Jelentés az Ericsson-díjak odaítéléséről

Az Ericsson magyarországi Kutatás–Fejlesztési Igazgatósága a KöMaL 1999/6. és 8. számában közölt kiírás szerint felkérte a MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítványt, hogy a Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat ajánlása alapján hozzon döntést az 1999. évi Ericsson-díjazottakról. A társulatokhoz és az alapítványhoz eljuttatott javaslatok közül a matematikatanárokra érkezetteket előzetesen a BJMT, a fizikatanárokét az ELFT e célra létrehozott bizottsága bírálta el.

A BJMT bizottsága a következő tagokból állt: Bonifert Domokos, a szegedi Juhász Gyula Tanárképző Főiskola docense, Hartosné Magyar Judit, a Bessenyei György Tanárképző Főiskola adjunktusa, dr. Kántor Sándorné, a KLTE Matematikai Intézetének adjunktusa, Lajos Józsefné, az Országos Közoktatási Szolgáltató Iroda munkatársa, Pálmay Lóránt, a Fővárosi Pedagógiai Intézet nyugalmazott vezető szaktanácsadója, Pogáts Ferenc, az ELTE TFK nyugalmazott docense, Szakál Péter, a soproni Széchenyi István Gimnázium igazgatója, dr. Szendrei János, a szegedi Juhász Gyula Tanárképző Főiskola tanára és Sztrókayné Földvári Vera, az ELTE TFK docense.

Az ELFT bizottságának tagjai voltak: dr. Radnai Gyula elnök, az ELTE TTK docense, dr. Berkes József, a JPTE adjunktusa, dr. Gecső Ervin, az OKI tudományos főmunkatársa, dr. Mészáros Sándor, az ATOMKI igazgatóhelyettese és dr. Papp Katalin, a JATE docense.

„Ericsson a matematika és fizika tehetségeinek gondozásáért” díjra összesen 12 matematika- és 11 fizikatanárt, „Ericsson a matematika és fizika népszerűsítéséért díjra 13 matematika- és 15 fizikatanárt, továbbá egy-egy matematika-, ill. fizikatanári munkaközösséget javasoltak. A díjra felterjesztettek ajánlói kollégák, iskolaigazgatók, tanári és szülői munkaközösségek, a társulatok különböző tagozatainak vagy bizottságainak elnökei, korábbi tanítványok vagy a jelöltet igen jól ismerők voltak. Mindannyiuknak ezúton köszönjük közreműködésüket és segítségüket.

Mivel ehhez hasonló elismerés középiskolai matematikatanárok körében eddig kétszer, fizikatanárok körében pedig egyáltalán nem volt, az Ericsson díjaival több évtizedes „lemaradást” pótol a – szerencsére országszerte szép számú – nagyon elhivatott és a díjat néha többszörösen is kiérdemlő tanárok között. Ezért az idei évben – a díjak korlátozott száma miatt – szükségszerűen olyanok is kimaradtak a kitüntetésből, akik biztosan megérdemelték volna. Reméljük, azzal, hogy a díjat minden évben kioszthatjuk, ez a lemaradás lassan bepótolható, és a következő években minden arra érdemes pedagógust a díjazottak között ünnepelhetünk.

A bizottságok javaslatainak részletes megismerése után a MATFUND Alapítvány kuratóriuma, dr. Katona Gyula elnök, az MTA levelező tagja, Matematikai Kutatóintézetének igazgatója, dr. Benczúr András egyetemi tanár, az ELTE dékánja, dr. Nagy

Dénes Lajos, a fizikai tudományok doktora (KFKI), Oláh Vera matematikus, a KöMaL főszerkesztője és dr. Tichy Géza, egyetemi tanár, (ELTE) a következő döntést hozta:

Az **„Ericsson a matematika és fizika tehetségeinek gondozásáért”** díjban részesülnek:

a matematikát tanító tanárok közül:
Balázs Tivadar, a debreceni Fazekas Mihály Gimnázium tanára,
Deli Lajos, a hajdúszoboszlói Hőgyes Endre Gimnázium tanára,
Árokszállási Eszter, a paksi Energetikai Szakképzési Intézet Műszaki Szakközépiskolájának tanára,
Kovács Csongorné, a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola tanára,

a fizikát tanító tanárok közül:
Horváth Gábor, a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium tanára,
dr. Szegedi Ervin, a debreceni KLTE Gyakorló Gimnáziumának tanára,
Varga István, a békéscsabai Tevan Andor Gimnázium és Nyomdaipari Szakközépiskola tanára,
Gyimesi Éva, a szentendrei II. Rákóczi Ferenc Általános Iskola és Gimnázium tanára.

Az **„Ericsson a matematika és fizika népszerűsítéséért”** díját kapják:

a matematikát tanító tanárok közül:
dr. Katz Sándor, a bonyhádi Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium tanára,
Róka Sándor, a nyíregyházi Bessenyei György Tanárképző Főiskola tanára,
Számadó László, a budapesti Veres Péter Gimnázium tanára,
Kothencz Jánosné, a szegedi Tisza-parti Általános Iskola tanára,

a fizikát tanító tanárok közül:
Nagy Márton, a soproni Berzsenyi Dániel Gimnázium nyugdíjas tanára,
Holics László, a budapesti ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium nyugdíjas tanára,
Simon László, a túrkevei Ványai Ambrus Gimnázium és Gépjárműtechnikai Szakközépiskola nyugdíjas tanára,
Sebestyén Zoltán, a pécsi Testvérvárosok Terei Általános Iskola tanára.

A díjazottak iskolái a jövő tanévre 10-10 jutalom előfizetést kapnak a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokra. Gratulálunk a díjazottaknak, az iskoláknak és köszönjük, hogy az Ericsson e támogatásával hozzájárult a pedagógusok és a tudás megbecsüléséhez.

a MATFUND Alapítvány kuratóriuma

A díjazottak bemutatása

Balázs Tivadar 1989 óta tanít speciális matematika tagozaton. 1992-től hatosztályos képzésben tanít, ennek a tagozatnak tantervét is ő írta egy kollégájával. Ő volt a fő szervezője az 1999. évi Nemzetközi Magyar Matematikaversenynek, melyet Debrecenben rendeztek. Tanítványai kimagasló eredményeket értek el az OKTV, az Arany Dániel, a Varga Tamás, Zrínyi Ilona, Kalmár László, Kenguru Matematikaversenyeken. OKTV-n első helyezett, Arany Dániel versenyen két évben harmadik helyezett, Varga Tamás Versenyen első helyezett tanítványai voltak. A Nemzetközi matematikai diákolimpián 1997-ben és 98-ban is aranyérmes lett tanítványa.

Deli Lajos matematika–fizika szakos tanár, aki 1979 óta tanít a hajdúszoboszlói Hőgyes E. Gimnáziumban, Hajdú-Bihar megyei szaktanácsadó. Iskolai munkája során több, mint 10 éve vezet tehetséggondozó szakkört, tart foglalkozásokat országos matematikai táborokban. Több cikke jelent meg az ABACUS-ban, feladatokat tűzött ki a KöMaL-ban. Tanítványai eljutottak az OKTV, Arany Dániel, Kalmár László, Zrínyi Ilona, Varga Tamás, Kenguru és Gordiusz országos matematika versenyek döntőjébe, ahol 11 országos első, 9 második, 5 harmadik, 4 negyedik, 3 ötödik, 3 hatodik, 3 hetedik, 5 nyolcadik és 4 tizedik helyezést értek el. Deli Lajos kiváló tehetséggondozó, tehetségnevelő és szervező tanár, a KLTE-n elvégzett szakirányú matematikatanár továbbképzés záródolgozatát is a tehetséggondozás témakörben védte meg.

Árokszállási Eszter 1988 óta az Energetikai Szakképzési Intézet tanára. Nagy lelkiismerettel és igyekezettel készíti fel tanítványait a tanulmányi versenyekre. Szakköri és egyéni tehetséggondozó foglakozásokat vezet. Tanítványai rendszeresen indulnak az Arany Dániel, OKTV, Kenguru, Nemzetközi Matematika, regionális és megyei versenyeken. Az országos versenyeken az elmúlt tíz évben 9-en 1–3. helyezést, míg 15-en 4–10. helyezést értek el. Az 1990/91-es tanév óta országos és regionális versenyeken 62 tanítványa lett díjazva. Az iskolai szakköri tevékenységen kívül rendszeresen tart foglalkozásokat városi szakkörön általános iskolásoknak, és megyei szakkörön középiskolásoknak. Az elmúlt években több alkalommal vezetett foglalkozásokat a váci nyári tehetséggondozó táborban is. Megyei tanár-továbbképzéseken előadásaival kollégái tehetséggondozó munkáját segíti.

Kovács Csongorné 1972-ben végzett az ELTE TTK matematika–fizika tanári szakán. Általános iskolai tanári munkájában egyforma hangsúlyt kap a tárgy iránti érdeklődés felkeltése, az egyéni képességfejlesztéshez szükséges módszerek kimunkálása (ezt a célt szolgálja népszerű tankönyvsorozata is) és a tehetséggondozás. A tanórák és a szakkörök adta lehetőségeken túl nyaranta matematika táborokat szervez tanítványainak. E táborok hatására fordulnak mind többen a matematika magasabb, tehát versenyszintje felé. A KöMaL pontversenyében az 1998-99. tanévben 2. díjat kapott egy tanítványa, további három tanítványa végzett az első 15 között. Idén a Kalmár László Matematikaversenyen az ötödik osztályosok versenyében 4. helyezést ért el egy tanítványa. A nyolcadikosok versenyében egy 5. és egy 10. helyezést, a Varga Tamás Verseny első kategóriájában egy 3. és egy 5. helyezést szereztek tanítványai. Az elmúlt tanév eredményeit is meghaladó sikereket ért el a megelőző években. Munkáját dicséri az is, hogy tanítványai közül a legjobbak sikeres felvételi vizsgát tesznek a speciális matematika tagozatra, ahol az általános iskolai eredménysort folytatva a gimnazisták versenyein érnek el kimagasló sikereket.

Horváth Gábor a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium tanára, hosszú évek óta eredményesen készíti fel tanítványait a hazai és nemzetközi fizikaversenyekre. Csak a legutóbbi tanévben egyik tanítványa Padovában a Fizikai Diákolimpián ezüstérmet nyert; az OKTV-n egyik tanítványa I. díjat, másik tanítványa III. díjat nyert; a Fényes Imre versenyen első, a Szilárd Leó versenyen második díjat nyertek tanítványai; a Mikola versenyen egyik 9. osztályos tanítványa 2. lett. 1999-ben az Eötvös-verseny tíz díjazott versenyzője közül négy volt az ő diákja, köztük a legjobb eredményt elérő egyedüli I. díjas is. Az előző években is hasonlóan szép eredményt értek el tanítványai, akik a KöMaL pontversenyén is évek óta egyenletesen jó teljesítményt nyújtanak. Iskolájában az érdeklődő tanulóknak versenyre előkészítő fizika szakkört vezet.

Dr. Szegedi Ervin a KLTE matematika–fizika szakán végzett 1981-ben, 1992-ben Summa cum laude minősítéssel doktorált fizika szakmódszertani témából. Az OKTV-n, az Eötvös-versenyen és a nemzetközi diákolimpián is jól szerepelnek tanítványai, akik az OKTV általános tagozatán 1999-ben II., 1998-ban II. és III., 1995-ben II. díjat, az OKTV speciális tagozatán 1998-ban II. és III., 1996-ban I. díjat nyertek. Az Eötvös-versenyen 1998-ban és 1995-ben is volt II. díjas tanítványa; 1999-ben egy III. díjat nyert debreceni versenyző saját tanára mellett Szegedi Ervint jelölte meg felkészítő tanáraként. Olimpiai felkészítő szakkört vezet. Saját, iskolai tanítványa az 1996-os diákolimpián bronzérmes lett, de felkészítő tanára volt 1996-ban egy másik bronzérmes diáknak, és 1998-ban egy ugyancsak harmadik díjjal jutalmazott diáknak is. A KöMaL pontversenyén a budapesti Fazekas Gimnázium után a debreceni KLTE Gyakorló Gimnázium tanulói szerepeltek 1999-ben is a legjobban. Ebben Szegedi Ervinnek és az általa vezetett szakkörnek döntő szerepe van.

Varga István Temesváron végezte el az egyetemet, 1988 óta él és tanít Magyarországon, Békéscsabán. Hét évig tanított a Széchenyi István Közgazdasági Szakközépiskolában, 1995 óta, ötödik éve tanít a békéscsabai Tevan Andor Gimnázium és Szakközépiskolában mind gimnáziumi, mind szakközépiskolai osztályokban. Olimpiai szakkört vezet, felkészítő tanára volt egy 1999-ben bronzérmet nyert olimpikonnak. Legsikeresebb szakközépiskolai tanítványa az Eötvös-versenyen 1994-ben III. díjat, 1995-ben megosztott I–II. díjat nyert, s bronzérmes lett az 1995-ös diákolimpián. (Rendkívül ritkán fordul elő, hogy egy szakközépiskolai tanuló díjat nyer az Eötvös-versenyen vagy a diákolimpián.) Évek óta magasszintű szakírói munkát végez, a KöMaL-ban matematika- és fizikafeladatok tucatjait publikálta. A Vermes Miklós fizikaverseny versenybizottságának elnöke, a Mikola Sándor és a Fényes Imre versenyek versenybizottságának tagja. 1995 óta szerkeszti az általános iskolásoknak szóló Abacus c. folyóirat fizika rovatát, ezzel hathatósan segíti több száz általános iskolás tehetségének fejlődését.

Gyimesi Éva az ELTE matematika–fizika tanári szakán végzett 1981-ben, s mai munkahelyének elődjében, a Bajcsy-Zsilinszky úti általános iskolában kezdett tanítani. Két gyermeke születése után a GYES-ről visszatérve 1990 szeptembere óta tanít újra teljes óraszámban az iskolában. Tanári munkájában szívügyének tekinti a tehetségek felkutatását, majd „felfedezésük” utáni gondozását. Ezt differenciált óravezetéssel és a tanórán kívüli külön foglalkozásokon oldja meg. Fizikából a 7. és 8. osztályosok számára tehetséggondozó szakkört vezet. Az ELFT Általános Iskolai Szakcsoportjának 1993–1999-ig választott elnökségi tagja, a Pest Megyei Szolgáltató Iroda levelező fizikaverseny feladatsorainak egyik összeállítója. Tanítványait 1991 óta indítja az Öveges József fizikaversenyen és más versenyeken. Először 1992-ben lett az Öveges-versenyen III. díjas versenyzője. Ezután 1995-ben, 1998-ban és 1999-ben is III. díjat szerzett egy-egy diákja. Az Öveges verseny kilenc éves történetében egyedül neki volt 4 díjazott tanítványa. A díjazottakon kívül is majdnem minden évben sikerül 1–2 tanítványát az országos döntőbe vezetnie, egyik volt tanítványa pedig már a Mikola-verseny döntőjébe is bejutott. Az iskola a 90-es évek közepe óta fejlődött fel hatosztályos gimnáziummá, s fizikából ma már országos híre van.

Dr. Katz Sándor Tolna megyei középiskolai szaktanácsadóként évek óta kiemelkedő munkát végez a matematika népszerűsítése és a matematika tehetséggondozás területén. Tanári, szerzői és szervező tevékenységével egyaránt hozzájárul a matematika népszerűsítéséhez. Meghatározó szerepe van abban, hogy iskolája, egy kisvárosi gimnázium matematikából az ország legeredményesebb iskolái között szerepel. Az elmúlt évben a KöMaL pontversenyében két budapesti gimnázium után a harmadik helyen a bonyhádi Petőfi Gimnázium végzett 2727 ponttal, amelyből több mint 2000 pontot Katz Sándor tanítványai értek el. Katz Sándornak 26 év alatt 30 tanítványa végzett Arany Dániel versenyen, OKTV-n, vagy Kürschák versenyen az első 10 között. Az elmúlt két évben OKTV-n 4. helyet, Kürschák versenyen 4. helyet, Kenguru versenyen 1. helyet és Nemzetközi Magyar Matematika versenyen 1. díjat nyertek tanítványai. Mint szaktanácsadó, a BJMT megyei vezetőségi tagja, és a Tolna Megyei Matematikai Tehetséggondozó Alapítvány titkára, sokat tett a megyében és régióban a matematika népszerűsítéséért, a tehetséggondozásért, nagy szerepe van abban, hogy a térségben megyei szakkörök, regionális versenyek, tanártovábbképzések összehangolt rendszere segíti a diákokat és tanárokat. Nem véletlen, hogy pl. a KöMaL-ban évek óta Budapest után a Tolna megyei középiskolák tanulói érik el a legtöbb pontot. A matematika népszerűsítését nemcsak a régióban végzi. A megyén kívül is sok helyen és országos rendezvényeken is (pl. vándorgyűlésen, Varga Tamás Napokon) tart előadásokat. Feladatgyűjteményei, cikkei jelentek meg és ebben az évben készült el a matematika tanításához felhasználható szakirodalmakat tartalmazó CD-je.

Róka Sándor 1982-ben szerzett matematikusi és középiskolai matematikatanári diplomát Debrecenben, a KLTE-n. 8 évig középiskolában tanított, 1985-től dolgozik a Bessenyei György Tanárképző Főiskola Matematika Tanszékén. 1997-ben lett főiskolai docens. 1983-ban és 1984-ben is 3. díjazott lett a Társulat Matematikatanárok versenyén. 1986-tól tart tehetséggondozó városi szakkört diákoknak, szakkörösei rendszeresen az élmezőnyben végeznek az országos versenyeken. Megyei matematikaversenyek feladatsorainak összeállítását végzi évek óta. A miskolci városi középiskolás matematikaverseny, a Bede Lajos emlékverseny feladatsorait ő állította össze az elmúlt 6 évben; 5-6 éven át ő készítette a Bereznai Gyula emlékverseny feladatsorait. Az elmúlt években sok feladatát kitűzték a Zrínyi Ilona Matematikaversenyen. A KöMaL-ban közel 30 feladatjavaslatát tűzték ki a pontversenyben. A Rátz László Vándorgyűlésen többször vezetett feladatmegoldó szemináriumot, s gyakran szerepel előadóként tanártovábbképzéseken is. A tanárképző főiskolán az „Elemi matematika" szemináriumok keretében készíti fel a tanárjelölteket a tehetséggondozásra, a szakköri munkára. Különböző lapokban 20-nál több tehetséggondozással, szakköri munkával kapcsolatos cikke jelent meg. 1992-ben jelent meg az 1000 feladat az elemi matematika köréből c. feladatgyűjteménye, amely a szakköri munkát, a versenyekre való készülést segíti. Azóta további könyvei is megjelentek, melyek segítik a tehetséggondozást és a matematika népszerűsítését. 1990-től kezdve 8 éven át, minden tanévben megszervezett egy nyolcfordulós feladatmegoldó pontversenyt 10–14 éveseknek. Ezen az országos levelező tehetséggondozó versenyen a résztvevők száma rendszeresen 1000 körül volt. 1994 őszén indította az ABACUS, matematikai lapok 10–14 éveseknek c. lapot, s ettől kezdve az ABACUS ad teret a pontversenynek. Annyira kedvező volt a lap fogadtatása, hogy túlnőtt az „egyszemélyes" kiadás keretein, ezért 1998 őszétől a Lap a BJMT és a MATEGYE Alapítvány gondozásába került.

