Téli Ifjúsági Ankét ’99

1999 egyik utolsó országos szintű középiskolai rendezvénye volt a december 22–23-án megrendezett matematikai és fizikai Téli Ifjúsági Ankét. Bár az iskolák többségében a szünet előtti utolsó tanítási napokban igen sokan megbetegedtek és a karácsony is közel volt, mégis az ankétra vidékről előzetesen jelentkezők szinte mind eljöttek. Rajtuk kívül a meghívott tanárokkal, érdeklődő kollégákkal és a budapesti diákokkal megtelt az ELTE TTK Lágymányoson lévő épületének konferenciaterme, ahol az első nap előadásait és a tavalyi tanév díjkiosztó ünnepségeit tartottuk. A két nap során a résztvevők száma 250–300 körül mozgott, az előadásokat több, mint száz, többségében középiskolai tanuló hallgatta végig.

Antók Péter, az ELTE Radnóti Miklós Gyakorlóiskolájának 12. osztályos tanulója a következő beszámolót írta az Ankétról:

„Az első napon három egymástól nagyon különböző előadásnak lehettünk tanúi. *Császár Ákos* üdvözlő szavai után Kombinatorika a topológiában címmel tartott előadásában csupán egy tábla és egy kréta segítségével képes volt elvezetni a hallgatóságot a síkidomok egybevágóságától egészen az absztrakt topológia tételeiig. *Kertész János* már egy írásvetítőt vett igénybe ahhoz, hogy elmondja, mire használhatók a fizikában a véletlen számokkal dolgozó számítógépes programok. Megtudhattuk, hogyan határozhatjuk meg π értékét oly módon, hogy a tengerparton kavicsokat dobálunk egy négyzetbe rajzolt körre. De arról is szó volt, hogyan generálhatunk számítógépes algoritmussal (látszólag) véletlenszerű számokat, és hogy például a nukleáris robbantások betiltása esetén mennyiben helyettesíthető számítógépes modellel egy valódi kísérlet. A harmadik előadáson tulajdonképpen két grafikus számológép sokoldalú bemutatóját láttuk. Egy speciális kivetítő készüléknek és *Vásárhelyi Évának,* illetve *Molnár Balázsnak* köszönhetően figyelemmel kísérhettük két pont különböző függvények szerinti mozgását az időben, láthattunk mókust, amint egy óriáskeréken ülve elkap egy mogyorószemet, és láthattunk számológéppel végzett egészen pontos geometriai szerkesztéseket is.

Másnap külön teremben zajlottak a matematika és a fizika témájú előadások. *Moussong Gábortól* megtudhattuk, hogy a háromszögeknek több, mint 400 nevezetes pontját tartják nyilván az általunk is ismert súlyponton, magasságponton, és a háromszög köré, illetve beleírható kör középpontján kívül. Ezek a nevezetes pontok pedig mindenféle egyenesekre, körökre és más görbékre illeszkednek, amelyekre érdekesebbnél érdekesebb, gyakran középiskolás szinten is bizonyítható állítások teljesülnek. Már káprázott a szemünk a sok háromszögtől, ponttól és egyenestől, amikor *Pelikán József* kezdett beszélni a négydimenziós számtérben ábrázolható kvaterniókról, és arról, hogyan bizonyítható be a segítségükkel az az egyszerűen hangzó állítás, mely szerint bármely természetes szám felbontható négy négyzetszám összegére. Ezután *Hraskó András* pompás számítógépes prezentációt tartott „A kör bezárul” címmel, amelyből kiderült, hogy sárkányok ugyan nincsenek, de egy hibás adatokból kiinduló szerkesztés akár új tételek felfedezéséhez is vezethet. A matematikus-előadók sorát *Csirmaz László* zárta, aki a XX. század matematikájának legnagyobb kérdéseiről beszélt. Arról, hogy a matematika vajon le tudja-e írni saját magát, és vajon biztosak lehetünk-e abban, hogy nincs ellentmondás a tudomány legalapvetőbb állításai között.”

Ezalatt a fizika előadóban *Skrapits Lajos* látványos és tanulságos kísérleteket mutatott be. Olyan videófelvételeket, illetve „élő” kísérleteket láthattunk, amelyek – sajnos – a legtöbb középiskola fizikaóráján csak elvétve fordulnak elő. *Tél Tamás* számítógépes szimulációkkal illusztrált látványos előadásában az egymáson átbújó örvények folyadékkeverő hatásáról, a rend és a rendezetlen tartományok furcsa, egymásba ágyazódó struktúrájáról beszélt. A folyadékáramlásokban sodródó mintázatokról hallottak nagyon jó folytatását és kiegészítését adták az előző esti előadásnak, amelyben *Jánosi Imre* mutatta be az ELTE egyik új és nagyon érdekes laboratóriumában, a Kármán-laborban folyó munkát. Láthattunk ciklonokat, szökőárt, időjárási frontokat, felhőképződést és még sok más természeti jelenséget modellkísérletben, fénykép- és videófelvételeken.

Az ebéd után a programot *Varga István* kísérletei nyitották meg. Olyan fizikai jelenségeket mutatott be, amelyek korábbi elméleti versenyfeladatokhoz kapcsolódtak. A kísérletben segítségére volt *Emese György* a TI mozgásérzékelőjével, mellyel a mérési adatok közvetlen számítógépes feldolgozása is megoldható. Az utolsó előadásban *Gnädig Péter* megtanított arra, hogy a fizikában úgy kell számolni, hogy az eredmény ne csak számszerűen, de dimenzióra is jó legyen, tehát a test tömege ne másodpercben, a hossza pedig ne grammban adódjék! Kiderült, hogy a Pitagorasz-tétel abból a nyilvánvaló tényből is belátható, hogy a hosszúság mértékegysége a méter, a területé pedig a négyzetméter, és hogy dimenzióanalízissel akár egy diákolimpiai példával, akár az általános relativitáselmélettel kapcsolatos kérdésekre is válaszolhatunk.

Az Ankétot hagyományos módon egy TOTÓ tette színesebbé, amelynek kitöltésére egy nap állt rendelkezésre. A kérdések nem voltak ugyan könnyűek, de némi gondolkodással, ráérzéssel (szerencsével?) azért többen eljutottak a telitalálat közelébe. Egyetlen telitalálatos szelvény volt, ezt *Pozsár Balázs* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn. 12. o.) adta be. Hatan értek el 13 találatot: Ambrus Gergely (Szeged, Radnóti M. Gimn. 11. o.), Béky Bence (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn. 10. o.), Gáspár Merse Előd (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn. 12. o.), Kiss Gergely (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn. 12. o.), Varjú Péter (Szeged, Radnóti M. Gimn. 11. o.) és Vígh Viktor (Szeged, Radnóti M. Gimn. 11. o.). Mindannyian könyvjutalmat kaptak.

A december 22-i nyitónap délutánján adták át az Ericsson díjait *Mattias Gustafsson* és *Dibúz Sarolta* igazgatók annak a 16 tanárnak, akiknek nevét és munkásságát *Benczúr András*, az ELTE TTK dékánja ismertette. A részletes jelentést januári számunkban olvashatják. Ezután az Oktatási Minisztérium képviseletében *Balogh Lászlóné dr.* nyújtotta át több, mint ötven tanár részére az Eötvös Loránd Fizikai Társulat és a Bolyai János Matematikai Társulat emléklapját és ajándékkönyvét a KöMaL-ban sikeres versenyzőik felkészítéséért.

A szünetben a díjazottak és meghívottak egy pohár pezsgővel koccintottak, ahol *Fodor István,* az Ericsson vezérigazgatója mondott rövid beszédet. A díj ötletét egyébként az Ericsson Kutatás-Fejlesztési Igazgatóságának, *Boda Miklós* igazgatónak, megvalósítását *Klug Annamáriának* köszönhettük.

A KöMaL versenyeinek elmúlt tanévi öt nyertese vette át a délelőtti előadásban megismert *Nicholas Metropolis* alapítványának díjait (részletesen a januári szám hátsó borítóján olvasható). A lap szeptemberi számában megjelent eredményeknek megfelelően az első-harmadik helyezettek közül kilencen tárgyjutalmakat; CD-ROM-ot, logikai játékot, szakkönyveket vagy TI 83 grafikus kalkulátort nyertek. 60 tanuló 4000 és 20000 Ft közötti pénzjutalmat, 52 helyezett 2400 Ft értékű könyvutalványt kapott, 24-en pedig választhattak egy-egy szakkönyvet.

A fizika mérési verseny nyertesének járó vándorserleget Tamás Levente fél évre hazavihette a marosvásárhelyi Bolyai Farkas Líceumba, s további fél évig fogja őrizni a vele holtversenyben első Hegedűs Ákos Pécsett, a Ciszterci Nagy Lajos Gimnáziumban. E két iskola kapta meg a Texas Instruments két tanári TI 83 kalkulátor készletét (a marosvásárhelyiek kivetítő panellel és PC-kábellel), amelyeket, csakúgy, mint három diák részére a grafikus kalkulátorokat, *Gyöngyösi András* nyújtott át az **Euro-Profil Rt** ajándékaként.

A díjkiosztó ünnepség után késő estébe nyúlóan folytatódtak a Téli Ifjúsági Ankét eseményei: az előtérben a Typotex kiadó pultjánál sokan azonnal beváltották a könyvutalványukat, volt, aki a kapott CD-t nézte meg a számítógépen, volt, aki a Texas Instruments kalkulátorait, eszközeit próbálta ki. Miután a szendvicsek elfogytak, *Kovács Zoltán* kikészítette az asztalokra érdekes logikai játékait, amelyek sokak érdeklődését felkeltették. *Jánosi Imre* videóvetítése után *Lénárt István* szerzett újabb híveket a gömbi geometriának praktikus „üveggömb”-készletével. Sajnos az esti programokra nem sok idő maradt, jövőre szeretnénk, ha a résztvevők többet foglalkozhatnának a „kézbe vehető matematikával”.

