Jelentés az 1999. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat az 1999. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyt október 29-én 14 órai kezdettel rendezte meg a következő 20 helyszínen: Békéscsaba, Bonyhád, Budapest, Debrecen, Eger, Győr, Kaposvár, Kecskemét, Miskolc, Nyíregyháza, Pécs, Salgótarján, Sopron, Szeged, Székesfehérvár, Szolnok, Szombathely, Tatabánya, Veszprém, Zalaegerszeg.

A Társulat elnöksége a verseny lebonyolítására a következő bizottságot kérte fel: Bereczky Áron, Bártfay Pál, Csirmaz László, Frenkel Péter, Károlyi Gyula (elnök), Kós Géza, Pálmay Lóránt, Pelikán József, Reiman István, Surányi János (tiszteletbeli elnök), Szeidl Adám (titkár).

A Bizottság október 1-jei ülésén a következő feladatokat tűzte ki:

1. Adjuk össze az 1, 2, …, n természetes számok pozitív páros osztóinak számát, majd végezzük el ugyanezt a páratlan osztókkal is. Mutassuk meg, hogy a két összeg eltérése nem nagyobb n-nél.

2. Legyen adott a síkon egy háromszög. Szerkesszük meg a háromszög belsejében azt a P pontot, amelyikre igaz, hogy azt a háromszög oldalegyeneseire vetítve, a vetületi pontok alkotta háromszög súlypontja éppen P.

3. Legyen adott 2^k-nál több különböző egész szám, ahol k tetszőleges természetes számot jelöl. Bizonyítandó, hogy kiválasztható közülük $k+2$ úgy, hogy valahányszor valamilyen m pozitív egészre és $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_m$ kiválasztott számokra

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = y_1 + y_2 + \ldots + y_m$$

teljesül, úgy szükségképpen $x_i = y_i$ minden $1 \le i \le m$ esetén.

A Bizottság a dolgozatok átnézése után december 3-i ülésén egyhangúlag a következő jelentést fogadta el:

„A verseny minden helyszínen rendben lezajlott. Az előző évekhez képest sajnálatos módon kevesebb versenyző adott be dolgozatot. A vidéki városokból 43, Budapestről 74 dolgozat érkezett. Örvendetes volt azonban a helyes megoldások magas száma.

Terpai Tamás kifogástalanul oldotta meg mindhárom feladatot, az első feladatnál lényegesen erősebb állítást bizonyított, a második feladathoz értékes megjegyzéseket fűzött, a harmadik feladat esetében pedig megmutatta, hogy az állítás lényegében nem javítható. Külön említésre méltó a megoldások szabatos, világos leírása. Ezek alapján

I. *Kürschák József díjat* és 20 000 Ft jutalmat kapott

Terpai Tamás, aki a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnáziumban tett érettségi vizsgát, Táborné Vincze Márta, Pataki János és Pósa Lajos tanítványa volt.

Harangi Viktor, Keszegh Balázs, Máthé András és Németh András lényegében helyesen oldották meg mindhárom feladatot. Ennek alapján

II. *Kürschák József díjat* és 10 000-10 000 Ft jutalmat nyert:

Harangi Viktor, aki a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium 10. osztályos tanulója, Fazakas Tünde, Táborné Vincze Márta és Pósa Lajos tanítványa,

Keszegh Balázs, aki a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium 12. osztályos tanulója, Surányi László és Hraskó András tanítványa,

Máthé András, aki az ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnáziumának 12. osztályos tanulója, Tóth Attila tanítványa, és

Németh András, aki a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnáziumban tett érettségi vizsgát, Táborné Vincze Márta, Beleznay Ferenc és Pataki János tanítványa volt."

Az 1999. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldása

1. *Adjuk össze az* $1, 2, \ldots, n$ *természetes számok pozitív páros osztóinak számát, majd végezzük el ugyanezt a páratlan osztókkal is. Mutassuk meg, hogy a két összeg eltérése nem nagyobb* n*-nél.*

Megoldás. Jelölje a szóban forgó összegek közül az elsőt $D_1(n)$, a másodikat pedig $D_2(n)$.

$D_1(n)$ meghatározásánál minden, az n-nél nem nagyobb pozitív páros számot annyiszor kell figyelembe vennünk, ahány többszöröse van az $1, 2, \ldots, n$ számok között. Ezért $D_1(n)=\sum_{2j\le n} s_n(2j)$, ahol $s_n(k)$ jelöli a k pozitív egész 1 és n közé eső többszöröseinek számát: $s_n(k)=\lfloor n/k\rfloor$. Hasonlóképpen $D_2(n)=\sum_{2j-1\le n} s_n(2j-1)$. Világos, hogy $k<l$ esetén $s_n(k)\ge s_n(l)$, így a $D_1(n)$ összeg minden egyes $s_n(2j)$ tagját felülről becsülhetjük a $D_2(n)$ összeg megfelelő $s_n(2j-1)$ tagjával. Következésképpen $D_1(n)\le D_2(n)$. Hasonlóképpen, az első tag $s_n(1)=n$ kivételével, a $D_2(n)$ összeg minden egyes $s_n(2j-1)$ tagja ($j\ge 2$) megbecsülhető a $D_1(n)$ összeg megfelelő $s_n(2(j-1))$ tagjával, ezért $D_2(n)\le n+D_1(n)$. A két egyenlőtlenség összevetéséből a feladat állítása azonnal leolvasható.

Megjegyzések. 1. A feladatot Pósa Lajos bocsátotta a versenybizottság rendelkezésére.

2. A fenti bizonyítást finomíthatjuk olyan módon, hogy az egyes összegek első néhány tagjára alkalmazzuk az $s_n(k)=\lfloor n/k\rfloor$ képletet, és csak a fennmaradó tagokat becsüljük a másik összeg megfelelő tagjaival. Így a $D_1(n)\le D_2(n)$ egyenlőtlenség helyett például $n\ge 2$ esetén az erősebb $D_1(n)-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\le D_2(n)-n$ becslést alkalmazhatjuk, ahonnan $\lceil n/2\rceil\le D_2(n)-D_1(n)\le n$ következik. Általában tetszőleges k pozitív egész számra felírható $n\ge 2k+1$ esetén a

$$\sum_{j=1}^{k}\left\lfloor\frac{n}{2j-1}\right\rfloor-\sum_{j=1}^{k}\left\lfloor\frac{n}{2j}\right\rfloor\le D_2(n)-D_1(n)\le\sum_{j=1}^{k+1}\left\lfloor\frac{n}{2j-1}\right\rfloor-\sum_{j=1}^{k}\left\lfloor\frac{n}{2j}\right\rfloor$$

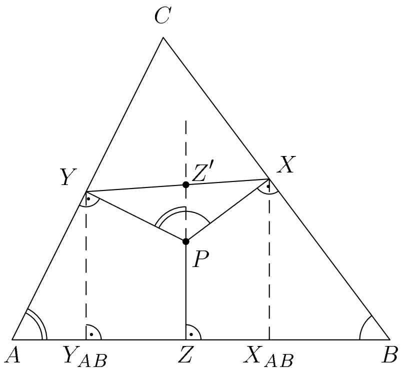
egyenlőtlenség, amelyből kiindulva az $\ln(k+1) < 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k} < 1+\ln k$ becslésre támaszkodva nem nehéz megmutatni, hogy a $(D_2(n)-D_1(n))/n$ sorozat határértéke $\ln 2$.

Terpai Tamás dolgozatában azt is megmutatta, hogy a $D_2(n)-D_1(n)$ különbség $n\cdot\ln 2$-től való eltérése $\sqrt{n}$ nagyságrendű. (Erre vonatkozóan lásd még az 1999. decemberi számunk A. 225. számú feladatát.)

2. *Legyen adott a síkon egy háromszög. Szerkesszük meg a háromszög belsejében azt a P pontot, amelyikre igaz, hogy azt a háromszög oldalegyeneseire vetítve, a vetületi pontok alkotta háromszög súlypontja éppen P.*

I. megoldás. A háromszög csúcsait jelölje A, B és C, a P pont vetületei a BC, CA, AB oldalakra pedig legyenek rendre X, Y és Z. P pontosan akkor súlypontja az XYZ háromszögnek, ha a PX, PY, PZ egyenesek rendre felezik az YZ, ZX, XY szakaszokat.

Vizsgáljuk meg, mit jelent az, hogy a PZ egyenes felezi az XY szakaszt. Ha a PZ és XY egyenesek metszéspontját Z'-vel, az X és Y pontok AB egyenesre eső vetületeit pedig X_{AB}-vel és Y_{AB}-vel jelöljük, úgy $YZ'=Z'X$ akkor és csak akkor teljesül, ha $Y_{AB}Z=ZX_{AB}$, vagyis ha $YP\cdot\sin(YPZ'\sphericalangle)=XP\cdot\sin(XPZ'\sphericalangle)$.



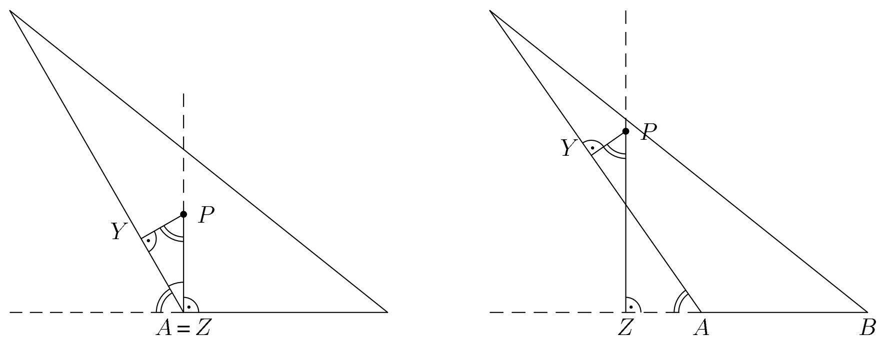
1. ábra

Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy Z az AB szakasz belső pontja. Ekkor az *1. ábráról*, az $AZPY$ és $BXPZ$ húrnégyszögeket figyelembe véve, leolvasható, hogy

$$YPZ'\sphericalangle=180^\circ-YPZ\sphericalangle=YAZ\sphericalangle=\alpha,$$

és

$$XPZ'\sphericalangle=180^\circ-XPZ\sphericalangle=XBZ\sphericalangle=\beta.$$



2. ábra

A *2. ábra* mutatja, hogy ez akkor is igaz, ha a Z pont esetleg egybeesik az AB szakasz valamelyik végpontjával, vagy azon kívül helyezkedik el.

A szinusztétel alapján tehát a PZ egyenes pontosan akkor felezi az XY szakaszt, ha

$$1=\frac{YZ'}{Z'X}=\frac{YP\cdot\sin\alpha}{XP\cdot\sin\beta}=\frac{YP}{XP}:\frac{AC}{BC},$$

vagyis ha $\frac{YP}{XP}=\frac{AC}{BC}$. Azon P pontok, amelyekre ez az összefüggés teljesül, egy C-n áthaladó e_C egyenesre illeszkednek, amelyet megszerkeszthetünk úgy, hogy az AC és BC egyenesekkel, azoknak a háromszöget tartalmazó oldalán, azoktól AC, illetve BC távolságban párhuzamosokat húzunk, és ezek metszéspontját összekötjük a C ponttal.

Hasonlóképpen, a PX (PY) egyenes pontosan akkor felezi az YZ (XZ) szakaszt, ha $\frac{ZP}{YP}=\frac{AB}{AC}$ $(\frac{XP}{ZP}=\frac{BC}{AB})$. Világos, hogy a három feltétel közül bármely kettő teljesülése maga után vonja a harmadik teljesülését is.

Ha P az XYZ háromszög súlypontja, akkor szükségképpen illeszkedik az e_C egyenesre, és arra az e_A egyenesre is, amelyet úgy szerkeszthetünk meg, hogy az AB és AC egyenesekkel párhuzamosokat húzunk, azoknak a háromszöget tartalmazó oldalán, tőlük AB, illetve AC távolságban, és ezen párhuzamosok metszéspontját az A csúccsal összekötjük. Az e_A és e_C egyenesek az ABC háromszög belsejében metszik egymást. A keresett P pont nem lehet más, mint ez a metszéspont, és ez valóban jó is.

II. megoldás. (*Terpai Tamás* gondolata alapján.) Az előző megoldás jelöléseit megtartva megállapithatjuk, hogy P pontosan akkor súlypontja az XYZ háromszögnek, ha $\overrightarrow{PX}+\overrightarrow{PY}+\overrightarrow{PZ}=\overrightarrow{0}$. Forgassuk el ezeket a vektorokat P körül az óramutató járásával ellentétes irányban 90°-kal. Az így nyert $\overrightarrow{PX_1}$, $\overrightarrow{PY_1}$, $\overrightarrow{PZ_1}$ vektorok rendre párhuzamosak és egyirányúak a háromszög $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ és $\overrightarrow{AB}$ oldalvektoraival. Mivel az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ vektorok közül semelyik kettő nem párhuzamos, továbbá $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}$, a $\overrightarrow{PX_1}+\overrightarrow{PY_1}+\overrightarrow{PZ_1}=\overrightarrow{0}$ összefüggés pontosan akkor áll fenn, ha van olyan λ pozitív szám, amelyre $\overrightarrow{PX_1}=\lambda\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{PY_1}=\lambda\cdot\overrightarrow{CA}$ és $\overrightarrow{PZ_1}=\lambda\cdot\overrightarrow{AB}$. A P pont tehát pontosan akkor súlypontja az XYZ háromszögnek, ha

$$\frac{PX}{BC}=\frac{PY}{CA}=\frac{PZ}{AB},$$

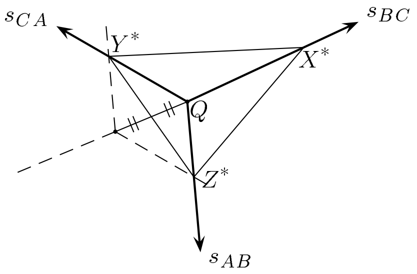
ahonnan a megoldás az előzővel megegyező módon fejezhető be.

III. megoldás. Az XYZ háromszöget fogjuk megszerkeszteni. Ezután P már igen egyszerűen megszerkeszthető az XYZ háromszög súlypontjaként, vagy az AB, BC egyenesekre az Z, illetve X pontban emelt merőlegesek metszéspontjaként. A szerkesztést két lépésben végezzük: először egy, a keresett háromszöghöz hasonló, azzal megegyező állású háromszöget szerkesztünk, majd alkalmas hasonlósági transzformációval azt a keresett XYZ háromszögbe visszük.

Vegyünk fel egy tetszőleges Q pontot a háromszög belsejében, és indítsunk a Q pontból az AB, BC, CA oldalegyenesek irányába, azokra rendre merőleges s_{AB}, s_{BC}, s_{CA} félegyeneseket. Ezek rendre megegyező irányúak a $\overrightarrow{PZ}$, $\overrightarrow{PX}$, $\overrightarrow{PY}$ vektorokkal.

Olyan $X^*Y^*Z^*$ háromszöget keresünk, amelynek súlypontja Q és amelyben a $\overrightarrow{QX^*}$, $\overrightarrow{QY^*}$, $\overrightarrow{QZ^*}$ vektorok rendre párhuzamosak a $\overrightarrow{PX}$, $\overrightarrow{PY}$, $\overrightarrow{PZ}$ vektorokkal. Ez csak úgy lehet, ha X^*, Y^*, Z^* rendre az s_{BC}, s_{CA}, s_{AB} félegyenesekre esnek. Tegyük fel, hogy X^*-ot már kijelöltük az s_{BC} félegyenesen.