Számadó László 1986-ban kezdett tanítani az akkor alapított Veres Péter Gimnáziumban. A matematika szakcsoport vezetőjeként úgy tervezte meg az első tanévet, hogy az hagyományteremtő lett. Az első tanévtől folyamatosan minden évfolyamon megrendezik a több fordulós matematika háziversenyt, amely döntővel zárul. Ez a verseny a kiindulópontja a gimnázium matematikában elért eredményeinek. Nagyon fontosnak tartja a matematikai folyóiratokat. A matematika népszerűsítése hozzátartozik a tanítási gyakorlatához. Tanítványainak nevével rendszeresen találkozhatunk a folyóiratok pontversenyeiben és egyéb matematika versenyeken. Feladatsoraival, cikkeivel, feladatjavaslataival rendszeres szereplője a KöMaL, A Matematika Tanítása, az ABACUS folyóiratoknak. Általa összeállított Mérőlap felvételire készülőknek 1989-től évente jelenik meg a KöMaL-ban. Számos matematika, ill. matematikát népszerűsítő könyv szerzője, vagy társszerzője, ill. lektora. 1988-89-ben az MTA Matematikai Kutatóintézetének ösztöndíjasa volt. A Rátz László vándorgyűlésen, ill. a Varga Tamás (matematikai) módszertani napokon többször tartott előadást, évek óta különböző bizottságokban dolgozik, az ABACUS matematikai lapok szerkesztőbizottságának tagja 1998. szeptembertől, a Középiskolai Matematikai Lapok szerkesztőbizottságának tagja és a Fővárosi Pedagógiai Intézet középiskolai matematika szaktanácsadója 1999. szeptembertől.

Kothencz Jánosné 32 éve tanít iskolájában, elsősorban matematikát. Tanítványai körében igen népszerű, rendszeresen sokan vesznek részt a matematikai szakkör foglalkozásain, aminek következtében számos tanuló sikeresen szerepel megyei és országos versenyeken, a Csongrád megyei Kis Matematikusok levelező versenyén, a Kalmár László versenyen, a Zrínyi Ilona országos versenyen, Varga Tamás versenyeken, ahol több tanítványa ért el országos helyezést. Tanítványai közül többen sikeresen szerepelnek később a középiskolai matematikai versenyeken, a KöMaL pontversenyén. A Csongrád megyei matematika–fizika szakos tanárok alkotóműhelyének tagjaként részt vesz versenyfeladatok összeállításában, megyei és országos szintű versenyek szervezésében. Tapasztalatait továbbképző előadásokon és megyei szakfolyóiratokban megjelentetett cikkeiben osztja meg tanártársaival. Mint szakvezető tanár a tanárjelöltekre is kedvező hatást fejt ki a matematika megszerettetésében.

Nagy Márton fizikatanárként 1963-ban került Sopronba, ahol hamarosan felfigyeltek a fizikaversenyek iránti érzékenységére, szervezőkészségére. Tevékenységének köszönhetően a soproni versenyekből jelentős, országos versenyek nőttek ki. A 80-as évek elejétől kezdve szervezi a 10.

osztályosok számára a Mikola-verseny döntőjét, keze nyoma ott van a háromfordulós verseny minden fázisán. A határon túli (ausztriai, szlovákiai, romániai) magyar tanulók számára szervezi a Vermes Miklós fizikaversenyt. Ennek során szakmai kapcsolatok és barátságok is szövődnek a résztvevők között. Legújabb kezdeményezése a Fényes Imre olimpiai válogató verseny, amely néhány éve fontos szerephez jut az olimpikonok felkészítésében. Az ő irányításával működő Vermes Miklós Fizikus Tehetséggondozó Alapítvány biztosítja a megnyugtató gazdasági hátteret a tehetséggondozó munkához, a versenyekhez, az ezek eredményeit közlő, népszerűsítő kiadványok publikálásához. Nagy Márton érdeme, hogy szponzorként egy országos nagyvállalatot sikerült megnyerni a fizikai tehetséggondozás ügyének.

Holics László iskolájának ma is aktív vezetőtanára, évtizedek óta sikeres tankönyvíró tevékenységével népszerűsíti a fizikát. A KöMaL fizika szerkesztőbizottságának a legrégibb tagja, rendszeres feladatközlő, a fizika OKTV versenybizottságának elnöke, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat középiskolai oktatási szakcsoportjának tiszteletbeli elnöke. Aktívan részt vett a fizikatanítás különböző reformkísérleteiben: a szakosított tantervű („tagozatos”) oktatás, valamint az MTA Elnökségi Közoktatási Bizottsága által kezdeményezett reformok tanterveinek és tankönyveinek kidolgozásában. Iskolájában az elmúlt évtizedben sok diákkal szerettette meg a fizikát. Közülük jó néhányan szerepeltek sikeresen a rangos hazai és nemzetközi tanulmányi versenyeken, és a későbbiekben hivatásul a műszaki és a természettudományok művelését választották. Csupán a fizikusi, mérnöki pályán sikeresen helytálló, magasra ívelő karriert befutó tanítványainak száma több tucatra tehető. Gyakorlóiskolai vezetőtanárként az általános iskolai fizikaoktatásban is otthonosan mozog, és a hozzá beosztott tanárjelölteknek is képes megmutatni mind a fizika, mind a tanítás szépségeit.

Simon László 1957-ben szerzett középiskolai tanári oklevelet a KLTE Természettudományi Karán. Túrkevén először általános iskolában tanított, 1962 óta dolgozik folyamatosan a gimnáziumban. Egész életműve a természettudományos szemlélet elterjesztését, a fizika népszerűsítését szolgálta és szolgálja ma is. Igazi kísérleti fizikus, akinek szertárfejlesztő, eszközépítő munkáját a Fizikai Társulat már 1967-ben Mikola-díjjal ismerte el. Az alföldi kisváros és környékének igazi „lámpásaként” országos szintű, sőt néhány esetben nemzetközi figyelmet felkeltő eredményeket ért el tanítványaival. Eszközfejlesztő munkájába folyamatosan vonja be legjobb diákjait, akik az elmúlt évtizedekben és jelenleg is számos kísérleti pályázat sikeres résztvevői (KöMaL mérési feladatok, ATOMKI kísérleti pályázat, JATE kísérleti pályázat). Tanítványaival első díjat nyert az ELFT–BME–SIEMENS AG „A jövő technikájának fizikai alapjai” c. versenyén. Ma is sikerrel készíti fel tanítványait az „Ifjú kutatók nemzetközi konferenciájára”. Tudását önzetlenül adja át tanár kollégáinak is a fizikatanári ankétokon, valamint szakmai módszertani folyóiratokban.

Sebestyén Zoltán az általános iskolai kísérletező fizikaoktatás híve és sikeres megvalósítója. Saját tervezésű eszközeivel, összeállításaival számos elismerésben részesült az általános iskolai fizikatanári ankétokon, ahol minden évben nagy érdeklődéssel kísért műhelyfoglalkozást tart kollégái számára. Nem véletlen, hogy a Csákány Antalné–Károlyházy Frigyes szerzőpáros többek között őt kérte fel kísérleti tankönyvük kipróbálására, majd lektorálására. Értékes kritikájának, hasznos javaslatainak elismeréseként ma már harmadik szerzőként jelenik meg a neve a tankönyvön. A fizika népszerűsítését szolgálta az a PÉCS TV által közvetített fizika vetélkedő, amelyet 1999-ben szervezett 7. osztályos tanulók számára. Tanároknak eszközkészítő tanfolyamokat vezet, továbbképzéseket, kísérleti bemutatókat tart nemcsak Pécsett, de más városokban, sőt Erdélyben és a Felvidéken is. Az Öveges versenyen is tartott már kísérleti bemutatót, több esetben tagja volt a zsűrinek is. A magfizika általános iskolai tanításával kapcsolatos tapasztalatait a Fizikai Szemlében tette közzé. Tanítványait jó tanárként versenyezteti: nemcsak benevezi, de fel is készíti őket a legkülönbözőbb fizikaversenyekre.

KöMaL – 2000/1 MAT0001 cianmagentayellowblack2002. június 19. – 8:44 (6. lap)

Mikor kommutatív, illetve asszociatív a hatványozás?

Az összeadás és a szorzás jól ismert tulajdonságai a kommutativitás és az asszociativitás: ha a és b tetszőleges valós számok, akkor

$$a+b=b+a \qquad \text{és} \qquad a\cdot b=b\cdot a,$$

illetve

$$(a+b)+c=a+(b+c) \qquad \text{és} \qquad (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c).$$

Tudjuk azonban, hogy a hatványozás már nem rendelkezik ezzel a két tulajdonsággal; *tetszőleges* (a,b) számpárra (illetve (a,b,c) számhármasra) általában

$$a^b \neq b^a \qquad \text{és} \qquad (a^b)^c \neq a^{(b^c)}.$$

Ám ez még nem zárja ki azt, hogy bizonyos esetekben egyenlőség álljon fenn. Cikkünkben megkeressük az összes olyan (pozitív) valós számpárt és számhármast, amelyekre a hatványozás kommutatív, illetve asszociatív, segítségükkel pedig az egész és a racionális számok körében is megvizsgáljuk a kérdést.

A kommutatív eset

Jelölésünket némileg módosítva keressük tehát az $x^y=y^x$ egyenletet kielégítő x és y pozitív valós számokat. (Azért szorítkozunk a továbbiakban csak pozitív számokra, mert negatív alap esetén a hatványozás nincs minden kitevőre definiálva a valós számkörben, valamint az az eset sem különösebben érdekes, ha x vagy y valamelyike 0-val egyenlő.) Az elinduláshoz – mint új problémák esetén oly gyakran – először próbáljunk egy-két megoldást megsejteni. Viszonylag hamar rátalálhatunk az $x=2$, $y=4$ számpárra (természetesen az egyenlet szimmetriája miatt a fordított szereposztás is megfelelő). Mivel több egész megoldás nem látszik, próbálkozzunk gyökös kifejezésekkel. Ha szerencsénk van, rájöhetünk, hogy $x=\sqrt{3}$ és $y=3\sqrt{3}$ megfelelő, ugyanis

$$\left(3\sqrt{3}\right)^{\sqrt{3}}=\left(\sqrt{3}^{3}\right)^{\sqrt{3}}=\sqrt{3}^{(3\sqrt{3})}.$$

Itt a hatványozás jól ismert tulajdonságán kívül azon múlott a dolog, hogy $3\sqrt{3}$ felírható, mint $\sqrt{3}^{3}$. Némi további gondolkodás után rátalálunk az $x=\sqrt[3]{4}$, $y=4\sqrt[3]{4}$ párra; ez is jó, hiszen

$$\left(4\sqrt[3]{4}\right)^{\sqrt[3]{4}}=\left(\sqrt[3]{4}^{4}\right)^{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{4}^{\left(4\sqrt[3]{4}\right)}.$$

A lényeg itt is az, hogy $4\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{4}^{4}$. Mindkét (sőt, mindhárom) példában megfigyelhetjük, hogy $y=vx$ alakú, ahol $vx=x^v$. Próbáljunk meg ezen a nyomon elindulni.

A fenti észrevétel szerint keressük y-t $y=vx$ alakban, ahol v valós paraméter. (Úgy is fogalmazhatunk, hogy bevezetjük a $v=\dfrac{y}{x}$ új változót. Nyilván $v>0$.) Ekkor az egyenlet így írható át:

$$(vx)^x=y^x=x^y=x^{vx}=(x^v)^x.$$

Mivel itt minden érték pozitív, a két szélső kifejezést $\dfrac{1}{x}$-edik hatványra emelve adódik, hogy $vx=x^v$, tényleg ezen múlik a megoldás. Most $\dfrac{1}{x}$-szel szorozva kapjuk, hogy $v=x^{v-1}$. Ha $v\neq 1$ – azaz $x\neq y$ –, akkor $\dfrac{1}{v-1}$-edik hatványra emelve $x=v^{\frac{1}{v-1}}$-et nyerjük. y-ra pedig ezt kapjuk:

$$y=vx=v\cdot v^{\frac{1}{v-1}}=v^{\frac{1}{v-1}+1}=v^{\frac{v}{v-1}}=x^v.$$

Ha viszont $v=1$, akkor $y=x$ adódik, ami nyilván megoldás.

A továbbiakban gyakran szerepel a fenti, x-re kapott kifejezés, vezessük erre be a $h(v)$ jelölést: legyen $h(v)=v^{\frac{1}{v-1}}$. A $h(v)$ függvény értelmezési tartománya az 1-től különböző pozitív valós számok halmaza, értéke nyilván mindig pozitív.

Megkaptuk a *lehetséges* megoldásokat, hátravan még annak ellenőrzése, hogy ezek *tényleg* megoldások-e. A $v=1$ esetben, ha x tetszőleges pozitív valós szám, akkor $y=x$ nyilván megoldás; nevezzük ezeket *triviális* megoldásoknak. Ha $v\neq 1$, akkor $x=h(v)$ és $y=v\cdot h(v)$ szintén megoldások (hívjuk őket *nemtriviális* megoldásoknak), hiszen mint láttuk, $y=vx=x^v$, és így

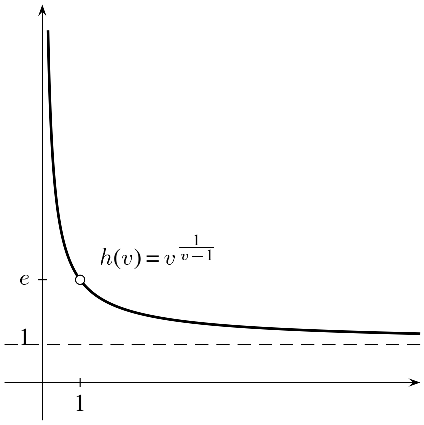
$$y^x=\left(x^v\right)^x=x^{vx}=x^y.$$

Első célunkat elértük, előállítottuk az $x^y=y^x$ egyenlőségnek eleget tevő (x,y) pozitív valós számpárokat: (x,x), illetve $(h(v), v\cdot h(v))$ alakban ($v>0$, $v\neq 1$).

A talált $h(v)$ függvény érdekes tulajdonságokkal rendelkezik. Ha $v>0$, $v\neq 1$ továbbra is, akkor $h(v)$ az az érték, amelynél mindegy, hogy megszorozzuk-e v-vel, avagy a v-edik hatványra emeljük, eredményül ugyanazt kapjuk: $v\cdot h(v)=h(v)^v$, ahogy azt az imént láttuk. Egy másik függvényegyenlet, amelynek h eleget tesz, a következő: $v\cdot h(v)=h\left(\dfrac{1}{v}\right)$, illetve az osztással adódó $h(v)=\dfrac{1}{v}\cdot h\left(\dfrac{1}{v}\right)$ alak. (Gyakorlásként ellenőrizzük helyességüket.)

Ebből az is látszik, hogy a nemtriviális megoldások $\left(h(v), h\left(\dfrac{1}{v}\right)\right)$ alakba is írhatók, tehát az (x,y) párból a $v\to\dfrac{1}{v}$ helyettesítéssel az (y,x) megoldást kapjuk.

A h függvény nem értelmes, ha $v=1$, ugyanakkor megmutatható, hogy szigorúan monoton fogyó, és $\lim\limits_{v\to 1} h(v)=e$ (a természetes alapú logaritmus alapszáma, $e=2{,}71828\ldots$)



1. ábra

Egy kis analízis

Szeretnénk az $x^y = y^x$ egyenlet fent nyert megoldásait grafikusan ábrázolni. A triviális megoldás az x; y koordinátasíkon az 1. negyed szögfelező egyenese (vagyis az $y = x$ egyenletű félegyenes, x, $y > 0$ esetén). A nemtriviális megoldás viszont nem a szokásos $y = f(x)$ alakban áll előttünk: y-t nem x függvényeként sikerült megkapnunk, hanem x is és y is a v paraméter függvénye. A talált jellemzésből ugyanakkor látszik, hogy a h értékkészletébe tartozó tetszőleges x-hez egy és csak egy tőle különböző y tartozik, amelyre $x^y = y^x$, így az $f : x \to y$ függvény mindenesetre létezik. Elvben nem is lenne akadálya, hogy a nemtriviális megoldásokat ilyen $(x, f(x))$ alakba írjuk. Jelölje ugyanis $h^{[-1]}$ a fent definiált h függvény inverz függvényét (h szigorú monotonitása miatt ez létezik), ekkor $x = h(v)$-ből $v = h^{[-1]}(x)$, így $(h(v), v \cdot h(v)) = (x, h^{[-1]}(x) \cdot x)$ a keresett alakú (az $f(x) = x \cdot h^{[-1]}(x)$ választással). Ez az átalakítás azonban nem ad lényeges információt a továbblépéshez, mert az $x = h(v)$ egyenletből v kifejezése, vagyis a $h^{[-1]}$ függvény meghatározása elemi módon („képlettel") – úgy tűnik – nem lehetséges.

Így a paraméteres előállításban szereplő két függvény, $h(v)$ és $v \cdot h(v)$ viselkedését vizsgáljuk tovább; ennek eredményeként az általuk (mint koordinátafüggvények által) leírt görbét – a nemtriviális megoldásokat – fel fogjuk tudni vázolni. Ezt a görbét a triviális megoldással egy koordináta-rendszerben ábrázolva kapunk teljes képet az egyenlet pozitív valós megoldásairól.