Az idei Téli Ifjúsági Ankét díjait a MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány kuratóriuma osztotta ki annak köszönhetően, hogy erre a célra adományokat kapott az **Ericsson Magyarország Kft**-től, a **Metropolis alapítványtól,** az **Ipar Műszaki Fejlesztéséért Alapítványtól,** a **Fővárosi Közgyűlés Kultúrális Bizottságától** és a **Budapest Bank az oktatásért és a magyar pénzügyi kultúráért alapítványtól.** Az Ericsson és a Metropolis díjakhoz kapcsolódóan a MATFUND jutalom előfizetéseket tud biztosítani a 2000/2001-es tanévre a KöMaL 1999/10. számában közzétett, a versenyben legjobban szereplő határon túli iskolák illetve az Ericsson-díjasok iskolái részére.

A matematika díjakat a Bolyai Társulat képviseletében *Császár Ákos* tiszteletbeli elnök és *Hermann Péter,* a KöMaL matematika szerkesztőbizottságának vezetője, a fizika díjakat *Radnai Gyula,* az Eötvös Társulat alelnöke, a KöMaL fizika szerkesztőbizottságának vezetője adta át. A **Természet Világa** szerkesztőségének felajánlását, 10 folyóirat-előfizetést idén is a legeredményesebb iskola, a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium nyerte.

A könyvutalványokat és tanári ajándékkönyveket az **Oktatási Minisztériumnak** a versenyre adott támogatásából biztosítottuk.

Mindegyik felsorolt intézménynek, cégnek, az előadóknak és a szervezőknek nagyon köszönjük, hogy segítették a KöMaL verseny és a Téli Ankét megrendezését, ahol méltó jutalomban részesülhettek azok, akik az elmúlt tanévben a legjobban dolgoztak.

A Szerkesztők

MATEMATIKA és FIZIKA TOTÓ

az 1999. évi Téli Ankéton*

1. Mekkora az 1, 2, …, 2000 számok számjegyeinek összege? 27 502 (1); 28 002 (2); 28 502 (X).
2. Micimackó egy jeges, vízszintes pályán 5 m/s sebességgel száguldó szánkón ül, kezében egy mézzel teli, zárt csupor. A csuporban egy parányi légbuborék 2 mm/s sebességgel emelkedik felfele. A buborék éppen a csupor közepénél van, amikor a szánkó latyakos hóval borított kis dombhoz ér, majd a domb tetején megáll. Hol fogja a buborék elérni a csupor tetejét, ha az színültig tele van mézzel, és Micimackó mindvégig függőlegesen tartja az edényt? Az edény

* A megoldást jövő havi számunkban közöljük. A feladatokat Bodor András, Gnädig Péter, Pataki János és Varga István javaslataiból állítottuk össze.

szimmetriatengelyénél (1); a tengelytől 1 milliméternyire (2); csak a domb magasságának és a fékezés körülményeinek ismeretében adható meg a válasz (X).

3. Nemrég vezették be Magyarországon a skandináv lottót. 35 számból húznak ki hetet, és minden szelvény két húzáson vesz részt. Hol a legkisebb az esélye annak, hogy legalább 2 találatot érj el? A skandináv lottón (1); a 6-os lottón (2); az 5-ös lottón (X).

4. Megváltozna-e a nap hossza, ha Angliában 2000. január 1-én áttérnének a jobboldali közlekedésre? Igen, méghozzá nőne (1); igen, de csökkenne (2); nem változna (X).

5. Egy ABC háromszög AB alapjához illesztett rudat elforgatunk a B csúcs körül úgy, hogy a BC oldalra, ezután a C csúcs körül úgy, hogy az AC oldalra, végül az A csúcs körül úgy, hogy ismét a BC oldalra illeszkedjék. A forgatás minden esetben negatív irányban történik. A rúd véghelyzetében lesz egyetlen olyan pont, amelyik az eredeti helyzetébe kerül vissza. Melyik ez? A C-ből induló magasság talppontja (1); az AB oldal felezőpontja (2); egyik sem a fentiek közül (X).

6. Egy lejtős szállítószalag alját jól csapágyazott görgősor alkotja. A görgősoron „lecsúszó” láda mozgását tanulmányozva megállapíthatjuk, hogy a görgők hatását a láda sebességének n-edik hatványával arányos fékezőerővel vehetjük figyelembe. Mekkora az n kitevő? 1 (1); 2 (2); 0 (X).

7. Mennyi az $m\cdot n(m^4-n^4)$ alakú számok legnagyobb közös osztója, ha $1\le n<m<1999$? 6 (1); 30 (2); 60 (X).

8. Két kicsiny rúdmágnest helyezünk el egymástól 1 méter távolságra. Az egyik mágnes tengelye párhuzamos, a másiké merőleges a mágneseket összekötő egyenesre. Milyen forgatónyomatékot fejtenek ki egymásra? A két forgatónyomaték azonos nagyságú, de ellentétes irányú (1); azonos irányú, de különböző nagyságú (2); azonos nagyságú és azonos irányú (X).

9. Egy oroszországi matrjoskagyár fejlesztőrészlegében egy 1 m^2 alapterületű dézsában víz van, amelynek felszínén úszik egy nagy, hengeres üvegpohár. A pohárban valamennyi víz van, amelyen úszik egy kisebb pohár. Abban is víz van, amelyen úszik egy még kisebb pohár, ... Összesen n poharunk van. A legkisebb, 3 cm^2 alapterületű pohárba 3 cm^3 vizet öntünk. Vajon hány további adatot kellene még ismernünk, hogy meg tudjuk mondani, mennyit süllyed le a legkisebb pohár teteje a földhöz képest? $n-1$ adatot (1); $n(n-1)/2$ adatot (2); nincs szükség több adatra (X). (Mindegyik pohár henger alakú, a fenéklapjuk mindvégig vízszintes marad, és a víz egyik pohárból sem csordul ki.)

10. Egy állványon levő söröshordó tartalmát az alján levő lyukon keresztül egy nagy kádba ürítjük. A hordó, az állvány, a kád és a dugó egy nagyon érzékeny mérlegen nyugszik. Mit mutat a mérleg, amikor a kád kb. félig van telve? Kicsit kevesebbet (1); kicsit többet (2); éppen ugyanannyit (X), mint amennyit a dugó kihúzása előtt mutatott.

11. 20 000 ember közül általában egy szenved egy bizonyos ritka betegségben. Az orvosok olyan tesztet használnak, amelyik 95%-os biztonsággal működik, azaz 100 esetből átlagosan ötször mutat téves eredményt. Valakiről a teszt azt jelzi, hogy beteg. Mennyi az esélye, hogy tényleg az? Több, mint 50% (1); kb. 0,1% (2); kb. 1% (X).

12. A régiek úgy gondolták, hogy a Föld sík. Képzeljük el, hogy a Föld valóban nem R sugarú gömb, hanem egy henger, amelynek alapköre R sugarú, magassága pedig H. Mekkora H esetén tapasztalnánk, hogy a nehézségi gyorsulás a henger fedőlapjának közepénél ugyanakkora, mint a gömb alakú Föld felszínén? (A két Föld-modellben a sűrűségeket tekintsük állandónak és egymással egyenlőnek.) $H=3R$ (1); $\frac{2}{3}R$ (2); $\frac{4}{3}R$ (X).

13. Hány megoldása van a nemnegatív egészek körében az $\left[\frac{x}{2000}\right]=\left[\frac{x}{1999}\right]$ egyenletnek? 3 999 000 (1); 1 999 000 (2); 2 000 000 (X).

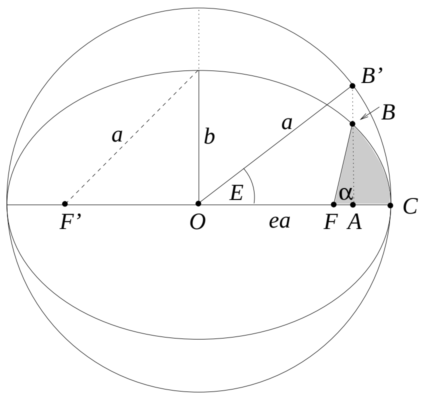
13 + 1. Van-e olyan tetraéder, amelynek egészek az élei, egész szám a felszíne és egész a térfogata is? Van (1); nincs (2); megoldatlan a probléma (X).

CSILLAGÁSZAT

Rovatvezető: Horányi Gábor

Kepler egyenlete

A bolygók – Kepler I. törvénye szerint – olyan ellipszispályán mozognak, melynek egyik (F) fókuszpontjában a Nap található. A bolygó pillanatnyi helyzete pl. az *ábrán* látható α szöggel jellemezhető. A mozgás időbeli leírása, vagyis az α szöghöz tartozó CB ív befutásához szükséges idő megadása (a körpálya speciális esetét leszámítva) általában nem könnyű feladat.



Kepler – még a differenciálszámítás ismerete előtt – levezetett egy olyan összefüggést, melynek segítségével kiszámítható egy tetszőleges ellipszis-ív befutásához szükséges idő. Az egyenlet Kepler II. törvényén, a területi sebesség állandóságán alapszik.

Tekintsünk egy a és b féltengelyű ellipszist, és használjuk az

$$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}},\qquad \frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}$$

összefüggéseket. (e az ellipszis *„excentricitása”*, kör esetében $e=0$, parabolává fajuló „ellipszisre” pedig $e\to 1$.)

Nagyítsuk meg az ellipszist a kistengelye mentén a/b-szeresére, így egy a sugarú kört kapunk. Jelöljük a B helyen levő bolygónak megfelelő pontot a körön B'-vel, a COB' szöget pedig E-vel. (Ezt a szöget az égi mechanikában *excentrikus anomáliának* nevezik.)