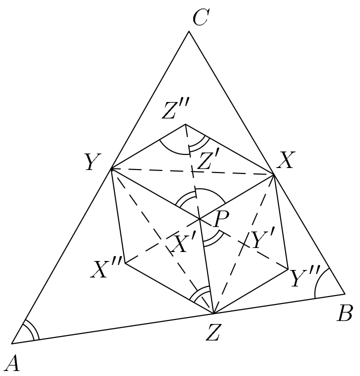
Mivel tetszőleges háromszög súlyvonalai harmadolják egymást, nem nehéz megmutatni, hogy az Y^*, Z^* pontok úgy szerkeszthetők meg, hogy az X^* pontot Q-ra tükrözzük, majd a tükörképen keresztül az s_{AB}, s_{CA} félegyenesekkel párhuzamosokat húzunk. Ezek metszik ki az s_{CA}, s_{AB} félegyenesekből az Y^*, Z^* pontokat. Világos, hogy bármely megoldás hasonló a keresett XYZ háromszöghöz, sőt azzal egyállású is. Válasszuk ki azt a megoldást, ahol X^* a BC egyenesre esik. Az ABC háromszög valamelyik oldalára két hegyesszög illeszkedik. Ha feltesszük, hogy a BC oldal ilyen, akkor X^* a BC szakasz belső pontja. Megmutatjuk, hogy pontosan egy olyan XYZ háromszög van, amely $X^*Y^*Z^*$-gal egyállású és X, Y, Z csúcsai rendre a BC, CA, AB egyenesekre esnek. Van olyan X^* középpontú, pozitív arányú nagyítás, amely az $X^*Y^*Z^*$ háromszöget olyan $X^*Y^{**}Z^{**}$ háromszögbe viszi, ahol Y^{**} az AC szakaszra vagy pedig Z^{**} az AB szakaszra esik, és ez igen egyszerűen meg is található, ha megkeressük az X^*Y^*, illetve X^*Z^* félegyeneseknek az ABC háromszög kerületével alkotott metszéspontjait. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy Y^{**} az AB szakaszra esik. Ekkor az XYZ háromszöget meg kell kapnunk az $X^*Y^{**}Z^{**}$ háromszögből egy C középpontú, pozitív arányú nagyítással. Egyetlen ilyen nagyítás létezik: a Z pont megszerkeszthető mind a CZ^{**} félegyenes AB egyenessel alkotott metszéspontja. Világos, hogy a kapott XYZ háromszög megfelelő lesz.



3. ábra

IV. megoldás. (*Árvay Eszter* ötlete.) Egy, az XYZ háromszöggel egyállású háromszög megszerkesztését a következő gondolatra támaszkodva is elvégezhetjük. Tegyük fel, hogy P az XYZ háromszög súlypontja, és tükrözzük P-t az XYZ háromszög oldalfelező pontjaira (*4. ábra*).

Az így keletkező $XZ''YX''ZY''$ hatszög felbontható 6 egybevágó háromszögre (XPZ'', $Z''PY$, YPX'', $X''PZ$, ZPY'', $Y''PX$) amelyek hasonlók az ABC háromszöghöz. Ugyanis, az előző megoldásban leírt módon látható, hogy például $XZ''P\sphericalangle = Z''PY\sphericalangle = Z'PY\sphericalangle = CAB\sphericalangle$. Az ABC háromszög 6 egybevágó példányát alkalmas módon egymáshoz illesztve tehát az $XZ''YX''ZY''$ hatszöggel egyállású hatszöget szerkeszthetünk. Innen a megoldás a III. megoldásával megegyező módon fejezhető be.



4. ábra

Megjegyzések. 1. *Harangi Viktor* észrevette, hogy a keresett P pont rajta van az ABC háromszög súlyvonalainak az azonos csúcsból induló szögfelezőkre vonatkozó tükörképein, az ún. szimmediánsokon. Ezek egy pontban metszik egymást, amelyet a háromszög szimmediánspontjának nevezhetünk, ez tehát a szerkesztendő P pont. Ugyanezzel a ponttal találkozhatunk Lemoine- vagy Grebe-pont néven is.

2. Nem nehéz meggondolni (de némi diszkussziót igényel), hogy a háromszög határán vagy azon kívül soha nem létezik olyan pont, amely rendelkezne a kívánt tulajdonsággal.

3. *Terpai Tamás* azt is megvizsgálta, milyen esetben lesz P a vetületi pontok által alkotott háromszög valamely más nevezetes pontja (magasságpont, beírt kör középpontja, körülírt kör középpontja). Legnehezebb azonban kétségkívül a feladatban kitűzött eset.

3. *Legyen adott 2^k-nál több különböző egész szám, ahol k tetszőleges természetes számot jelöl. Bizonyítandó, hogy kiválasztható közülük $k+2$ úgy, hogy valahányszor valamilyen m pozitív egészre és $x_1<x_2<\ldots<x_m$, $y_1<y_2<\ldots<y_m$ kiválasztott számokra*

$$x_1+x_2+\ldots+x_m=y_1+y_2+\ldots+y_m$$

teljesül, úgy szükségképpen $x_i=y_i$ minden $1\le i\le m$ esetén.

I. megoldás. Az állítás nyilván igaz $k=0$ esetén. A bizonyítást teljes indukcióval fogjuk végezni. Legyen tehát $k\ge 1$, és tegyük fel, hogy k helyett $(k-1)$-et írva az állítás már igazolást nyert.

Jelöljön a_1, a_2, $\ldots$, a_ℓ $(\ell>2^k)$ különböző egész számokat. Meg kell mutatnunk, hogy kiválasztható közülük $k+2$ a feladatban megadott követelménynek megfelelően. Ezt pontosan akkor lehet megtenni, ha a $0=a_1-a_1$, a_2-a_1, $\ldots$, $a_\ell-a_1$ számok közül kiválasztható $k+2$ a megfelelő módon. Feltehetjük tehát a továbbiakban, hogy a számok között szerepel a 0. Továbbá, ha az a_1, a_2, $\ldots$, a_ℓ számok mindegyike osztható egy q pozitív egész számmal, akkor elegendő az állítást a_1, $\ldots$, a_ℓ helyett az $\frac{a_1}{q}$, $\ldots$, $\frac{a_\ell}{q}$ számokra igazolni. Feltehetjük tehát, hogy a számok relatív prímek. Számaink között tehát szerepel páros és páratlan szám is. Vagy a páros vagy a páratlan számok száma nagyobb, mint 2^{k-1}.

Tegyük fel először, hogy több, mint 2^{k-1} páratlan számunk van. Ezekből az indukciós feltevés alapján kiválasztható $k+1$ a követelménynek megfelelően. Jelölje ezeket b_1, $\ldots$, b_{k+1}, és legyen c valamelyik páros szám az a_1, $\ldots$, a_ℓ számok közül.

Tegyük fel, hogy a b_1, $\ldots$, b_{k+1}, c számok között van $x_1<x_2<\ldots<x_m$ és $y_1<<y_2<\ldots<y_m$ úgy, hogy $x_1+x_2+\ldots+x_m=y_1+y_2+\ldots+y_m$ teljesül. A c szám az egyenlőség mindkét oldalán legfeljebb egyszer fordulhat elő. Ha az $x_1+x_2+\ldots+x_m$ ugyanolyan maradékot ad 2-vel osztva, mint m, akkor szükségképpen az x_i és y_i számok is mind páratlanok, és az $x_1=y_1$, $\ldots$, $x_m=y_m$ egyenlőségek következnek az indukciós feltevésben a b_1, b_2, $\ldots$, b_{k+1} számokra kirótt feltételből. Ellenkező esetben a c szám az egyenlőség mindkét oldalán szerepel, azt mindkét oldalról elhagyva meggyőződhetünk arról, hogy a fennmaradó számok páronként egyenlők.

Hasonló módon okoskodhatunk akkor is, ha az a_1, $\ldots$, a_ℓ számok között a páros számokból van több, mint 2^{k-1}.

II. megoldás. Feltehetjük, hogy a szóban forgó számok mindegyike pozitív, ezt ugyanis elérhetjük, ha mindegyik számot megnöveljük ugyanazzal az elegendően nagy pozitív egész számmal. Ha az újonnan kapott számokra teljesül az állítás, akkor az eredeti számokra is teljesülnie kell. Írjuk fel most a számokat kettes számrendszerben, és tekintsük azt a legkisebb helyiértéket, ahol valamely két szám különbözik. Jelölje ezt a helyet i_1. Az összes szám megegyezik tehát az utolsó i_1-1 helyen, az i_1-edik helyen azonban bizonyos számokban 0 áll, a többiben pedig 1. Legyen b_1 egyike azon számoknak, amelyekből kevesebb van; ha ugyanannyi van a két különböző típusból, akkor egy olyat válasszunk ki, amelynek (hátulról számítva) az i_1-edik jegye 1.

Tekintsük a továbbiakban csak azokat a számokat, amelyek különböznek b_1-től az i_1-edik helyen. b_1 kiválasztása miatt ezek száma nagyobb, mint 2^{k-1}, és utolsó i_1 jegyük rendre megegyezik. Jelölje i_2 azt a legkisebb helyiértéket, ahol valamelyik két szám eltér, $i_2>i_1$. Különböztessük meg a számokat aszerint, hogy az i_2-edik helyen milyen számjegy áll bennük, és válasszuk b_2-t azok közül, amelyek kevesebben vannak, a másik csoport számmal (amelyekből több, mint 2^{k-2} van) pedig folytassuk ezt az eljárást. Ily módon olyan $i_1<i_2<\ldots<i_{k+1}$ helyiértékeket és $b_1, b_2, \ldots, b_{k+1}$ számokat találunk, amelyekre igaz minden $j=1, 2, \ldots, k$ esetén, hogy $b_j, b_{j+1}, \ldots, b_{k+1}$ utolsó i_j-1 jegye megegyezik, de b_j i_j-edik jegye különbözik $b_{j+1}, \ldots, b_{k+1}$ i_j-edik jegyétől. Sőt, egy b_{k+2} szám is található, amelynek utolsó $i_{k+1}-1$ jegye b_{k+1}-ével megegyezik, de az i_{k+1}-edik helyen a két szám eltér egymástól.

Tegyük fel most, hogy a $b_1, b_2, \ldots, b_{k+2}$ számok között van $x_1<x_2<\ldots<x_m$ és $y_1<y_2<\ldots<y_m$ úgy, hogy $x_1+x_2+\ldots+x_m=y_1+y_2+\ldots+y_m=S$ teljesül.

Az $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_m$ számok utolsó i_1-1 jegyéből álló szám mind megegyező, jelöljük ezt u_1-gyel. Az $S-m\cdot u_1$ szám utolsó i_1-1 jegye tehát 0, és az i_1-edik jegyet megvizsgálva eldönthető, hogy az $x_1, \ldots, x_m$ (és ugyanígy az $y_1, \ldots, y_m$) számok között szerepel-e a b_1. Ha nem, akkor áttérünk az utolsó i_2 hely vizsgálatára. Ha igen, akkor mindkét oldalról töröljük a b_1 összeadandót, és úgy térünk át az utolsó i_2 jegy vizsgálatára. Ilyen módon a $b_1, b_2, \ldots, b_{k+1}$ számokról sorra eldönthetjük, hogy szerepelnek-e az összegben: ha igen, akkor mind a két oldalon szerepelniük kell. Ezeket sorra elhagyva az egyenlőség mindkét oldaláról végül vagy a $0=0$ egyenlőséghez jutunk, vagy mindkét oldalon egy-egy szám marad, amely kizárólag b_{k+2}-vel lehet egyenlő.

Megjegyzések. 1. Mindkét bizonyítás egy algoritmust is szolgáltat a keresett $k+2$ szám kiválasztására, méghozzá lényegében ugyanazt az algoritmust.

2. Kézenfekvő kérdés, hogy 2^k helyettesíthető-e valamely, annál kisebb számmal. Terpai Tamás észrevette, hogy van olyan pozitív c konstans, hogy $c\cdot\dfrac{2^k}{k^{3/2}}$ mellett az állítás már nem igaz.

Ha ugyanis az első n számból ki lehet választani $k+2$ számot a kívánt feltétel mellett, akkor szükségképpen $\ell=\left\lfloor\dfrac{k+2}{2}\right\rfloor$ esetén a számokból alkotott $\dbinom{k+2}{\ell}\approx 4\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{2^k}{\sqrt{k}}$ ℓ-tagú összeg mind különböző, márpedig ezek egyike sem lehet nagyobb, mint $n\ell\approx\dfrac{nk}{2}$.

Károlyi Gyula

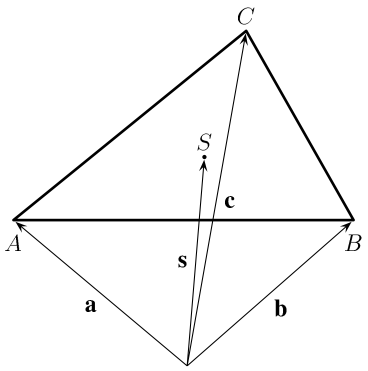
Megjegyzés a B. 3295. feladathoz – alakzatok súlypontjáról

A **Gy. 3213.** gyakorlatban egy konvex ötszög területét kellett megfelezni kerületének egy kijelölt pontján átmenő egyenessel (megoldása megjelent a KöMaL 1999/3. számában). Az 1999/6. számban kitűzött **B. 3295.** feladatban az volt a kérdés, hogy a háromszög súlypontján átmenő egyenesek közül melyek felezik a háromszög területét (megoldása e szám 96. oldalán). Aki megoldotta ezeket a feladatokat, rájöhetett: A területfelező nem okvetlenül súlyvonal, a súlyvonal pedig nem mindig területfelező. A második feladatban súlyponton átmenő egyenesekről van szó, amelyek fizikai értelmezés szerint mind súlyvonalak, a matematikai fogalomalkotás szerint viszont a háromszögnek csak három súlyvonala van. A háromszögön túl – pl. egy ötszög esetén – a matematikában alig-alig esik szó súlyvonalról. Az említett két feladat jó alkalom, hogy a súlypontról beszéljünk. Ezt az is indokolja, hogy a dolgozatok javítása közben észrevehetjük: a súlyvonal és a súlypont fogalma a megoldókban kialakulatlan.

A súlypont fizikai fogalom, amelyet pl. úgy értelmezhetünk, hogy a súlypontban alátámasztott test egyensúlyban van. Másrészt a súlypont fogalmát a matematikában is használjuk (pl. egy háromszög súlypontja vagy egy pontrendszer súlypontja). A közös nevet az indokolja, hogy *bizonyos* anyageloszlások (homogén háromszöglemez vagy egyenlő tömegű pontszerű testek) esetén a matematikai értelemben vett súlypont megegyezik a fizikaival. Azonban, mint az alábbiakból kiderül, ez nincs mindig így!

1. *Pontrendszer súlypontja*

a) Egyetlen pont esetén a súlypont azonos a ponttal.



1. ábra

b) Az A, B pontok rendszerének súlypontja az AB szakasznak az az S pontja, amelyre $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}=\mathbf{0}$, tehát S az AB felezőpontja.

c) Az A, B, C ponthármas súlypontja az az S pont, amelyre $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\mathbf{0}$, ami az *1. ábra* jelöléseivel: $\mathbf{a}-\mathbf{s}+\mathbf{b}-\mathbf{s}+\mathbf{c}-\mathbf{s}=\mathbf{0}$, és így $\mathbf{s}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$.

d) Teljesen hasonlóan kapjuk, hogy az A_1, A_2, ..., A_n pontrendszer súlypontjának helyvektora

$$\mathbf{s}=\frac{\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\ldots+\mathbf{a}_n}{n}, \tag{1}$$

ahol $\mathbf{a}_i$ az A_i helyvektora.

2. *Súlyozott pontrendszer súlypontja*

Ha az 1.d) esetet úgy képzeljük, hogy az $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontokban $m_1, m_2, \dots, m_n$ (esetleg nem pozitív) súlyok vannak, akkor a rendszer S súlypontjára

$$m_1 \cdot \overrightarrow{SA_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{SA_2} + \dots + m_n \cdot \overrightarrow{SA_n} = \mathbf{0}.$$

Ezt a pontok helyvektorával kifejezve:

$$m_1(\mathbf{a}_1 - \mathbf{s}) + m_2(\mathbf{a}_2 - \mathbf{s}) + \dots + m_n(\mathbf{a}_n - \mathbf{s}) = \mathbf{0},$$

amiből

$$\text{(2)} \qquad \mathbf{s} = \frac{m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + \dots + m_n\mathbf{a}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \qquad (m_1 + m_2 + \dots + m_n \neq 0).$$

(2)-ből látjuk, hogy a közönséges pontrendszert csupa azonos súllyal súlyozott pontrendszernek is tekinthetjük.[1]

Súlyvonalnak hívunk ezután minden olyan egyenest, amelyik a pontrendszer súlypontján áthalad.

Bizonyítás nélkül megemlítünk két egyszerű tételt:

1. tétel. *Ha egy súlyozott pontrendszert két, közös pont nélküli halmazra bontunk, és az egyiknek a súlypontja S_1, a benne lévő pontok súlyainak összege M_1, ugyanezek az adatok a másik halmaznál S_2 és M_2, akkor a pontrendszer S súlypontja az S_1S_2 egyenesen van, és $S_1S : SS_2 = M_2 : M_1$ (S_1S és SS_2 irányított szakaszok).*

2. tétel. *Ha egy súlyozott pontrendszer súlyai nem negatívak, akkor a súlypont benne van a pontrendszer konvex burkában.*

Mindkét tétel (2)-ből levezethető.

Az alábbiakban nemcsak véges pontrendszerek súlypontját vizsgáljuk. Ehhez az 1. tétel értelemszerű kiterjesztésére van szükség, pontosabban arra, hogy ha egy ponthalmazt két részhalmazra osztunk, akkor a részhalmazok súlypontján átmenő egyenes súlyvonal, tehát átmegy a súlyponton.