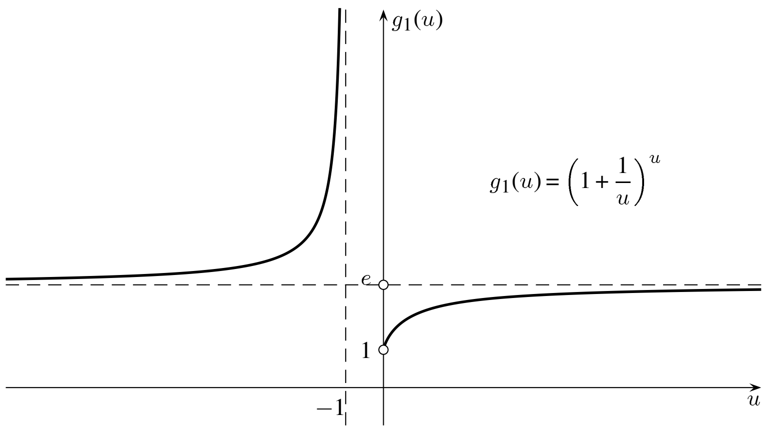
A vizsgálathoz szükség van a határérték és a derivált fogalmára (néhány nevezetes határértékkel együtt); részben emiatt, részben pedig terjedelmi okokból ezeket a bizonyításokat nem közöljük.

Bizonyos mértékben egyszerűsíti a továbbiakat (és egyéb összefüggésekre mutat rá), ha ismét új változót vezetünk be, „átparaméterezzük" függvényeinket. Jelölje u a $h(v)$ függvényben v kitevőjét, azaz $u = \dfrac{1}{v-1}$. Ebből $v = 1 + \dfrac{1}{u}$ adódik. Függvényeink ezzel az új változóval a

$$h(v)=\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}, \qquad \text{illetve a} \qquad v\cdot h(v)=\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u+1}$$

alakot öltik. Jelöljük az u változó ezen új függvényeit rendre $g_1(u)$, illetve $g_2(u)$-val. Nem nehéz látni, hogy a g_1 függvény grafikonja és a g_2 függvény grafikonja egymás tengelyes tükörképei. A tengely az $x=-\frac{1}{2}$ egyenes: a számegyenesen ugyanis egy u pont $\left(-\frac{1}{2}\right)$-re vonatkozó tükörképe $(-u-1)$, és u helyett $(-u-1)$-et helyettesítve g_1-ben a függvény éppen g_2-be megy át. Formálisan: $g_1(-u-1)=g_2(u)$, és fordítva, $g_2(-u-1)=g_1(u)$.

Elég tehát a továbbiakban pl. a g_1 függvénnyel foglalkozni, ebből g_2 tulajdonságai egyszerűen leolvashatók. Mivel v az 1-től különböző pozitív számokat futja be, könnyen ellenőrizhető, hogy a helyettesítés után u az $\mathbf{R}\setminus[-1,0]$ halmazon fog végigfutni (itt a szögletes zárójel a zárt intervallumot jelöli, $\mathbf{R}$ a valós számok halmaza). Ez tehát g_1 értelmezési tartománya. A g_1 függvény viselkedéséről a következő ismert határértékek nyújtanak felvilágosítást (értelmezési tartományának határpontjaiban vizsgálva):



2. ábra

$\lim\limits_{u\to\infty} g_1(u)=e$, alulról tartva.

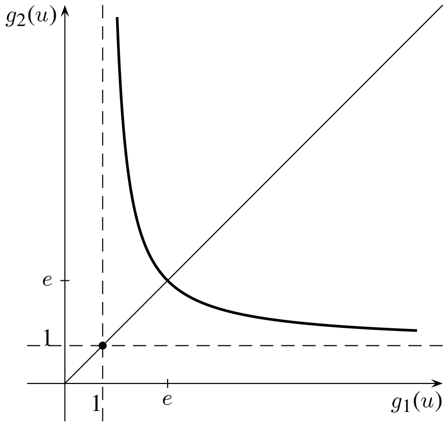
$\lim\limits_{u\to 0+0} g_1(u)=1$, felülről, ugyanis ez a (jobb oldali) határérték a $w=\frac{1}{u}$ helyettesítéssel visszavezethető $\lim\limits_{w\to\infty}\sqrt[w]{w+1}=1$-re.

$\lim\limits_{u\to -1-0} g_1(u)=+\infty$, hiszen az alap felülről 0-hoz tart, míg a kitevő (-1)-hez.

$\lim\limits_{u\to -\infty} g_1(u)=e$, felülről tartva, a $w=-u$ helyettesítéssel látható be.

A g_1 függvény folytonos az értelmezési tartományán. Megmutatható, hogy szigorúan monoton növő a $(-\infty;-1)$ és a $(0;+\infty)$ intervallumokon. A g_1 függvény grafikonját lásd a *2. ábrán.*

Minden lényeges információ a rendelkezésünkre áll a g_1 függvényről (és ezzel együtt „párjáról", g_2-ről is). Mindezeket figyelembe véve, ábrázolhatjuk az $x^y=y^x$ egyenlet nemtriviális megoldásait a $(g_1(u),g_2(u))$ paraméteres alakból, ahol $u\in\mathbf{R}\setminus[-1,0]$. (Természetesen ez ekvivalens az eredeti $(h(v),v\cdot h(v))$, $v>0$, $v\neq 1$ paraméterezéssel (*3. ábra*).) Amint u $(-\infty)$-től (-1)-ig nő, a $(g_1(u),g_2(u))$ pontok a 3. ábrán a jobb alsó görbedarabot írják le, mert az első koordinátafüggvény e-től ∞-ig nő, míg a második koordinátafüggvény e-től 1-ig csökken, szigorúan monoton módon. Amint pedig u 0-tól $+\infty$-ig nő, a $(g_1(u),g_2(u))$ pontok a bal felső görbedarabot fogják kirajzolni, ugyanis az első koordináta 1-től e-ig növekszik, a második koordináta $+\infty$-ről e-re csökken, szintén szigorúan monoton módon. A 45°-os egyenes, ahogyan e rész elején láttuk, a triviális megoldásból származott. A 3. ábrán látható az összes pozitív (x,y) számpár, amelyekre a hatványozás kommutatív. A megoldások szimmetriája azt jelenti, hogy a görbe szimmetrikus az $y=x$ egyenesre. A triviális és a nemtriviális megoldások görbéi az (e,e) pontban találkoznak.



3. ábra

Néhány egyszerű következmény

A fentiek alapján megállapíthatjuk például, hogy a hatványozás nem lehet kommutatív, ha az alap és a kitevő mindketten 1-nél kisebb, különböző számok, hiszen a nemtriviális esetben a g_1 és g_2 függvények értékei nagyobbak 1-nél. Hasonlóan látható a grafikonról, hogy ha x, $y>e$ és $x\neq y$, akkor x^y szintén nem egyenlő y^x-nel.

Ha az x^y kifejezésben x és y helyére beírjuk a paraméteres előállítást, akkor a

$$h(v)^{[v\cdot h(v)]}=v^{v^{\frac{v}{v-1}}\Big/(v-1)}$$

kifejezést kapjuk. Erről a függvényről belátható, hogy értékkészlete az (e^e,∞) intervallum. Ebből következik például, hogy ha egy x^y hatvány *értéke* kisebb e^e-nél és $x\neq y$, akkor $x^y\neq y^x$.

A pozitív valós megoldások után térjünk most rá az $x^y = y^x$ egyenlet pozitív egész, illetve pozitív racionális megoldásainak megkeresésére. A triviális eset egyszerű: bármely x egész, illetve racionális szám megfelelő ($y = x$, $x > 0$). A nemtriviális eset összetettebb. Az egész megoldásokat a grafikonról is leolvashatjuk: a bal felső ág első koordinátájára $1 < x < e$, és $e < 3$ miatt ilyen egész csak $x = 2$ lehet, ehhez pedig az $y = 4$ érték tartozik. Így a bal felső ág az egész rácspontok közül csak az $(x, y) = (2, 4)$-en halad át. A szimmetria miatt a jobb alsó ág egyetlen rácspontja az $(x, y) = (4, 2)$ pont. Az összes egész megoldást megtaláltuk.

Vizsgáljuk most a racionális megoldásokat. A v paraméter olyan értékeit keressük, amelyekre a $(h(v), v \cdot h(v))$ pár mindkét tagja pozitív racionális szám. Ha $h(v)$ racionális, akkor $v \cdot h(v)$ csak úgy lehet racionális, ha v maga is racionális, mert $h(v)$ mindig pozitív. v-t így elég a $\frac{p}{q}$ alakú számok közt keresnünk, ahol p, q pozitív egészek, és föltehető, hogy relatív prímek. Figyelembe véve, hogy nemtriviális megoldást keresünk, $v \neq 1$ kell legyen, ezért $p \neq q$. Láttuk, hogy ha v helyett $\frac{1}{v}$-t írunk a paraméterezésben, mindössze annyi történik, hogy x és y felcserélődnek. Ezért elég a $v > 1$ esettel foglalkozni, elég tehát $p > q$-t nézni. (Azaz csak a 3. ábra bal felső ágán vizsgálódunk.) Az egész megoldásokat már megkaptuk, $q = 1$-gyel sem kell törődnünk. Emiatt $p > q > 1$ is feltehető. Beírva v helyére $\frac{p}{q}$-t, kapjuk, hogy

$$h(v) = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p-q}}.$$

Legyen $m = p - q$, ekkor $m \geq 1$ egész. Megmutatjuk, hogy ha $m > 1$, akkor $h\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[m]{\frac{p^q}{q^q}}$ nem lehet racionális. Most $(p, q) = 1$, ezért a $\frac{p^q}{q^q}$ tört sem egyszerűsíthető. Egy ilyen tört m-edik gyöke viszont csak úgy lehet racionális, ha a számlálója és a nevezője is teljes m-edik hatvány.

Legyen ugyanis $\sqrt[m]{\frac{r}{s}} = \frac{a}{b}$, ahol $(r, s) = 1$, $(a, b) = 1$ föltehető és r, s, a, $b > 0$. Ekkor $\frac{r}{s} = \frac{a^m}{b^m}$, másrészt $(a, b) = 1$-ből $(a^m, b^m) = 1$ következik. Mivel egy racionális szám egyszerűsített alakja egyértelmű (a számláló és a nevező pozitív), mind r, mind pedig s teljes m-edik hatvány.

Így ha most $h\left(\frac{p}{q}\right)$ racionális, akkor $p^q = a^m$ és $q^q = b^m$. Megmutatjuk, hogy ha q és m relatív prímek – ami most teljesül, hiszen $p = q + m$ és $(p, q) = 1$ –, akkor p is és q is teljes m-edik hatványok.

Valóban, ha egy tetszőleges prímszám kitevője a p prímtényezős felbontásában k, akkor p^q-ban $k \cdot q$, ami most osztható m-mel. Innen pedig $(m, q) = 1$ miatt $m \mid k$ következzik, a p tehát valóban teljes m-edik hatvány. Ugyanígy kapjuk, hogy a q is teljes m-edik hatvány.

Az $m=p-q$ egyenlőség ezután már nem lehetséges, hiszen két különböző m-edik hatvány különbsége nagyobb, mint m. Ha ugyanis $t_1>t_2>0$ egészek, akkor

$$t_1^m-t_2^m=(t_1-t_2)\left(t_1^{m-1}+t_1^{m-2}t_2+\ldots+t_1t_2^{m-2}+t_2^{m-1}\right),$$

és a jobb oldal határozottan nagyobb, mint $(t_1-t_2)\cdot m\cdot t_2^{m-1}$, ami legalább m.

Ezzel igazoltuk, hogy ha $m=p-q>1$, akkor $h\left(\frac{p}{q}\right)$ irracionális.

Maradt az $m=1$, azaz a $p=q+1$ eset. Ekkor $h(v)=\left(\frac{q+1}{q}\right)^q$, nyilván racionális, $v\cdot h(v)$-re pedig $\left(\frac{q+1}{q}\right)^{q+1}$ adódik. q helyett a szokásosabb n változóval felírva megkaptuk a pozitív racionális megoldásokat

$$x=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad \text{illetve} \qquad y=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

ahol $n>1$ egész. (Ha $n=1$, akkor az $x=2$, $y=4$ megoldást kapjuk meg újra.) Természetesen x és y most is felcserélhetők. Ezek tehát a 3. ábra nemtriviális görbéjének azon pontjai, amelyeknek mindkét koordinátája racionális.

Az analízisben az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, illetve az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ számokból képezett sorozatok azért nevezetesek, mert mindkettőjük határértéke ($n\to\infty$ esetén) az e szám. Általában éppen így definiálják az e számot. Mi most egy másik különleges tulajdonságukat találtuk: a hatványozás a (különböző, pozitív) racionális számok körében csak ezen számok esetén kommutatív.

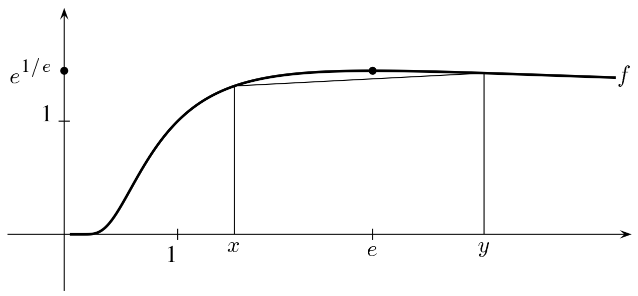
Egy másik megközelítés

A kommutatív eset lezárásaként megemlítünk egy másik utat, amelyen az $x^y=y^x$ egyenlet vizsgálatakor elindulhatnánk. Tulajdonképpen az egyenlet (ekvivalens módon történő) átfogalmazásáról van szó: ha mindkét oldalt $\frac{1}{x\cdot y}$-adik hatványra emeljük ($x,y>0$), akkor az $x^{\frac{1}{x}}=y^{\frac{1}{y}}$ alakhoz jutunk. Az eredetihez képest itt a két oldalon *ugyanannak* a függvénynek két (nem feltétlenül különböző helyen vett) helyettesítési értékéről van szó: az $f(t)=t^{\frac{1}{t}}$ ($t>0$ valós szám) jelölés bevezetésével az egyenlet az $f(x)=f(y)$ (eredetivel ekvivalens) alakot ölti.

Nyilván megoldást kapunk, ha $x=y$. A kérdés az, hogy $x\neq y$ esetén állhat-e egyenlőség. Némi elemzéssel (határérték, monotonitás) az f függvényről megállapítható, hogy a $(0,1]$ jobbról zárt intervallumot önmagára képezi (kölcsönösen egyértelműen), míg az $(1,e)$, illetve (e,∞) nyílt intervallumokat mind az $\left(1,e^{\frac{1}{e}}\right)$ intervallumra képezi.

(Az $(1, e)$ intervallumon szigorúan monoton nő, (e, ∞)-en szigorúan monoton csökken.) Ezekből következik (a függvény folytonosságát használva), hogy az eredeti egyenletnek van nemtriviális megoldása: $1 < x < e$ esetén van olyan y, amelyre $f(x) = f(y)$ (ekkor a fentiekből $e < y < \infty$ adódik, és y egyértelmű). Persze fordítva is igaz: minden $e < x < \infty$ számhoz létezik egyetlen olyan y szám $(1 < y < e)$, amelyre $f(x) = f(y)$ (*4. ábra*). Az $x \in \in (0, 1]$, illetve $x = e$ számok esetén csak $y = x$ mellett lehet $f(x) = f(y)$.

Összefoglalva, az $x \in (0, 1]$ vagy $x = e$ számokhoz egyetlen y, míg az $x \in (1, e)$ vagy $x \in (e, \infty)$ számokhoz két olyan y létezik, amelyekre $x^y = y^x$. Ebben a megközelítésben, ha nem is maguk a megoldások, de legalább a megoldások *száma* könnyen kideríthető.



4. ábra

Az asszociatív eset

Feladatunk most az összes olyan pozitív valós (x, y, z) számhármas megkeresése, amelyre

$$\left(x^y\right)^z = x^{(y^z)}.$$

A bal oldal nyilván x^{yz} alakban is felírható. Ha $x \neq 1$, akkor $yz = y^z$ adódik. Éppen ezzel a feltétellel talákoztunk a kommutatív eset vizsgálatakor. Ha $z = 1$, akkor minden pozitív y megoldás, egyébként $y = h(z)$.

Megkaptuk az összes pozitív valós számhármast, amelyekre a hatványozás asszociatív (lásd az *5. ábrát*):

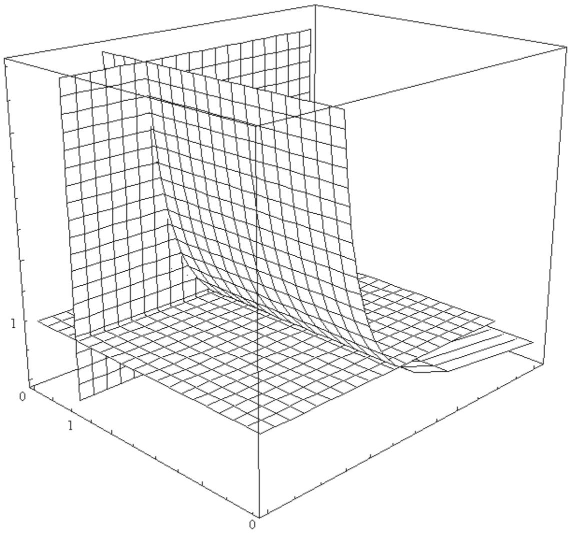
$$\begin{array}{lll} (1, y, z), & \text{ahol} & y, z > 0, \\ (x, y, 1), & \text{ahol} & x \neq 1,\ x, y > 0, \\ (x, h(z), z), & \text{ahol} & x \neq 1, z \neq 1;\ x, z > 0. \end{array}$$

Az egész és racionális megoldások

A racionális megoldásokat – a kommutatív esetben elvégzett vizsgálatoknak köszönhetően – könnyen felírhatjuk. A valós megoldásokból kiindulva látható, hogy a pozitív, racionális számok körében a hatványozás akkor asszociatív, ha az (x, y, z) hármas az alábbiak valamelyikével egyezik meg:

$(1, y, z)$,	ahol y, $z > 0$ racionális számok,
$(x, y, 1)$,	ahol $x \neq 1$, x, $y > 0$ racionális számok,
$\left(x, \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n, \dfrac{n+1}{n}\right)$,	ahol x pozitív racionális $(x \neq 1)$, n pozitív egész,
$\left(x, \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}, \dfrac{n}{n+1}\right)$,	ahol x pozitív racionális $(x \neq 1)$, n pozitív egész.