Kepler II. törvénye szerint a BC ív befutásához szükséges t idő úgy aránylik a T keringési időhöz, mint a vezérsugár által súrolt A_{FCB} terület (az ábrán satírozott rész területe) az ellipszis teljes területéhez. Ugyanez az arány a nagyítás után adódó körön is leolvasható:

$$\frac{t}{T}=\frac{A_{FCB'}}{a^2\pi}.$$

Másrészt viszont az $A_{FCB'}$ terület az OCB' körcikk $a^2E/2$ területének és az OFB' háromszög területének különbsége. Mivel az ellipszis középpontjának és a fókuszpontjának távolsága

$$OF=\sqrt{a^2-b^2}=a\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=a\cdot e,$$

az OFB' háromszög B' csúcsponthoz tartozó magassága pedig $a\cdot\sin E$, felírhatjuk, hogy

$$\frac{t}{T}=\frac{\frac{1}{2}a^2E-\frac{1}{2}ae\cdot a\sin E}{a^2\pi},\qquad \text{ahonnan}\qquad t=T\,\frac{E-e\sin E}{2\pi}.$$

Ez Kepler egyenlete.

Az egyenlet gyakorlati alkalmazhatóságához meg kell határoznunk még a bolygó helyzetét jellemző α szög és az E szög közötti kapcsolatot. Elemi trigonometriai átalakítások segítségével belátható, hogy a kérdéses összefüggés a következő:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}.$$

Tekintsük ugyanis az FAB háromszöget:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BA}{FA}=\frac{\sqrt{1-e^2}\cdot B'A}{FA}=\frac{a\sin E\sqrt{1-e^2}}{a\cos E-ea}=\frac{\operatorname{tg}E\sqrt{1-e^2}}{1-e\sqrt{1+\operatorname{tg}^2E}}.$$

Fennáll továbbá, hogy

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\qquad \text{és}\qquad \operatorname{tg}E=\frac{2\operatorname{tg}\frac{E}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{E}{2}},$$

amelyeket a fentebbi összefüggésbe helyettesítve némi átalakítás után

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}}{1-\frac{1+e}{1-e}\operatorname{tg}^2\frac{E}{2}}$$

adódik. Jelöljük $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$-t n-nel, $\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$-t pedig m-mel, akkor a fenti összefüggés így néz ki:

$$\frac{n}{1-n^2}=\frac{m}{1-m^2},\qquad \text{ahonnan}\qquad (n-m)(1+nm)=0.$$

Ez utóbbi viszont csak $n=m$, vagyis

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}$$

fennállása esetén teljesülhet, hiszen nm sosem negatív.

A fenti összefüggés segítségével adott α esetén könnyen kiszámíthatjuk az excentrikus anomáliát (E-t), abból pedig a t időt, így a $t(\alpha)$ függvényt, a bolygó mozgását megadó $\alpha(t)$ függvény inverzét.

Horányi Gábor

Fizika gyakorlatok és feladatok megoldása

FGy. 3163. *Egy inga a mögötte elhelyezett skála* 10. *és* 30. *osztása között leng. Az ingáról készített fényképen az inga elmosódott képe a skála* 18. *osztásától a* 25. *osztásig húzódik. Mekkora volt az expozíciós idő, ha az inga lengésideje* 1,73 *másodperc?*

Közli: *Tichy-Rács Ádám,* Budapest

Megoldás. Az inga mozgása harmonikus rezgőmozgásnak vehető, helyzete az idő függvényében (osztásokban mérve):

$$x = 10 \sin \frac{2\pi t}{T} + 20,$$

ahol T az inga lengésideje.

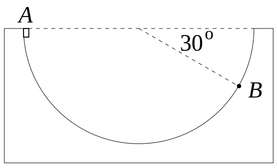
Az exponálási idő megegyezik azzal az idővel, amíg az inga a 18. osztástól eljut a 25. osztásig. (Esetleg visszafelé.) A kezdeti időpontra

$$18 = 10 \sin \frac{2\pi t_1}{T} + 20, \qquad \text{ahonnan} \qquad t_1 = -0{,}0554 \text{ s}.$$

(A nullához legközelebbi megoldást választottuk.) Hasonlóan $t_2 = 0{,}1442$ s, vagyis az expozíciós idő $t_{\text{exp}} = t_2 - t_1 = 0{,}1996 \text{ s} \approx 0{,}2$ s.

Nagy Marianna (Kecskemét, Bányai Júlia Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

62 dolgozat érkezett. Helyes 25, hiányos (1–2 pont) 4, hibás 13.

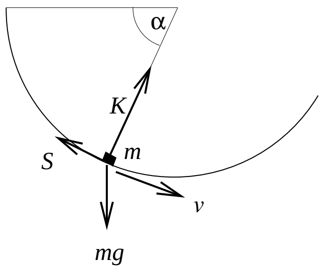


FF. 3219. *Egy vízszintes tengelyű, félhenger alakú, rögzített vályú felső pereménél (az ábrán az* A *pontban) kezdősebesség nélkül elengedünk egy kicsiny, lapos testet, amely leszánkázik a lejtőn.*

a) *Vajon elcsúszik-e a test a* B *pontig, ha a test és a vályú között a súrlódási együttható* $\mu_1 = 0{,}5$*?*

b) *Eljut-e a test a* B *pontig, ha a súrlódási együttható* $\mu_2 = 0{,}268$*?*

(5 pont) Közli: *Károlyházy Frigyes,* Budapest



Megoldás. A testre az *ábrán* látható mg gravitációs erő, a lejtőre merőleges K kényszererő, és az S súrlódási erő hat.

A test körpályán halad, így a kényszererőnek nem csupán a gravitációs erő lejtőre merőleges komponensét kell ellensúlyoznia, hanem a centripetális gyorsulást is biztosítania kell, vagyis

$$K = mg\cos(90^\circ - \alpha) + m\frac{v(\alpha)^2}{r}.$$

Így a súrlódási erő

$$S = \mu\left(mg\sin\alpha + m\frac{v^2(\alpha)}{r}\right).$$

Ha a test éppen eljutna a B pontba és ott megállna, akkor a helyzeti energia változása fedezné a súrlódási munkát, azaz

$$\Delta E_{\text{h}} = \frac{1}{2}mgr = \int_{0^\circ}^{150^\circ} \mu mr\left(g\sin\alpha + \frac{v(\alpha)^2}{r}\right)d\alpha.$$

Közelítsük az integrált alulról úgy, hogy a v^2/r tagot elhagyjuk. Ekkor

$$\frac{1}{2}mgr > \mu mgr\,[-\cos\alpha]_{0^\circ}^{150^\circ}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{1}{2} > \mu\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Innen $\mu < 0{,}2679$ kellene fennálljon, de ez egyik esetben sem teljesül, vagyis a test sem az a) sem a b) esetben nem jut el a B pontba.

Megjegyzés. Az a) esetben a fentinél egyszerűbben is beláthatjuk, hogy a test nem juthat el a B pontba, hiszen a helyzeti energiájának csökkenése ($mgr/2$) még a B ponttal azonos magasságú B' ponttól B-ig végzett súrlódási munkát sem fedezi. Ez utóbbi ugyanis biztosan nagyobb, mint a BB' ív $2r\pi/3$ hosszának és a súrlódási erő ezen pályán felvett legkisebb értékének (a B pontban éppen megálló testre ható $\mu mg/2$-nek) a szorzata. (A B pontnál mélyebben egy nagyon lassan mozgó testre sugár irányban nagyobb kényszererő hat, mint a B pontban, s a mozgás ezt csak még inkább növeli.)

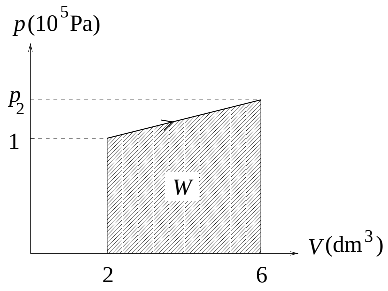
87 dolgozat érkezett. Helyes Ambrus Gergely, Bálint Gergely, Fábián Ákos, Hegedűs Ákos, Horváth Balázs, Horváth Gábor, Huszár Péter, Jung János, Kerekes József, Koch Dénes, Paukovics Diána és Terpai Tamás megoldása. kissé hiányos (4–5 pont) 5, hiányos (1–2) 66, hibás 4.

FGy. 3226. 2 dm^3 *térfogatú,* 10^5 Pa *nyomású nemesgáz úgy tágul ki* 6 dm^3 *térfogatúra, hogy a folyamatot a* (p,V) *diagramon egy egyenes szakasz ábrázolja. A tágulás végére a gáz belső energiájának növekedése kétszerese a gáz által végzett munkának.*

a) *Határozzuk meg a gáz nyomását a végállapotban!*

b) *Mennyi hőt vett fel a gáz a tágulás során?*

(4 pont) Közli: *Kotek László,* Pécs



Megoldás. A gáz belső energiájának megváltozása

$$\Delta E=\frac{3}{2}nR\,(T_2-T_1)=\frac{3}{2}\,(p_2V_2-p_1V_1)\,.$$

Felhasználtuk az ideális gáz állapotegyenletét, és azt, hogy a nemesgáz szabadsági fokainak száma 3. A gáz által végzett munka a folyamatot ábrázoló egyenes szakasz alatti terület nagyságával egyenlő,

$$W=\frac{p_1+p_2}{2}\,(V_2-V_1)\,.$$

A belső energia megváltozása ennek kétszerese, ezért

$$3\,(p_2V_2-p_1V_1)=2\,(p_1+p_2)\,(V_2-V_1),$$

amiből $p_2=1{,}4\cdot 10^5$ Pa. A tágulás során felvett hő: $Q=\Delta E+W=1440$ J.

Karácsonyi József Sándor (Szekszárd, Garay J. Gimn., 10. o.t.)

300 dolgozat érkezett. Helyes 190, kicsit hiányos (3 pont) 31, hiányos (1–2 pont) 50, hibás 29 dolgozat.