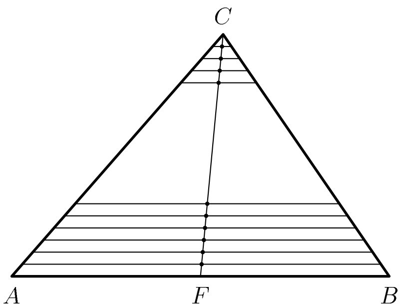
3. *A háromszög súlypontja*

a) A három pontból álló pontrendszer súlypontjának helyvektora

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}.$$

b) Homogén anyageloszlású háromszöglemez súlypontja

Ha egy lemeznek nincsen legalább két szimmetriatengelye, a súlypont matematikai meghatározása általában nehéz feladat, integrálszámítással történhet. A *2. ábrán* – az integrálszámítást megkerülve – azt láthatjuk, hogyan határozta meg Arkhimédész a háromszöglemez súly-

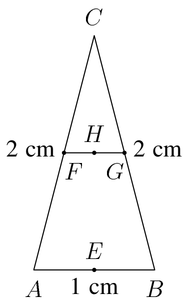


2. ábra

[1] Bár pontrendszer súlypontját annak helyvektorával adtuk meg, könnyen ellenőrizhető, hogy maga a súlypont nem függ az origó megválasztásától. (A szerk.)

pontját. Ő úgy okoskodott, hogy ha a háromszö-
get az AB oldalával párhuzamos keskeny sávokra bontja, akkor mindegyik sáv súlypontja – a szimmetria miatt – rajta lesz a CF egyenesen (F az AB szakasz felezőpontja), ezért CF egy súlyvonal. Ugyanígy kaphatunk egy másik súlyvonalat, és a két súlyvonal metszéspontja a súlypont. Tehát a háromszöglemez súlypontja ugyanaz lesz, mint a három csúcsból álló pontrendszeré.

c) Vékony, állandó keresztmetszetű és homogén drótból készült egyenlő szárú háromszög alakú keret súlypontja



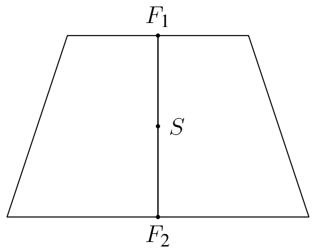
3. ábra

A *3. ábrán* 1 cm hosszú drót tömege legyen 1 g. Az ACB „törött” drótszakaszt AC és CB darabokból összetéve a súlypont az egyenlő tömegű AC, illetve BC részek F, G súlypontját (felezőpontját) összekötő szakasz H felezőpontja és összesen 4 g tömeget képvisel. Az AB szakasz 1 g tömege pedig a drótszakasz E súlypontjába (felezőpontjába) vonható össze. A keret súlypontja ezután a HE szakasz H-hoz közelebbi ötödölő pontja. Itt felhasználtuk azt a tényt, hogy egy testet két részre vágva, de a részeket helyben hagyva, a részek súlypontjait összekötő egyenes a test egy súlyvonala. Felhasználtuk továbbá, hogy (2)-ből az $n=2$ esetben az következik, hogy két pontszerű tömeg súlypontja a pontok összekötő szakaszát a tömegekkel fordított arányban osztja.

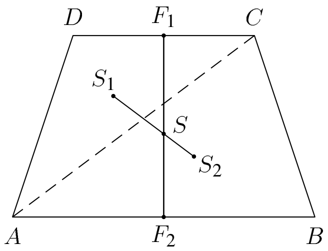
4. *A négyszög súlypontja*

a) Húrtrapézt alkotó pontnégyes súlypontja

A *4. ábrán* F_1, illetve F_2 az alapok felezőpontjai. Az S súlypont az F_1F_2 szakasz felezőpontja.



4. ábra



5. ábra

b) Húrtrapéz alakú homogén lemez súlypontja

Az *5. ábrán* F_1F_2 szimmetriatengely, tehát súlyvonal. Az ACD háromszög S_1 és az ABC háromszög S_2 súlypontját összekötve egy másik súlyvonalat kapunk. A két súlyvonal S metszéspontja a súlypont.

Az a) és b) eset azt mutatja, hogy négyszögek esetén a négy csúcs pontrendszerének súlypontja különbözhet a négyszöglemez súlypontjától.

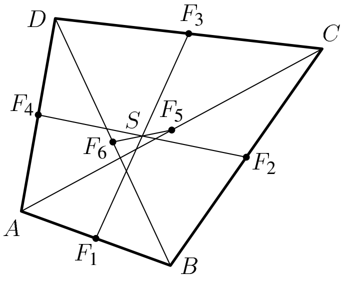
c) Tetszőleges pontnégyes súlypontja

Ha az F_i pontok ($i=1, 2, \ldots, 6$) a *6. ábrán* látható megfelelő szakaszok felezőpontjai, akkor például F_1F_3 felezőpontjaként kaphatjuk az S súlypontot. Ha a csúcsokba mutató vektorokat a megfelelő kisbetűvel jelöljük, akkor S-nek az $\mathbf{s}$ helyvektora.

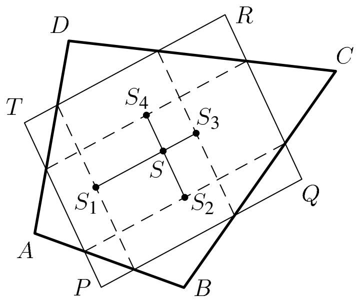
$$\mathbf{s}=\frac{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}+\frac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}}{2}=\frac{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2}+\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}}{2}=\frac{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2}+\frac{\mathbf{b}+\mathbf{d}}{2}}{2}. \tag{3}$$

Ha a négy pont nincs egy síkban, akkor egy tetraédert határoz meg. (3)-ból következik, hogy a tetraéder szemközti éleinek felezőpontját összekötő szakaszok egy ponton mennek át, ez a pont a pontrendszer súlypontja, és felezi a szóbanforgó szakaszokat.

Bebizonyítható, hogy a homogén anyageloszlású tetraéder alakú test súlypontja megkapható az előbbi módon (*6. ábra*).



6. ábra



7. ábra

d) Homogén anyageloszlású (sík)négyszöglemez súlypontja

A *7. ábrán* az $ABCD$ minden oldalát három egyenlő részre osztottuk. Az osztópontokat az ábra szerint összekötve a $PQRT$ paralelogrammát, az úgynevezett *Wittenbauer*-paralelogrammát kapjuk. S_1 az ABD háromszög, S_3 pedig a BCD háromszög súlypontja, ezért S_1S_3 a négyszög egy súlyvonala. Hasonlóan súlyvonal S_2S_4 is, ezért S a négyszög súlypontja. Mivel S_1S_3, illetve S_2S_4 illeszkednek a Wittenbauer-paralelogramma középvonalaira, S ennek a paralelogrammának a középpontja.

5. Az elmondottak alapján *tetszőleges (súlyozott) pontrendszer, vagy homogén sokszöglemez súlypontja* megszerkeszthető. A tetraéderrel kapcsolatos tétel alapján bizonyos testek súlypontja is meghatározható.

Bogdán Zoltán

Mérőlap felvételire készülőknek III.

Radó János igazgató úr (barátom) emlékére

1. Oldja meg a valós számpárok halmazán ($\mathbf{R}^2$) a következő egyenletrendszert:

$$x^2-y^2=2(x-y), \qquad x^2+y^2=5(x+y).$$

2. Egy mértani sorozat első és ötödik elemének szorzata 144, a második és a negyedik elem különbsége 18. Számítsa ki a sorozat első elemét és hányadosát.

3. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely az y tengelyt az origóban érinti, és érinti az $x+y=1$ egyenletű egyenest is.

4. Állapítsa meg, hogy az m valós paraméter mely értékeire lesznek a

$$2x^2+(2-2m)x+(m^2-4m+1)=0$$

egyenlet gyökei valósak, és állapítsa meg ezekre az m értékekre az $x_1 \cdot x_2$ kifejezés legnagyobb és legkisebb értékét, ahol x_1 és x_2 az egyenlet gyökeit jelentik.

5. Legyen $x>0$, $y>0$ és $x+y=4$. Igazolja, hogy

$$\left(3+\frac{1}{x}\right)\left(3+\frac{1}{y}\right) \geq \left(\frac{7}{2}\right)^2.$$

6. Egy háromszög két oldalának hossza 12, illetve 24 egység. A közbezárt szög szögfelezője 8 egység. Számítsa ki a két oldal által bezárt szöget és a harmadik oldalt.

7. Az $ABCD$ négyzet AB *oldalegyenesének* egy P pontja a C, illetve a D csúcsoktól 5, illetve $\sqrt{17}$ egység távolságra van. Mekkora a négyzet oldala? Hol helyezkedik el a P pont?

8. Oldja meg a valós számpárok halmazán a

$$4\cos^2 x - 4\sin x \cdot \sin y - 5 = 0$$

kétismeretlenes egyenletet.

Rábai Imre

A januári szakköri feladatok megoldásvázlatai, eredményei

1. Ha az x_0 szám közös gyöke az $f(x)=0$ és a $g(x)=0$ egyenleteknek, akkor minden A, B valós számra gyöke az $Af(x)+Bg(x)=0$ egyenletnek is, hiszen $f(x_0)=0$ és $g(x_0)=0$, tehát $Af(x_0)+Bg(x_0)=0$. Mivel az egyenleteknek két közös gyöke van, azért ezek a gyökök közös megoldásai az

$$(x^3+bx-12)-(x^3-ax^2+18)=0 \quad \text{és a} \quad 2(x^3-ax^2+18)+3(x^3+bx-12)=0,$$

$$ax^2+bx-30=0, \qquad x(5x^2-2ax+3b)=0$$

egyenleteknek is.

Az $a=0$ nem lehetséges, hiszen akkor nem volna két közös gyök. Az $x=0$ egyik egyenletnek sem gyöke. Így

$$x^2+\frac{b}{a}x-\frac{30}{a} \equiv x^2-\frac{2}{5}ax+\frac{3b}{5},$$

ahonnan $\frac{b}{a}=-\frac{2}{5}a$ és $-\frac{30}{a}=\frac{3b}{5}$, tehát $a=5$, $b=-10$, a közös gyökök az $x^2-2x-6=0$ egyenlet gyökei, $x_1=1+\sqrt{7}$, $x_2=1-\sqrt{7}$.

A harmadik gyökök $x_3=3$, illetve $x_4=-2$, hiszen $\dfrac{x^3-5x^2+18}{x^2-2x-6}=x-3$ és $\dfrac{x^3-10x+12}{x^2-2x-6}=$ $=x+2$.

2. Jelölje T a háromszög területét. Ekkor $\sin\alpha=\dfrac{2T}{bc}$, $\sin\beta=\dfrac{2T}{ca}$, $\sin\gamma=\dfrac{2T}{ab}$ és

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{2T}{bc}}=\frac{b^2+c^2-a^2}{4T},$$

$$\operatorname{ctg}\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{4T},\qquad \operatorname{ctg}\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{4T},$$

tehát $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=2T\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\right)$ és

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma=\frac{1}{4T}(b^2+c^2-a^2+a^2+c^2-b^2+a^2+b^2-c^2)=\frac{1}{4T}(a^2+b^2+c^2).$$

Ezekből következik az állítás.

3. Az $x>0$, $xa^2\neq 1$ és az $\dfrac{x}{\sqrt{a}}\neq 1$ feltételeknek teljesülnie kell. Ha $a=1$, akkor

$$\log_x x^3+\log_x\sqrt{x}\equiv 3+\frac{1}{2}>2,$$

tehát ekkor minden $x>0$, $x\neq 1$ szám megoldás. Ha $a\neq 1$ ($a>0$), akkor azonos átalakításokkal, majd rendezéssel

$$\frac{3\log_a x}{2+\log_a x}+\frac{\frac12\log_a x}{\log_a x-\frac12}-2>0,$$

$$\frac{\frac32(\log_a x-1)\left(\log_a x-\frac43\right)}{(\log_a x+2)\left(\log_a x-\frac12\right)}>0.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $\log_a x<-2$ vagy $\dfrac12<\log_a x<1$ vagy $\log_a x>\dfrac43$.

Ha $a>1$, akkor a megoldások: $0<x<\dfrac{1}{a^2}$ vagy $\sqrt{a}<x<a$ vagy $x>a^{\frac43}$;

ha $0<a<1$, akkor a megoldások: $x>\dfrac{1}{a^2}$ vagy $a<x<\sqrt{a}$ vagy $0<x<a^{\frac43}$.

4. a) Ismeretes, hogy $4s_a^2=2(b^2+c^2)-a^2$, $4s_b^2=2(a^2+c^2)-b^2$ és $4s_c^2=2(a^2+b^2)-c^2$.

Ha $2b^2=a^2+c^2$, akkor egyrészt $2s_b^2=\dfrac{2(a^2+c^2)-b^2}{2}=\dfrac{3b^2}{2}$, másrészt

$$s_a^2+s_c^2=\frac14\left((2b^2+2c^2-a^2)+(2a^2+2b^2-c^2)\right)=\frac14(4b^2+a^2+c^2)=\frac14\cdot 6b^2=\frac{3b^2}{2},$$

így valóban $2s_b^2=s_a^2+s_c^2$.

Megfordítva, ha $2s_b^2=s_a^2+s_c^2$, akkor $\dfrac{2a^2+2c^2-b^2}{2}=\dfrac14(2b^2+2c^2-a^2+2a^2+2b^2-c^2)$, ahonnan $2b^2=a^2+c^2$.

b) Ha $a \geq b \geq c$, akkor $s_c \geq s_b \geq s_a$.

Ismeretes, hogy ha az ABC háromszög területe T_1, a súlyvonalakból mint oldalakból alkotott háromszög területe T_2 területegység, akkor $\frac{T_2}{T_1} = \frac{3}{4}$.

Ha a két háromszög hasonló, akkor $\frac{T_2}{T_1} = \frac{s_a^2}{c^2} = \frac{s_b^2}{b^2} = \frac{s_c^2}{a^2} = \frac{3}{4}$, tehát $\frac{s_a^2}{c^2} = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4c^2} = \frac{3}{4}$, ahonnan $2b^2 = a^2 + c^2$.

Ha $2b^2 = a^2 + c^2$, akkor $\frac{s_a^2}{c^2} = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4c^2} = \frac{3c^2}{4c^4} = \frac{3}{4}$, azaz $\frac{s_a}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hasonlóan $\frac{s_b}{b} = \frac{s_c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, tehát a két háromszög hasonló.

Rábai Imre

Tájékoztató az IMK–2000-ről

A Miskolci Ifjúsági Matematikai Egyesület és a Bolyai János Matematikai Társulat Borsod Megyei Tagozata **2000. július 3–7.** között **Ifjúsági Matematikai Kongresszust** rendez középiskolás korú diákok számára, együttműködve a Miskolci Egyetem Matematikai Intézetével, a Herman Ottó Gimnáziummal és a Földes Ferenc Gimnáziummal.

Az Ifjúsági Matematikai Kongresszus-2000 Miskolc, a III. Európai Matematikai Kongresszus (3rd EMC) hivatalos kísérőrendezvénye. Szervezői szeretnék rendszeressé tenni a középiskolás korú diákok, tanáraik és más érdeklődők nyári szakmai találkozását. Az Ifjúsági Matematikai Kongresszusok története az Európai Matematikai Kongresszusokhoz kapcsolódik, először 1992-ben Párizsban, 1996-ban Miskolcon, 1998-ban pedig Potsdamban találkoztak az érdeklődök. A most már kétévenként sorra kerülő rendezvényeket nemzetközi matematikatábor és konferencia sorozattal egészítettük ki Miskolcon minden páratlan évben, így 1997 ben és 1999-ben.

A rendezvény programbizottsága: *Körtesi Péter, Pelikán József, Cofman Judit, Klepp Ferenc, Nemetz Tibor, Bencze Mihály, Fritzsche Marlen.*

A rendezvény szervezőbizottsága: *Kálmán László,* a BJMT helyi tagozatának elnöke, *Szamosfalvy Jánosné,* a Herman Ottó Gimnázium igazgatója, *Veres Pál,* a Földes Ferenc Gimnázium igazgatója, *Dr. Szarka Zoltán,* a BJMT helyi tagozatának alelnöke, *Bakos Nóra,* a Herman Ottó Gimnázium tanulója, *Nagy Gábor,* a Földes Ferenc Gimnázium tanulója, *Sipos Ádám,* a Földes Ferenc Gimnázium tanulója, *Szabó Katalin,* a Földes Ferenc Gimnázium tanulója.