Ezek közül az első két sor nyilvánvaló. Az utolsó két sor az $(x, h(z), z)$ alakból származik: a kommutatív esetben ugyanis éppen azt vizsgáltuk meg, hogy racionális v mellett $h(v)$ mikor racionális. (Itt v helyett most z a változó.) Ott azt kaptuk, hogy ha $v = \dfrac{p}{q}$ és $p > q > 1$ egészek, akkor $h(v)$ pontosan akkor racionális, ha $p = q + 1$. Ebből adódik a harmadik sor (q helyett n-nel felírva, a $q = 1$ esetet is megengedve). Végül, ha $v = \dfrac{p}{q}$ továbbra is, de $q > p \geq 1$, akkor a kommutatív esetben talált bizonyítás – p és q szerepének felcserélésével – ugyanúgy elvégezhető, ebből egyetlen lehetséges megoldásként $q = p + 1$ adódik. Ezt tartalmazza a negyedik sor. (A $p = q$ esettel pedig $z \neq 1$ miatt nem kell foglalkoznunk.)



5. ábra

Az egész megoldások a fentiekből származtathatók (a fenti harmadik sorban csak az $n=1$ eset szolgáltat egész értéket, az utolsó sor esetén pedig egyáltalán nincs ilyen n):

$(1, y, z)$, ahol y és z pozitív egészek,

$(x, y, 1)$, ahol $x \neq 1$, x és y pozitív egészek,

$(x, 2, 2)$, ahol $x > 1$ egész.

Lóczi Lajos
matematikus hallgató, ELTE

Szakköri feladatok II.

Lukács Sándor igazgató úr (barátom) emlékére

1. Határozza meg az a és a b paraméterek értékeit, ha az

$$x^3 - ax^2 + 18 = 0 \qquad \text{és az} \qquad x^3 + bx - 12 = 0$$

egyenleteknek két közös valós gyöke van. Oldja is meg az egyenleteket.

2. Igazolja, hogy minden háromszögben (a szokásos jelölésekkel)

$$(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right).$$

3. Oldja meg az

$$\log_{a^2 x} x^3 + \log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} \sqrt{x} > 2$$

egyenlőtlenséget a valós számok halmazán, ahol $a > 0$ valós paraméter.

4. Az ABC háromszög oldalainak hossza a, b, illetve c egység. ($a \geq b \geq c$), a súlyvonalak hossza rendre s_a, s_b, s_c.

a) Igazolja, hogy $2b^2 = a^2 + c^2$ pontosan akkor (akkor és csak akkor), ha $2s_b^2 = s_a^2 + s_c^2$.

b) Igazolja, hogy az ABC háromszög súlyvonalaiból mint oldalakból alkotott háromszög pontosan akkor hasonló az ABC háromszöghöz, ha $2b^2 = a^2 + c^2$.

Rábai Imre

KöMaL – 2000/1 MAT0001 cianmagentayellowblack2002. június 19. – 8:44 (16. lap)

Megoldásvázlatok, eredmények a II. mérőlap (1999/9. sz.) feladataihoz

1. Tükrözzük az ABC háromszög S súlypontját az AB oldal C_1 felezőpontjára, a tükörkép legyen S_c. Az ASS_c háromszög oldalai az ABC háromszög súlyvonalainak a kétharmada, és területe az ABC háromszög területének a harmada. Az ASS_c háromszög derékszögű, hiszen $1^2+2{,}4^2=2{,}6^2$. Ha az ABC háromszög területét T-vel jelöljük, akkor $\frac{T}{3}=\frac{\left(\frac{2}{3}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 2{,}4\right)}{2}$, ahonnan $T=1{,}6$ területegység.

2. Az egyenlet diszkriminánsa $D=4^2-4(3+2a-a^2)=4(a-1)^2$, így az egyenlet gyökei $x_1=a+1$, $x_2=3-a$.

Ha $x_1=2x_2$, akkor $a+1=6-2a$, $a=\frac{5}{3}$, ha $x_2=2x_1$, akkor $2a+2=3-a$, $a=\frac{1}{3}$.

3. $y^{\log_2 x}\equiv x^{\log_2 y}$ ($x>0$, $y>0$), hiszen mindkét mennyiség pozitív és 2-es alapú logaritmusuk egyenlő.

A második egyenletből $\frac{x}{y}=2$ ($x>0$, $y>0$), az első egyenletből $x^{\log_2 y}=1$, ahonnan $\log_2 y\cdot\log_2 x=\log_2 1=0$.

Ha $\log_2 x=0$, akkor $x_1=1$ és így $y_1=\frac{1}{2}$, ha $\log_2 y=0$, akkor $y_2=1$ és így $x_2=2$.

4. Ha $m=5$, akkor a kifejezés elsőfokú $(-3x+8)$, tehát felvesz negatív értékeket is.

Ha $m\neq 5$, akkor a kifejezés pontosan másodfokú, így akkor vesz fel minden valós x-re pozitív értéket, ha $5-m>0$ és a polinom diszkriminánsa negatív, azaz $9-4(5-m)(m+3)>0$, azaz $(m-1)^2<\frac{55}{4}$, $|m-1|<\frac{\sqrt{55}}{2}$, tehát $1-\frac{\sqrt{55}}{2}<m<1+\frac{\sqrt{55}}{2}$.

Mivel $1+\frac{\sqrt{55}}{2}<5$, ezért a feltétel akkor teljesül, ha

$$1-\frac{\sqrt{55}}{2}<m<1+\frac{\sqrt{55}}{2}.$$

5. Legyen a 60°-os szöget közrezáró két oldal a és b, a harmadik oldal c.

a) A feltétel szerint $4\sqrt{3}=\frac{ab\sqrt{3}}{4}$, $ab=16$. Mivel $a>0$, $b>0$ esetén $a+b\ge 2\sqrt{ab}$, ezért most $a+b\ge 8$, így akkor a legkisebb, ha $a+b=8$ és $a=b$, tehát $a=4$, $b=4$, amiből következik, hogy minden szög 60°, így $c=4$ egység.

b) A c akkor a legkisebb, ha c^2 $(c>0)$ a legkisebb. Most $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ és $2ab\cos\gamma=2\cdot 16\cdot\frac{1}{2}=16$, tehát $c^2=a^2+b^2-16$.

Az $(a-b)^2\ge 0$ egyenlőtlenségből $a^2+b^2\ge 2ab$ adódik, tehát most $a^2+b^2\ge 2\cdot 16$, ahol az egyenlőség $a=b$ esetén teljesül; most $a^2+b^2=16$, $a=b=4$.

A c^2 legkisebb értéke 16, a c legkisebb értéke 4, így a háromszög egyenlő oldalú.

6. Az AB egyenes egyenlete $4x+y-4=0$, az AB oldal hossza $AB=\sqrt{17}$ egység; az AB oldalhoz tartozó m magasságra $\sqrt{17}\cdot m=2\cdot 13$, $m=\dfrac{26}{\sqrt{17}}$.

A $C(c;6)$ pont a $4x+y-4=0$ egyenletű egyenestől $m=\dfrac{26}{\sqrt{17}}$ egység távolságra van, tehát

$$\frac{26}{\sqrt{17}}=\frac{|4c+6-4|}{\sqrt{17}}, \qquad \text{ahonnan} \qquad |4c+2|=26$$

és így $c_1=6$ vagy $c_2=-7$.

7. Mivel $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ azért $(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=1$. Felhasználva még, hogy $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$,

$$\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\cdot 4\sin^2 x\cdot\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\cdot\sin^2 2x=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x.$$

A feladat kérdésére térve, $\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\cos 4x\ge\dfrac{5}{8}$ pontosan akkor, ha $\cos 4x\ge-\dfrac{1}{2}$; $-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\le 4x\le\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

Az egyenlőtlenség megoldásai:

$$-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}, \qquad k\in\mathbf{Z}.$$

8. Tegyük fel, hogy az egyenletnek van megoldása. Ekkor

$$\sqrt{a-x}=1-\sqrt{-x}, \qquad a-x=1-x-2\sqrt{-x}, \qquad \sqrt{-x}=\frac{1-a}{2},$$

így az egyenletnek csak $x_0=-\left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2$ *lehet* megoldása. x_0 akkor megoldása az egyenletnek, ha behelyettesítve egyenlőséget kapnuk.

$$\sqrt{a+\left(\frac{a-1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2}=1, \quad \text{azaz ha} \quad |a+1|+|a-1|=2.$$

Ez utóbbi egyenlet megoldásai a $-1\le a\le 1$ számok. Az adott egyenletnek tehát $-1\le a\le 1$ esetén van megoldása és a megoldás $x=-\left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2$.

Rábai Imre

Sajtóhiba 1999/9

Elnézést kérünk, hogy a nyomda (pontosabban az elektronikus levelezés) ördöge tavalyi utolsó számunk 567. oldaláról eltűntette az összes hosszú ő betűt, és Szalay Zsófia nevét is – szándékunkon kívül – lerövidítette.

Talán egy kis vigasztalás, hogy ugyanúgy a technika fejlődésének köszönhetően a fényképek minősége sokkal jobb lett.

A szerk.

Kedvcsináló 3 CD-hez

Az Univerzum története

A nagysikerű angol CD-ROM-nak nemrég jelent meg a magyar változata. Aki a cím hallatán egy unalmas történelemkönyvre számít, az hamar csalódni fog: ez az összeállítás ugyanis az első percétől az utolsóig annyira színes, érdekes, játékos, hogy az embernek nincs kedve fölállni a képernyő elől, még akkor sem, ha eddig úgy gondolta, hogy egyáltalán nem érdekli a fizika vagy a csillagászat.

A CD két nagy részből áll: a *Gondolatok* és az *Észtágító* című fejezetekből. Először a *Gondolatokat* érdemes tanulmányozni, itt találjuk ugyanis az alapvetően fontos ismereteket, például a nagy tudósok: Kopernikusz, Galilei, Newton, Einstein stb. bemutatását, és olyan alapfogalmak magyarázatát, mint kvantummechanika, ősrobbanás, fekete lyuk, kvazár, szuperhúr vagy a minden létező dolog elmélete. A nagy tudósokról nemcsak felfedezéseik, elméleteik kapcsán kaphatunk képet, hanem megismerhetjük színes élettörténetüket, néhány legendás jellemvonásukat és róluk fennmaradt anekdotákat is, Az első hallásra bonyolultnak tűnő fogalmakat rengeteg kép, ábra, szemléletes példa magyarázza és egészíti ki, humoros szöveg és hangeffektusok is segítik a megértést.

Az *Észtágítóban* még izgalmasabb kérdésekkel találkozhatunk, például hogy mi történne, ha benyitnánk egy fekete lyukba, vagy hogy miért viselkedik különösen a fény, milyen sokáig tartana átszelni az Univerzumot, lehetséges-e az időutazás, mit üzenjünk más bolygók lakóinak, mikor és hol fog minden véget érni.

Nem lenne teljes a CD játékos feladatok, tesztek nélkül. Ezeket az *Ellenőrző feladatok* című fejezetben találhatjuk meg. A feladatok egy része teszt jellegű. Itt több szinten próbálgathatjuk megszerzett tudásunkat. A másik része pedig érdekes, gondolkodtató feladatokból áll, amelyek megoldásához fantáziára, ötletekre és némi számolgatásra lehet szükség. A CD internet címet is közöl, ahol szintén a témába vágó írásokat és feladatokat olvashatunk.

Összességében tehát elmondható, hogy egy remek CD-ROM-ot sikerült összeállítani, amely szinte minden érdeklődő gyermek vagy felnőtt figyelmére számot tarthat. Jól felhasználható iskolákban a fizika órák izgalmasabbá, élményszerűbbé tételére, de önképzésre, tartalmas kikapcsolódásra is kiválóan alkalmas.

Nincs királyi út – Matematikatörténeti interaktív taneszköz

„Nincs királyi út” mondta Euklidesz I. Ptolemaiosz királynak, aki úgy gondolta, hogy a geometriát egy álmos délután csak úgy, időtöltésül majd megismeri. Ebből az anekdotából keletkezett Sain Márton könyvének címe, amely a matematika kultúrtörténetéről szól, és ezt a címet kapta a CD-ROM is, amely az 1986-ban kiadott könyv óriási művelődéstörténeti hátterét tovább bővíti multimédiás lehetőségeivel.

Az átdolgozás az eredeti könyv szerkesztőjének, Gerner Józsefnek a munkája. A CD-ről olvasható szöveg a műfaj korlátai miatt kevesebb, azonban a gazdag képanyag összeállítását végző Herczeg Jánosnak köszönhetően mintegy 200 műalkotást csodálhatunk meg benne, amelyek a képzőművészet és a matematika egymásra hatását mutatják be.

Ez a teljesen hazai fejlesztésű korszerű és színvonalas technikájú interaktív taneszköz a matematikusok életrajza és tudományterületeik közötti kapcsolatrendszerek megjelenítésén túl a korhoz illő festményeket, műalkotásokat, fotókat, néhány videót, több animációt, tesztet és játékot is tartalmaz. A CD-ROM mind tartalmát, mind formáját és megjelenését tekintve kiválóan használható úgy az otthoni ismeretszerzésben, mint a tanításban, a tudomány- és kultúrtörténet iránt érdeklődő diákok és tanárok számára.

Szakirodalmak a matematika tanításához

Dr. Katz Sándor összeállításában készült el CD-ROM-on ez az egyszerűen és praktikusan használható „böngésző”, amely kb. 1100 könyv, monográfia, feladatgyűjtemény, tankönyv és egyéb szakkönyv adatait tartalmazza. Ezenkívül kb. 1900 folyóiratcikk legfontosabb paraméterei szerint válogathatunk, közülük 200-at teljes terjedelmében tartalmaz a CD. A matematikát tanítókon kívül mindazoknak ajánljuk, akik érdeklődnek a matematika és tanítása iránt.

Mindhárom CD a TypoTEX kiadónál kapható (1024 Budapest, Retek u. 33. Telefon: 316-3759.).

Miskolci beszámoló

A Miskolci Ifjúsági Matematikai Egyesület és a Bolyai János Matematikai Társulat Borsod Megyei Tagozata 1999. augusztus 15. és 22. között rendezte meg Miskolcon az Ifjúsági Matematikai Konferenciát és Tábort középiskolás diákok számára. Ez már a második alkalom volt, először 1997-ben került sor ilyen rendezvényre. A szervezőket az a szándék vezeti, hogy a minden páros évben megrendezésre kerülő kongresszusok közti nyarak se teljenek „eseménytelenül” a matematikát szerető diákok számára.

A rendezvény helyszíne a miskolci Hermann Ottó Gimnázium volt. A délelőtti program minden nap a diákok előadásával indult. A különböző országokból érkezett előadók többsége angol nyelven mutatta be a matematika egy-egy kevéssé ismert területét, de voltak, akik önálló munkájuk eredményét mondták el a hallgatóságnak. Ezután neves meghívott előadók következtek: *Nemetz Tibor, Pelikán József, Urbán János, Körtesi Péter, Gerőcs László.* Az előadásokat délutánonként feladatmegoldó szemináriumok, majd újabb diákelőadások követték. Sor került egy Erdős Pálról szóló videofilm negtekintésére is.

A tábor nemcsak matematikai élményeket nyújtott: a hét egy jó hangulatú ismerkedési esttel kezdődött, kitűnően sikerült a táncház, tartalmas kirándulást tettünk Egerbe, Szilvásváradra. Az egy hét alatt a magyar és külföldi diákok, illetve tanáraik összeismerkedhettek, barátságokat köthettek egymással.

Köszönet illeti *Körtesi Pétert,* aki nemcsak a matematikai tartalommal törődött mint rendező, de a szervezés egyéb, milliónyi gondját is magára vállalta, és hálásak lehetünk a Hermann Ottó Gimnáziumnak, amely nemcsak helyet adott a rendezvénynek, de pazar vendéglátásban is részesítette a résztvevőket. Reméljük, hogy ebből a kezdeményezésből igazi hagyomány válik a jövőben!

Kertai Helga, Spisák Andor

Ifjúsági Matematikai Kongresszus 2000

2000. július 3. és 8. között rendezik meg Miskolcon a barcelonai III. Európai Matematikai Kongresszus kísérőrendezvényeként az előző beszámolóban feltüntetett szervezőkkel és helyszíneken a középiskolás korú matematika iránt érdeklődő diákok és tanáraik nemzetközi konferenciáját, amelyen az előző évekéhez hasonlóan színvonalas programok várják a résztvevőket.

Kérjük mindazokat, akik előadások szervezésében vagy támogatások elnyerésében segíteni tudnak, forduljanak dr. Körtesi Péterhez, a 3515 Miskolc, Egyetemváros, Pf. 10. vagy a `matjun@silver.uni-miskolc.hu` címen.

A további részleteket és a jelentkezés feltételeit a következő számunkban közöljük.

Matematika gyakorlatok megoldása

Gy. 3279. *Tíz gyerek „bogozódós” játékot játszik: körbe állnak, és csukott szemmel, kinyújtott kézzel elindulnak a kör közepe felé. Mindenki mindkét kezével megfogja valaki másnak a kezét. Ezután kinyitják a szemüket, és elkezdenek „kibogozódni”: átbújnak egymás keze alatt, átlépik egymás kezét stb. (mindenki kellően hajlékony) – de nem engedik el közben egymás kezét. Az összes eset hány százalékában igaz, hogy ha egy helyen két szomszédos gyerek elengedi egymás kezét, akkor a tíz gyerek egymás kezét fogva összefüggő láncot alkot?* (**H**)

Megoldás. Az utolsó mondat feltétele azt jelenti, hogy a 10 gyerek egyetlen „kört” alkotott, mielőtt ketten elengedték egymás kezét. A bonyolult megfogalmazás annak köszönhető, hogy ezen a körön csomó, önátmetszés is lehetséges. Nevezzük mindenesetre „körnek” a feltételnek eleget tevő, esetleg csomót is tartalmazó elrendezést. Azt állítjuk, hogy n gyerek $(2n-2)(2n-4)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2$-féleképpen alkothat „kört”.