FF. 3229. *Egy α hajlásszögű, h magasságú lejtő tetejéről elengedett test miután lecsúszott a lejtőn, visszapattan egy a lejtőre merőleges falról. Mechanikai energiájából a csúszás és a visszapattanás közben is veszít. Mennyi út megtétele után és mennyi idő múlva áll meg véglegesen a test? A súrlódási együttható μ, az ütközési szám (a visszapattanási és a leérkezési sebesség hányadosa) k.*

Numerikus adatok: $\alpha=30°$, $h=1$ m, $\mu=\frac{1}{9}$, $k=\frac{3}{4}$.

(5 pont) Közli: *Ringler András,* Szeged

Megoldás. A test egyrészt veszít az energiájából a súrlódás miatt, másrészt az ütközéseknél. A kezdeti mechanikai energiája

$$E_0=mgh.$$

Addig, amíg lecsúszik a lejtő aljára, a súrlódási erő által végzett munka:

$$W_0=F_sl=\mu mg\cos\alpha\frac{h}{\sin\alpha}=\mu mgh\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

(A lejtőre merőleges támasztóerő $mg\cos\alpha$.) Közvetlenül a pattanás előtt a test mozgási energiája

$$E_1=E_0-W_0=mgh(1-\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha).$$

Mivel az ütközéskor a sebesség k-szorosára csökken ezért a mozgási energia k^2-szeresére. Visszapattanás után a test h_2 magasságba emelkedik, ekkor az energiája:

$$E_2=mgh_2=k^2E_1-\mu mgh\,\mathrm{ctg}\,\alpha,$$

innen

$$h_2 = \frac{hk^2(1-\mu\text{ctg }\alpha)}{1+\mu\text{ctg }\alpha}.$$

Ezután a folyamat megismétlődik, és a maximális magasságok egy mértani sort alkotnak, amelynek hányadosa

$$q = \frac{k^2(1-\mu\text{ctg }\alpha)}{1+\mu\text{ctg }\alpha}.$$

Így az összesen megtett út:

$$s_{\text{összes}} = \frac{h}{\sin\alpha}\left(1+2(q+q^2+q^3+\ldots)\right).$$

Mivel $q<1$, ezért a sor felösszegezhető:

$$s_{\text{összes}} = \frac{h}{\sin\alpha}\left(1+\frac{2q}{1-q}\right)\approx 4{,}46\text{ m}.$$

A test egyenletesen gyorsuló mozgást végez, de más a gyorsulása fölfelé, mint lefelé. Két pattanás között eltelt idő:

$$t_i = t_{\text{fel}}+t_{\text{le}} = \sqrt{\frac{h_i}{\sin\alpha}}\left(\sqrt{\frac{2}{g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}}+\sqrt{\frac{2}{g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}}\right) = C\sqrt{\frac{h_i}{\sin\alpha}}.$$

Látható, hogy ez a megtett út négyzetgyökével arányos, csupán az első lecsúszást kell külön figyelembe venni. A megállásig eltelt idő:

$$t_{\text{összes}} = t_1 + C\sqrt{\frac{h}{\sin\alpha}}\left(\sqrt{q}+\sqrt{q^2}+\ldots\right) = t_1 + C\sqrt{\frac{h}{\sin\alpha}}\left(\frac{\sqrt{q}}{1-\sqrt{q}}\right)\approx 3{,}94\text{ s}.$$

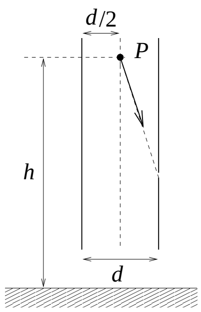
Több dolgozat alapján

109 dolgozat érkezett. Helyes 35, kissé hiányos (4 pont) 20, hiányos (1–3 pont) 46, hibás 8.

FF. 3241. *U feszültségre feltöltött függőleges síkkondenzátor belsejében az ábrán látható P pontból elengedünk egy Q töltésű, m tömegű részecskét. Azon a helyen, ahol a részecske eléri a jobb oldali lemezt, kis lyuk van, amin a részecske áthaladhat.*

Milyen pályán mozog a részecske? Mennyi idő múlva és hol éri el a talajt? (A közegellenállástól eltekinthetünk.)

(4 pont) Közli: *Tichy Ágnes,* Budapest



Megoldás. A kondenzátoron belül a térerősség mindenhol egyenlőnek tekinthető, így az általa a testre kifejtett erő viszintes irányú, nagysága $F = QU/d$. A test vízszintes irányú gyorsulása tehát $a_x = QU/(dm)$.

A gravitációs erő a kondenzátoron belül és kívül is mg, így a test függőleges irányú gyorsulása állandó g nagyságú.

A kondenzátor belsejében t idővel a test elengedése után annak helye $x = a_x t^2/2$ és $y = gt^2/2$, innen $y = (g/a_x) \cdot x$, vagyis a pálya egyenes. A kondenzátoron kívül csak függőleges gyorsulása van a testnek, így mint ferde hajításnál, parabolapályán mozog.

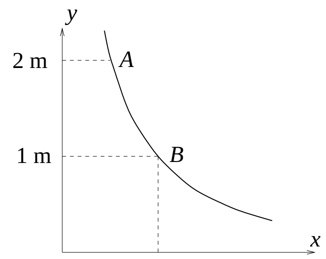
Mivel h magasságból esik lefelé és függőleges gyorsulása állandó, ezért az esés időtartama $t = \sqrt{2h/g}$. A kondenzátoron belül t_1 ideig van a test, ezalatt $v_x = a_x t_1 = \sqrt{a_x d}$ sebességre gyorsul. A kondenzátoron kívül $t_2 = t - t_1$ ideig zuhan tovább állandó viszintes irányú sebességgel, és $s = v_x(t - t_1)$ távolságra kerül a kondenzátortól. A fentieket behelyettesítve

$$s = \sqrt{\frac{2ha_x d}{g}} - d = \sqrt{\frac{2QUH}{gm}} - d.$$

Vagyis a test a kiindulási helyétől $\sqrt{\frac{2QUH}{gm}} - \frac{d}{2}$ távolságra ér földet.

Bankó Krisztián (Budapest, ELTE Apáczai Cs. J. Gyak. Gimn., 11. o.t.)
dolgozata alapján

56 dolgozat érkezett. Helyes 34, kissé hiányos (3 pont) 10, hiányos (1–2 pont) 10, hibás 2.



FF. 3261. *Az ábrán látható* $y = 1/x$ *egyenletű hiperbola-lejtő* A *pontjából kezdősebesség nélkül indul egy* 0,1 kg *tömegű, pontszerűnek tekinthető test. Mekkora a nyomóerő a* B *pontban, ha a súrlódás elhanyagolható?*

(5 pont) *Közli: Szvetnik Endre,* Budapest

I. megoldás. A helyzeti energia megváltozásából ki tudjuk számítani a test B pontbeli sebességét:

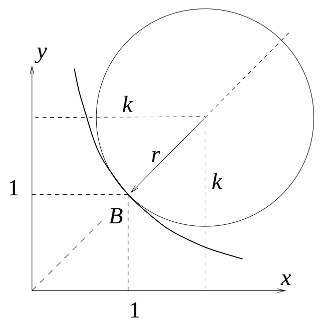
$$v = \sqrt{2g\Delta h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 1}\ \mathrm{m/s} = 4{,}4\ \mathrm{m/s}.$$

A nyomóerőt a lejtőre merőleges irányú mozgásegyenletből számíthatjuk ki:

$$K = mg \sin 45^\circ + \frac{mv^2}{R},$$

ehhez azonban ismernünk kellene a pályagörbe R görbületi sugarát (a pályagörbét a kérdéses B pontban legjobban közelítő kör sugarát).

Mivel az $y = 1/x$ egyenletű hiperbola szimmetrikus az $y = x$ egyenesre, ezért a simulókör középpontja rajta lesz ezen az egyenesen, koordinátáit tehát kereshetjük



1. ábra

(k, k) alakban. Az *1. ábráról* leolvasható, hogy a kör sugara $r = \sqrt{2}(k-1)$, az egyenlete tehát:

$$(x-k)^2 + (y-k)^2 = 2(k-1)^2.$$

Ezen egyenlet által leírt körnek és az $y = 1/x$ egyenletű hiperbolának a metszéspontjait az

$$(x-k)^2 + \left(\frac{1}{x} - k\right)^2 = 2(k-1)^2$$

egyenlet gyökei adják meg, amely algebrai átalakítások után így is felírható:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2k\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4(k-1) = 0.$$

Ez az egyenlet az $u = x + x^{-1}$ új változóra nézve másodfokú, és az $x = y = 1$ azaz $u = 2$ nyilvánvaló megoldáson kívül akkor nincs több megoldása, ha a $D = 4k^2 + 4(4k-1)$ diszkrimináns negatív vagy nulla: A simulókörnek éppen a $D = 0$ határeset felel meg, ez pedig $k = 2$-nél teljesül.

A simulókör sugara tehát $R = \sqrt{2}$ m, a kérdéses nyomóerő pedig

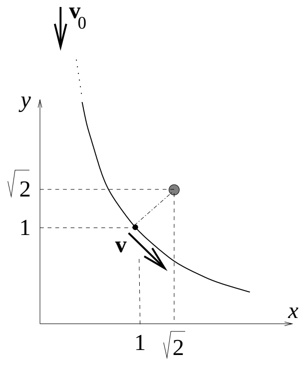
$$K = mg \sin 45^\circ + \frac{mv^2}{R} = mg\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\right) \approx 2{,}1 \text{ N}.$$

Hegyi Péter (Budapest, Szent István Gimn., 12. o.t.) és
Terpai Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

II. megoldás. A pálya görbületi sugarát fizikai megfontolások segítségével is meghatározhatjuk. Ha egy pontszerű test valamilyen (ismert alakú) erő hatására éppen hiperbola pályán mozog, akkor Newton II. törvényét felhasználva kiszámíthatjuk a test centripetális gyorsulását, majd abból a pálya görbületi sugarát. (Ez a mennyiség nyilván csak a pályagörbétől függ, nem pedig attól, hogy milyen módon halad végig a kérdéses pályán a vizsgált test.)