A tervezett program: *A meghívott előadók* – neves külföldi és hazai szakemberek – a konferencia két hivatalos nyelvén, angolul és magyarul tartanak előadásokat. Lehetőségek szerint minden angol nyelvű előadást magyarra fordítunk. Az előadók a kb 1 órás előadás után az adott témakörben az érdeklődők számára feladatmegoldó foglalkozást is tartanak.

Minden résztvevő lehetőséget kap saját munkájának – kiselőadás, számítógépes program, poszter, játék stb. – ismertetésére.

A bemutatásra szánt anyagról előzetesen **2000. április 10-ig** kérjük beküldeni a következőket:

1. *Egy rövid, lehetőleg angol nyelvű kivonatot (Abstract) az alábbiak szerint:*

Cím	A bemutatóra szánt anyag rövid (max. 1 oldal) ismertetése:
Szerző(-k) neve	– a matematika milyen fejezetéhez kapcsolódik a dolgozat
Iskola, munkahely	– milyen kérdésekre tér ki
Szerző pontos címe	– milyen eredményt tartalmaz
	– főbb hivatkozások

2. *A teljes anyagot (2–8 oldal) angol vagy magyar nyelven, ami az előző felépítést követi, lehetőleg Word .rtf vagy .tex formátumban.*

(A számítógépes programokat és posztereket nem kell előzetesen beküldeni, csak azok rövid leírását.)

Mindkét anyagot kinyomtatva kérjük beküldeni fénymásolásra alkalmas formában és lemezen is. A beküldött anyagokból egy angol nyelvű Abstracts kötet készül. A Pi folyóirat magyar. illetve angol különszáma adja közre a részletes anyagokat, a legjobb dolgozatok más folyóiratokban is megjelenhetnek (KöMaL angol különszáma, Polygon).

A bemutatóra szánt anyagok előadását 20-20 percesre tervezzük. Az ettől eltérő idő-igényt, számítógép, íráskivetítő vagy más eszköz használatát és a poszter bemutatásához szükséges feltételeket (poszter ívek száma, mérete) a végleges jelentkezési lapon kérjük jelezni.

A részvétel költségei

A rendezvény részvételi díja 18.000 Ft/fő. Ez az összeg magában foglalja:

– a szállásköltséget (6 éjszaka: vasárnap éjszakával kezdődően a következő hét péntek éjszakájával bezárólag) középiskolai vagy egyetemi kollégiumban 3–5 ágyas szobákban

– a napi három étkezést (hétfőn reggelivel kezdve szombaton ebéddel zárva)

– a kirándulás költségeit

– a kiadványok, belépők, a városi közlekedés költségeit és a szervezési kiadásokat.

Azoknak, akik szállást, reggelit és vacsorát nem kérnek, a részvételi díj 12.000 Ft/fő (ebben benne van a hétfő esti közös vacsora és minden egyéb közös program).

Elegendő jelentkező esetén a hét végén fakultatív kirándulást szervezünk 2000. július 8–9-én (szombat–vasárnap). Ennek várható költsége további 4.000 Ft/fő.

A végleges jelentkezés módja és határideje

A végleges jelentkezéshez **jelentkezési lap kérhető** az alábbi címen. A végleges jelentkezési lapot kérjük pontosan kitölteni és **2000. május 31-ig** visszaküldeni.

A befizetés teljesíthető átutalással: a Miskolci Ifjúsági Matematikai Egyesület Postabank és Takarékpénztár Rt.-nél vezetett (Budapest, József Nádor tér 1.) 11994002-02409254-00000000 számú számlájára, vagy a jelentkezési lapon igényelt csekk felhasználásával. A jelentkezés lemondása június 15-ig irásban történhet, ez esetben a befizetett összeg 70%-át küldjük vissza a postai költségek levonása után.

Dr. Körtesi Péter
Ifjúsági Matematikai Egyesület
3515 Miskolc-Egyetemváros, Pf. 10.
Telefon: (46) 366-111/17-95 mellék
Fax: (46) 365-174

Matematikatörténet és Matematikatanítás Konferencia

az ELTE Tanárképző Főiskolai Kar rendezésében
a Bolyai János Matematikai Társulat és az OMFB támogatásával

Budapest, Markó utca 29–31.

2000. április 17–18.

A konferenciát megnyitja *Szabó Árpád*. Előadók: *Császár Ákos, Deák Ervin, Filep László, Hanczár Gergely, Hegyvári Norbert, Illés Tünde, Kántor Sándorné, Kutrovátz Gábor, Lénárt István, David Lingard, Megyesi László, Munkácsy Dóra, Munkácsy Katalin, Pálfalvi Józsefné, Pálmay Lóránt, Szilassi Lajos, Takáts János, Urbán János.*

A részvételi díj	2000. március 20. előtt	2000. március 20. után
felnőtt:	2200 Ft,	2800 Ft,
diák:	900 Ft,	1400 Ft,

amely tartalmazza a tudományos programot, a tájékoztatót, frissítőket és a meghívót az április 17-én 19 órakor kezdődő állófogadásra.

Az egyes előadásokra az érdeklődőket szívesen látjuk. Aki posztert vagy gyűjteményt kíván bemutatni, kérjük, vegye fel a kapcsolatot a Tudományos Titkársággal 2000. február 28-ig.

Jelentkezés **2000. március 20-ig** a Szervező Irodánál.

Fizetési módok:

– rózsaszín postai utalványon a Szervező Iroda címére,
– átutalással a Szervező Iroda 10200885–32613003–00000000 sz. számlájára.

Tudományos Titkárság:
ELTE TFK Matematika Tanszék
Munkácsy Katalin
Tel./Fax: 269-0807
E-mail: `munkac@ludens.elte.hu`

Szervező Iroda
CONTOURS Kft
1123 Budapest, Alkotás utca 47. I/1.
Burger Beáta
Tel.: 212-2239, Fax: 356-6712
E-mail: `bb.contours@euroweb.hu`

Octogon 1999

Az évente két alkalommal angol nyelven megjelenő Octogon Mathematical Magazine 1999-ben már hetedik évfolyamát zárta. A két kötetben összesen 79 cikk jelent meg, amelyek komoly trigonometriai, algebrai és analízisbeli ismeretekhez nyújtanak értékes kiegészítést. A folyóiratban a Wildt József Nemzetközi levelezőverseny keretében feladott problémák és nyitott (megoldatlan) kérdések nemcsak a jobb végzős középiskolásokat, de az egyetemistákat is próbára teszik. Ajánljuk mindazoknak, akiknek a KöMaL feladatai könnyűek.

A folyóirat megrendelhető, illetve a feladatok megoldása beküldhető a főszerkesztő címén:

Bencze Mihály, Str. Harmanului 6.
RO–2212 Sacele
Jud. Brasov, Románia

A minszki csirke

Szemben az információs szupersztrádával és további 99 elgondolkodtató feladat az orosz matematikai és fizikai hagyományokból

Bármilyen furcsa, ez egy könyv címe, amelynek tartalma is legalább ennyire meghökkentő és humoros. Íme három rövid, de jellemző fejtörő a 100 közül:

Nyikolaj viszontagságos üzleti útja

Az tea lehűtése Nyikolaj üzleti ügyben Visnyij Volocsokba utazik. A szállodában nincs konyhai felszerelés (igazság szerint semmilyen más felszerelés sincs), Nyikolaj tehát magával visz egy elektromos melegítőt, hogy vizet forralhasson. Reggelente teát főz, majd cukrot tesz bele, és várja, hogy iható hőmérsékletűre hűljön. Némely reggeleken kicsit később, a már lehűlt teába teszi bele a cukrot. Mikor hűl le hamarabb a teája?

Luxuslakosztályok Nyikolajnak egy hétre Szentpétervárra kell mennie. Ott sokkal jobb a szállás, mint Nyisnij Volocsokban, de persze drága is. A tulajdonos nem fogadja el fizetésül a rubelt. Nyikolajnak van egy hétszemes ezüst nyaklánca, és abban állapodik meg a szállodatulajdonossal, hogy napi egy láncszemet fizet a szállásért. A szállodás ragaszkodik hozzá, hogy Nyikolaj minden reggel fizessen, de hogy a lehető legkevesebb kárt tegyék a nyakláncban, az egész heti ottlakás alatt legfeljebb egy láncszemet szabad szétnyitnia. Hogyan fizet Nyikolaj a tulajdonosnak?

Enni vagy aludni, az itt a kérdés

Egy logikai probléma a Gulag világából: Tegyük fel, hogy az ember *pontosan* két hétig bírja evés vagy alvás nélkül. Mit tennél kétheti éhezés és alvatlanság végén: ennél-e vagy aludnál?

A válaszokat e-mail címünkre küldhetik a legszellemesebbeket honlapunkon is közzétesszük. A helyesen válaszolók között kisorsoljuk a könyv 3 példányát. Aki addig nem tud várni, keresse a könyvet a *Talentum könyvesboltban,* (a Nyugati tér közelében, 1054 Bajcsy-Zsilinszky út 66. Tel.: 311-8824) vagy a *Talentum könyváruházban* (1133 Gogol u. 17. Tel.: 349-8346).

A C gyakorlatok megoldása

C. 531. *Tekintsük azokat a valódi háromszögeket, amelyek csúcspontjainak koordinátái egy síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben a* -1, 0, 1 *számok közül valók. Milyen távolságra lehet e háromszögek súlypontja az origótól?*

Megoldás. Jelöljük az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátáit $A(a_1;a_2)$, $B(b_1;b_2)$, $C(c_1;c_2)$-vel.

Tudjuk, hogy a háromszög súlypontjának $(s_1;s_2)$ koordinátái kifejezhetők a csúcs-pontok koordinátáival:

$$s_1 = \frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \qquad s_2 = \frac{a_2+b_2+c_2}{3}.$$

Az $a_1+b_1+c_1$, illetve $a_2+b_2+c_2$ összeg lehetséges értékei: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, de ± 3 esetén nem jön létre valódi háromszög, így csak a többi esetet kell vizsgálnunk.

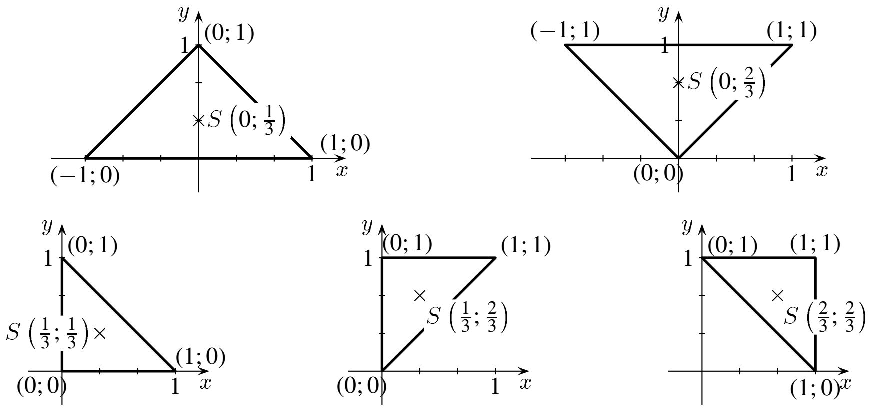
A súlypontnak az origótól való távolsága $d=\sqrt{s_1^2+s_2^2}$, ahol $3s_1$ és $3s_2$ értékei a 0, ± 1, ± 2 közül valók.

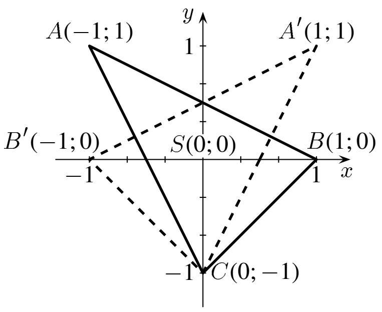
Ezek a következő koordinátapárokat adják:

$$S:\quad (0;0),\quad \left(0;\pm\frac{1}{3}\right),\quad \left(0;\pm\frac{2}{3}\right),\quad \left(\pm\frac{1}{3};\pm\frac{1}{3}\right),\quad \left(\pm\frac{1}{3};\pm\frac{2}{3}\right),\quad \left(\pm\frac{2}{3};\pm\frac{2}{3}\right),$$

az origótól való távolságuk pedig rendre:

$$0,\qquad \frac{1}{3},\qquad \frac{2}{3},\qquad \frac{\sqrt{2}}{3},\qquad \frac{\sqrt{5}}{3},\qquad \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$





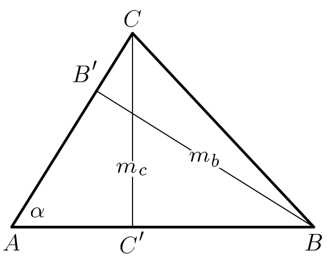
Könnyen láthatjuk, hogy mindegyik értékhez tartozik háromszög (nem is egy). Az *ábrákon* azok a háromszögek láthatók, ahol a súlypont egyik koordinátája sem negatív.

Ha tükrözzük ezeket a háromszögeket valamelyik koordinátatengelyre, azaz a csúcsok egyik koordinátájának előjelét megváltoztatjuk, az így kapott háromszög súlypontjának távolsága az origótól nem változik meg. Tehát a távolságokra valóban csak a felsorolt 6 érték adódhat.

213 dolgozat érkezett. 5 pontos 37, 4 pontos 69, 3 pontos 35, 2 pontos 20, 1 pontos 45, 0 pontos 5. Nem versenyszerű 2 dolgozat.

C. 543. *Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy szöge és két magassága.*

Megoldás. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor az adott magasságok egyike sem indul ki az adott szög csúcsából. Legyen adva $\alpha < 90°$, m_b és m_c.



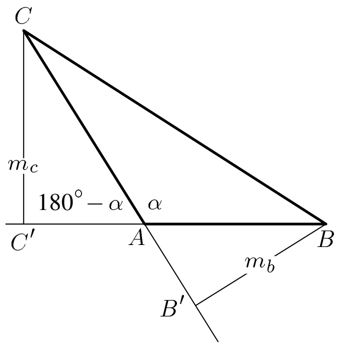
1. ábra

Az m_b magasságvonal talppontja AC-n B', m_c talppontja az AB-n C'. A szerkesztést az ABB' vagy az ACC' háromszög bármelyikével kezdhetjük. A derékszögű háromszög két szöge és egy oldalának ismeretében megszerkeszthető. Így megkapjuk a keresett háromszög B vagy C csúcsát. Ha pl. a B csúcsot szerkesztettük meg, akkor a C csúcsról azt tudjuk, hogy az AB egyenestől adott m_c távolságra van. Egy egyenestől adott távolságra lévő pontok halmaza két, az egyenestől adott távolságra lévő párhuzamos egyenes. Esetünkben azon a párhuzamoson lesz a C csúcs, amelyik az AB' félegyenest is metszi.

Az adott feltételek mellett a szerkesztés mindig egyértelmű és 1 megoldást ad. A szerkesztésből következik, hogy a háromszög eleget tesz a követelményeknek.

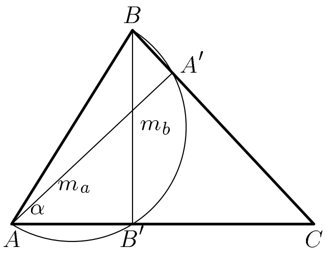
Ha $\alpha = 90°$, akkor mivel $m_b = AB$ és $m_c = AC$, a háromszög közvetlenül megszerkeszthető, és a szerkesztés 1 megoldást ad.

Ha $\alpha > 90°$, akkor az ACC' derékszögű háromszögben (*2. ábra*) a $CAC'\sphericalangle = 180° - \alpha$, és az AC-vel m_b távolságra húzott párhuzamosok közül az fogja a B csúcsot megadni, amelyik a $C'A$ félegyenest az A-n túli meghosszabbításában metszi. A szerkesztés az első esethez hasonlóan történik.



2. ábra

Most tekintsük azt az esetet, ha a megadott magasságok egyike ugyanabból a csúcsból indul ki, mint ahol a megadott szög van: legyen adva m_a, m_b és $\alpha < 90°$ (*3. ábra*).



3. ábra

A szerkesztést az ABB' derékszögű háromszöggel kezdjük. Az m_a magasság A' talppontja rajta lesz az AB szakasz mint átmérő fölé rajzolt Thalész-kör B'-t is tartalmazó ívén. Az AB' és BA' félegyenesek metszéspontja C. Ha A' és B egybeesik, azaz $m_a = AB$, akkor az AB-ben B-re állított merőleges metszi ki a C csúcsot az AB' félegyenesen. A feladatnak 1 megoldása van, ha $m_a \le AB$ és $0° < \alpha \le 90°$.