Állításunk bizonyításához tekintsük az egyik gyereket, pl. Pistit kiindulásnak. Ő a jobbkezével $(2n-2)$ kezet foghat meg (mivel a feltételből következik, hogy senki sem fogja meg a saját kezét). Amelyik gyereknek megfogta valamelyik kezét, az a másik kezével már csak $(2n-4)$ kezet foghat meg, (Pisti balkezét megfogva bezárná a kört). Így haladva az utolsó előtti gyerek még választhat valakinek a két keze közül, aki viszont a másik kezével megfogja Pisti balkezét. Ez $(2n-2)(2n-4)\cdot\ldots\cdot 2$ lehetőség, amit röviden $(2n-2)!!$-sal jelölünk, és $2n-2$ szemifaktoriálisnak mondunk.

$n=10$ esetén ez 18!!. Ha a tíz gyerek nem alkot egy „kört”, akkor kisebb „körökbe” rendeződnek (amelyek egymáshoz viszonyított helyzete minket nem érdekel). A körök mérete 2-től 8-ig változhat. Adott méretekhez tartozó elrendezések számát úgy kapjuk meg, hogy a gyerekeket az adott méretű csoportokba osztjuk, majd az egyes csoportokon belül egymástól függetlenül elkészítjük a lehetséges köröket.

Ha például két darab 3-as és egy darab 4-es kör jön létre, akkor először

$$\binom{10}{3}\cdot\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{4}=\binom{10}{3}\binom{7}{3}\text{-féleképpen}$$

beosztjuk a gyerekeket, majd az egyes csoportokon belül $(6-2)!!$, $(6-2)!!$, illetve $(8-2)!!$-féleképpen elkészítjük a köröket. A beosztás során azonban megkülönböztetjük a két 3-as csoportot – és általában az azonos méretűeket – így itt minden lehetőséget 2-szer számolunk. Hasonlóan, a $(2,2,2,4)$-es csoportbeosztásokat például $3!=6$-szor, a $(2,2,3,3)$-asokat pedig $2!\cdot 2!$-szor számoljuk. Mindezeket figyelembe véve az alábbi lehetőségek adódnak. A lista elején az adott felosztásban szereplő csoportok méretét soroltuk fel, ez a 10 összes lehetséges előállítása 2 és 8 közé eső számok összegeként.

10; $(20-2)!!=185\,794\,560$

2, 8; $\binom{10}{2}\cdot(4-2)!!\cdot(16-2)!!=58\,060\,800$

3, 7; $\binom{10}{3}\cdot(6-2)!!\cdot(14-2)!!=44\,236\,800$

5, 5; $\binom{10}{5}\cdot(10-2)!!\cdot(10-2)!!/2=18\,579\,456,$

mert minden esetet kétszer számoltunk.

2, 2, 6; $\binom{10}{6}\binom{4}{2}\cdot(4-2)!!\cdot(4-2)!!\cdot(12-2)!!/2=9\,676\,800$

2, 3, 5; $\binom{10}{5}\binom{5}{3}\cdot(4-2)!!\cdot(6-2)!!\cdot(10-2)!!=15\,482\,880$

2, 4, 4; $\binom{10}{2}\binom{8}{4}\cdot(4-2)!!\cdot(8-2)!!\cdot(8-2)!!/2=7\,257\,600$

3, 3, 4; $\binom{10}{4}\binom{6}{3}\cdot(6-2)!!\cdot(6-2)!!\cdot(8-2)!!/2=6\,451\,200$

2, 2, 2, 4; $\binom{10}{4}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\cdot(4-2)!!\cdot(4-2)!!\cdot(4-2)!!\cdot(8-2)!!/3!=1\,209\,600$

2, 2, 3, 3; $\binom{10}{3}\binom{7}{3}\binom{4}{2}\cdot(4-2)!!\cdot(4-2)!!\cdot(6-2)!!\cdot(6-2)!!/(2\cdot 2)=1\,612\,800$

2, 2, 2, 2, 2; $\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\cdot\left((4-2)!!\right)^5/5!=30\,240.$

Ezek összege adja az összes lehetséges esetek számát, ami 387 099 936. A keresett hányados $\dfrac{185\,794\,560}{387\,099\,936}\approx 0{,}48$, tehát az eseteknek valamivel kevesebb, mint a felében alkot a tíz gyerek egyetlen „kört”.

Megjegyzés. Ha N gyereket akarunk elrendezni m_1 darab c_1, m_2 darab c_2, $\ldots$, m_k darab c_k méretű körbe $(m_1c_1+m_2c_2+\ldots+m_kc_k=N)$, akkor ez

$$\frac{N!}{c_{!}^{m_1}\cdot c_2!^{m_2}\cdot\ldots\cdot c_k!^{m_k}}\cdot\frac{1}{m_1!\cdot m_2!\cdot\ldots\cdot m_k!}\cdot(c_1!!)^{m_1}\cdot(c_2!!)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(c_k!!)^{m_k}$$

módon lehetséges.

49 dolgozat érkezett. 6 pontos Kunszenti-Kovács Dávid, 5 pontos Bálint Gergely, Győri Nikolett, Harangi Viktor, Kovács Erika Renáta, Máthé András, Siska Ádám és Somogyi Dávid megoldása. 4 pontot kapott 9, 3 pontot 8, 2 pontot 13, 1 pontot 10, 0 pontot 1 beküldő.

Gy. 3281. *Egy téglatest egy csúcsba futó éleinek mérőszámai prímszámok, felszínének mérőszáma prímhatvány. Bizonyítsuk be, hogy az élei közül pontosan az egyik* 2^k-1 *alakú prímszám.*

Javasolta: *Kovács Ádám,* Budapest

Megoldás. Legyenek a téglatest élei a, b és c, felszíne pedig prímhatvány:

$$2(ab+bc+ca)=p^n \qquad (p \text{ prím, } n\geq 1 \text{ egész}).$$

Mivel $2\mid p^n$, ez csak úgy lehet, ha $p=2$, így

$$ab+bc+ca=2^{n-1}.$$

A bal oldal értéke nyilván nagyobb, mint 1, és így páros szám. Egyszerűen végiggondolható, hogy $ab+bc+ca$ csak akkor lehet páros, ha a, b és c közül legalább kettő páros. De a, b és c mindegyike prím, így pl. $a=b=2$ kell legyen.

Ekkor $2\cdot 2+2c+2c=2^{n-1}$, ahonnan

$$c=2^{n-3}-1 \qquad (n>4).$$

Tehát a téglatest két élének mérőszáma 2, a harmadik pedig valóban 2^k-1 alakú.

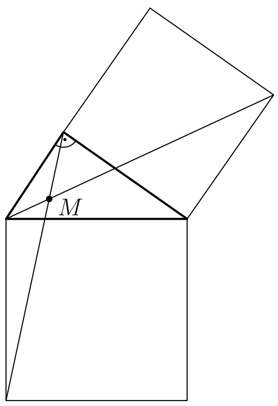
Tóth Mihály (Gyöngyös, Berze Nagy János Gimn., 9. o.t.)
Soós Károly (Szekszárd, Garay J. Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Ha $a=b=2$ és $c=7$, akkor a téglatest felszíne 64, valóban prímhatvány.

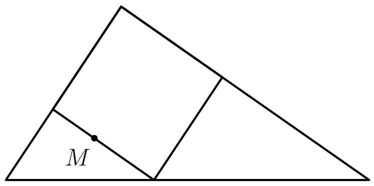
134 dolgozat érkezett. 5 pontos 128, 4 pontos 5, 0 pontos 1.

Gy. 3283. *Egy derékszögű háromszög egyik befogójára és átfogójára négyzetet rajzoltunk kifelé, és megszerkesztettük az* M *pontot az* 1. ábrának *megfelelően. Bizonyítsuk be, hogy* M *rajta van a háromszög beírt négyzetének kerületén (*2. ábra*).*

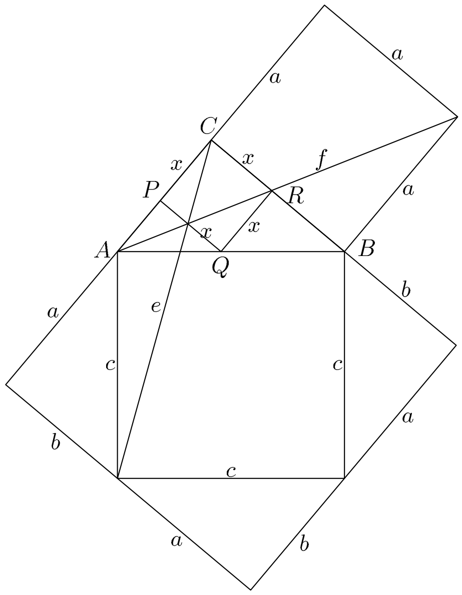
Javasolta: *Herczeg János,* Budapest



1. ábra



2. ábra



3. ábra

Megoldás. Jelöljük a, b, c-vel a feladatbeli derékszögű háromszög oldalait, A, B, C-vel a csúcsait, továbbá x-szel a beírt négyzet ($CPQR$) oldalát.

Az ábrának megfelelően az átfogóra emelt négyzet minden oldalára másoljuk át az ABC háromszöget, így egy $a+b$ oldalú négyzetet kapunk. Vegyük észre, hogy a C csúcsból megfelelő arányban kicsinyítve az $a+b$ oldalú négyzetet, az x oldalú beírt négyzetet kapjuk.

Ezért az e egyenes $b:a$ arányban osztja a kis négyzet PQ oldalát.

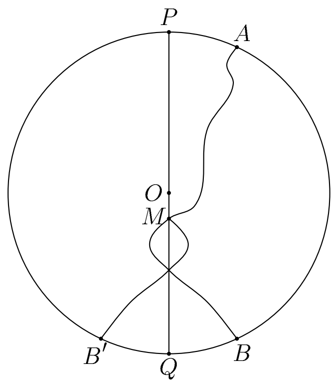
Ha a befogóra írt négyzetet A-ból $\dfrac{b}{a+b}$ arányban kicsinyítjük, akkor szintén a beírt négyzetet kapjuk, így $x=a\cdot\dfrac{b}{a+b}=$ $=\dfrac{ab}{a+b}$. A kicsinyítésből látszik, hogy R rajta van az f egyenesen, ezért R képe a kicsinyítésnél megegyezik PQ és f metszéspontjával. Tehát f a PQ szakaszt $CR:RB$ arányban osztja. Mivel

$$CR:RB=x:(a-x)=\frac{ab}{a+b}:\left(a-\frac{ab}{a+b}\right)=\frac{ab}{a+b}:\frac{a^2}{a+b}=b:a,$$

beláttuk, hogy e és f azonos arányban osztja PQ-t, így metszéspontjuk, M valóban rajta van PQ-n.

68 dolgozat érkezett. 5 pontos 59, 2 pontos 2, 1 pontos 4, 0 pontos 3.

Gy. 3284. *Igazoljuk, hogy ha egy körív felezi egy k kör területét, akkor hossza nagyobb k átmérőjénél.* (**H**)



Megoldás. A feladat állítását körív helyett tetszőleges vonalra is belátjuk. Legyen $\widetilde{AB}$ olyan vonal a kerület A és B pontjai között, amelyik felezi a kör területét. Ha A és B átellenes pontok a kör kerületén, akkor készen vagyunk, hiszen az $\widetilde{AB}$ összekötés hosszabb, mint az AB szakasz.

Ha A és B nem átellenes pontok, akkor tekintsük azt az – egyetlen – PQ átmérőt, amelyik párhuzamos az AB szakasszal. (Ha A és B egybeesik, akkor legyen PQ az $A=B$-ben a körhöz húzott érintővel párhuzamos átmérő.)

Most A és B a PQ átmérőnek ugyanazon az oldalán vannak, így ha $\widetilde{AB}$ felezi a körlap területét, át kell mennie a PQ határolta másik félkörlapra is. Létezik tehát az $\widetilde{AB}$ vonalon olyan M pont, amely rajta van PQ-n. Tükrözzük $\widetilde{MB}$-t PQ-ra, jelöljük ezt a vonalat $\widetilde{MB'}$-vel! Ekkor A és B' átellenes pontok k-n, mert $\overset{\frown}{PA} = \overset{\frown}{BQ} = \overset{\frown}{QB'}$.

Ha az $\widetilde{AM}$ és az $\widetilde{MB'}$ vonalakat egymáshoz fűzzük, akkor egy $\widetilde{AB'}$ vonalat kapunk, ami legalább olyan hosszú – valójában hosszabb –, mint az AB' átmérő, és ugyanolyan hosszú, mint $\widetilde{AB}$. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Kovács Erika Renáta (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.) megoldása alapján

87 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Kovács Erika Renáta és Máthé András. 5 pontos 72, 4 pontos 8, 3 pontos 3, 2 pontos 2 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása

F. 3275. *Keressük meg a* $\left(\frac{47}{245}, \frac{34}{177}\right)$ *nyílt intervallumban a legkisebb nevezőjű törtet.*

Megoldás. Jelölje a keresett törtet $\frac{a}{b}$, ahol a és b pozitív egészek és $\frac{47}{245} < \frac{a}{b} < \frac{34}{177}$. Az egyenlőtlenségekkel ekvivalens reciprokukat véve:

$$5 + \frac{7}{34} = \frac{177}{34} < \frac{b}{a} < \frac{245}{47} = 5 + \frac{10}{47}.$$

Látható, hogy $b > 5a$; legyen $b = 5a + x$, ezzel az előbbi egyenlőtlenségek:

$$\frac{7}{34} < \frac{x}{a} < \frac{10}{47}, \qquad \text{átrendezve} \qquad \frac{47}{10}x < a < \frac{34}{7}x.$$

A legkisebb olyan x pozitív egész, amelyre a nyílt $\left(\frac{47}{10}x, \frac{34}{7}x\right)$ intervallum tartalmaz egész számot, a 4; ekkor $a = 19$. Ha $x \geq 5$, akkor a $\left(\frac{47}{10}x, \frac{34}{7}x\right)$ intervallum minden eleme nagyobb $\frac{47}{2} > 23$-nál, tehát ilyenkor $b = 5a + x$ csak nagyobb lehet, mint $5 \cdot 19 + 4 = 99$. A keresett tört értéke így $\frac{a}{b} = \frac{19}{99}$.

Spanczér Ilona (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 9. o.t.)

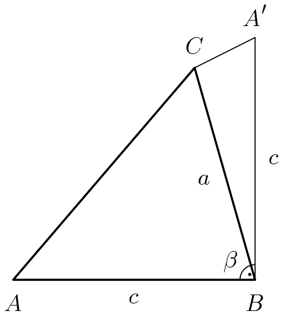
101 dolgozat érkezett. 5 pontos 64, 4 pontos 1, 3 pontos 2, 2 pontos 6, 0 pontos 28.

F. 3276. *Jelöljük az ABC rácsháromszög területét T-vel. Bizonyítsuk be, hogy ha*

$$(AB+BC)^2<8\cdot T+1,$$

akkor A, B és C egy négyzet három csúcsa.

W. L. Putnam Emlékverseny, 1998



Megoldás. Mivel A és C szerepe a feladatban felcserélhető, azért feltehetjük, hogy az ABC háromszög pozitív körüljárású. Legyen $AB=c$, $BC=a$, $ABC\sphericalangle=\beta$, és jelöljük A'-vel A-nak a B körüli -90°-os elforgatottját (*ábra*). Ekkor A' is rácspont, mert ha a $\overrightarrow{BA}$ koordinátái (x,y), akkor a $\overrightarrow{BA'}$ koordinátái $(y,-x)$, amik egész számok (mert A is és B is rácspont), s így A' koordinátái is egészek, mert egészek összegeként állnak elő.

Az $A'BC$ háromszögben a koszinusztétel szerint

$$A'C^2=BC^2+BA'^2-2BC\cdot BA'\cdot\cos(90^\circ-ABC\sphericalangle)=a^2+c^2-2ac\sin\beta.$$

Feltételünk szerint $(a+c)^2<8T+1$, ami a $T=\dfrac{1}{2}ac\sin\beta$ képletet felhasználva

$$-2ac\sin\beta<\frac{1}{2}\left(1-(a+c)^2\right)$$

alakra hozható. Tehát

$$(1)\qquad A'C^2=a^2+c^2-2ac\sin\beta<a^2+c^2+\frac{1}{2}\left(1-(a+c)^2\right)=\frac{1}{2}\left(1+(a-c)^2\right).$$

Ám a háromszög-egyenlőtlenség miatt $A'C\ge|BC-A'B|=|a-c|$ – itt egyenlőség is lehet, ha az $A'BC$ háromszög elfajuló –, vagyis $A'C^2\ge(a-c)^2$. Így

$$(a-c)^2\le A'C^2<\frac{1}{2}\left(1+(a-c)^2\right),$$

amiből kapjuk, hogy $(a-c)^2<1$. Ezt az (1) egyenlőtlenségbe visszaírva

$$A'C^2<\frac{1}{2}(1+1)=1$$

adódik. Két rácspont távolsága azonban csak akkor lehet 1-nél kisebb, ha a pontok egybeesnek, tehát $A'\equiv C$.

Vagyis az A-nak B körüli -90°-os elforgatottja C, azaz A, B és C valóban egy négyzet három csúcsa.

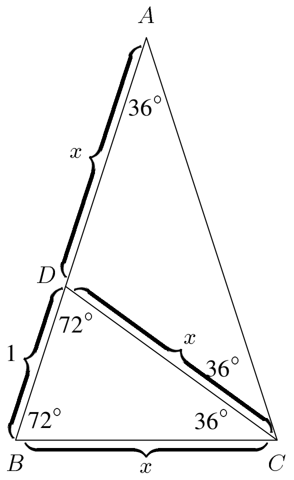
Terpai Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

48 dolgozat érkezett. 5 pontos Andrássy Zoltán, Baharev Ali, Baranyai Gábor, Barát Anna, Dancsó Zsuzsanna, Fehér Lajos Károly, Gelencsér Gábor, Gueth Krisztián, Györey Bernadett,

Harangi Viktor, Horváth 202 Gábor, Kiss Norbert, Kunszenti-Kovács Dávid, Lábó Eszter, Lábó Melinda, Máthé András, Naszódi Gergely, Papp Dávid, Poronyi Gábor, Schlotter Ildikó, Szabadka Zoltán, Szakács László, Taraza Busra, Terpai Tamás, Torda Péter, Vitéz Ildikó és Zempléni Márton megoldása. 4 pontot kapott 2, 2 pontot 6, 0 pontot 13 beküldő.