Kepler I. törvénye szerint az égitestek a Nap gravitációs erőterében kúpszelet alakú pályákon mozognak, és ha a sebességük elegendően nagy, akkor a pályájuk hiperbola. Használjuk ki, hogy az $y = 1/x$ egyenletű hiperbola egyik fókuszpontja a $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ pontban van. Képzeljük el, hogy ebben a fókuszpontban van a Nap, és a pozitív y tengely irányából alkalmasan választott v_0 sebességgel közeledik hozzá egy m tömegű kicsiny test (*2. ábra*). A perdületmegmaradás tétele szerint a Naphoz legközelebbi B pontban v sebességgel haladó testre fennáll

$$mv_0\sqrt{2} = mv\,(2 - \sqrt{2}),$$



2. ábra

az energiamegmaradás törvényéből pedig

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - f\frac{mM}{2-\sqrt{2}}$$

következik. Ezekből az összefüggésekből

$$v^2 = \sqrt{2}\frac{fM}{(2-\sqrt{2})^2}$$

adódik, melyet az

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{fmM}{(2-\sqrt{2})^2}$$

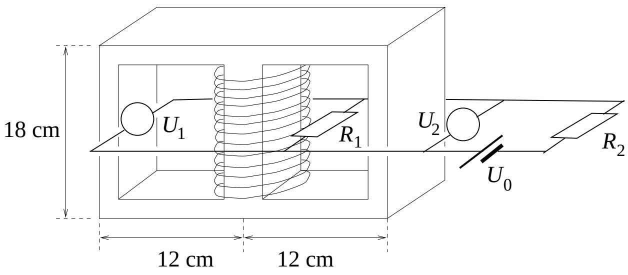
mozgásegyenletbe helyettesítve a B pontbeli görbületi sugárra $R=\sqrt{2}$ m-t kapunk. A számítás további menete megegyezik az I. megoldásban leírtakkal.

Tóth Bálint (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

Megjegyzés. A görbületi sugár differenciálszámítás segítségével is meghatározható:

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}} = \frac{2\cdot x^{-3}}{\left(1+\left[-x^{-2}\right]^2\right)^{3/2}} = \frac{2}{2^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

79 dolgozat érkezett. Helyes 42, kicsit hiányos (4 pont) 9, hiányos (1–3 pont) 10, hibás 18 dolgozat.



FN. 3263. *Az ábrán látható vasmag középső részén* 3600 *menetes tekercs van. A vasmag keresztmetszete itt* 20 cm^2*, máshol* 5 cm^2*. A vas relatív permeabilitása* 4600*. Mekkora feszültséget jeleznek a voltmérők, miközben a tekercsben folyó áram erőssége* 0,1 s *alatt nulláról egyenletesen* 10 A*-re nő?*

(A telep belső ellenállása elhanyagolható. $U_0 = 18$ V, $R_1 = 3$ Ω, $R_2 = 2$ Ω.*)*

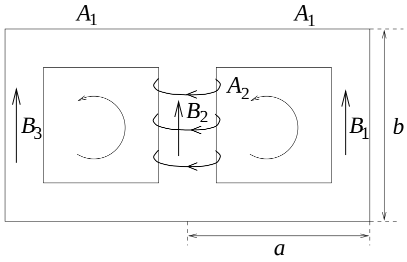
(6 pont) *Közli: Piacsek István,* Sopron

Megoldás. Először számoljuk ki a vasmag belsejében a mágneses mező nagyságát! (Mivel a feladat szövege nem adja meg az áram irányát, válasszunk egy önkényes áramirányt, majd az I áramerősség előjelének megváltoztatásával vegyük figyelembe a másik lehetőséget is!)

A transzformátor vasmagjának mindkét „hurokjára” felírhatjuk a gerjesztési törvényt. Az *1. ábra* jelöléseivel

(1) $$\frac{1}{\mu_0\mu_r}\left[(2a+b)B_1 - b\,B_2\right] = NI,$$

(2) $$\frac{1}{\mu_0\mu_r}\left[b\,B_2 - (2a+b)B_3\right] = -NI,$$



1. ábra

továbbá a mágneses fluxus megmaradását kifejező

(3) $$A_1\cdot B_1 + A_2\cdot B_2 + A_3\cdot B_3 = 0$$

egyenletet. Ezekből

$$B_1 = B_3 = \frac{\mu_0\mu_r NI}{2a+(1+2A_1/A_2)b} \qquad \text{és} \qquad B_2 = -\frac{2A_1}{A_2}B_1.$$

Az időben egyenletesen változó I áramerősséggel arányos mágneses fluxusok változási sebességéből – a Faraday-féle indukciótörvény alapján – kiszámíthatjuk, hogy az egyes szárakat körülfogó vezetékekben mekkora körfeszültség indukálódik.

$$\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} = A_1\frac{\Delta B_1}{\Delta t} = \frac{\mu_0\mu_r A_1 N}{2a+(1+2A_1/A_2)b}\,\frac{\Delta I}{\Delta t} = \pm 2{,}04\ \text{V},$$

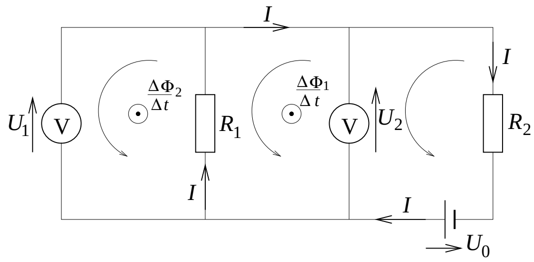
és hasonlóan

$$\frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t} = \mp 4{,}08\ \text{V}.$$

(A felső előjel az 1. ábrán látható áramirányra, az alsó a vele ellentétesre utal.)

Az indukált körfeszültségek ismeretében felírhatjuk a *2. ábrán* látható áramkörre Kirchhoff törvényeit, s azokból kiszámíthatjuk a voltmérők által mutatott feszültségeket. A voltmérők belső ellenállása nagyon nagy, így rajtuk csak elhanyagolhatóan kicsi áram folyik. Emiatt csak egyetlen körben folyik (számottevő) áram, ennek nagyságát jelöljük I'-vel! A voltmérők polaritását önkényesen a 2. ábrán látható módon véve fel (ha nem így lennének bekötve, akkor az általuk mutatott érték a kiszámoltaknak -1-szerese lesz), a következő hurokegyenleteket írhatjuk fel:

$$U_0 - I'\,R_2 - U_2 = 0,$$
$$U_2 - I'\,R_1 = -\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t},$$
$$I\,R_1 - U_1 = -\frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t}.$$



2. ábra

Ezen egyenletrendszer megoldása

$U_1 = 9{,}98$ V és $U_2 = 11{,}62$ V,

ha a transzformátor tekercsében folyó I áram az az *1. ábrán* látható irányú, illetve

$$U_1 = 7{,}94\ \mathrm{V} \qquad \text{és} \qquad U_2 = 13{,}66\ \mathrm{V},$$

ha azzal ellentétes irányú.

Tóth Bálint (Fazekes M. Főv. Gyak. Gimn. 12. o.t.)

8 dolgozat érkezett. Helyes Gáspár Merse Előd, Katona Gergely, Lábó Eszter, Lábó Melinda és Tóth Bálint megoldása. Hiányos (3 pont) 3 dolgozat.

P. 3264. *A „600-as cement”-nél a számérték azt jelzi, hogy a belőle készült betonlap* 1 cm^2*-es keresztmetszete* 600 kg *súlyát bírja el. Tízszeres biztonság betartásával milyen magas betontorony készíthető ebből a cementből? A beton sűrűsége* 2500 kg/m^3.

(3 pont) *Hatvani István verseny,* Debrecen

Megoldás. Az $A = 1\ \mathrm{cm}^2$ alapterületű betonoszlop tízszeres biztonság betartásával egy $m = 60$ kg tömegű képzeletbeli betonoszlop súlyát bírná el. A betonoszlop térfogata a tömegének és a sűrűségének hányadosa:

$$V = \frac{m}{\varrho} = \frac{60\ \mathrm{kg}}{2500\ \mathrm{kg/m^3}} = 0{,}024\ \mathrm{m}^3.$$

Az oszlop alakja négyzet alapú hasáb, melynek térfogata $V = A \cdot h$, ahonnan a magassága

$$h = \frac{V}{A} = \frac{0{,}024\ \mathrm{m}^3}{0{,}0001\ \mathrm{m}^2} = 240\ \mathrm{m}.$$

Tehát az adott feltételek mellett legfeljebb 240 m-es (hasáb alakú) betontorony készíthető a 600-as cementből.

Hanzséros Eszter (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., 9. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. A kapott érték független a torony alapterületétől, de a torony nem lehet nagyon „karcsú”, mert akkor pl. a szélnyomás miatt felborulhat vagy eltörhet.

2. Ha a torony keresztmetszete különböző magasságokban nem ugyanakkora, hanem felfelé csökken, akkor 240 méternél magasabb torony is építhető. Ha a torony tervezésénél csak a beton nyomószilárdságára kellene tekintettel lennünk, akkor egy megfelelő ütemben keskenyedő tornyot akármilyen magasságúra építhetnénk. Nem véletlen, hogy Bábel tornyát is ilyennek képzelték, és így (alul szélesebb, felfele egyre keskenyedő alakúnak) ábrázolták a festők.

658 dolgozat érkezett. Helyes 615, hiányos (1–2 pont) 41, hibás 1, nem versenyszerű 1.

P. 3265. *Egy nagy hőszigetelt tartályba két csapon keresztül engedünk vizet. Az egyik csapból percenként* 7 *liter* 12 °C*-os, a másikból percenként* 4 *liter* 60 °C*-os víz folyik. A hidegvizes csap* 8 *percig volt nyitva. Mennyi ideig kell nyitva tartani a melegvizes csapot ahhoz, hogy összekeveredés után a víz hőmérséklete a tartályban* 36 °C *legyen?*

(3 pont) *„Keresd a megoldást!” verseny,* Szeged

Megoldás. Mivel az összekeveredés után a víz hőmérséklete megegyezik a hideg és a meleg víz hőmérsékletének számtani közepével, az összetevők tömege is meg kell egyezzék. (Azonos tömegek és egyforma nagyságú hőmérsékletváltozások esetén a meleg víz által leadott hő megegyezik a hideg által felvett hővel.)