Ha $\dfrac{m_a}{m_b} \le 1$, 1 megoldás van; ha $1 < \dfrac{m_a}{m_b} \le \dfrac{1}{\sin\alpha}$, 2 megoldás van; ha pedig $\dfrac{m_a}{m_b} > \dfrac{1}{\sin\alpha}$, akkor nincs megoldás.

$\alpha = 90^\circ$ esetén: ha $m_a < m_b$, 1 megoldás van, ha $m_a \geq m_b$, akkor nincs megoldás.

Végül, ha $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ és $m_a < m_b$, akkor 1 megoldás van, $m_a \geq m_b$ esetén pedig nincs megoldás.

Zalán Péter (Budapesti Evangélikus Gimn., 10. o.t.)

185 dolgozat érkezett. 5 pontos Ábrány Miklós, Babos Attila, Bakó Péter, Balka Richárd, Bicsák Mátyás, Farkas Milán, Gajdos Béla, Gueth Krisztián, Jesch Dávid, Kádas Attila, Kegyes Tamás, Király Attila, Patay Gergely, Tamás Krisztina és Zalán Péter megoldása. 4 pontot kapott 116, 3 pontot 12, 2 pontot 26, 1 pontot 6, 0 pontot 3 beküldő. Nem versenyszerű 7 dolgozat.

C. 545. *Egy teli tubusban* 75 ml *fogkrém van. Hány méter fogkrémet lehetne belőle kinyomni, ha tudjuk, hogy a kinyomott fogkrém keresztmetszetének átmérője* 6 mm*?*

Megoldás. A kinyomott fogkrém egy 6 mm átmérőjű h méter hosszú henger lesz. A tubusban lévő fogkrém térfogata megegyezik ennek a hengernek a térfogatával.

$$75\ \text{ml} = 75\ \text{cm}^3 = 0{,}3^2 \cdot \pi \cdot h,$$

ahonnan

$$h = \frac{75}{0{,}09 \cdot \pi}\ \text{cm} \approx 2{,}653\ \text{m}.$$

Varga Áron (Alexandria, Monroe High School, USA, 10. o.t.)

1299 dolgozat érkezett. 5 pontos 812, 4 pontos 376, 3 pontos 90, 2 pontos 15, 0 pontos 3. Nem versenyszerű 3 dolgozat.

C. 546. *Valaki leírta az egész számokat egymás mellé* 1*-től* 1999*-ig. Milyen számjegy áll az* 1999*-edik helyen?*

Megoldás. Egyjegyű szám 9 darab van, kétjegyű 90 db, háromjegyű 900 darab. Ezek számjegyeinek száma $9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 = 2889 > 1999$.

Ez azt jelenti, hogy az 1999. jegyet a háromjegyű számok közt kell keresnünk. A háromjegyű számokra $1999 - 189 = 1810$ számjegy marad. $1810 = 603 \cdot 3 + 1$, vagyis az 1999. számjegy a 604. háromjegyű szám első számjegye, azaz a 703 első első számjegye, ez pedig a 7.

1194 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 917, 4 pontot 106, 3 pontot 54, 2 pontot 28, 1 pontot 17, 0 pontot 58 beküldő. Nem versenyszerű 14 dolgozat.

C. 547. *Egy óra nagy-, kis- és másodpercmutatója közös tengelyen van.* 12 *órakor fedik egymást. Legközelebb mikor lesz fedésben a három mutató?*

Megoldás. Legyen a legközelebbi találkozásig eltelt idő x óra y perc z másodperc, ahol x és y pozitív egész, z pedig nemnegatív, de nem feltétlenül egész. (Feltételezzük, hogy az óra mutatói folyamatosan haladnak.)

A másodpercmutató 1 perc alatt 360°-ot, 1 másodperc alatt $\dfrac{360^\circ}{60} = 6^\circ$-ot fordul el, így a találkozásig $6z$ fokkal fordul el.

A nagymutató 1 perc alatt $\frac{360^\circ}{60}=6^\circ$, 1 másodperc alatt $\frac{6^\circ}{60}=\frac{1}{10}$ fokot fordul el. Így y perc és z másodperc alatt

(1) $$6y+\frac{1}{10}z \text{ fokkal fordult el.}$$

A kismutató 1 óra alatt $\frac{360^\circ}{12}=30^\circ$-kal, 1 perc alatt $\frac{30^\circ}{60}=\frac{1}{2}$ fokkal, 1 másodperc alatt $\frac{1}{120}$ fokkal fordul el. Ezért x óra y perc és z másodperc alatt

(2) $$30x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{120}x$$

fok az elfordulás szöge.

A feladat feltételei szerint az elfordulási szögek egyenlők:

$$6y+\frac{1}{10}z=6z,$$

ahonnan

$$60y=59z.$$

$$30x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{120}z=6z.$$

Innen – az előbb kapott $60y=59z$-t behelyettesítve –

$$11y=59x.$$

Mivel x és y egészek, 11 és 59 pedig relatív prímek, azért a legkisebb 0-tól különböző megoldás az $y=59$, $x=11$, s ekkor $z=60$.

Tehát a legközelebbi találkozás 11 óra 59 perc 60 másodperc, azaz 12 óra múlva következik be, vagyis ha dél volt, akkor éjfélkor, ha éjfél volt, akkor délben.

Hablicsek Márton (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.)

630 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 292, 4 pontot 19, 3 pontot 28, 2 pontot 32, 1 pontot 94, 0 pontot 156 versenyző. Nem versenyszerű 9 dolgozat.

C. 548. *Az* $y\left(x^2+y^2\right)-x\left(x^2+y^2\right)-y+x=0$ *egyenlettel adott ponthalmaz melyik pontja van legközelebb a* $P(3;4)$ *ponthoz?*

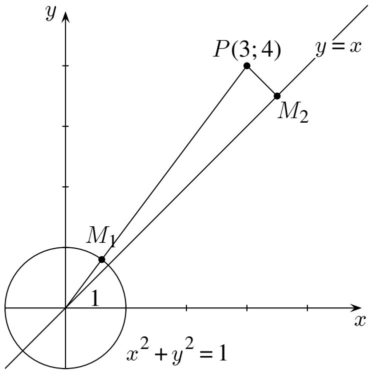
Javasolta: *Bánhegyi László,* Budapest

Megoldás. Alakítsuk szorzattá az egyenlet bal oldalát:

$$y(x^2+y^2)-x(x^2+y^2)-y+x=(y-x)(x^2+y^2-1)=0.$$

Az első tényező az első síknegyedben az origón átmenő szögfelező egyenes egyenlete, a második az origó középpontú, egységnyi sugarú kör egyenlete. Az egyenletet a két ponthalmaz egyesítésében lévő pontok elégítik ki.

A P pontnak a körtől való távolsága az a szakasz, amelyet a P pont és a P-t az origóval összekötő szakasznak a körrel való M_1 metszéspontja határoz meg. Ez a legrövidebb a P-t a kör kerületével összekötő szakaszok közül. P és M_1 távolsága $d_1=\sqrt{3^2+4^2}-1=4$ egység.



Egy pontból egy rajta át nem menő egyenes pontjaihoz húzott szakaszok közül a legrövidebb a merőleges szakasz. Számítsuk ki ennek a hosszát. P-ből az $y=x$ egyenesre bocsátott merőleges egyenlete:

$$y-4=-(x-3),\quad \text{rendezve}\quad y=-x+7.$$

A két egyenes metszéspontjának koordinátái a két egyenes egyenletéből $M_2(3{,}5;3{,}5)$, és végül a két pont, P és M_2 távolsága

$$d_1=\sqrt{(3-3{,}5)^2+(4-3{,}5)^2}=\frac{\sqrt2}{2}\approx 0{,}7071,$$

ami kisebb, mint $d_1=4$.

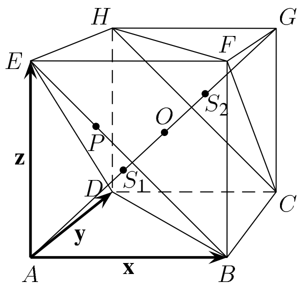
Tehát az egyenlettel megadott ponthalmaznak az $M_2(3{,}5;3{,}5)$ pontja van a P-hez legközelebb.

Vanya Ádám (Esztergom, Dobó K. Gimn., 11. o.t.)

694 dolgozat érkezett. 5 pontos 215, 4 pontos 176, 3 pontos 99, 2 pontos 59, 1 pontos 12, 0 pontos 127. Nem versenyszerű 6 dolgozat.

C. 549. *Az egységnyi élű $ABCDEFGH$ kocka BE lapátlójának E-hez közelebbi P harmadolópontja milyen távol van a CFH háromszög síkjától?*

Javasolta: *Bánhegyi László,* Budapest



1. ábra

I. megoldás. Forgassuk el a kockát az AG testátlója körül 120°-kal. Tudjuk, hogy ekkor önmagába megy át, hasonlóképpen a HFC és EDB egyenlő oldalú háromszögek is önmagukba mennek át.

Az EDB sík tehát párhuzamos a HFC síkkal, ezért a P pontnak a HFC síktól való távolsága helyett elegendő a két párhuzamos sík távolságát meghatároznunk. A HFC és EDB egyenlő oldalú háromszögek középpontja egybeesik a súlypontjukkal, és illeszkedik az AG testátlóra, amelyik mindkét síkra merőleges. Számítsuk ki e két súlypont távolságát. Legyenek A-ból a B, D, illetve E pontba mutató vektorok $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ és $\mathbf{z}$, a súlypontok S_1 és S_2 (*1. ábra*).

Ekkor az ismert összefüggés szerint

$$\overrightarrow{AG}=\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z},\qquad \overrightarrow{AS_1}=\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}}{3},$$

$$\overrightarrow{AS_2} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH}}{3} = \frac{(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + (\mathbf{x}+\mathbf{z}) + (\mathbf{y}+\mathbf{z})}{3} = \frac{2(\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z})}{3}.$$

Így

$$\overrightarrow{S_1S_2} = \frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}}{3} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}.$$

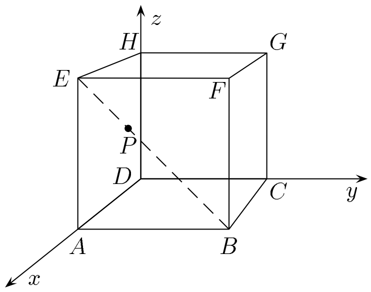
Ebből következik, hogy a súlypontok távolsága a testátló hosszának $\frac{1}{3}$-a, azaz $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Somlai Henrietta (Pápa, Református Gimn., 11. o.t.)

II. megoldás. Helyezzük el a kockát egy térbeli koordináta-rendszerben úgy, hogy D csúcsa az origóba essék, $ABCD$ lapjával az x, y síkon álljon az első térnegyed pozitív felén (*2. ábra*).

Írjuk fel a H, F, C és P pontok koordinátáit

$$H(0;0;1),\quad F(1;1;1),\quad C(0;1;0),\quad P\left(1;\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right).$$



2. ábra

Ezek után írjuk fel a H, F, C pontokra illeszkedő sík egyenletét. Ennek általános alakja

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Behelyettesítve a H, F és C pontok koordinátáit:

$H:\qquad c + d = 0,$

$F:\qquad a + b + c + d = 0,$

$C:\qquad b + d = 0,$

Az egyenletrendszerből $a = d$, $b = -d$, $c = -d$, tehát ha $d \neq 0$, akkor a H, F, C pontokon átmenő sík egyenlete:

$$dx - dy - dz + d = 0$$

$d \neq 0$-val osztva pedig

$$x - y - z + 1 = 0.$$

Az ismert összefüggés szerint a $P(x_1; y_1; z_1)$ pont távolsága az $ax + by + cz + d = 0$ egyenletű síktól

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Behelyettesítve, a távolság $\dfrac{\left|1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 1\right|}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, ahogyan azt az első megoldásban is láttuk.

László L. András (Veszprém, Ipari Szki. és Gimn., 10. o.t.)

417 dolgozat érkezett. 5 pontos 184, 4 pontos 45, 3 pontos 25, 2 pontos 16, 1 pontos 26, 0 pontos 111. Nem versenyszerű 10.

Matematika gyakorlatok megoldása

Gy. 3255. *Öreg falióránk számlapjáról leesett az összes szám. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan összekeverve tesszük is vissza a tizenkét számot, lesz közöttük három egymás melletti, amelyek összege legalább* 20*. Igaz-e, hogy mindig van 20-nál nagyobb összeg is?*

A kolozsvári Matematikai Lapok nyomán

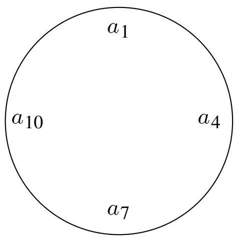
Megoldás. Legyen a tizenkét szám ebben a sorrendben a_1, a_2, $\ldots$, a_{12}, az egymás melletti számhármasok összege pedig $S_1=a_{12}+a_1+a_2$, $S_2=a_1+a_2+a_3, \ldots, S_{12}=$ $=a_{11}+a_{12}+a_1$. Ezek összege, $S_1+S_2+\ldots+S_{12}=3(a_1+a_2+\ldots+a_{12})=234$. Az S_i összegek átlaga így 19,5, van tehát köztük legalább ekkora. Másfelől ezek az összegek egész számok, azért valóban van köztük olyan, amelyiknek legalább 20 az értéke.

Azt állítjuk, hogy a feladat második kérdésére is igenlő a válasz, az S_i összegek között van 20-nál nagyobb is.

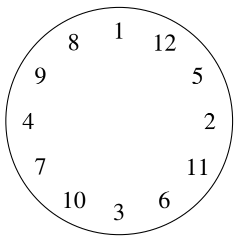
Tegyük fel, hogy ez nem igaz, a 12 szám elrendezhető úgy, hogy ne legyen 20-nál nagyobb S_i összeg. Ha hatnál kevesebb 20 értékű S_i összeg volna, akkor a tizenkét összeg összege legfeljebb $5\cdot 20+7\cdot 19=233$ lenne, ami lehetetlen. A 20 értékű összegek száma így legalább 6. Ha 7 vagy ennél is több ilyen összeg van, akkor van köztük két *szomszédos*, azaz $S_i=a_{i-1}+a_i+a_{i+1}=S_{i+1}=a_i+a_{i+1}+a_{i+2}=20$. Szomszédos összegek értéke viszont egyáltalán nem lehet egyenlő, hiszen ebből $a_{i-1}=a_{i+2}$ következne.

Ha pontosan 6 maximális összeg van, akkor ahhoz, hogy 234 legyen a 12 számhármas összegének az összege, a további 6 számhármas mindegyikének összege 19 kell legyen.

A szomszédos összegek között nincsenek egyenlők, így a 12 számhármasban felváltva követik egymást a 19 és a 20 értékű összegek. Megmutatjuk, hogy ez nem lehetséges, feltétlenül van két szomszédos összeg, amelyek eltérése nagyobb, mint 1.



1. ábra



2. ábra

Tekintsük ehhez az a_1, a_4, a_7, a_{10} számokat (*1. ábra*). E négy szám különböző, így van köztük az adott körüljárás szerint szomszédos kettő, amelyek eltérése legalább

2. Például $|a_4 - a_7| \geq 2$. Ez az eltérés viszont nem más, mint $|S_5 - S_6| = |a_4 + a_5 + a_6 - (a_5 + a_6 + a_7)|$. E két szomszédos összeg eltérése így legalább 2, ami ellentmond a korábbiakban talált egyedül lehetséges elrendezésnek. Nem lehetséges tehát, hogy az S_i összegek maximuma 20 legyen, van olyan összeg, amelyik legalább 21. A *2. ábrán* látható elrendezésben az S_i összegek maximuma éppen 21, eredményünk ezért tovább nem javítható.

Tran Thanh Long (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.) dolgozata alapján

237 dolgozat érkezett. 6 pontos Tran Thanh Long megoldása. 5 pontot kapott 56, 4 pontot 14, 3 pontot 32, 2 pontot 94, 1 pontot 10, 0 pontot 24 versenyző. Nem versenyszerű 6 dolgozat.

Gy. 3256. *Adjuk meg az összes olyan p, q, r (nem feltétlenül pozitív) prímszámot, amelyre*

$$\frac{1}{p-q-r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}.$$

Javasolta: *Kovács Ádám,* Budapest

Megoldás. Ha ez az egyenlőség fennáll a p, q és r (nem feltétlenül pozitív) prímszámokra, akkor $p-q-r \neq 0$ ($q \neq 0$, $r \neq 0$); mindkét oldalt $qr(p-q-r)$-rel megszorozva:

$$rq = (p-q-r)\cdot r + (p-q-r)q, \qquad \text{azaz}$$

$$rq = (p-q-r)(r+q).$$

Az r és q prímek, így az rq szorzatnak 8 osztója lehet: 1, -1, r, q, $-r$, $-q$, rq, $-rq$, tehát $p-q-r$, illetve $r+q$ csakis ezek közül kerülhet ki. Nézzük végig az összes esetet:

I. $p-q-r=1$. Ekkor $r+q=rq$, vagyis $0=rq-r-q$, amiből $1=(q-1)(r-1)$, tehát q és r vagy 0 (akkor nem lennének prímek), vagy $q=r=2$, ahonnan $p=5$.