F. 3277. *Egy szabályos ötszög csúcsaiba a középpontból a v_1, v_2, …, v_5 vektorok mutatnak. Tegyük fel, hogy a k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 egészekre teljesül, hogy $k_1v_1+k_2v_2+ +\ldots+k_5v_5=0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $k_1=k_2=\ldots=k_5$.*

Megoldás. A megoldás során szükségünk lesz $\cos 72^\circ$ és $\cos 144^\circ$ pontos értékére. Ezeket az *1. ábrán* látható 36°-os szárszögű egyenlő szárú háromszög segítségével számoljuk ki. Használjuk az ábra jelöléseit. Az ABC és a CDB háromszögek hasonlóak, mert megfelelő szögeik egyenlők, ezért $(1+x):x= =x:1$, amiből kapjuk, hogy $x=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$, s így $AB= =AC=\dfrac{3+\sqrt5}{2}$. Ezért

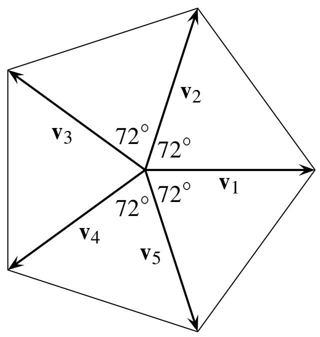


1. ábra

$$\cos 72^\circ=\frac{\frac{BC}{2}}{AC}=\frac{\frac{1+\sqrt5}{4}}{\frac{3+\sqrt5}{2}}=\frac{\sqrt5-1}{4},$$

amiből következik, hogy $\cos 144^\circ=2\cos^2 72^\circ-1= =\dfrac{-1-\sqrt5}{4}$.

Térjünk rá az eredeti feladatra. Feltehetjük, hogy a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_5$ vektorok a *2. ábrán* látható módon helyezkednek el, és mindegyikük hossza 1. Szorozzuk meg a $k_1\mathbf{v}_1+k_2\mathbf{v}_2+\ldots+k_5\mathbf{v}_5=\mathbf{0}$ egyenletet skalárisan a $\mathbf{v}_1$ vektorral. Ekkor kapjuk, hogy



2. ábra

$$k_1\mathbf{v}_1^2+k_2\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_1+k_3\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{v}_1+k_4\mathbf{v}_4\cdot\mathbf{v}_1+k_5\mathbf{v}_5\cdot\mathbf{v}_1=0.$$

De

$$\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_5\cdot\mathbf{v}_1=\cos 72^\circ \text{ és } \mathbf{v}_3\cdot\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_4\cdot\mathbf{v}_1=\cos 144^\circ,$$

tehát

$$k_1+(k_2+k_5)\cdot\frac{\sqrt5-1}{4}+(k_3+k_4)\cdot\frac{-1-\sqrt5}{4}=0,$$

amit rendezve

$$4k_1-k_2-k_3-k_4-k_5=\sqrt5\cdot(k_3+k_4-k_2-k_5)$$

adódik. Mivel a k_i-k egészek, $\sqrt5$ pedig irracionális, ez csak akkor teljesülhet, ha

$$4k_1=k_2+k_3+k_4+k_5 \qquad \text{és} \qquad k_2+k_5=k_3+k_4.$$

Ezt a gondolatmenetet $\mathbf{v}_1$ helyett a $\mathbf{v}_i$ ($i=2$, 3, 4, 5) vektorral megismételve azt kapjuk, hogy minden i esetén igaz az $5k_i=k_1+k_2+\ldots+k_5$ összefüggés, amiből nyilván következik, hogy $k_1=k_2=\ldots=k_5$.

Terpai Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A feladat állítása általánosítható 5-ről tetszőleges p-re, ahol p a 2-nél nagyobb prímszám. Ennek végsősoron az az oka, hogy minden ilyen p-re az $x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1$ polinom irreducibilis, azaz nem bontható fel két olyan racionális együtthatós polinomnak a szorzatára, amelyeknek a foka legalább 1.

72 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Székelyhidi Gábor és Terpai Tamás. 5 pontos 45, 4 pontos 8, 3 pontos 3, 1 pontos 2, 0 pontos 12 dolgozat.

F. 3278. *Az $y=x^3$ egyenletű görbe pontjain egy $*$ műveletet értelmezünk a következőképpen. Ha A és B a görbe két pontja, akkor legyen $A*B$ az AB egyenes és a görbe harmadik metszéspontjának az origóra való tükörképe. (Ha a definícióban szereplő valamelyik két pont egybeesik, akkor összekötő egyenesük helyett vegyük a görbe adott pontbeli érintőjét). Mutassuk meg, hogy a $*$ művelet asszociatív.*

Megoldás. Az $y=x^3$ görbe pontjait egyértelműen jellemezhetjük az abszcisszájukkal. Legyen $\circ$ az a művelet, amely a görbe a és b abszcisszájú A és B pontjai esetén $a\circ b$-nek az $A*B$ pont abszcisszáját felelteti meg. Ekkor a pontokon értelmezett $*$ művelet pontosan akkor asszociatív, ha a valós számokon értelmezett $\circ$ művelet az. Megmutatjuk, hogy $\circ$ éppen az összeadás, amiből feladatunk állítása nyilván következik.

Az AB egyenes egyenlete $a\neq b$ esetén

$$(b-a)(y-a^3)=(b^3-a^3)(x-a),$$

ami rendezés után

$$y=(b^2+ab+a^2)x-b^2a-a^2b \tag{1}$$

alakba írható. Könnyen ellenőrizhető, hogy az (1) egyenlet $b=a$ esetén az $y=x^3$ görbe (a,a^3) pontbeli érintőjének az egyenlete. Az (1) egyenletű egyenes és az $y=x^3$ metszéspontjainak abszcisszái kielégítik az

$$x^3=(b^2+ab+a^2)x-b^2a-a^2b$$

egyenletet. Ebben az x-re nézve harmadfokú egyenletben x^2 együtthatója 0, ezért a három gyök összege is 0. Mivel az egyenlet két gyöke a és b, a harmadik gyöke $-(a+b)$. Vagyis a harmadik metszéspont a $\left(-(a+b),\ -(a+b)^3\right)$ pont, tehát az $A*B$ pont az $\left((a+b),(a+b)^3\right)$ pont, ami azt jelenti, hogy $a\circ b=a+b$. (Könnyen ellenőrizhető, hogy ez az $a=b$ esetben is érvényes.)

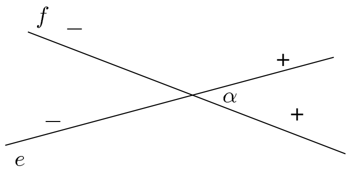
Megjegyzés. Megoldásunkból az is látszik, hogy az $y=x^3+kx$ egyenletű görbére is igaz a feladat állítása.

Székelyhidi Gábor (Kuwait, New English School, 12. o.t.)
Terpai Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) dolgozatai alapján

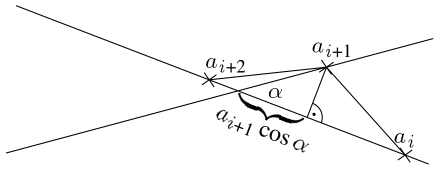
55 dolgozat érkezett. 5 pontos Baharev Ali, Balogh Attila, Boros M. Mátyás, Dancsó Zsuzsanna, Fehér Lajos Károly, Gerencsér Balázs, Gömöri Péter, Gueth Krisztián, Györey Bernadett, Győri Nikolett, Harangi Viktor, Horváth 202 Gábor, Horváth 713 György, Horváth 413 László, Keszegh Balázs, Kiss Norbert, Koch Dénes, Koczka Gergely, Kunszenti-Kovács Dávid, Lovrics Anna, Máthé András, Naszódi Gergely, Pataki Péter, Poronyi Gábor, Pszota Anikó, Somogyi Dávid, Szabadka Zoltán, Székelyhidi Gábor, Terpai Tamás, Torda Péter, Venter György és Zempléni Márton megoldása. 4 pontot kapott 20, 0 pontot 1 beküldő. Nem versenyszerű 2 dolgozat.

F. 3279. *Adott két, egymással 36°-os szöget bezáró egyenes. Egy szöcske ugrál ide-oda egyik egyenesről a másikra úgy, hogy minden ugrásának a hossza ugyanakkora. Mutassuk meg, hogy legfeljebb tíz különböző pontba juthat el.*

Megoldás. Jelölje a két egyenest e és f, közbezárt szögüket α (a feladatban $\alpha=36^\circ$), a szöcske által érintett pontoknak az egyenesek metszéspontjától való előjeles távolságát (az egyeneseken a pozitív irányt az *1. ábrán* látható módon kijelölve) pedig $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Az egyszerűség kedvéért ugyanígy hivatkozunk azokra a pontokra is, ahová a szöcske ugrik. A páros indexű távolságok, illetve a nekik megfelelő pontok legyenek az e, a páratlanok pedig az f egyenesen. A szöcske minden ugrásának hossza ugyanakkora, ezért



1. ábra



2. ábra

az a_i, a_{i+1}, a_{i+2} ($i=0, 1, 2, \ldots$) pontok egy egyenlő szárú háromszöget határoznak meg (azt nyilván feltehetjük, hogy $a_{i+2}\neq a_i$, azaz a szöcske egy ugrás után nem ugrik vissza ugyanazon az úton), tehát az a_{i+1} pontnak a másik egyenesen lévő merőleges vetülete felezi az a_i és az a_{i+2} pontokat összekötő szakaszt (*2. ábra*). Így minden i esetén igaz, hogy

$$a_{i+2}+a_i=2a_{i+1}\cos\alpha. \tag{1}$$

Ez egyúttal azt is jelenti, hogy a_0 és a_1 egyértelműen meghatározza a szöcske pályáját.

Ismertek az (1) összefüggéshez formailag hasonló trigonometrikus azonosságok:

$$\sin(i+2)\alpha+\sin i\cdot\alpha=2\sin\frac{2i+2}{2}\alpha\cdot\cos\frac{2\alpha}{2}=2\sin(i+1)\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos(i+2)\alpha+\cos i\cdot\alpha=2\cos\frac{2i+2}{2}\alpha\cdot\cos\frac{2\alpha}{2}=2\cos(i+1)\alpha\cos\alpha.$$

Ez azt jelenti, hogy minden c_1 és c_2 valós szám esetén igaz, hogy ha $b_i=c_1\cdot\sin i\alpha+$ $+c_2\cdot\cos i\alpha$ ($i=0, 1, 2, \ldots$), akkor

$$b_{i+2}+b_i=2b_{i+1}\cos\alpha. \tag{2}$$

Válasszuk c_1-et és c_2-t úgy, hogy kielégítsék az

$$a_0=c_1\sin 0+c_2\cos 0 \quad \text{és az} \quad a_1=c_1\sin\alpha+c_2\cos\alpha$$

egyenleteket, azaz legyen $c_1=\dfrac{a_1-a_0\cos\alpha}{\sin\alpha}$ és $c_2=a_0$. Ekkor a

$$b_i=\frac{a_1-a_0\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\sin i\alpha+a_0\cos i\alpha\qquad(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

sorozat kielégíti a (2) összefüggést, és mivel $b_0=a_0$ és $b_1=a_1$, azért minden i-re igaz, hogy $b_i=a_i$. Vagyis a szöcske az i-edik ugrás után

$$a_i=\frac{a_1-a_0\cos\alpha}{\sin\alpha}\sin i\alpha+a_0\cos i\alpha\tag{3}$$

előjeles távolságra van az e és f egyenesek metszéspontjától, páros i esetén az e, páratlan i esetén pedig az f egyenesen. A (3) kifejezésben a_0, a_1, $\cos\alpha$ és $\sin\alpha$ konstansok, ezért ha találunk egy olyan k páros számot, amire minden i esetén igaz, hogy $\sin(i+k)\alpha=$ $=\sin i\alpha$ és $\cos(i+k)\alpha=\cos i\alpha$, akkor $a_{i+k}=a_i$, és mivel k páros, azért a két végpont ugyanazon az egyenesen van; tehát ekkor a szöcske legfeljebb k pontba juthat el.

Esetünkben $\alpha=36^\circ$, ezért $k=10$ eleget tesz a feltételeknek, s ezzel feladatunk állítását bebizonyítottuk.

Dénes Attila (Békéscsaba, Rózsa F. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

47 dolgozat érkezett. 5 pontos Boros M. Mátyás, Dancsó Zsuzsanna, Dénes Attila, Fehér Lajos Károly, Györey Bernadett, Győri Nikolett, Harangi Viktor, Horváth 713 György, Keszegh Balázs, Kiss 345 Gergely, Koczka Gergely, Kunszenti-Kovács Dávid, Máthé András, Pálvölgyi Dömötör, Papp Dávid, Poronyi Gábor, Pszota Anikó, Szabadka Zoltán, Székelyhidi Gábor, Terpai Tamás, Vágvölgyi Péter és Venter György megoldása. 4 pontot kapott 7, 2 pontot 1, 0 pontot 17 beküldő.

F. 3280. *Bizonyítsuk be, hogy ha x_1, x_2, $\ldots$, x_n pozitív számok, akkor*

$$\frac{x_1}{x_2+x_3+\ldots+x_n}+\frac{x_2}{x_1+x_3+\ldots+x_n}+\ldots+\frac{x_n}{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}\ge\frac{n}{n-1}.$$

Megoldás. Legyen $x_1+x_2+\ldots+x_n=a$. Az egyenlőtlenség bal oldala:

$$\frac{x_1}{a-x_1}+\frac{x_2}{a-x_2}+\ldots+\frac{x_n}{a-x_n}=\left(\frac{a}{a-x_1}-1\right)+\left(\frac{a}{a-x_2}-1\right)+\ldots+\left(\frac{a}{a-x_n}-1\right)=$$
$$=\frac{a}{a-x_1}+\ldots+\frac{a}{a-x_n}-n.$$

Alkalmazzuk a számtani és a harmonikus közép közötti egyenlőtlenséget az $\dfrac{a}{a-x_i}$ (pozitív) számokra:

$$\frac{a}{a-x_1}+\ldots+\frac{a}{a-x_n}-n\ge n\cdot\frac{n}{\frac{a-x_1}{a}+\ldots+\frac{a-x_n}{a}}-n=\frac{n^2a}{na-a}-n=\frac{n^2}{n-1}-n=\frac{n}{n-1}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll, ha az $\dfrac{a}{a-x_i}$ számok mind egyenlőek, azaz $x_1=x_2=\ldots$ $\ldots=x_n$.

Sipos Ádám (Miskolc, Földes F. Gimn., 11. o.t.)

70 dolgozat érkezett. 6 pontos Gueth Krisztián és Székelyhidi Gábor megoldása. 5 pontot kapott Ábrány Miklós, Babos Attila, Baharev Ali, Barát Anna, Dénes Attila, Erdei Zsuzsa, Fehér Lajos Károly, Gáspár Merse Előd, Gelencsér Gábor, Gerencsér Balázs, Gömöri Péter, Gyürki István, Horváth Szilárd, Kovács Erika Renáta, Kunszenti-Kovács Dávid, Lábó Eszter, Lábó Melinda, Nagy Tamás, Papp Dávid, Pataki Péter, Poronyi Gábor, Pozsonyi Gergő, Sipos Ádám, Ta Vinh Thong, Taraza Busra, Terpai Tamás, Torda Péter, Tran Thanh Long és Venter György. 4 pontos 30, 3 pontos 3, 2 pontos 2, 1 pontos 4 dolgozat.

F. 3281. *Egy szelet csokoládét több lépésben osztunk részekre. Minden lépésben a már meglevő részek közül a legnagyobb tömegűt (ha több ilyen van, azok egyikét) osztjuk tovább úgy, hogy a kapott új darabok egyike se legyen nagyobb tömegű, mint a most tovább osztott rész fele. Igazoljuk, hogy a k-adik lépés után kapott részek mindegyike kisebb, mint az eredeti csokoládé tömegének a $2/(k+1)$-edrésze.*

Lovász László, Budapest

Megoldás. A feladatot a k-ra vonatkozó indukcióval oldjuk meg; $k=1$-re az állítás nyilvánvaló.

Tegyük fel, hogy az állítás teljesül $k=n$-re; megmutatjuk, hogy akkor $k=2n$-re és $k=2n+1$-re is teljesül. A csokoládé tömegét egységnyinek tekinthetjük. Az n-edik lépés nyomán keletkezett részek közül az $\frac{1}{n+1}$-nél nem kisebb tömegű részek számát jelöljük M-mel; nyilván $M\le n+1$.

Ha $M\le n$, akkor további n lépést követően az M rész mindegyike legalább a felére csökken, azaz kisebb $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n+1}=\frac{1}{n+1}=\frac{2}{(2n+1)+1}$-nél; mivel ekkor minden darab kisebb, mint $\frac{1}{n+1}$, ebben az esetben az indukciós lépés(eke)t elvégeztük.

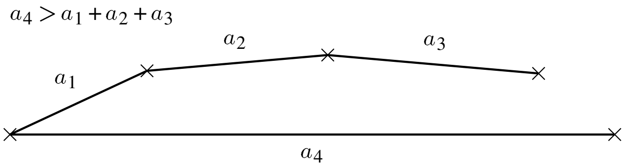
Ha $M=n+1$, akkor az n-edik lépés után $n+1$ darab csokoládénk van, és mindegyik darab tömege pontosan $\frac{1}{n+1}$. Az előzőekhez hasonlóan világos, hogy további $n+1$ lépés után minden darab tömege legfeljebb $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}<\frac{2}{(2n+1)+1}$, így a $k=2n+1$ esettel készen vagyunk. A $k=2n$-edik lépés után pedig a helyzet a következő: egy kivételével mindegyik rész tömege legfeljebb $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}$, egy rész pedig pontosan $\frac{1}{n+1}$ tömegű. Mivel $\frac{1}{n+1}<\frac{2}{2n+1}$, az indukció – és ezzel a bizonyítás – teljes.

Terpai Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

31 dolgozat érkezett. 5 pontos Gueth Krisztián, Győri Nikolett, Horváth 202 Gábor, Keszegh Balázs, Kiss 345 Gergely, Kunszenti-Kovács Dávid, Naszódi Gergely, Pálvölgyi Dömötör, Szabadka Zoltán, Székelyhidi Gábor és Terpai Tamás megoldása. 4 pontot kapott 3, 3 pontot 7, 2 pontot 8, 1 pontot 1, 0 pontot 1 beküldő.

