekkora áram folyik az r ellenállásokon? ($R=20\ \Omega$, $r=10\ \Omega$, $U=10$ V.)

(*4 pont*) *Károly Ireneusz verseny,* Pécs

P. 3326. Egy edényben levő vízben jégdarab úszik. Óvatosan olajat öntünk rá, annyit, hogy éppen ellepje a jégdarabot. Ezután a jégdarab – miközben a rendszer hőmérséklete állandó marad – lassan elolvad. Süllyed vagy emelkedik eközben az olaj szintje az edényben? Nő vagy csökken a rendszer gravitációs helyzeti (magassági) energiája?

(*5 pont*) Közli: *Varga István,* Békéscsaba

P. 3327. Űrsétát végző űrhajóstól eltávolodik űrhajója. Két könnyű, egyforma rugós puskája van, melyekkel két ugyanakkora tömegű lövedéket tud kilőni. Mikor tesz szert nagyobb sebességre, ha azonos irányban egyszerre lövi ki a két lövedéket, vagy ha egymás után? (Legyen például egy lövedék tömege az űrhajós és a két puska tömegének huszad része.)

(*5 pont*) Közli: *Chikán Éva,* Budapest

P. 3328. Ugyanakkora alapú, de különböző hajlásszögű lejtők közül melyiken csúszik le leghamarabb egy kis test, ha a csúszási súrlódási tényező μ?

(*5 pont*) Közli: *Kobzos Ferenc,* Dunaújváros

P. 3329. Két pici fémgolyócskát egyenként $\ell = 0{,}5$ m hosszú fonálon közös pontban felfüggesztettünk. Az egyik golyócska tömege $m = 2$ g, a másiké ennek kétszerese. Mindkettőnek ugyanakkora elektromos töltést adunk. Mekkora ez a töltés, ha a két golyócska egyensúlyban $d = 20$ cm-re helyezkedik el egymástól?

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

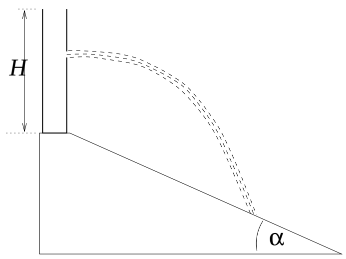
P. 3330. p_0 külső légnyomás mellett egy r sugarú szappanbuborékot fújunk. Ha Q elektromos töltést viszünk rá, a buborék sugara R-re nő. Mekkora a szappanoldat felületi feszültsége?

(*5 pont*) Közli: *Légrádi Imre,* Sopron

P. 3331. Képzeljük el, hogy a világűrben csak egy ϱ_0 sűrűségű homogén gömb van. Egy pillanatszerű robbanás következtében a gömb elkezd tágulni, méghozzá úgy, hogy kezdetben bármely pontjának a középponthoz viszonyított sebessége $v_0(r) = H \cdot r$, ahol H a tágulásra jellemző érték, r pedig az adott pontnak a gömb középpontjától mért távolsága.

Legalább mekkora H érték esetén fog ez a gömb a gravitációs vonzás ellenére is örökké tágulni?

(*5 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

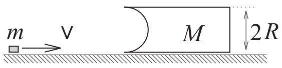


P. 3332. Egy hosszú, α hajlásszögű lejtő tetején áll egy H magasságú, henger alakú edény. Az edényt szinültig töltöttük vízzel. Hová fúrjunk lyukat a henger oldalán, ha azt akatjuk, hogy a kiáramló víz a lehető legmesszebb érje el a lejtőt? Ábrázoljuk a becsapódás távolságát a lyuk magasságának függvényében $\alpha = 15^\circ$, illetve $\alpha = 45^\circ$ esetén!

(*6 pont*) *Kóbor János,* (Miskolc, Földes F. Gimn.) ötlete alapján

KöMaL – 2000/3 FIZ0003 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 20:43 (21. lap)

P. 3333. Súrlódásmentes asztalon áll egy M tömegű test, melynek egyik oldalán félhenger alakú mélyedés van az *ábra* szerint. Legalább mekkora v sebességgel indítsuk el az m tömegű testet, hogy végigfusson az M tömegű test R sugarú bemélyedésén? (A súrlódás mindenütt elhanyagolható.)



(*6 pont*) Közli: *Rácz György*, Mezőkövesd

A fizika feladatok megoldásai a következő címre küldendők:
Eötvös Loránd Fizikai Társulat, KöMaL feladatok
Budapest, Pf. 433. 1371
A beküldési határidő: **2000. április 11.**

Physics

M. 214. Measure the freezing-point of a lean solution of alcohol in water as a function of the dilution. At what composition will the freezing-point be -18 C$^\circ$?

P. 3324. The mirrors of two car headlights have been placed on top of each other, turned towards each other, as shown in the figure. There is a stopper in the bottom mirror but not in the top mirror, but it looks as if there were one in the top mirror as well. Explain the phenomenon. **P. 3325.** The circuit shown in the figure is composed of two times two identical resistors and two identical batteries. What current flows through the resistors r? ($R = 20\ \Omega$, $r = 10\ \Omega$, $U = 10$ V.) **P. 3326.** A piece of ice floats in water in a vessel. Some oil is carefully poured onto it, enough to just cover it. The piece of ice slowly melts, while the temperature of the system remains constant. Does the level of the oil rise or sink in the vessel? Does the gravitational potential energy of the system increase or decrease? **P. 3327.** An astronaut on a space trip moves away from his space shuttle. He has two light, identical spring guns, capable of shooting two projectiles of identical mass. How can he obtain a higher speed: by shooting the two guns simultaneously or consecutively in the same direction? (Let for example the mass of one projectile equal one twentieth of the total mass of the astronaut and the two guns.) **P. 3328.** On which of several slopes of identical base but different angles of inclination does a small body slide down in the shortest time if the coefficient of dynamic friction is μ? **P. 3329.** Two small metal balls are suspended from the same point on threads of length $\ell = 0.5$ m each. The mass of one of the metal balls is $m = 2$ g, that of the other one is twice as large. The balls are given identical electric charges. What is this charge if the balls are at distance $d = 20$ cm from each other in equilibrium? **P. 3330.** A soap bubble of radius r is blown in atmospheric pressure p_0. When it is given electric charge Q, its radius increases to R. What is the surface tension of the solution of soap? **P. 3331.** Imagine that there is only a homogeneous sphere of density ϱ_0 in space. The sphere starts expanding due to a flash-explosion in such a way that the speed of any of its points is initially $v_0(r) = H \cdot r$ with respect to its centre, where H is a value characteristic of the expansion and r is the distance of the given point from the centre of the sphere. What is the minimum value of H required to maintain the eternal expansion of this sphere in spite of the gravitational attraction? **P. 3332.** A cylindrical vessel of height H stands on top of a long slope with angle of inclination α. The vessel is filled with water to the brim. Where should a hole be drilled on the side of the vessel so that the water flowing out reach the slope the furthest possible? Represent the distance of the impact as a function of the height of the hole for $\alpha = 15^\circ$ and $\alpha = 45^\circ$. **P. 3333.** A body of mass M with a half-cylindrical dent on one side stands on a frictionless table, as shown in the figure. What is the minimum initial speed v required for the body of mass m so that it runs through the dent of radius R of the body of mass M? (Friction is negligible everywhere.)

KöMaL – 2000/3 FIZ0003 cianmagentayellowblack2002. június 18. – 20:43 (22. lap)