II. $p-q-r=-1$. Ekkor $r+q=-rq$, $rq+r+q=0$, $(r+1)(q+1)=1$, tehát r és q vagy 0 (akkor nem prímek), vagy $q=r=-2$, ahonnan $p=-5$.

III. $p-q-r=r$. Ekkor $r+q=q$, ahonnan $r=0$ lenne, ami nem prím.

IV. $p-q-r=q$. Ekkor $r+q=r$, ahonnan $q=0$ lenne, ami nem prím.

V. $p-q-r=-r$. Ekkor $r+q=-q$, $r=-2q$, ez nem lehetséges, ha r is és q is prímek.

VI. $p-q-r=-q$. Ekkor $r+q=-r$, $q=-2r$, ez sem lehetséges, ha r is és q is prímek.

VII. $p-q-r=rq$. Ekkor $r+q=1$, ami csak akkor lehetséges az r és q prímszámokra, ha $r=-2$, $q=3$ vagy $r=3$, $q=-2$. Mindkét esetben $p-1=-6$, azaz $p=-5$.

VIII. $p-q-r=-rq$. Ekkor $r+q=-1$, ez csak akkor lehetséges az r és q prímekre, ha $r=-3$, $q=2$ vagy $r=2$, $q=-3$. Mindkét esetben $p+1=6$, azaz $p=5$.

Látható, hogy minden esetet megvizsgáltunk, sem $p-q-r$, sem $r+q$ nem vehetnek fel más értékeket, tehát a feladatnak az alábbi 6 megoldása van:

p	q	r
5	2	2
-5	-2	-2
-5	3	-2
-5	-2	3
5	2	-3
5	-3	2

Spanczér Ilona (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 9. o.t.)

Megjegyzés. Hasonlóan, esetszétválasztással oldható meg a feladat úgy is, ha azt vizsgáljuk, hogy $\frac{rq}{r+q}$ mikor lehet egész, erre példa *Nagy Gergely* (Veszprém, Lovassy L. Gimn., 10. o.t.) megoldása.

184 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 48, 4 pontot 19, 3 pontot 19, 2 pontot 21, 1 pontot 32, 0 pontot 36 beküldő. Nem versenyszerű 9 dolgozat.

Gy. 3265. *Van egy kétkarú mérlegünk és* 12 *egyforma nagyságú, különböző színű golyónk. Közülük egy más fajsúlyú anyagból készült, mint a többi. Megtudhatjuk-e három méréssel, hogy melyik ez a golyó? El tudjuk-e dönteni még azt is, hogy nehezebb, vagy könnyebb a többinél?* (**H**)

Megoldás. A feladat mindkét kérdésére igenlő a válasz. Hívjuk a – könnyebb vagy nehezebb – golyót hamisnak, és nézzük, hogyan választható ki 3 méréssel. A golyók színére vonatkozó feltétel azt jelenti, hogy meg tudjuk őket különböztetni, és a mérések során bármelyik golyót nyomon tudjuk követni. Hívjuk golyók egy csoportját *gyanúsnak,* ha köztük lehet a hamis golyó, egyébként pedig hívjuk a csoportot *jónak.*

Osszuk a golyókat három csoportba, mindegyikükben 4-4 golyóval.

I. A_1, A_2, A_3, A_4;   II. B_1, B_2, B_3, B_4;   III. C_1, C_2, C_3, C_4.

Mérjük össze az I. és a II. csoportot.

Ha egyenlőség van, akkor a III. csoport gyanús, az első kettő pedig jó. Tegyünk most az egyik serpenyőbe 3 gyanús (C_1, C_2, C_3), a másikba pedig 3 jó golyót. Ha ismét egyenlőség van, akkor e hat golyó is jó, az egyetlen megmaradt gyanús golyó (C_4) a hamis, és azt, hogy könnyebb vagy nehezebb a többinél, egyetlen további méréssel el tudjuk dönteni.

Ha a második mérésnél nincs egyenlőség, akkor a három gyanús golyó, C_1, C_2, C_3 között van a hamis, és azt is tudjuk, hogy könnyebb-e, mint a többi, vagy nehezebb (föltehető, hogy könnyebb). Ekkor pedig egyetlen további méréssel mindent megtudhatunk, ha két gyanús golyót összehasonlítunk. Ha nincs egyensúly, akkor a könnyebbik, ha pedig egyensúlyban vannak, akkor a harmadik golyó a hamis – és persze könnyebb a többinél.

Nézzük most azt az esetet, ha az első méréskor nincs egyensúly, az I. csoportban lévő golyók összsúlya például nagyobb.

Ekkor az első mérés után van 4 gyanús nehéz golyónk (A_1, A_2, A_3, A_4), négy gyanús könnyű (B_1, B_2, B_3, B_4) és négy jó golyónk (C_1, C_2, C_3, C_4).

KöMaL – 2000/2 MAT0002 cianmagentayellowblack2002. június 19. – 8:44 (26. lap)

Tegyünk most mindkét serpenyőbe két nehéz és egy könnyű gyanús golyót, azaz mérjük össze az (A_1, A_2, B_1) és az (A_3, A_4, B_2) csoportokat. Ha egyenlőség van, akkor ez a 6 golyó jó, a hamis golyó a megmaradt két könnyű gyanús, B_3 és B_4 között van. Ezek egyikét egy jó golyóval összemérve eldönthető, melyikük a hamis. (Azt már tudjuk, hogy könnyebb a többinél.)

Az az eset maradt, ha a második mérés után a két vegyes csoport nincs egyensúlyban, például (A_1, A_2, B_1) nehezebb, mint (A_3, A_4, B_2). Ez kétféleképpen lehetséges: vagy a két nehéz, A_1 és A_2 között van a hamis (és nehezebb a többinél), vagy maga a könnyű B_2 a hamis, és persze könnyebb a többinél.

Hasonlítsuk ezért össze A_1-et és A_2-t, a két nehéz gyanús golyót.

Ha egyensúly van, akkor a könnyű B_2 a hamis, ha pedig nincsen, akkor tudjuk, hogy a hamis golyó a nehezek között van, és így a két golyó, A_1 és A_2 közül a nehezebbik a hamis.

Ezzel minden esetet megvizsgáltunk, és valóban mindig el tudtuk dönteni, melyik a hamis golyó; és azt is, hogy könnyebb vagy nehezebb a többinél.

Baur Eszter (Békéscsaba, Rózsa F. Gimn., 9. o.t.) és
Jesch Dávid (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 9. o.t.) dolgozatai alapján

200 dolgozat érkezett. 5 pontos 66, 4 pontos 45, 3 pontos 22. 2 pontot kapott 23, 1 pontot 15, 0 pontot 29 versenyző.

Gy. 3270. *Legyen $n>2$ páros szám. Igazoljuk, hogy $\underbrace{11\dots1}_{n}$ semmilyen számrendszerben sem lehet prím.*

Javasolta: *Kovács Ádám,* Budapest

I. megoldás. Mivel $n>2$ páros egész, azért van olyan $k\ge 2$ egész szám, amelyre $n=2k$. Az a alapú számrendszerbeli $2k$-jegyű csupa 1-esből álló szám

$$\begin{gathered}a^{2k-1}+a^{2k-2}+\ldots+a^k+a^{k-1}+a^{k-2}+\ldots+a+1=\\=a^k\cdot(a^{k-1}+a^{k-2}+\ldots+a+1)+a^{k-1}+a^{k-2}+a+1=\\=(a^k+1)(a^{k-1}+a^{k-2}+\ldots+a+1).\end{gathered}$$

Nyilván $a\ge 2$ és $k\ge 2$, ezért az első tényező legalább 5, a második tényező pedig nagyobb, mint $a^{k-1}\ge 2$, és mindkét tényező egész szám.

Tehát, ha $n>2$ páros szám, akkor $\underbrace{11\dots1}_{n}$ tetszőleges számrendszerben felírható két 1-nél nagyobb pozitív egész szám szorzataként a fent látható módon, azaz összetett szám, így nem lehet prím.

II. megoldás. Az I. megoldás jelöléseivel most

$$\begin{gathered}a^{2k-1}+a^{2k-2}+a^{2k-3}+a^{2k-4}+\ldots+a+1=\\=a^{2k-2}(a+1)+a^{2k-4}(a+1)+\ldots+(a+1)=(a+1)(a^{2k-2}+a^{2k-4}+\ldots+1).\end{gathered}$$

Most is mindkét tényező 1-nél nagyobb pozitív szám, hiszen $a \ge 2$ miatt $a+1 \ge 3$ és $a^{2k-2} = a^{n-2} \ge a^{4-2} = a^2 \ge 2^2 = 4$ (n legalább 4, a legalább 2), tehát $\underbrace{111\dots1}_{n}$ ilyen módon is szorzattá bontható, így nem lehet prím.

Bálint Gergely (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzések. 1. Az első megoldásban lényegében azt számoltuk ki, hogy az a alapú számrendszerben felírt $A_n = \underbrace{11\dots1}_{2k}$ számnak – nyilván valódi – osztója az $\underbrace{11\dots1}_{k}$ szám, a másodikban pedig, hogy A_n osztható az $A_2 = 11$ számmal is.

Az első eset az $\dfrac{a^{2k}-1}{a-1} = (a^k+1)\dfrac{a^k-1}{a-1}$, a második az $\dfrac{a^{2k}-1}{a-1} = (a+1)\dfrac{a^{2k}-1}{a^2-1}$ azonosságot rejti.

2. A feladat természetes módon általánosítható: ha d az n valódi osztója, akkor $a_d = \underbrace{11\dots1}_{d}$ is valódi osztója A_n-nek, amely tehát nem lehet prímszám.

172 dolgozat érkezett. 6 pontos Ambrus Gergely, Andrássy Zoltán, Árvay Eszter, Bálint Gergely, Bartha Tamás, Birkner Tamás, Boros Vazul, Gerencsér Balázs, Harangi Viktor, Horváth Balázs, Koch Dénes, Lovrics Anna, Nagy 444 Zoltán, Pallos Péter, Pogátsa Attila, Tóth 370 Ágnes és Varjú Péter megoldása. 5 pontot kapott 147, 4 pontot 2, 2 pontot 2, 0 pontot 4 beküldő.

Gy. 3271. *Melyik tört a nagyobb,*

$$\frac{1998^{2000}}{2000^{1998}} \quad \text{vagy} \quad \frac{1997^{1999}}{1999^{1997}}?$$

Javasolta: *Bíró József,* Budapest

I. megoldás. Megmutatjuk, hogy ha $n>0$ egész szám, akkor

$$\frac{(n+1)^{n+3}}{(n+3)^{n+1}} > \frac{n^{n+2}}{(n+2)^n}. \tag{1}$$

Ebből az általánosításból következik, hogy feladatunk megoldása ($n=1997$ esetén):

$$\frac{1998^{2000}}{2000^{1998}} > \frac{1997^{1999}}{1999^{1997}}.$$

Szorozzuk meg ugyanis (1) mindkét oldalát $(n+3)^{n+1}(n+2)^n$-nel: pozitív egész számokról lévén szó, az egyenlőtlenség iránya nem változik:

$$(n+1)^{n+3}(n+2)^n > n^{n+2}(n+3)^{n+1}.$$

Ezt azonosan átalakítva:

$$(n+1)^n(n+2)^n(n+1)^3 > n^n(n+3)^n \cdot n^2(n+3),$$

$$[(n+1)(n+2)]^n(n+1)^3 > [n(n+3)]^n \cdot n^2(n+3).$$

Ez viszont a következők miatt teljesül:

$$(n+1)(n+2)=n^2+3n+2>n^2+3n=n(n+3), \qquad \text{így}$$
$$[(n+1)(n+2)]^n>[n(n+3)]^n,$$

hiszen $n>0$ egész. Tehát

$$[(n+1)(n+2)]^n(n+1)^3>[n(n+3)]^n(n+1)^3=[n(n+3)]^n(n^3+3n^2+3n+1)>$$
$$>[n(n+3)]^n(n^3+3n^2)=[n(n+3)]^n n^2(n+3).$$

Az ekvivalens átalakítások miatt a reláció mindvégig ugyanolyan irányú maradt, ezzel igazoltuk (1)-et.

Somogyi Dávid (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.)

II. megoldás. Bebizonyítjuk a következő segédtételt: Legyenek a és b pozitív egész számok, akkor

$$\left(\frac{a+1}{b+1}\right)^{b+1}>\left(\frac{a}{b}\right)^b.$$

Írjuk fel ugyanis a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az $1, \underbrace{\frac{a}{b}, \frac{a}{b}, \ldots, \frac{a}{b}}_{b \text{ darab}}$ számokra:

$$\frac{1+\overbrace{\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\ldots+\frac{a}{b}}^{b \text{ darab}}}{b+1} \geq \sqrt[b+1]{1\cdot \underbrace{\tfrac{a}{b}\cdot\tfrac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\tfrac{a}{b}}_{b \text{ darab}}},$$

azaz

$$\frac{1+a}{b+1} \geq \sqrt[b+1]{\left(\frac{a}{b}\right)^b}, \qquad \text{innen pedig valóban} \qquad \left(\frac{a+1}{b+1}\right)^{b+1} \geq \left(\frac{a}{b}\right)^b,$$

és egyenlőség csak akkor van, ha $1=\frac{a}{b}$, tehát ha $a=b$. $a=1997$, $b=1999$ behelyettesítésével tehát

$$\left(\frac{1998}{2000}\right)^{2000}>\left(\frac{1997}{1999}\right)^{1999}.$$

Szorozzuk be az egyenlőtlenség mindkét oldalát 2000^2-nel:

$$\frac{1998^{2000}}{2000^{1998}}=\left(\frac{1998}{2000}\right)^{2000}\cdot 2000^2>\left(\frac{1997}{1999}\right)^{1999}\cdot 2000^2>$$
$$>\left(\frac{1997}{1999}\right)^{1999}\cdot 1999^2=\frac{1997^{1999}}{1999^{1997}},$$

ezzel beláttuk, hogy

$$\frac{1998^{2000}}{2000^{1998}} > \frac{1997^{1999}}{1999^{1997}}.$$

Hegyi Márta (Budapest, Szent István Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzések. 1. Többen számológéppel számoltak, de a gép a tizedesjegyeket csak adott határig tudja kiírni, és a kerekített értékekkel való számolás a relációt akár meg is fordíthatja – néhány esetben ez is történt! *Kiss Norbert* (Budapest, Szent István Gimn., 10. o.t.) azonban azt is megvizsgálta, hogy a kerekítési hiba milyen hatással lehet a kapott eredményre, ezzel a megoldása teljesen korrekt.

2. Hasonlóan, a kerekítési hiba megvizsgálásával adott jó megoldást *Andrássy Zoltán* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t.) is, aki a törtek tízes alapú logaritmusával számolt.

3. Tipikus hiba volt a dolgozatok egy részében, hogy

$$\frac{1998}{2000} > \frac{1997}{1999}\text{-ből} \qquad \left(\frac{1998}{2000}\right)^{1998} > \left(\frac{1997}{1999}\right)^{1997}\text{-re}$$

következtettek, ami nem jogos, hiszen 1-nél kisebb pozitív számok természetes kitevőjű hatványai egyre csökkennek, így pl.

$$\left(\frac{1997}{1999}\right)^{1998} < \left(\frac{1997}{1999}\right)^{1997}.$$

209 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 182, 4 pontot 1, 1 pontot 1, 0 pontot 20 beküldő. Nem versenyszerű 5 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása

F. 3252. *Hányféleképpen lehet sorbarakni az* $1, 2, \ldots, n$ *számokat úgy, hogy az első helyen álló szám kivételével mindegyiket megelőzze legalább az egyik (eredeti sorrend szerinti) szomszédja?*

I. megoldás. Tekintsünk egy megfelelő elrendezést, és nézzük a legnagyobb elemet, n-et. Akárhol áll a sorban, egyetlen szomszédja, $(n-1)$ meg kell előzze. Az $(n-1)$-et pedig meg kell előznie $(n-2)$-nek, hiszen másik szomszédja, n, mögötte van. Ez így folytatódik, amíg az elrendezés legelső eleméhez nem érünk. Ha ez k, akkor az elrendezésben a k, $k+1$, $\ldots$, $n-1$, n számok ebben a sorrendben szerepelnek.