A hidegvizes csapból 8 perc alatt 56 liter víz folyt ki. Ugyanennyi meleg vízre van szükségünk, tehát a melegvizes csapot $56/4=14$ percig kell nyitva tartanunk.

Szatmári Enikő (Dunaújváros, Széchenyi I. Gimn., 8. o.t.) dolgozata alapján

753 dolgozat érkezett. Helyes 717, hiányos (1–2 pont) 34, nem versenyszerű 2.

P. 3267. *Két egyforma, nyitott szájú lombik közül az egyik az árnyékban, a másik pedig a tűző napon áll egy kertben. Az idő szélcsendes. Melyik lombikban nagyobb a levegő energiája*

a) *ha az üveg hőtágulása elhanyagolható;*

b) *ha az üveg hőtágulása nem hanyagolható el?*

(4 pont) *Vermes Miklós verseny,* Szeged

Megoldás. A nyomás mindig a külső légnyomással egyezik. A lombikban lévő gáz belső energiája

$$U=\frac{f}{2}NkT=\frac{f}{2}pV=\alpha V.$$

Esetünkben α állandó.

Mivel U csak a térfogattól függ, ezért az a) esetben a két energia egyenlő, a b) esetben a napon lévő lombikban nagyobb a levegő energiája.

Gerencsér Balázs (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján

293 dolgozat érkezett. Helyes 165, hiányos (1–3 pont) 55, hibás 73.

P. 3268. *Az asztalon egy pohárban szódavíz van. Körülbelül hány* CO_2 *molekula található egy* 1 mm *átmérőjű buborékban?*

(4 pont) *Becslési verseny,* Sárospatak

Megoldás. A buborék belsejében a nyomás három részre bontható: külső légnyomás (p_0) + hidrosztatikai nyomás (ϱgh) + görbületi nyomás ($2\alpha/R$). A három tag nagyságrendje rendre 10^5 Pa, 10^3 Pa, 10^2 Pa, ezért a külső légnyomás mellett a másik kettő elhanyagolható.

A buborékban lévő molekulák száma:

$$N=nN_A=\frac{p_0V}{RT}N_A=\frac{p_0\pi d^3}{6RT}N_A\approx 1{,}3\cdot 10^{16}.$$

Bartha Ágnes (Kézdivásárhely, Nagy Mózes Líceum, 10. o.t.) dolgozata alapján

474 dolgozat érkezett. Helyes 117, hiányos (1–3 pont) 330, hibás 15 dolgozat. Nem versenyszerű 12 dolgozat.

P. 3272. *Tegyük fel, hogy az* 1800 MW *villamos teljesítményt szolgáltató,* 30 % *hatásfokú paksi atomerőmű maradékhőjét a befagyott Balaton* 10 cm *vastag jégrétegének* *felolvasztására használjuk. Mennyi idő alatt olvadna fel ez a jégmennyiség? Mekkora felületet kellene napelemekkel befedni egy olyan naperőmű építésénél, amelynek villamos csúcsteljesítménye megegyezne a paksi erőmű állandó villamos teljesítményével? (A Föld felszínére érkező napsugárzás energiája kb.* $1\ \mathrm{kW/m^2}$*.)*

(4 pont) *Szilárd Leó verseny,* Paks

Megoldás. 30%-os hatásfok mellett a maradékhő 4,2 GW teljesítményt ad. A Balaton felületét 595 km^2-nek véve a $P_{\mathrm{maradék}}T=mL_0$ összefüggésből (m a jég tömege, L_0 az olvadáshője) $T=50{,}4$ nap.

Figyelembe véve, hogy a napelemcellák kb. 10%-os hatásfokkal működnek, 18 km^2 felületű naperőmű adna a paksi erőművével azonos teljesítményt.

Domonkos Balázs (Hódmezővásárhely, Bethlen G. Ref. Gimn., 11. o.t.)

353 dolgozat érkezett. Helyes 29, kicsit hiányos (3 pont) 133, hiányos (1–2 pont) 156, hibás 33 dolgozat. Nem versenyszerű 2.

A mérési feladatok megoldása

M. 208. *Mérjük meg minél pontosabban a pingponglabda anyagának sűrűségét! Becsüljük meg mérésünk pontosságát!*

Megoldás. A sűrűség mérése elvben visszavezethető tömeg és térfogat mérésére. A tömeg kellően pontos mérleggel könnyen megoldható. (Több versenyző is közeli gyógyszertárba ment be, és ott kérte, hogy mérjék meg a patikai mérlegen a pingponglabda tömegét.) A térfogat mérése sem látszik nehéz feladatnak, ha egy szabályos test (pl. egy gömb) térfogatát kell meghatároznunk. Tolómérővel vagy mikrométerrel tized- vagy századmilliméter pontossággal lemérhető egy pingponglabda külső átmérője. (Sokan rájöttek, hogy ilyen pontosság mellett már egyáltalán nem biztos, hogy a labda „gömbölyű”; a különböző irányokban mért átmérője általában eltérő nagyságúnak adódik.)

Többen félreértették a kérdést, és a sűrűségét a labda tömegének és a külső átmérőből számított gömb térfogatának hányadosaként adták meg. Ez a mennyiség a labda és a benne levő levegő átlagsűrűségét adja meg (kb. $0{,}1\ \mathrm{g/cm^3}$-t), ami nyilvánvalóan különbözik a labda *anyagának* sűrűségétől. Az is hibásan járt el, aki a labda mérlegen mért tömegéből kivonta a benne levő levegő (labda térfogatából és a levegő sűrűségéből kiszámítható) tömegét. A mérleg ugyanis *nem* méri a labdában levő levegőt, hiszen annak súlya éppen akkora, amekkora felhajtóerő hat a labdára a környező levegő miatt. (Feltételezhetjük, hogy a labdában levő levegő ugyanakkora sűrűségű, mint a külső légkör, továbbá, hogy a labda falának térfogata sokkal kisebb, mint a bezárt levegőé.)

A labda *falának* sűrűségét a fal térfogatának ismeretében tudjuk kiszámítani. Sok versenyző félbe (vagy még kisebb darabokra) vágta labdát, s közvetlen méréssel (tolómérővel), vagy közvetett úton (a belső és a külső átmérő mért különbségéből) határozta meg a labda anyagának térfogatát. Mindkét módszer meglehetősen pontatlan, hiszen a labda fala viszonylag vékony, így a relatív hiba $20-30\,\%$ vagy még ennél is több lehet.

Két — majdnem egyforma átmérőjű — gömb térfogatának különbsége sokkal kisebb, mint a gömbök térfogata, emiatt hiába ismerjük külön-külön viszonylag pontosan a gömbök átmérőjét (térfogatát), a különbség relatív bizonytalansága sokkal nagyobb lesz. A közvetlen vastagságmérést az is nehezíti, hogy a mikrométer henger alakú mérőfelülete nem fekszik fel a szétvágott labda belső oldalára. Ezt a problémát úgy lehetett volna megoldani, hogy egy kicsiny csapágygolyót érintünk belülről a labdához, s ezzel együtt mérjük meg a vastagságot, majd a mért értékből kivonjuk a csapágygolyó előzőleg megmért átmérőjét.

A „gömbhéj" térfogatának mérése a fentebb leírt módon még akkor is megkérdőjelezhető, ha kellő gondossággal végezzük el a falvastagság mérését. Többen felfigyeltek rá, hogy a labda fala nem egyenletes vastagságú, a mért vastagságadatok számottevő „szórást" mutatnak. Ehhez járul még a két félgömbhéj összeragasztásánál megfigyelhető „abroncs", melynek extra járulékát többen megpróbálták számítással figyelembe venni.

Helyesebben jártak el azok, akik a labda falának térfogatát úgy mérték meg, hogy nem tettek semmiféle elméleti megfontolást a fal geometriai alakjára. *Kállai Márton* (Budaörs, Illyés Gy. Gimn. 12. o.t.) nyolc darabra vágott fel egy pingponglabdát, majd az összes darabot mérőhengerbe rakta. (Vigyázott rá, hogy a darabokat egymás után helyezze a hengerbe, nehogy levegő maradjon közöttük.) A mérőhengerrel mérni tudta a kiszorított víz térfogatát, ami (hacsak nem maradt parányi légbuborék a műanyagdarabkákon) megegyezik a labda falának térfogatával. Mérése szerint a labda anyagának sűrűsége $\varrho = 1{,}06\ \mathrm{g/cm^3}$, és a mérés pontosságát (a tömegmérés és a térfogatmérés pontosságából) 5 %-ra becsülte. A mérés pontossága fokozható, ha a mérés előtt gondosan zsírtalanítjuk a labda darabkáit, ismert hőmérsékletű, kiforralt desztillált vízzel dolgozunk, és a folyadék térfogatának mérését felül elkeskenyített mérőedénnyel végezzük.

Sokan végeztek előzetes sűrűség-becslést úgy, hogy a pingponglabda darabkáit vízbe dobták, s megfigyelték, hogy a darabkák lassan lesüllyednek. Ebből arra következtettek, hogy a labda anyagának sűrűsége egy *kevéssel nagyobb*, mint a víz sűrűsége. *Bálint László* (Temesvár, Bartók B. Líceum 10. o.t.) fokozatosan növelt koncentrációjú sós vizes oldatot készített, s figyelte, hogy elsüllyednek, felszállnak vagy éppen lebegnek-e az oldatban a pingponglabda darabkái. A határesetnek megfelelő töménységű sóoldat sűrűségét *aerométerrel* (úszó sűrűségmérővel) viszonylag pontosan meg tudta mérni, s a mért érték megadta a labda anyagának sűrűségét is.