F. 3283. *Adott* 2000 *darab szakasz, mindegyik hossza legalább* 1 *egység. Akárhogyan választunk ki közülük néhányat, azokból nem szerkeszthető sokszög. Mutassuk meg, hogy a szakaszok összhossza legalább* 2^{1999}.

Megoldás. Adott szakaszokból csak akkor nem lehet sokszöget szerkeszteni, ha közülük a legnagyobb hossza legalább akkora, mint az összes többi hosszának összege.



Rendezzük a 2000 szakaszt hosszuk szerint növekvő sorrendbe, és jelöljük a hosszakat $1 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{2000}$-rel. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy minden n természetes számra teljesül az

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ge 2^{n-1}$$

egyenlőtlenség, amiből $n = 2000$ esetén következik feladatunk állítása. Az egyenlőtlenség $n = 1$ és 2 esetén nyilván igaz. Tegyük fel, hogy

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k \ge 2^{k-1}.$$

Mivel az a_1, a_2, $\ldots$, a_k, a_{k+1} szakaszokból nem szerkeszthető sokszög, azért az első bekezdésben leírtak miatt

$$a_{k+1} \ge a_1 + a_2 + \ldots + a_k,$$

vagyis

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} \ge 2 \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) \ge 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k,$$

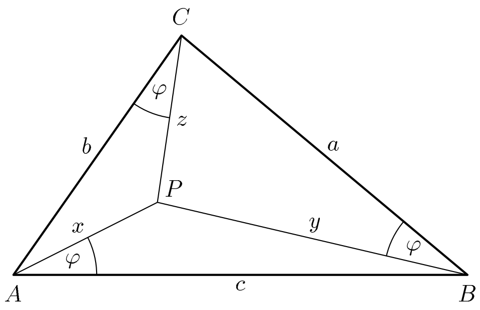
ami igazolja állításunkat.

Horváth Gábor (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

90 dolgozat érkezett. 5 pontos 53, 4 pontos 22, 3 pontos 6, 2 pontos 5, 1 pontos 2, 0 pontos 2.

F. 3284. *Az ABC háromszög belsejében levő P pontra $PAB\sphericalangle = PBC\sphericalangle = PCA\sphericalangle = \varphi$. Mutassuk meg, hogy ha a háromszög szögei α, β és γ, akkor*

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma}.$$



Megoldás. Jelöljük az ABC háromszög területét T-vel, oldalait a, b, c-vel, és legyen $AP = x$, $BP = y$, valamint $CP = z$. Mivel P az ABC háromszög belső pontja, a PAB, PBC és a PCA háromszögek területének összege megegyezik az ABC háromszög területével, azaz

$$T = \frac{xc\sin\varphi}{2} + \frac{ya\sin\varphi}{2} + \frac{zb\sin\varphi}{2}.$$

Ez az egyenlőség a $2T=bc\sin\alpha=ca\sin\beta=ab\sin\gamma$ egyenlőségeket felhasználva

$$(1)\qquad \frac{1}{\sin\varphi}=\frac{xc}{bc\sin\alpha}+\frac{ya}{ca\sin\beta}+\frac{zb}{ab\sin\gamma}$$

formában is írható.

Mivel $CAP\sphericalangle=CAB\sphericalangle-PAB\sphericalangle=\alpha-\varphi$, azért $APC\sphericalangle=180^\circ-\alpha$. Tehát az APC háromszögben a szinusztétel szerint $x:b=\sin\varphi:\sin(180^\circ-\alpha)$, vagyis $\frac{x}{b}=\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$. Ugyanígy kapjuk az APB és a BPC háromszögekből, hogy $\frac{y}{c}=\frac{\sin\varphi}{\sin\beta}$ és $\frac{z}{a}=\frac{\sin\varphi}{\sin\gamma}$. Ezeket az (1) egyenlőségbe beírva, ott elvégezve a lehetséges egyszerűsítéseket, majd pedig $\sin\varphi$-vel osztva éppen a bizonyítandó

$$\frac{1}{\sin^2\varphi}=\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}.$$

összefüggést kapjuk.

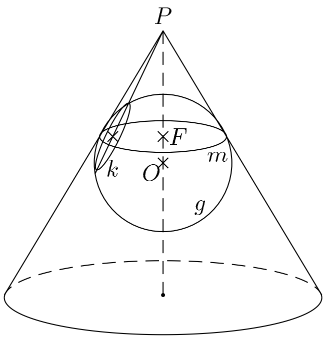
Megjegyzés. A P pont az ABC háromszög (egyik) *Brocard*-féle pontja.

Baharev Ali (Vác, Boronkay Gy. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

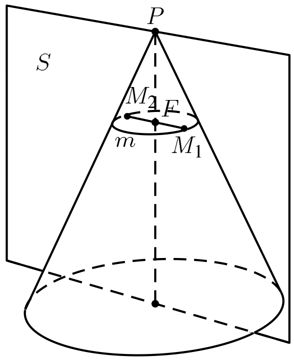
45 dolgozat érkezett. 5 pontos 41, 4 pontos 1, 2 pontos 1, 0 pontos 2.

F. 3285. *Adott a síkon egy k körvonal és rajta kívül egy P pont. Hol helyezkednek el azon körök középpontjai, amelyek egy k-t tartalmazó gömb és egy P csúcsú egyenes körkúp érintési pontjaiként állnak elő?*

Megoldás. Legyen g egy olyan k-t tartalmazó gömb, amit egy P csúcsú c egyenes



1. ábra

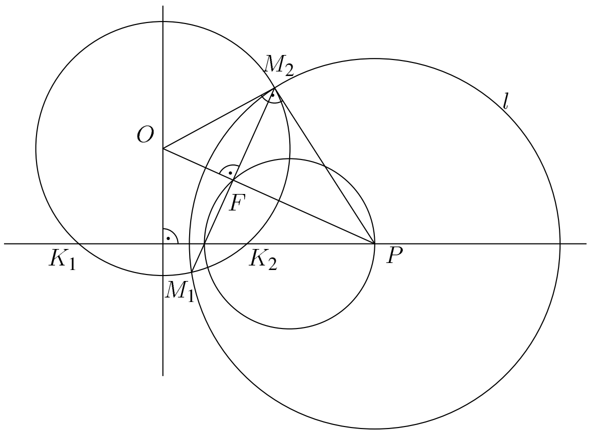


2. ábra

körkúp az m körvonalban érint (*1. ábra*). Mivel c egy körben érinti g-t, azért g-nek O-val jelölt középpontja rajta van c tengelyén, ami nyilván tartalmazza m-nek F-fel jelölt középpontját is. Messük el a rendszert a c tengelyét tartalmazó, k síkjára merőleges S síkkal. Eredeti feladatunk egy ebben a metszősíkban lévő síkbeli feladattá egyszerűsödik.

Jelölje az S síknak a k-val, illetve m-mel való metszéspontjait K_1, K_2, illetve M_1 és M_2 (*3. ábra*). Ekkor feladatunk a következő:

Adott a K_1K_2 szakasz és az egyenesén a szakaszon kívül egy P pont. Mi lesz a K_1-en és K_2-n átmenő körökhöz P-ből húzott érintők M_1 és M_2 érintési pontjait összekötő szakaszok F felezőpontjainak halmaza?



3. ábra

Ismert, hogy $PM_1^2 = PM_2^2 = PK_1 \cdot PK_2$. Mivel K_1 és K_2 rögzített pontok, ezért ez azt jelenti, hogy az M_1 és M_2 érintési pontok egy P középpontú, $\sqrt{PK_1 \cdot PK_2}$ sugarú l körre illeszkednek. Az F pont felezi az M_1M_2 szakaszt, ezért M_2F az OPM_2 derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága. Így a befogótétel szerint $PO \cdot PF = PM_2^2$, tehát F éppen az O pont l körre vonatkozó inverze. Ha az összes K_1-en és K_2-n átmenő kört tekintjük, akkor O befuthatja a K_1K_2 szakasz teljes felező merőlegesét, l-re vonatkozó inverzei pedig egy K_1K_2-re szimmetrikus, P-n átmenő körvonal P-től különböző pontjait futják be.

Az első bekezdésben leírtak szerint az eredeti térbeli feladat feltételeinek is ugyanez a ponthalmaz, azaz egy k síkjára merőleges síkban lévő, k-nak P-n átmenő átmérőjére szimmetrikus, P-n átmenő körvonal P-től különböző pontjai tesznek eleget.

Gueth Krisztián (Szombathely, Kanizsai D. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

31 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Baharev Ali és Naszódi Gergely, 5 pontot Barát Anna, Dancsó Zsuzsanna, Gueth Krisztián, Harangi Viktor, Horváth 202 Gábor, Keszegh Balázs, Kiss 345 Gergely, Koch Dénes, Kovács Benedek, Kunszenti-Kovács Dávid, Máthé András, Szabadka Zoltán, Székelyhidi Gábor és Terpai Tamás. 4 pontos 4, 3 pontos 3, 2 pontos 1, 1 pontos 4, 0 pontos 3 dolgozat.

F. 3286. *A t milyen értékeire asszociatív a pozitív számokon értelmezett kétváltozós $x*y = x+y+t\sqrt{xy}$ művelet?*

Megoldás. Műveletről eleve csak akkor beszélhetünk, ha minden $x, y > 0$-ra $x*y > 0$ is teljesül, azaz

$$x+y+t\sqrt{xy} > 0,$$

$$t > -\left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right).$$

Ez pontosan akkor teljesül minden x, y pozitív számpárra, ha $t > -2$.

A kívánt $(x*y)*z=x*(y*z)$ azonosság nyilván fennáll, ha $t=0$. Ha $t\neq 0$, akkor pedig ekvivalens a

$$\sqrt{xy}+\sqrt{xz+yz+t\sqrt{xyz}}=\sqrt{yz}+\sqrt{xy+xz+t\sqrt{yzx}}$$

azonossággal. Az $x=4$, $y=z=1$ értékekkel tesztelve:

$$\begin{aligned}
2+\sqrt{5+2t}&=1+\sqrt{8+4t},\\
1+\sqrt{5+2t}&=\sqrt{8+4t}.\\
6+2t+2\sqrt{5+2t}&=8+4t,\\
\sqrt{5+2t}&=1+t,\\
5+2t&=1+2t+t^2,\\
4&=t^2.
\end{aligned}$$

Tehát $t=0$ mellett csak $t=2$ jön szóba. Az utóbbi esetben $x*y=x+y+2\sqrt{xy}=(\sqrt{x}+$ $+\sqrt{y})^2$, így valóban $(x*y)*z=(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2=x*(y*z)$. A feladat követelményeit csak a $t=0$ és 2 értékek elégítik ki.

Papp Dávid (Budapest, Szent István Gimn., 11. o.t.)

56 dolgozat érkezett. 5 pontos Ábrány Miklós, Baharev Ali, Boros M. Mátyás, Dombi József Dániel, Gerencsér Balázs, Györey Bernadett, Győri Nikolett, Harangi Viktor, Keszegh Balázs, Kiss 345 Gergely, Kiss 414 Norbert, Kunszenti-Kovács Dávid, Lábó Eszter, Lábó Melinda, Máthé András, Micskei Zoltán, Móczó Péter, Nagy Tamás, Naszódi Gergely, Papp Dávid, Pataki Péter, Pilászy István, Pszota Anikó, Szabadka Zoltán, Szakács László, Székelyhidi Gábor, Szilasi Zoltán, Ta Vinh Thong, Terpai Tamás, Urr Beáta, Vaik István, Venter György és Vitéz Ildikó megoldása. 4 pontot kapott 8, 2 pontot 7, 1 pontot 6, 0 pontot 2 versenyző.

F. 3287. *Egy halmaz páronként diszjunkt halmazokra való felbontását a halmaz egy partíciójának nevezzük. Igazoljuk, hogy egy n elemű halmaznak legfeljebb $n!$ darab partíciója van.*

Javasolta: *Róka Sándor*, Nyíregyháza

I. megoldás. Jelöljük egy n elemű halmaz partícióinak a számát $r(n)$-nel. Nyilván $r(1)=1=1!$, $r(2)=2=2!$, $r(3)=4<3!$. Tegyük fel, hogy $r(k)<k!$, és vizsgáljuk egy $k+1$ elemű $T=H\cup\{a\}$ halmaz partícióit ($a\notin H$). A T minden partíciójából az a elem elhagyásával a H partícióját kapjuk. Megfordítva ez azt jelenti, hogy T minden partíciója megkapható a H alkalmas $H=K_1\cup\ldots\cup K_t$ partíciójából úgy, hogy az a elemet valamelyik K_i részhalmazhoz csatoljuk, vagy képezzük a (mindegyik K_i-hez diszjunkt) $\{a\}$ halmazt.

Adott H-beli partíció esetén ez éppen $t+1$ lehetőség. Mivel a K_i halmazok egyike sem üres*, azért $t\le k$, $t+1\le k+1$. Tehát $r(k+1)\le(k+1)r(k)$, így (a megvizsgált kezdeti érték(ek)re támaszkodva) az $r(n)\le n!$ egyenlőtlenség teljes indukciós bizonyítását kaptuk.

Vitéz Ildikó (Miskolc, Földes F. Gimn., 11. o.t.)

---

* Ez a nyilvánvalóan szükséges megszorítás a feladat szövegéből sajnos kimaradt.

II. megoldás. Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz mindegyik partíciójához rendeljük hozzá az 1, 2, ..., n számok egy sorbaállítását a következőképpen: először állítsuk a partíciót meghatározó részhalmazokat legkisebb elemük szerint ***növekvő*** sorrendbe, az egyes részhalmazokban szereplő számokat pedig rendezzük ***csökkenő*** sorrendbe. Egy ilyen módon kapott számsorból a partíció egyértelműen visszakapható, hiszen éppen ott vannak az egyes részhalmazokat kijelölő vágások, ahol a sorban egy szám után nála nagyobb szám következik. Tehát különböző partícióknak különböző számsorozatok felelnek meg, ezért a partíciók száma nem nagyobb az összes sorrend számánál, $n!$-nál.

Papp Dávid (Budapest, Szent István Gimn., 11. o.t.)

40 dolgozat érkezett. 7 pontos Szabadka Zoltán, 6 pontos Barát Anna, Máthé András, Naszódi Gergely és Pálvölgyi Dömötör megoldása. 5 pontot kapott 29, 4 pontot 4, 2 pontot 2 versenyző.

F. 3288. *Legyenek n és k pozitív egészek és p prímszám úgy, hogy $p^k \mid n!$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $n!$ osztható $(p!)^k$-nal is.*

I. megoldás. Az állítást k szerinti indukcióval bizonyítjuk. A $k=1$ eset így szól: ha p prím és $p \mid n!$, akkor $p! \mid n!$; ez igaz, hiszen p prím lévén, $n \geq p$. Tegyük fel, hogy az állítás $k=\ell$-re igaz, és tételezzük fel, hogy $p^{\ell+1} \mid n!$. Jelölje m a legkisebb olyan pozitív egészet, amelyre $p^\ell \mid m!$; ekkor $m+p$ a legkisebb olyan pozitív egész, amelynek faktoriálisa $p^{\ell+1}$-nel osztható, így $n \geq m+p$. Azonban $(m+p)! = m! \cdot \binom{m+p}{p} p!$; itt $m!$ osztható p^ℓ-nel, ezért az indukciós feltevés szerint $(p!)^\ell$-nel is osztható, tehát $m!p!$ osztható $(p!)^{\ell+1}$-nel. Mivel $\binom{m+p}{p}$ egész, azért ebből $(p!)^{\ell+1} \mid (m+p)! \mid n!$, így az állítás $k=(\ell+1)$-re is igaz.

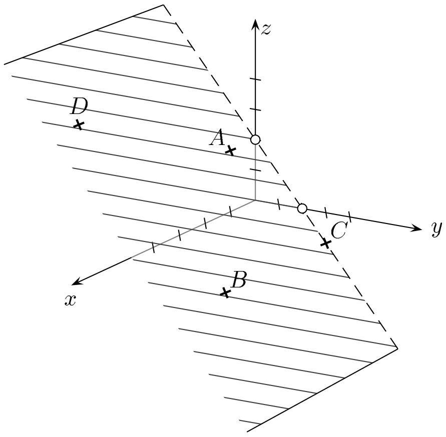
Papp Dávid (Budapest, Szent István Gimn., 11. o.t.)

II. megoldás. Felhasználjuk, hogy ha q prím, akkor $n!$ a q-nak pontosan az $\left(\left[\frac{n}{q}\right] + \left[\frac{n}{q^2}\right] + \ldots\right)$-adik hatványával osztható (vagyis q-nak az 1-gyel magasabb hatványa már nem osztója $n!$-nak). Tegyük fel ezután, hogy $p^k \mid n!$; k értékét esetleg növelve feltehető, hogy p^{k+1} már nem osztója $n!$-nak, azaz

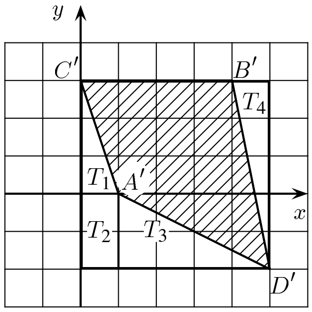
(1) $$k = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots$$

A $(p!)^k$ minden p-től különböző prímosztója p-nél kisebb, és egy ilyen q prímnek pontosan a $k\left(\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{p}{q^2}\right] + \ldots\right)$-adik hatványa osztója $(p!)^k$-nak. Mivel $(p!)^k$ a p-nek pontosan a k-adik hatványával osztható, azért elegendő belátni, hogy

(2) $$k\left(\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{p}{q^2}\right] + \ldots\right) \leq \left[\frac{n}{q}\right] + \left[\frac{n}{q^2}\right] + \ldots,$$



1. ábra



2. ábra

azaz hogy $n!$ a q-nak legalább akkora hatványával osztható, mint $(p!)^k$. A (2) egyenlőtlenséget tagonként igazoljuk, megmutatva, hogy minden $a \geq 1$ egészre és $q < p$ prímre $\left[\frac{n}{q^a}\right] \geq k \cdot \left[\frac{p}{q^a}\right]$. Az (1) szerint

$$k\left[\frac{p}{q^a}\right] = \left(\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots\right)\left[\frac{p}{q^a}\right] \leq \left[\frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \ldots\right]\left[\frac{p}{q^a}\right] = \left[\frac{n}{p-1}\right] \cdot \left[\frac{p}{q^a}\right].$$

Mivel q^a és p relatív prímek, azért $\left[\frac{p}{q^a}\right] = \left[\frac{p-1}{q^a}\right]$, így

$$\left[\frac{n}{p-1}\right]\left[\frac{p}{q^a}\right] = \left[\frac{n}{p-1}\right] \cdot \left[\frac{p-1}{q^a}\right] \leq \left[\frac{n}{p-1} \cdot \frac{p-1}{q^a}\right] = \left[\frac{n}{q^a}\right],$$

amit bizonyítani kellett.