Tekintsük most a legkisebb elemet, az 1-et. Akárhol van – kivéve ha az első helyen, azaz $k=1$ – meg kell előzze egyetlen szomszédja, a 2. Ezt viszont a 3-nak kell megelőznie, hiszen a másik szomszédja, az 1 már mögötte van. Ez így folytatódik a $(k-1)$-ig, amit pedig szomszédja, k megelőz, hiszen a legelső helyen áll. A k-val kezdődő elrendezésben tehát a k-nál kisebb számok sorrendje is egyértelmű: $k-1$, $k-2$, $\ldots$, 2, 1.

Ha rögzítjük a legelső elemet, k-t, akkor az $n-1$ szabad helyre $\binom{n-1}{k-1}$-féleképpen tudjuk a $k-1$, $k-2$, $\ldots$, 2, 1 számokat ebben a sorrendben felírni, ezután pedig a k-nál nagyobb elemek beírása a megmaradt helyekre a kötött sorrend miatt már egyértelmű.

A lehetséges sorbarendezések száma így

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}=2^{n-1}.$$

Csirmaz Előd (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t.)

II. megoldás. Először azt igazoljuk, hogy egy megfelelő sorbarendezésnél a legutolsó helyen az 1 vagy pedig az n áll. Tegyük fel, hogy ez nem igaz, legyen $1<i<n$, és tegyük fel, hogy a sorozat utolsó tagja i. Ekkor az i-t mindkét szomszédja, az $i+1$ és az $i-1$ is megelőzi. Ezután az i-nél nagyobb számok a kisebbik, az i-nél kisebbek pedig a nagyobbik szomszédjukat előzik meg, így a másik szomszédjuknak őket kell megelőzniük.

Így két láncot kapunk:

$$\begin{array}{l}n\leftarrow\ldots\leftarrow i+2\leftarrow i+1 \nwarrow\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad i\\ 1\leftarrow\ldots\leftarrow i-2\leftarrow i-1 \swarrow\end{array}$$

Ez azt jelenti, hogy az 1 és az n mindketten a legelső helyen kell álljanak, ami nyilván nem lehetséges. Így valóban 1 vagy n áll az utolsó helyen. Jelölje $f(n)$ azt, hogy hányféleképpen lehet n darab különböző számot sorbarakni úgy, hogy az első helyen álló szám kivételével mindegyiket megelőzze legalább az egyik szomszédja. A szomszédság jelentése itt nyilvánvaló, és $f(n)$ valóban csak az n-től függ.

Akár 1, akár pedig n áll az utolsó helyen, a megmaradó számok $f(n-1)$-féle sorrendjének bármelyike megfelelő n hosszúságú sorozatot ad, így $f(n)=2f(n-1)$. Mivel $f(1)=1$, azért $f(n)=2^{n-1}$.

Vizer Máté (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.)

III. megoldás. Legyen $1\le k\le n$, és tegyük a k-t a legelső helyre. A második elem így a k valamelyik szomszédja, $k-1$ vagy $k+1$. (Ha $k=1$ vagy $k=n$, akkor a két eset közül persze csak az egyik lehetséges.) Az első két elem mindenesetre két szomszédos szám, a harmadik pedig e „szakasz” valamelyik szomszédja, a kisebbik számnál 1-gyel kisebb vagy a nagyobbiknál 1-gyel nagyobb.

Ugyanígy kapjuk, hogy az első i darab elem i darab szomszédos szám, és az $(i+1)$-edik elem e számok minimumánál 1-gyel kisebb vagy maximumánál 1-gyel nagyobb.

Így minden sorozathoz – a második elemtől kezdve – hozzárendelhető egy 0-kból és 1-esekből álló sorozat. Az $(i+1)$-edik helyen álló 0 azt jelenti, hogy az első i darab szám minimumánál 1-gyel kisebb, az 1 pedig azt, hogy az első i darab szám maximumánál 1-gyel nagyobb szám került az $(i+1)$-edik helyre.

Így egy $n-1$ hosszúságú 0–1 sorozatot rendeltünk az első n darab szám egy megfelelő sorbarendezéséhez. Ez a hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű, ha ebből a 0–1 sorozatból elő tudjuk állítani az első elemet, hiszen ezután a folytatás már egyértelmű.

Vegyük észre, hogy az első elem, k, a sorozatban szereplő nullák számánál 1-gyel nagyobb, hiszen ekkor van $(k-1)$ lehetőségünk arra, hogy az addigi szakasz minimumát 1-gyel csökkentsük.

Az $(n-1)$ hosszúságú 0–1 sorozatok száma, mint ismeretes, 2^{n-1}, ezért ennyi a feladatban kérdezett sorbarendezések száma is.

Tóth Ágnes (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., 9. o.t.)

83 dolgozat érkezett. 5 pontos 37, 4 pontos 12, 3 pontos 1, 2 pontos 11, 0 pontos 20. Nem versenyszerű 2 dolgozat.

B. 3294. *A táblára felírtuk az* 1, 2, 3, $\ldots$, 20 *számokat. Letörlünk közülük két számot, a-t és b-t, s helyettük felírjuk az $ab+a+b$ számot. Ezt az eljárást 19-szer elvégezve milyen szám maradhat a táblán?*

(*4 pont*) Javasolta: *Róka Sándor,* Nyíregyháza

Megoldás. Legyen $a\circ b=ab+a+b=(a+1)(b+1)-1$; tehát $a\circ b$ jelöli azt a számot, amelyet a és b letörlésekor a táblára írunk. Látható, hogy ez a művelet kommutatív. Belátjuk, hogy $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$, így asszociatív is:

$$(a\circ b)\circ c=\big((a+1)(b+1)-1+1\big)(c+1)-1=(a+1)(b+1)(c+1)-1,$$
$$a\circ(b\circ c)=(a+1)\big((b+1)(c+1)-1+1\big)-1=(a+1)(b+1)(c+1)-1.$$

Ez azt jelenti, hogy a végeredményül kapott szám nem függ a letörölt számok sorrendjétől. Ezek után belátjuk, hogy tetszőleges x_1, x_2, $\ldots$, x_n számokra

$$x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n=(x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_n+1)-1.$$

A bizonyítást n-re vonatkozó teljes indukcióval végezzük. Az imént beláttuk, hogy $n\le 3$ esetén igaz az állítás. Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely n-re. Ekkor ezt felhasználva

$$x_1\circ x_2\circ\ldots x_n\circ x_{n+1}=\big((x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_n+1)-1\big)\circ x_{n+1}=$$
$$=(x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_n+1)(x_{n+1}+1)-1,$$

tehát $(n+1)$-re és így minden természetes számra is igaz. Ezért mindig ugyanaz a szám marad a táblán, éspedig

$$(1+1)\cdot(2+1)\cdot\ldots\cdot(20+1)-1=2\cdot3\cdot\ldots\cdot21-1=21!-1.$$

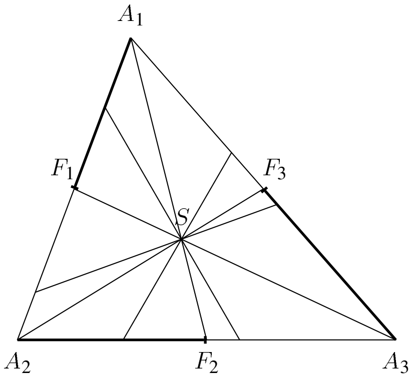
359 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 120, 3 pontot 123, 2 pontot 22, 1 pontot 35, 0 pontot 52 beküldő. Nem versenyszerű 7 dolgozat.

B. 3295. *Egy háromszög súlypontján átmenő egyenesek közül melyek felezik a háromszög területét?*

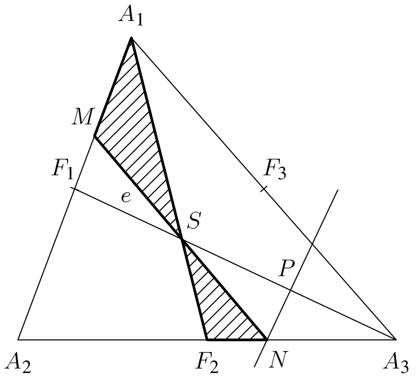
(*4 pont*) Javasolta: *Bogdán Zoltán,* Cegléd

Megoldás. Tudjuk, hogy a súlyvonalak felezik a háromszög területét. Megmutatjuk, hogy a súlyponton átmenő többi egyenes közül egyik sem felezi a háromszög területét.

Jelöljük a háromszög csúcsait A_1, A_2, A_3-mal, súlypontját S-sel, az oldalak felezőpontját pedig az *1. ábrán* látható módon F_1, F_2, F_3-mal. Ha az S-en átmenő e egyenes nem súlyvonal, akkor a háromszög oldalai közül pontosan kettőt metsz. A két metszéspont közül az egyik az A_1F_1, A_2F_2 vagy az A_3F_3 szakasz belső pontja, a másik pedig – ennek a sorrendnek megfelelően – az F_2A_3, F_3A_1 vagy az F_1A_2 szakasz belső pontja (*1. ábra*). Választhatjuk úgy a csúcsok számozását, hogy az e egyenes az A_1F_1 és az F_2A_3 szakaszokat messe. Jelöljük a metszéspontokat M-mel, illetve N-nel (*2. ábra*). Ekkor az N-en átmenő, A_1A_2-vel párhuzamos egyenes az SA_3 szakaszt annak egy belső pontjában metszi; legyen ez a metszéspont P.



1. ábra



2. ábra

Tegyük fel, hogy e felezi a háromszög területét. Mivel az A_1F_2 egyenes is felezi a háromszög területét, ebből az következik, hogy az A_1SM és az F_2SN háromszögek területe egyenlő (*2. ábra*). A két háromszög S-nél lévő szögei egyenlők, ezért az S-ből induló oldalaik szorzatának is meg kell egyezniük:

$$SA_1 \cdot SM = SF_2 \cdot SN.$$

Vagyis:

$$\frac{SA_1}{SF_2} = \frac{SN}{SM}. \tag{1}$$

De S súlypont, ezért $\dfrac{SA_1}{SF_2} = \dfrac{SA_3}{SF_1} = 2$. Mivel pedig NP és MF_1 párhuzamosak, azért $\dfrac{SN}{SM} = \dfrac{SP}{SF_1} < \dfrac{SA_3}{SF_1} = 2$. Tehát az (1) egyenlőség nem állhat fenn, vagyis e nem felezheti a háromszög területét.

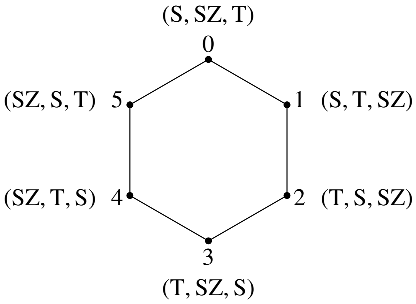
Ezzel beláttuk, hogy a súlyponton átmenő egyenesek közül csak a súlyvonalak felezik a háromszög területét.

375 dolgozat érkezett. 4 pontos 128, 3 pontos 36, 2 pontos 14, 1 pontos 78, 0 pontos 118. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

B. 3296. *Baloldalt egy sáska, középen egy szöcske, jobboldalt egy tücsök ül egy hosszú, egyenes árokban. Időnként valamelyik átugorja egyik szomszédját. Előfordulhat-e, hogy* 1999 *ugrás után újra a kiinduló sorrendben ülnek, ha végig csak az árokban (egy egyenes mentén) ugrálnak?*

(*4 pont*) Javasolta: *Róka Sándor,* Nyíregyháza

I. megoldás. A sáska (S), a szöcske (SZ) és a tücsök (T) összesen hatféle elrendezésben ülhetnek egymás mellett, és minden ugrásnál a középső kicserélődik. Az alábbi gráf 6 csúcsát a 6 elrendezésnek feleltettük meg, és két csúcsot akkor kötöttünk össze, ha az egyikből 1 ugrással el lehet jutni a másikhoz, és viszont.



A csúcsokat a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számokkal az *ábra* szerint megszámoztuk.

1999 ugrással pontosan akkor lehet eljutni a kiinduló sorrendhez, ha a gráf 0 pontjából az éleken lépegetve 1999 lépés után visszajuthatunk a 0 pontba.

Minden lépésnél páros sorszámú csúcsból páratlanba vagy páratlanból párosba lépünk, így páratlan lépés után csak páratlan sorszámú pontba léphetünk, 0-ba nem. Tehát a feladat kérdésére a válasz: nem.

Breuer János (Budapest, ELTE Apáczai Cs. J. Gyak. Gimn., 11. o.t.)

II. megoldás. Nevezzük A állapotnak az előző megoldás jelöléseit használva a következő 3 esetet: (S, SZ, T), (T, S, SZ), (SZ, T, S), B állapotnak pedig a többi 3 elrendezést: (S, T, SZ), (T, SZ, S), (SZ, S, T). Minden ugrás után az A állapotból a B-be, B-ből pedig az A-ba jutunk. Így 1999 lépés után A-ból kiindulva B-be kell jutnunk, tehát nem kerülhetünk vissza sem a kiinduló, sem a másik két A-beli elrendezésbe.

Csóka Endre (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 9. o.t.)

Megjegyzés. Tetszőleges n pozitív egészre n elem, például az 1, 2, ..., n számok permutációit két csoportba, az úgynevezett páros és páratlan permutációkra lehet bontani.

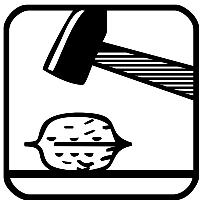
Egy tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_n$ permutációhoz keressük meg az összes olyan $i<j$ számpárt, amelyre $a_i>a_j$. Az ilyen párok számát hívjuk a permutáció inverziószámának. Ha az inverziószám páros, akkor a permutációt páros permutációnak nevezzük, ellenkező esetben pedig páratlan permutációnak.

Ha egy permutációban két tetszőleges elemet (nem feltétlenül szomszédosokat!) felcserélünk, akkor a permutáció paritása megváltozik.

A permutációk paritásának vizsgálatával 3 helyett akárhány ugrándozó rovarra is megoldható a feladat.

531 dolgozat érkezett. 4 pontos 148, 3 pontos 81, 2 pontos 89, 1 pontos 64, 0 pontos 141. Nem versenyszerű 8 dolgozat.

Nehezebb feladatok megoldása



A. 215. *A P, Q és R pontok úgy helyezkednek el az O középpontú*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

egyenletű ellipszoidon, hogy az OP, OQ, OR szakaszok páronként merőlegesek egymásra. Mutassuk meg, hogy a PQR sík és O távolsága nem függ P, Q, és R megválasztásától.

Jugoszláv versenyfeladat

Megoldás. Először kifejezzük a PQR sík és O távolságát az OP, OQ és OR szakaszok hosszának segítségével. Vegyünk fel egy olyan koordináta-rendszert, amelynek origója O, és tengelyei az OP, OQ, OR irányokba mutatnak. Az OP, OQ, OR távolságokat d_1, d_2, d_3-mal jelölve, a PQR sík egyenletét tengelymetszetes alakban írva $\frac{x}{d_1}+\frac{y}{d_2}+\frac{z}{d_3}=1$, amiből a távolság

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\frac{1}{d_3^2}}}.$$

A továbbiakban tehát azt kell igazolnunk, hogy az $\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\frac{1}{d_3^2}$ kifejezés értéke nem függ a P, Q, R pontok megválasztásától.

Vegyük most fel koordináta-rendszerünket az ellipszoid tengelyei irányában. Így az ellipszoid egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

alakban írható, ahol a, b és c a féltengelyek hossza.

Legyen a három koordináta-egységvektor $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, ezen kívül $\frac{\overrightarrow{OP}}{d_1}=\mathbf{v}_1$, $\frac{\overrightarrow{OQ}}{d_2}=\mathbf{v}_2$, $\frac{\overrightarrow{OR}}{d_3}=\mathbf{v}_3$. Végül legyen $u_{ij}=\mathbf{e}_i\mathbf{v}_j$.