Hasonló módon járt el *Flender Gyöngyi* (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn. 10. o.t.) is, aki a vasárnapi ebéd készítése közben figyelt fel arra, hogy a húslevesben a tésztagombócok a sózottságtól (és a hőmérséklettől) függően úsztak, lemerültek vagy éppen lebegtek. A pingponglabda darabkáinak sűrűségét gyorsan oldódó sóból készített (a határesetnek megfelelő) oldat térfogatának és tömegének mérése után számítással határozta meg. Megfigyelte, hogy a pingponglabda nem minden része azonos sűrűségű. Azok a darabkák, melyek összeragasztott részt is tartalmaztak, még úsztak akkor, amikor a labda többi része lebegett. (Ez a ragasztó kisebb sűrűségével, vagy az összeragasztott részek között maradt parányi légbuborékokkal magyarázható.)

A legügyesebben (és legeredményesebben) *Nagy Ádám* (Budapest, Szent István Gimn. 11. o.t.) oldotta meg a feladatot. Abból indult ki, hogy az iskola kémia laboratóriumában található korszerű mérleggel ezred grammnál is pontosabban (!) lehet tömeget (és súlyt) mérni. Ez a pontosság sokkal jobb, mint a térfogat- vagy hosszúságméréseknél elérhető mérési hibahatár, érdemes tehát olyan módszert keresni, amely tisztán tömegmérésből áll. Az érzékeny mérleggel lemérte egy desztillált vízzel félig töltött pohár súlyát, majd megismételte a mérést úgy, hogy egy rögzített állványra kötött fonálon a vízbe lógatta a félbevágott pingponglabda darabjait. A labda darabkáira a kiszorított víz súlyának megfelelő felhajtóerő hat, ennek az erőnek az ellenereje viszont a vizet (a poharat és rajta keresztül a mérleget) nyomja lefele. A második mérésnél tehát a mérleg az első méréshez viszonyítva éppen annyival mutatott többet, amennyi a labda anyaga által kiszorított víz tömege. Ebből az adatból (és a hőmérsékletből) a víz sűrűségének ismeretében kiszámítható a labda falának térfogata, az előzőleg megmért tömegéből pedig a sűrűsége.

Hasonló módon végezte el a mérést *Pozsgay Balázs* (Pécs, Magyar-német Nyelvű Isk. 11. o.t.) is, de ő nem állványról lógatta le, hanem kézzel tartotta a (kilyukasztott) pingponglabdát. Ilyenkor a kéz kicsiny remegése okoz mérési hibát. (A vízben mozgó testre közegellenállási erő hat, melynek ellenerejét az érzékeny mérleg ingadozások formájában jelzi.) Érzékeny mérleg használatakor célszerű rezgésmentes körülményeket biztosítani, pontosabban fogalmazva: a környezetből származó rezgéseket olyan mértékben csökkenteni, amennyire csak lehet.)

Megjegyzés. A mérési feladat értékelésénél az kaphatja meg a maximális pontszámot, aki ötletes mérési módszer választ, az alkalmazott módszert világosan, áttekinthetően leírja, elegendő számú és pontosságú, tényleges mérésből származó adattal rendelkezik és azokat áttekinthető táblázatba rendezi vagy grafikonon ábrázolja, a mérési adatokból a keresett mennyiséget meghatározza, és végül korrekt hibaszámítással elfogadható becslést ad a mérés pontosságára. Az a megállapítás, hogy „a mérés nem tökéletesen pontos" (melyik mérés az?), vagy annak kijelentése, hogy „a mérőeszközök hibája miatt a mérésem nem túl pontos", önmagában nem fogadható el hibabecslésként, de még az sem, ha valaki (indoklás nélkül) közli: „véleményem szerint az eredményem 10 százalékra pontos". Ugyancsak értékelhetetlenek a mérési eredményeket nem tartalmazó, csak elvi leírást közlő dolgozatok, továbbá azok, melyek különböző tanulók tökéletesen azonos mérési módszeréről és azonos mérési eredményeiről számolnak be.

128 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Bálint László, Flender Gyöngyi, Gáspár Merse Előd, Kállai Márton, Nagy Zoltán és Pozsgay Balázs dolgozata. Kicsit hiányos (4–5 pont) 39, hiányos (1–3 pont) 58, hibás 13 dolgozat. Nem versenyszerű az esztergomi Géza Fejedelem Ipari Szakképző Isk. 7, a szolnoki Verseghy F. Gimn. 5 tanulójának és még további 6 versenyzőnek a munkája.

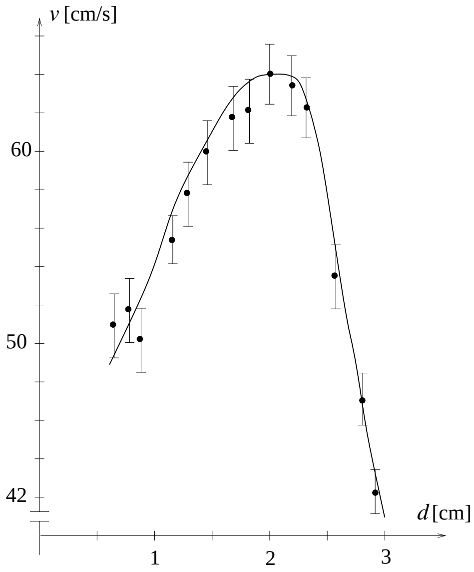
M. 209. *Állítsunk fel dominókat egymással párhuzamosan, egymástól egyenlő távolságra úgy, hogy az elsőt meglökve az egész sor ledőljön. Vizsgáljuk meg, mitől és hogyan függ a dőlési hullám sebessége!*

(6 pont) Közli: *Bakonyi Gábor,* Budapest

Megoldás. Az egyik versenyző (*Gáspár Merse Előd,* Fővárosi Fazekas M. Gyak. Gimn. 12. o.t.) dolgozatából idézünk: „Néhány próbamérést végezve kiderülnek a feladat nehézségei. A dominókból kb. 50-et felállítva, s ledöntve azokat, az első és az utolsó dominó eldőlése közti idő kb. 2 s vagy még kevesebb, ennek mérése okozza a problémát. Különböző paraméterek sebesség-befolyásoló hatását is vizsgálnunk kell, továbbá 50 dominót kell sokszor felraknunk, méghozzá ügyelve az egyenlő távolságokra. Ez eléggé idegölő, főleg akkor, amikor a 25. dominó ledől, s lehet az egészet újra kezdeni. Tehát a dominók számát szeretnénk csökkenteni, de ezzel a mérendő időtartam is csökken, a mérési hiba pedig nő. A problémát úgy oldottam meg, hogy egy kicsit átalakítottam egy magnót. A dominók koppanásait lassítva játszottam vissza, s így az időt pontosabban tudtam mérni, mintha közvetlenül tettem volna ugyanezt. (A lassítás mértékét egy kezdő- és véghang stopperral mért idejéből számította ki.) Dominók helyett „römikövekkel" végeztem el a mérést. (A römi játékot Erdélyben nem kártyával, hanem kis falapocskákkal játsszák, ezek az ún. römikövek.) A kövek magassága 3 cm volt, a vastagsága pedig (egymás mellé rakott 20 darabot lemérve) 3,85 mm-nek adódott.

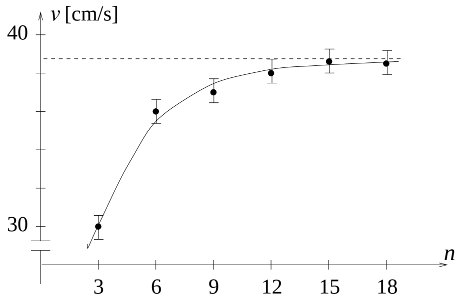
Először azt vizsgáltam meg, hogyan függ az egyenletesnek feltételezett dőlési hullám sebesség (v) a „dominók” d távolságától. A sebességet az első és az utolsó dominó távolságának és a magnófelvételről mért időből kiszámított valóságos időnek a hányadosaként kaptam meg.”

A grafikonon (*1. ábra*) azt látjuk, hogy a görbének $d=2$ cm körül jól meghatározott maximuma van, és a maximális hullámsebesség kb. 0,64 m/s. Ezt a megfigyelést (hogy a dőlési hullám terjedési sebessége akkor a legnagyobb, amikor a dominók távolsága kb. $\frac{2}{3}$-a a dominók magasságának) több versenyző is megállapította.



1. ábra

Gáspár Merse Előd azt is megvizsgálta, mennyire tekinthető állandónak a dőlési hullám sebessége. Különböző számú römikövet állított fel úgy, hogy a távolságuk nem a legnagyobb sebességhez tartozó érték, hanem majdnem 3 cm (a hullám működése szempontjából ez a legnagyobb szóba jöhető érték) volt. Megmérte és ábrázolta a hullám átlagsebességét a kövek számának függvényében (*2. ábra*). Látható, hogy kevés kőnél (dominónál) a sebesség nem állandó, de a hullám előrehaladtával fokozatosan egy meghatározott értékhez tart. Érdemes lett volna azt is megvizsgálni, hogy ez az állandósult érték mennyire függ (vagy független) a kezdőlökés erősségétől. Sok versenyző feltételezte, hogy ilyen függés van, tehát a hullám „nem felejti el” az indítás körülményeit. *Pozsgay Balázs* (Pécs, Magyar-német Nyelvű Iskolaközp. 11. o.t.) a mérési adataiból arra következtetett, hogy a „felejtési mechanizmus” működik, de a dominók számát nem tartotta elegendően ahhoz, hogy ezt egyértelműen bizonyítani tudja. *Kovács Zsolt* (Csorna, Hunyadi J. Gimn. 10. o.t.) egy Bunsen-állványra szerelt és azonos szögkitérítéssel indított inga segítségével biztosította, hogy az első dominó minden esetben ugyanakkora kezdőlökést kapjon.