A feltételek szerint a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ vektorok egységnyi hosszúak és páronként merőlegesek. Ebből következik, hogy tetszőleges i-re

$$\mathbf{e}_i=u_{i1}\mathbf{v}_1+u_{i2}\mathbf{v}_2+u_{i3}\mathbf{v}_3$$

és

$$u_{i1}^2+u_{i2}^2+u_{i3}^2=|\mathbf{e}_i|^2=1.$$

KöMaL – 2000/2 MAT0002 cianmagentayellowblack2002. június 19. – 8:44 (35. lap)

(1)-be behelyettesítve P, Q, R koordinátáit, azaz a $(d_ju_{1j},d_ju_{2j},d_ju_{3j})$ számhármasokat,

$$\frac{(d_ju_{1j})^2}{a^2}+\frac{(d_ju_{2j})^2}{b^2}+\frac{(d_ju_{3j})^2}{c^2}=1, \qquad (j=1,2,3)$$

azaz

$$\frac{1}{d_j^2}=\frac{u_{1j}^2}{a^2}+\frac{u_{2j}^2}{b^2}+\frac{u_{3j}^2}{c^2}. \qquad (j=1,2,3)$$

Ezeket összegezve j értékeire,

$$\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\frac{1}{d_3^2}=\frac{u_{11}^2+u_{12}^2+u_{13}^2}{a^2}+\frac{u_{21}^2+u_{22}^2+u_{23}^2}{b^2}+\frac{u_{31}^2+u_{32}^2+u_{33}^2}{c^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Megjegyzés. A megoldás szó szerint ugyanez akárhány dimenzióban.

8 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Baharev Ali, Dezső Balázs, Gyenes Zoltán, Harangi Viktor, Reviczky Ádám János és Zábrádi Gergely. További két versenyző 3, illetve 2 pontot kapott.

A. 217. *Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív egészek legnagyobb közös osztója 1, és közülük bármelyik kettőnek ugyanaz a legkisebb közös többszöröse. Bizonyítsuk be, hogy létezik egy olyan p egész szám, hogy tetszőleges u egész szám esetén u és $p-u$ közül pontosan az egyik írható fel $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$ alakban, alkalmas $x_1, \ldots, x_n$ nemnegatív egészekkel.*

Megoldás. Legyen M az a szám, amely előáll bármelyik két a_i legkisebb közös többszöröseként, és legyen $b_i=\dfrac{M}{a_i}$. A $b_1, \ldots, b_n$ számok páronként relatív prímek, mert $i\neq j$ esetén

$$(b_i,b_j)=\left(\frac{M}{a_i},\frac{M}{a_j}\right)=\frac{M}{[a_i,a_j]}=\frac{M}{M}=1.$$

Az M mindegyik b_i-nek többszöröse, ezért többszöröse a szorzatuknak is. Tehát $M=cb_1b_2\ldots b_n$ egy alkalmas c pozitív egésszel, és $a_i=\dfrac{M}{b_i}=cb_1\ldots b_{i-1}b_{i+1}\ldots b_n$. Az $a_1, \ldots, a_n$ számok legnagyobb közös osztója

$$(a_1,\ldots,a_n)=\left(\frac{M}{b_1},\ldots,\frac{M}{b_n}\right)=\frac{M}{[b_1,\ldots,b_n]}=\frac{M}{b_1\ldots b_n}=c,$$

ezért $c=1$.

Tehát az $a_1, \ldots, a_n$ számokra vonatkozó feltételek azzal ekvivalensek, hogy megfelelő, páronként relatív prím $b_1, \ldots, b_n$ pozitív egészekkel $a_i=b_1\ldots b_{i-1}b_{i+1}\ldots b_n$.

Legyen u tetszőleges egész szám, és tegyük fel, hogy felírható a kívánt alakban:

$$a_1x_1+\ldots+a_nx_n=u.$$

Vizsgáljuk ezt az egyenletet modulo b_i. A bal oldalon a_i kivételével az összes együttható osztható b_i-vel, ezért

$$a_ix_i=(b_1\ldots b_{i-1}b_{i+1}\ldots b_n)x_i\equiv u \pmod{b_i}.$$

Legyen $\xi_i(u)$ a legkisebb olyan nemnegatív egész, amelyre

$$(b_1\dots b_{i-1}b_{i+1}\dots b_n)\xi_i(u)\equiv u \pmod{b_i}.$$

Az előbbiek alapján, figyelembe véve, hogy b_i relatív prím $(b_1\dots b_{i-1}b_{i+1}\dots b_n)$-nel,

$$x_i\equiv\xi_i(u) \pmod{b_i},$$

másrészt, $\xi_i(u)$ minimalitása miatt $x_i\ge\xi_i(u)$. Bevezetve az $y_i=\dfrac{x_i-\xi_i(u)}{b_i}$ jelölést,

$$\frac{u-a_1\xi_1(u)-\ldots-a_n\xi_n(u)}{b_1\dots b_n}=y_1+\ldots+y_n$$

egy nemnegatív egész szám.

Vezessük be a

(2) $$h(u)=\frac{u-a_1\xi_1(u)-\ldots-a_n\xi_n(u)}{b_1b_2\dots b_n}$$

függvényt. Eddig azt láttuk, hogy ha u előállítható, akkor $h(u)$ egy nemnegatív egész szám. Az is biztos, hogy $h(u)$ mindig egész, mert (2) számlálójában tetszőleges i-re $u-a_i\xi_i(u)$ osztható b_i-vel, a maradék tagokban pedig az a_j együttható osztható vele. Ha a $h(u)$ egész szám nemnegatív, akkor u egy megfelelő előállítását kapjuk az $x_1=\xi_1(u)+h(u)b_1$, $x_2=\xi_2(u)$, $\ldots$, $x_n=\xi_n(u)$ számokkal.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy u akkor és csak akkor állítható elő, ha $h(u)\ge0$.

Bebizonyítjuk, hogy a feladat állításának megfelelő szám

(1) $$p=(n-1)b_1b_2\dots b_n-a_1-\ldots-a_n.$$

Vizsgáljuk az u és $p-u$ számokat. Tetszőleges i-re

$$a_i\xi_i(u)+a_i\xi_i(p-u)\equiv p\equiv -a_i \pmod{b_i},$$

amiből – mivel a_i és b_i relatív prímek –

(3) $$\xi_i(u)+\xi_i(p-u)\equiv -1 \pmod{b_i}.$$

Mivel ξ_i értéke mindig 0 és b_i-1 közé esik, (3) csak úgy teljesülhet, ha $\xi_i(u)+\xi_i(p-u)=$ $=b_i-1$. Ezt beírva $h(u)$-ba és $h(p-u)$-ba,

$$h(u)+h(p-u)=\frac{u-a_1\xi_1(u)-\ldots-a_n\xi_n(u)+(p-u)-a_1\xi_1(p-u)-\ldots-a_n\xi_n(p-u)}{b_1b_2\dots b_n}=$$
$$=\frac{p-a_1\left(\xi_1(u)+\xi_1(p-u)\right)-\ldots-a_n\left(\xi_n(u)+\xi_n(p-u)\right)}{b_1b_2\dots b_n}=$$
$$=\frac{((n-1)b_1b_2\dots b_n-a_1-\ldots-a_n)-a_1(b_1-1)-\ldots-a_n(b_n-1)}{b_1b_2\dots b_n}=-1.$$

Ebből következik, hogy a $h(u)$ és $h(p-u)$ egész számok közül pontosan az egyik nemnegatív, azaz u és $p-u$ közül pontosan az egyik állítható elő.

9 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Gyenes Zoltán, Harangi Viktor, Kiss Zoltán, Pálvölgyi Dömötör, Varjú Péter és Zábrádi Gergely. 4 pontot kapott Ambrus Gergely és Kunszenti-Kovács Dávid. 1 dolgozat hibás volt (0 pont).

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (570–574.)

C. 570. Határozzuk meg azokat a háromjegyű prímszámokat, amelyekben a számjegyek szorzata 189.

C. 571. Egy kertben álló négyzet alapú kutyaház oldala 1,2 m hosszú. Az egyik sarkától 30 cm-re, a bejáratával azonos oldalon a kutyaház külső falához kötötték ki a kutyát egy 3 méteres lánccal. Mekkora területen mozoghat a kutya?

C. 572. A 6 cm sugarú körbe írt szabályos hatszög és beírt négyzet egy-egy oldala párhuzamos. Számítsuk ki a kör azon részének területét, amely a hatszög és a négyzet párhuzamos oldala között van és nem tartalmazza a kör középpontját.

C. 573. Határozzuk meg mindazokat az n pozitív egész számokat, amelyekre

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=1+2+\ldots+(2n-1)+2n.$$

C. 574. Milyen összefüggésnek kell fennállnia egy téglatest élei között ahhoz, hogy kettévágható legyen két egybevágó, az eredetihez hasonló téglatestre?

Beküldési határidő: 2000. március 16.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest, Pf. 47. 1255

A B pontversenyben kitűzött feladatok (3342–3351.)

B. 3342. Határozzuk meg azokat a pozitív egész számokat, amelyekre $n^2-19n-99$ négyzetszám.

(*3 pont*) *Amerikai feladat*

B. 3343. Az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja F. Az AFC háromszög súlypontja S_1, a BFC háromszög súlypontja S_2. Az AS_1 egyenes a BC oldalt a P_1 pontban, a BS_2 egyenes az AC oldalt a P_2 pontban metszi. Igazoljuk, hogy az $S_1S_2P_1P_2$ négyszög paralelogramma.

(*3 pont*)

B. 3344. Tekintsük azokat a természetes számokat, amelyek osztóinak számát megkapjuk úgy, hogy a prímtényezős felbontásukban szereplő prímszámok szorzatából kivonjuk a hatványkitevők szorzatát. Ilyen például a 25 és a 600 is. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok ilyen szám van.

(*4 pont*)

B. 3345. Egy egyfordulós, körmérkőzéses focibajnokságon 9 csapat indult. Az Alsórákosi STC csapata 5 győzelmet aratott és 3 vereséget szenvedett. Lehetséges-e, hogy ezek után a csapat csak 7. lett? (A győzelemért 3, a döntetlenért 1-1 pont jár, azonos pontszám esetén a sorrendet a gólkülönbség dönti el.)

(*4 pont*)

B. 3346. Száz darab súlyt, melyek egyenként rendre 1, 2, ..., 100 gramm tömegűek, úgy helyeztünk el egy kétkarú mérleg két serpenyőjébe, hogy a mérleg egyensúlyban van. Bizonyítsuk be, hogy a serpenyőkből elvehetünk két-két súlyt úgy, hogy a mérleg továbbra is egyensúlyban maradjon.

(*5 pont*) *Tournament of Towns, 1999.*

B. 3347. Tekintsünk egy négyszöget (a) a csúcsaiból álló pontnégyesnek; (b) homogén lemeznek. Milyen négyszögek esetén esik egybe a kétféle alakzat súlypontja?

(*4 pont*) Javasolta: *Bogdán Zoltán,* Cegléd

B. 3348. Határozzuk meg az $\frac{a+1}{b}=c\cdot\frac{a}{b+1}$ egyenlet egész megoldásait.

(*4 pont*) Javasolta: *Fried Ervin,* Budapest

B. 3349. Mutassuk meg, hogy a $p^p=q^q$ egyenletnek végtelen sok olyan pozitív racionális megoldása létezik, ahol $p\neq q$.

(*5 pont*) Javasolta: *Lóczi Lajos,* Budapest

B. 3350. Adott egy téglatest és a belsejében egy P pont. Tükrözzük P-t a téglatest minden lapjára. A hat tükörkép által meghatározott konvex test térfogata a P pont mely helyzetében lesz a legnagyobb?

(*3 pont*)

B. 3351. Adott a térben legalább négy körvonal úgy, hogy középpontjaik közül semelyik 4 nincs egy síkban. Igaz-e, hogy ha bármely két körvonalhoz létezik őket tartalmazó gömbfelület, akkor létezik olyan gömbfelület is, amelyik mindegyik körvonalat tartalmazza?

(*5 pont*)

Beküldési határidő: 2000. március 16.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (230–232.)

A. 230. Határozzuk meg azokat az a egész számokat, amelyekre

$$\frac{a^{2000}-1}{a-1}$$

négyzetszám.

A. 231. Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább 3, akkor tartalmaz olyan kört, amelynek éleit elhagyva a gráf összefüggő marad.

Javasolta: *Kiss Tamás,* Budapest

A. 232. Mutassunk példát olyan konvex poliéderre, amelynek legalább 2000 csúcsa van, nincs $\frac{1}{2}$-nél rövidebb éle, ugyanakkor belefér egy egységnyi sugarú gömbbe.

Beküldési határidő: 2000. március 16.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 50. No. 1. February 2000)

New exercises for practice – competition C (see page 102): **C. 570.** Find those 3-digit prime numbers whose digits multiply up to 189. **C. 571.** The side of a square based doghouse is 1.2 m long. A dog on a 3 m long leash is tied to the doghouse such a way that the end of the leash is fixed to the entrance side of the house, in a 0.3 m distance from its corner. Calculate the area of the region the dog can reach. **C. 572.** A square and a regular hexagon are inscribed in a circle whose radius is 6 cm such that one side of the hexagon is parallel to a side of the square. Calculate the area of a segment of the disc which lies between two such parallel sides and does not contain the centre of the circle. **C. 573.** Find those positive integers n for which $1^2+2^2+\ldots+n^2=1+2+ +\ldots+(2n-1)+2n$. **C. 574.** What relations must the edges of a rectangular box satisfy if it can be cut into two congruent rectangular boxes, each similar to the original one.

New problems – competition B (see page 102): **B. 3342.** Find those positive integers n for which $n^2-19n-99$ is a perfect square. (*3 points*) (*American problem*) **B. 3343.** In a triangle ABC, the midpoint of side AB is denoted by F. Points S_1 and S_2 are the centroids of triangles AFC and BFC. Lines AS_1 and BS_2 intersect sides BC and AC, respectively, at points P_1

and P_2. Prove that the quadrilateral $S_1S_2P_1P_2$ is a parallelogram. (*3 points*) **B. 3344.** There are certain positive integers the number of whose divisors can be obtained by subtracting the product of the indices of their prime divisors from the product of the prime divisors. Such integers are, for example, 25 and 600. Prove that there are infinitely many such integers. (*4 points*) **B. 3345.** 9 teams were participating in a (one-round) soccer tournament. The Devonshire Bulls won 5 games and lost the other 3 games. Is it possible that they finished at the 7th place? (At such a tournament, the winner of a game scores 3 points, while in case of a draw game both teams score 1 point. If two teams have the same total number of points in the end, they are ranked according to the difference of the goals, scored and got by the respective teams.) (*4 points*) **B. 3346.** 100 weights, measuring 1,2, . . .,100 grams, respectively, are placed in the two pans of a scale such that the scale is balanced. Prove that two weights can be removed from each pan such that the equilibrium is not broken. (*5 points*) (*Tournament of Towns, 1999.*) **B. 3347.** Consider a quadrilateral as a) the quadruple of its four vertices; b) a homogeneous lamina. In both cases one can determine the centroid of the quadrilateral. Find those quadrilaterals, for which the two centroids coincide. (Proposed by *Z. Bogdán,* Cegléd) Find all integer solutions of the equation $\frac{a+1}{b}=c\cdot\frac{a}{b+1}$. (*4 points*) (Proposed by *E. Fried,* Budapest) **B. 3349.** Prove that the equation $p^p=q^q$ admits an infinite number of positive rational solutions with $p\neq q$.(*5 points*) (Proposed by *L. Lóczi,* Budapest) **B. 3350.** A point P is given inside a rectangular box. Reflect P in each face of the box. Describe that position of P for which the convex polyhedron determined by the six mirror images has maximum volume. (*3 points*) **B. 3351.** At least four circles are given in the 3-space such that no 4 of their centres lie in the same plane. Moreover, any two circles lie on a common sphere. Is it necessarily true that all circles lie on the same sphere? (*5 points*)

New advanced problems – competition A (see page 104): **A. 230.** Find all integers a for which $\frac{a^{2000}-1}{a-1}$ is a perfect square. **A. 231.** In a connected simple graph every vertex has a degree at least 3. Prove that the graph contains a cycle such that the graph remains connected when the edges of this cycle are deleted. (Proposed by *T. Kiss,* Budapest) **A. 232.** Construct a convex polyhedron with at least 2000 vertices whose edges are not shorter than $1/2$, but it can be placed in a sphere of unit radius.

THE PROBLEMS OF THE 1999 KÜRSCHÁK COMPETITION

1. Consider the number of positive even divisors for each of the integers 1, 2, . . . , n and form the sum of these numbers. Prepare a similar sum, this time using the odd divisors of the given numbers. Prove that the two sums differ by at most n.

2. Given a triangle in the plane, construct the point P inside the triangle which has the following property: dropping perpendiculars to the lines of the sides of the triangle, the feet of the perpendiculars determine a triangle whose centroid is P.

3. For any natural number k, let there be given more than 2^k different integers. Prove that $k+2$ of these numbers can be selected such that equality

$$x_1+x_2+\ldots+x_m=y_1+y_2+\ldots+y_m$$

holds for some positive integer m and selected numbers $x_1<x_2<\ldots<x_m$, $y_1<y_2<\ldots<y_m$ only if $x_i=y_i$ for each $1\leq i\leq m$.