2. ábra

Flender Gyöngyi (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn. 10. o.t.) fa és műanyag dominókkal kísérletezett, és az időmérést számítógéppel, annak ($\frac{1}{100}$ másodperc leolvasását is lehetővé tevő) belső órájával oldotta meg. Az első dominó meglökésekor indította a számítógépet, és amikor az utolsó is ledőlt, egy billentyű lenyomásával „exponálta” a zárópillanatot. Több versenyző megvizsgálta, hogyan függ a dőlési hullám sebessége a felület minőségétől (sima asztallap, terítő, linóleumlap stb.), a pálya alakjától (egyenesen, illetve kanyarban eldőlő dominósor), valamint a környezet közegellenállásától (víz alatt végigfutó dominóhullámot hoztak létre).

Lipcsei Gábor (Budapest, Radnóti M. Gyak. Isk. 11. o.t.) nagy gondot fordított a „dominók” kiválasztására, mert azt akarta elérni, hogy minél több paramétert minél könnyebben tudjon változtatni. LEGO elemekből épített (2×4-es) tornyokat, és milliméterpapírból előre elkészített „pályán” megjelölt helyekre állította fel a tornyocskákat. Négy paramétert is változtatni tudott: a dominók *magasságát*, *a szélességét*, a *távolságukat*, és végül a dominók *tömegét*. Egy-egy mérési sorozatban csak egy paramétert változtatott, a másik hármat valamilyen rögzített értéknél tartotta. (Ez elfogadható mérési időt és áttekinthető kiértékelést tett lehetővé.) Mérési adatai alapján megállapította, hogy a tornyok magasságának növelésekor a hullám terjedési sebessége hozzávetőlegesen lineárisan (a tornyok magasságával arányosan) növekszik, a szélességtől viszont gyakorlatilag független a hullám sebessége. A dominók távolságát változtatva ő is megfigyelte, hogy bizonyos távolságnál a sebességnek maximuma van, és ezt a távolságot kb. a dominók magasságának felénél észlelte. (Megjegyezte, hogy a sebesség-távolság függvény a maximumhely „tengelyére” nézve nem szimmetrikus, meredekebben esik, mint amilyen ütemben emelkedik.) Egy ügyes ötlettel a dominóknak (tornyoknak) nem csak a geometriai méretét, de a tömegét is változtatni tudta úgy, hogy a LEGO elemek üreges részeibe az összeszerelés előtt vizet töltött. Ezzel a trükkel mintegy 50 %-kal megnövelte a tornyok tömegét, de a dőlési hullám terjedési sebességében nem tapasztalt 1 %-nál nagyobb változást. Ebből arra következtetett, hogy a ($4-5$ %-osra becsült) mérési hibahatáron belül a terjedési sebesség *nem* függ a dominók tömegétől.

97 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Gáspár Merse Előd és Lipcsei Gábor dolgozata. Kicsit hiányos (4–5 pont) 17, hiányos (1–3 pont) 45, mérési feladatként nem értékelhető (csak elvi megfontolásokat vagy kvalitatív megfigyeléseket tartalmaz) 21 dolgozat. Nem versenyszerű 12 (többek között a monori József A. Gimn. 3, a paksi ESzI. 3 és még további 4 versenyző nem önálló munkája, valamint 2 névtelen dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 213. Mérjük meg egy mikrofon iránykarakterisztikáját!

(*6 pont*) Közli: *Tichy Géza,* Budapest

P. 3315. Egy gyerek azt kérdezte: Miért akkor van nálunk tél, amikor a Föld a legközelebb van a Naphoz? Válaszoljunk rá!

(*3 pont*) Közli: *Rókáné Kalydi Bea,* Nyíregyháza

P. 3316. Szabályos háromszög alapú prizmával, amelynek közepes törésmutatója $n = 1{,}5$, a napsugárzás színképét akartam a falon előállítani. Forgattam a prizmát, hogy a napsugarak merőlegesek legyenek a prizma éleire, s közben észrevettem, hogy a padlón is megjelenik a színkép, de fordított sorrendben. Miért? Milyen beesési szögek esetén van jelen mind a két színkép?

(*4 pont*) Közli: *Varga István,* Békéscsaba

P. 3317. Legfeljebb milyen magas oszlopot lehetne építeni $-0{,}1\ ^\circ$C-os jégkockákból?

(*4 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

P. 3318. L hosszúságú fonál végei azonos magasságban, egymástól D távolságra vannak rögzítve. A fonálon egy kis gyöngy csúszkálhat, súrlódás nélkül. Kis kitérések esetén mennyi lesz a gyöngy mozgásának periódusideje, ha

a) a kitérés a fonál síkjára merőleges;

b) a kitérés benne van a fonál síkjában?

(*5 pont*) Közli: *Tichy-Rács Ádám,* Budapest

P. 3319. Vákuumban $U=250$ V feszültséggel felgyorsított keskeny elektronnyaláb tengelyétől $r=2$ mm-re $B=8\cdot 10^{-6}$ T mágneses indukciót hoz létre. Mekkora erőt fejt ki az elektronnyaláb az útjába helyezett fémlapra? Tételezzük fel, hogy az elektronok 20 %-a rugalmasan visszaverődik, a többi pedig elnyelődik az anyagban.

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 3320. Nehézion-gyorsítóban azonos feszültséggel gyorsítunk elhanyagolható kezdősebességű α-részecskéket, C és Ca atommagokat. Hogyan aránylanak egymáshoz az elért végsebességek? Függ-e a végeredmény a gyorsítófeszültség nagyságától?

(*4 pont*) Közli: *Radnóti Katalin,* Budapest

P. 3321. Szóródási kísérletekből arra lehet következtetni, hogy az A tömegszámú atommagban valamennyi nukleon $r\approx A^{1/3}\cdot 1{,}2\cdot 10^{-13}$ cm sugarú gömbben helyezkedik el, szorosan egymás mellett. Számítsuk ki az atommag sűrűségét! Mekkora az átmérője egy ilyen átlagsűrűségű, a Nappal megegyező tömegű csillagnak? Mekkora egy ilyen csillag felszínén a szökési sebesség?

(*4 pont*) Közli: *Gáspár Merse Előd,* Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn.

P. 3322. Egy elektromosan töltött kicsiny gyöngyszem vízszintes síkban súrlódásmentesen mozoghat egy kör alakú szigetelő huzalon. A kör középpontjában vízszintes tengelyű, rögzített helyzetű elektromos dipól található. Kezdetben a gyöngyszem a dipól tengelyére merőleges helyzetben áll.

a) Mekkora erővel nyomja mozgása során a gyöngyszem a huzalt?

b) Hol áll meg a gyöngyszem az elengedése után először?

c) Milyen pályán mozogna a gyöngyszem a vízszintes síkban, ha nem lenne felfűzve a huzalra?

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Budapest

P. 3323. Egy interkontinentális ballisztikus rakéta kezdősebességének nagysága az első kozmikus sebesség fele, iránya a vízszintessel 45°-os szöget zár be.

a) Mekkora a rakéta pályájának nagytengelye és kistengelye?

b) Legfeljebb milyen magasra emelkedik a rakéta a földfelszín fölé?

c) Az indítási helytől milyen messze ér földet?

d) Mennyi ideig mozog a rakéta?*

(A Föld forgásától tekintsünk el.)

(*6 pont*) Közli: *Horányi Gábor,* Budapest

A fizika feladatok megoldásai a következő címre küldendők:
Eötvös Loránd Fizikai Társulat, KöMaL feladatok
Budapest, Pf. 433. 1371
A beküldési határidő: **2000. március 11.**

Physics

M. 213. Measure the radiation pattern of a microphone.

P. 3315. A child asks: 'Why does winter come when the Earth gets nearest to the Sun?' Answer his question. **P. 3316.** I wanted to project the spectrum of a sunbeam onto the wall using a regular (equilateral triangle-based) prism with a medium refractive index of $n=1.5$. I was turning the prism so that the sunbeam be perpendicular to its edge when I noticed the spectrum appearing on the floor, but in a reversed order. Why? At what angles of incidence are both spectra present? **P. 3317.** What is the maximum possible height of a column made of -0.1 °C ice cubes? **P. 3318.** The ends of a thread of length L are fixed at identical heights, at distance D from each other. A small bead can slide on the thread without friction. What is the period of the bead for small deviations if *a*) the deviation is perpendicular to the plane of the thread; *b*) the deviation is within the plane of the thread? **P. 3319.** A narrow electron beam accelerated in vacuum using a voltage of $U=250$ V produces a magnetic induction of $B=8\cdot10^{-6}$ T at $r=2$ mm from its axis. What force does the electron beam exert onto a metal plate placed in its way? Assume that 20 % of the electrons is elastically reflected and the rest is absorbed by the plate. **P. 3320.** α particles and C and Ca nuclei with negligible initial velocity are accelerated in a heavy ion accelerator using the same voltage. What is the ratio of their final velocities? Does the result depend on the magnitude of the accelerating voltage? **P. 3321.** Measurements of scattering indicate that all the nucleons in a nucleus of mass number A are within a sphere of radius $r\approx A^{1/3}\cdot1.2\cdot10^{-13}$ cm, close to each other. Calculate the density of the nucleus. What is the diameter of a star of such average density and with a mass identical to that of the Sun? What is the escape velocity at the surface of such a star? **P. 3322.** An electrically charged small bead can move without friction in a horizontal plane on a circular insulating wire. There is a fixed dipole with a horizontal axis at the centre of the circle. The bead is initially at rest at a position perpendicular to the axis of the dipole. *a*) What force does the bead exert onto the wire during its motion? *b*) Where does the bead first stop after being released? *c*) What trajectory would the bead follow in the horizontal plane if it were not strung onto the wire? **P. 3323.** The magnitude of the initial velocity of an intercontinental ballistic missile is half of the first cosmic velocity, its direction includes an angle of 45° with the horizontal plane. *a*) What are the major and minor axes of the orbit of the missile? *b*) What maximum height does the missile reach above the surface of the Earth? *c*) How far from its starting place does it reach the ground? *d*) How long does the missile remain in movement? (Take no notice of the rotation of the Earth.)

* Lásd a Kepler-egyenletről szóló cikket lapunk 110. oldalán!