Terpai Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

37 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Ábrány Miklós, Dancsó Zsuzsanna, Győri Nikolett, Harangi Viktor, Keszegh Balázs, Lábó Eszter, Lábó Melinda, Máthé András, Naszódi Gergely, Papp Dávid, Terpai Tamás és Vitéz Ildikó. 4 pontos 3, 3 pontos 9, 2 pontos 1, 1 pontos 7, 0 pontos 5 dolgozat.

F. 3290. *Mutassuk meg, hogy az* $A(1,0,2)$, $B(4,3,-1)$, $C(0,3,-1)$, $D(5,-2,4)$ *koordinátájú pontok egy síkban vannak. Mekkora a négy pont által meghatározott konvex négyszög területe?*

I. megoldás. Mivel mind a négy pont második és harmadik koordinátájának összege 2, azért a pontok rajta vannak az $y+z=2$ egyenletű síkon. Ez a sík párhuzamos az $y=0$ és a $z=0$ egyenletű koordinátasíkok egyik szögfelezősíkjával, tehát 45°-os szöget zár be a $z=0$ síkkal. A vetület csúcsai (most már az $(x\,y)$ síkban, a harmadik koordinátát elhagyva): $A'(1;0)$, $B'(4;3)$, $C'(0;3)$ és $D'(5;-2)$.

Ismert (lásd pl. *Reiman István:* A geometria és határterületei, 49–50. old.), hogy az A, B, C és D pontok által meghatározott konvex négyszög területét $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$-vel szorozva kapjuk az A', B', C' és D' pontok által meghatározott konvex négyszög területét. Ez utóbbit a *2. ábra* alapján könnyen meghatározhatjuk:

$$T_{A'D'B'C'} = 25 - T_1 - T_2 - T_3 - T_4 = 25 - 1{,}5 - 4 - 2{,}5 = 15.$$

A keresett terület tehát $T_{ADBC} = \sqrt{2} \cdot T_{A'D'B'C'} = 15\sqrt{2}$ területegység.

Papp Dávid (Budapest, Szent István Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

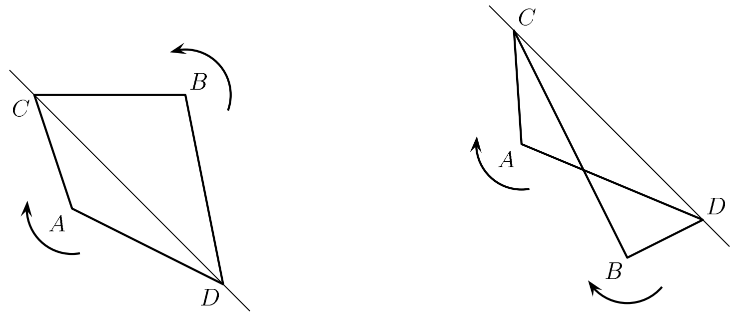
II. megoldás. Az $\overrightarrow{AD}$ és az $\overrightarrow{AC}$ vektorok vektoriális szorzata

$$\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC} = (0, 10, 10),$$

a $\overrightarrow{BD}$ és a $\overrightarrow{BC}$ vektorok vektoriális szorzata pedig

$$\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC} = (0, -20, -20).$$

Mivel a két szorzatvektor párhuzamos, az ACD és a BCD síkok is párhuzamosak. E két síknak a C és D közös pontjai, tehát a síkok egybeesnek, vagyis az A, B, C és D pontok egysíkúak.



3. ábra

A vektoriális szorzatok ellentétes irányúak, ezért az ACD és a BCD háromszögek ellentétes körüljárásúak. Ez azt jelenti, hogy az A és a B pontok a CD egyenes ellentétes oldalain vannak (*3. ábra*). Így a négy pont által meghatározott konvex négyszög területe az ACD és a BCD háromszögek területének összege. Az ACD háromszög területe $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC}\right| = 5\sqrt{2}$, a BCD háromszög területe pedig $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC}\right| = 10\sqrt{2}$. Az $ABCD$ konvex négyszög területe tehát $15\sqrt{2}$ területegység.

Székelyhidi Gábor (Kuwait, New English School, 12. o.t.)

79 dolgozat érkezett. 6 pontos Papp Dávid megoldása. 5 pontot kapott 46, 4 pontot 12, 3 pontot 3, 2 pontot 15, 0 pontot 2 beküldő.

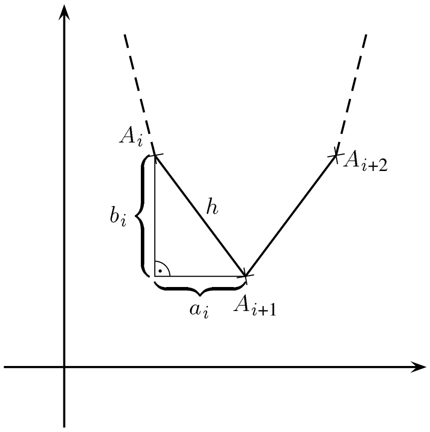
F. 3291. *Bizonyítsuk be, hogy bármely egyenlő oldalú rácssokszög oldalszáma páros.*

Javasolta: *Ruzsa Z. Imre,* Budapest

Megoldás. Legyen a feladatban szereplő rácssokszög az $A_1A_2\dots A_k$ sokszög, az A_i pont koordinátái legyenek $(x_i;y_i)$, legyen továbbá $a_i=x_{i+1}-x_i$ és $b_i=y_{i+1}-y_i$ ($i=1,\ 2,\ \dots,\ k$, az indexeket moduló k számolva). Jelöljük a rácssokszög oldalainak hosszát $\sqrt{h}$-val.

Mivel a sokszög minden oldalának hossza $\sqrt{h}$, azért minden i-re

$$a_i^2+b_i^2=h.$$



Egy négyzetszám 4-gyel osztva csak 0 vagy 1 maradékot adhat, ezért h a 4-gyel osztva 0, 1 vagy 2 maradékot ad. Vizsgáljuk meg külön-külön ezt a három esetet.

Ha $h\equiv 0 \pmod 4$, akkor a_i is és b_i is páros minden i-re. Ekkor a sokszöget a felére kicsinyíthetjük úgy, hogy a kicsinyített sokszög is egyenlő oldalú rácssokszög legyen. Mindaddig folytassuk a kicsinyítést, amíg az újonnan keletkezett sokszög a_i és b_i típusú számai közt legalább egy páratlan nem lesz. Ezt véges sok lépés után biztosan elérjük. A kicsinyítések során a sokszög oldalszáma nem változik, így ezt az esetet visszavezettük a maradék két eset egyikére.

Ha $h\equiv 1 \pmod 4$, akkor minden i-re a_i és b_i egyike páros, a másik pedig páratlan, azaz $a_i+b_i\equiv 1 \pmod 2$. Az így kapott k darab kongruenciát összeadva:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i+\sum_{i=1}^{k} b_i\equiv k \pmod 2.$$

De az a_i-k és b_i-k definíciója miatt $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i=\sum\limits_{i=1}^{k} b_i=0$, hiszen a sokszög zárt, tehát $k\equiv 0 \pmod 2$. Ez viszont éppen a bizonyítandó állítás.

Ha $h\equiv 2 \pmod 4$, akkor a_i is és b_i is páratlan minden i-re. Vagyis $a_i\equiv 1 \pmod 2$ minden i-re, tehát

$$0=\sum_{i=1}^{k} a_i\equiv k \pmod 2.$$

A sokszög oldalszáma tehát ebben az esetben is páros.

Több eset nincs, ezért a feladat állítását igazoltuk.

Székelyhidi Gábor (Kuwait, New English School, 12. o.t.) dolgozata alapján

30 dolgozat érkezett. 5 pontos Ábrány Miklós, Barát Anna, Csóka Endre, Dénes Attila, Gáspár Merse Előd, Győri Nikolett, Harangi Viktor, Kunszenti-Kovács Dávid, Máthé András, Naszódi Gergely, Papp Dávid, Sidó Péter, Siklósi Dávid, Szakács László, Székelyhidi Gábor, Terpai Tamás és Vitéz Ildikó megoldása. 4 pontot kapott 2, 1 pontot 3, 0 pontot 8 versenyző.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (565–569.)

C. 565. Egy tálba egymás után felütünk tíz darab tojást. A tojások közül kettő romlott, de ez csak a feltöréskor derül ki. A záptojások az összes előttük feltört tojást használhatatlanná teszik. A tálat ilyenkor kimossuk és a megmaradt tojásokkal folytatjuk az eljárást. A jó tojásoknak átlagosan hányadrésze megy ilymódon veszendőbe?

C. 566. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$(x-2)^2+\left(|x-1|+|x-3|-\frac{15}{4}\right)^2=\frac{65}{16}.$$

C. 567. Egy téglatest minden élének mérőszáma egész. A téglatest térfogatának, fél felszínének és az egyik csúcsba befutó élek hosszának mérőszámait összeadva 2000-et kapunk. Mekkorák a téglatest élei?

C. 568. Az ötös lottó sorsolásnak hány olyan különböző kimenetele lehetséges, amelynél a nyerő számok a) számtani b) mértani sorozatot alkotnak?

C. 569. Az $y=x^2$ parabolához az $y=x$ egyenletű egyenes mely pontjából húzható két, egymásra merőleges érintő?

Beküldési határidő: 2000. február 15.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest, Pf. 47. 1255

A B pontversenyben kitűzött feladatok (3332–3341.)

B. 3332. Az első n pozitív egész számot egy kör kerületén úgy szeretnénk elhelyezni, hogy bármely két szomszédos szám összege osztható legyen az óramutató járása szerint közvetlenül utánuk álló számmal. Milyen n-re lehetséges ez?

(*3 pont*) Tournament of Towns, 1999.

B. 3333. Egy ikozaéder néhány lapját pirosra festjük úgy, hogy két befestett lapnak nincs közös éle. Maximálisan hány lap festhető be ezzel a feltétellel?

(*3 pont*)

B. 3334. Bizonyítsuk be, hogy egyetlen olyan számrendszer van, amelyben van olyan háromjegyű szám, amelyik kétszer akkora, mint az ugyanezekkel a számjegyekkel ugyanolyan sorrendben felírt tízes számrendszerbeli szám.

(*4 pont*) Javasolta: *Gyanta Nándor,* Budapest

B. 3335. A $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ sokszögek úgy helyezkednek el a síkon, hogy csúcsaik nincsenek rajta a másik sokszög oldalegyenesein. Legfeljebb hány pontban metszik egymást az oldalak, ha $\mathcal{K}$ ötszög és a) $\mathcal{L}$ háromszög; b) $\mathcal{L}$ négyszög?

(*5 pont*)

B. 3336. Egy szabályos háromszöget a középpontja körül pozitív irányba elforgatunk először 3°-kal, azután tovább forgatjuk 9°-kal, majd 27°-kal, a k-adik lépésben 3^k fokkal. Hányféle helyzetet vehet fel a háromszög az elforgatások eredményeképpen?

(*3 pont*)

B. 3337. Adott egy parabola fókusza és két pontja. Szerkesszük meg a vezéregyenesét.

(*3 pont*)

B. 3338. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=n$$
$$x_1^4+x_2^4+\ldots+x_n^4=x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3.$$

(*4 pont*) Javasolta: *Ábrány Miklós,* Ukrajna

B. 3339. Bizonyítsuk be, hogy egy gömbháromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást. (Egy gömb felszínén lévő A és B pontok gömbi összekötő egyenesének az A-t és B-t tartalmazó nem hosszabb főkörívet nevezzük.)

(*4 pont*)

B. 3340. Egy szabályos dobókockát 12-szer feldobva melyik esemény valószínűsége nagyobb?

a) Az első 6 dobás között lesz legalább egy 6-os.

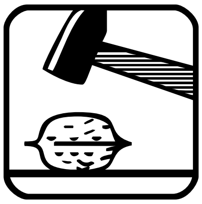
b) A 12 dobás között lesz legalább két 6-os.

(*4 pont*)

B. 3341. Az ABC háromszög A-ból induló magasságának talppontja D. Legyenek E és F egy, a D ponton átmenő egyenesnek olyan – D-től különböző – pontjai, amelyekre AE merőleges BE-re, AF merőleges CF-re. A BC és EF szakaszok felezőpontja M, illetve N. Bizonyítsuk be, hogy AN és MN merőlegesek.

(*5 pont*) X. Ázsiai Matematikai Olimpia feladata

Beküldési határidő: 2000. február 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (227–229.)

A. 227. Létezik-e olyan pozitív egész n, amelyre n, $2n$, $3n$, $\ldots$, $2000n$ mindegyikének tízes számrendszerbeli alakjában a 0-tól különböző számjegyek pontosan ugyanannyiszor fordulnak elő?

A. 228. Igaz-e, hogy ha az f, $g: Q \to Q$ függvények szigorúan monoton nőnek és értékkészletük a teljes Q, akkor az $f+g$ függvény értékkészlete is a teljes Q? (Q a racionális számok halmaza.)

Fried Ervin, Budapest

A. 229. Két ötszög úgy helyezkedik el a síkon, hogy csúcsaik nincsenek rajta a másik ötszög oldalegyenesein. Legfeljebb hány pontban metszhetik egymást az oldalak?

Beküldési határidő: 2000. február 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 50. No. 1. January 2000)

New exercises for practice – competition C (see page 40): **C. 565.** Ten eggs are broken up into a bowl, one after the other. Two of them are bad, but this turns out only when they are being broken up, so they spoil those eggs already in the bowl. Thus, when a bad egg is found, the bowl is washed up, and the procedure is continued with the remaining eggs. What proportion, on the average, of the good eggs get wasted? **C. 566.** Solve the following equation:

$$(x-2)^2+\left(|x-1|+|x-3|-\frac{15}{4}\right)^2=\frac{65}{16}.$$

C. 567. The lengths of the edges of a rectangular box are all integers. Its volume, half of its surface area, and the lengths of its edges starting at the same vertex add up to 2000. Determine the lengths of the edges of the box. **C. 568.** How many different ways are there to select 5 out of the first 90 positive integers so that they form a) an arithmetic b) a geometric progression? **C. 569.** Determine those points of the line $y=x$ from which one can draw two perpendicular tangents to the parabola $y=x^2$.

New problems – competition B (see page 40): **B. 3332.** The first n positive integers are to be arranged around a circle in such a way that the sum of any two consecutive numbers is divisible by the next one in clockwise order. Find those values of n for which this can be done. (*3 points*) (Tournament of Towns, 1999.) **B. 3333.** How many faces of an icosahedron can be chosen without any two of them sharing a common edge? (*3 points*) **B. 3334.** Prove that there is exactly one number system in which there exists a 3-digit number twice as large as the number it represents in the decimal system. (*4 points*) (Proposed by *N. Gyanta,* Budapest) **B. 3335.** A pentagon $\mathcal{K}$ and another polygon $\mathcal{L}$ are given in the plane such that neither of them has a vertex on any line that contains a side of the other. Find the maximum number of intersection points their sides can form, assuming that a) $\mathcal{L}$ is a triangle b) $\mathcal{L}$ is a quadrilateral. (*5 points*) **B. 3336.** An equilateral triangle is rotated around its center, in counterclockwise direction, by 3°. Next, it is rotated further by another 9°, then by 27°, and so on, by 3^k degrees in the kth step. How many different positions are occupied by the triangle during such a procedure? (*3 points*) **B. 3337.** Given the focus and two points of a parabola, construct its directrix. (*3 points*) **B. 3338.** Solve the following system of equations:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=n,$$
$$x_1^4+x_2^4+\ldots+x_n^4=x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3. \qquad (4\ \textit{points})$$

(Proposed by M. Ábrány,) **B. 3339.** Prove that, in any spherical triangle, the three medians meet at a common point. (*4 points*) **B. 3340.** When rolling a die 12 times, which of the following two is more probable: a) at least one of the first 6 scores is 6, b) at least two of all the 12 scores are 6? (*4 points*) **B. 3341.** In a triangle ABC, D denotes the foot of the perpendicular dropped from A. The pairwise distinct points D, E and F lie on the same line, moreover, AE and AF are perpendicular to BE and CF, respectively. The midpoints of segments BC and EF are denoted by M and N. Prove that AN is perpendicular to MN. (*5 points*) (Problem of the 10th Asian Mathematical Olympiad)

New advanced problems – competition A (see page 42): **A. 227.** Is there a positive integer n such that, every digit, different from 0, appears the same number of times in the decimal form of each of the numbers n, $2n$, $3n$, …, $2000n$? **A. 228.** Let Q denote the set of rational numbers. Suppose that the functions f, $g: Q\to Q$ are strictly monotone increasing functions which attain every rational value. Is it necessarily true that the range of values of the function $f+g$ is also the whole set Q? (*E. Fried,* Budapest) **A. 229.** Two pentagons are given in the plane such that neither of them has a vertex on any line that contains a side of the other. Find the maximum number of intersection points their sides can form.

A Budapesti Műszaki Egyetem Matematika Intézetének közleménye pályaválasztóknak

MATEMATIKUSKÉPZÉS A BME-N

A világ rangos műszaki egyetemeinek gyakorlatát követve és saját jó hagyományát felelevenítve a Budapesti Műszaki Egyetem Természettudományi Kara 1997-ben beindította a **matematikusképzést.** A képzést a Kar Matematika Intézete gondozza.

Olyan szakembereket képzünk, akik érzékenyek a gyakorlati problémák iránt, és képesek alkotó módon felhasználni ismereteiket; akik amellett, hogy otthonosan mozognak a matematika elvont területein, tudnak kommunikálni és együttműködni a matematikán kívüli szakemberekkel is. Előreláthatóan az Európához csatlakozó, fejlődő magyar gazdaságnak szüksége lesz ilyen szakemberekre. Matematikus képzésünk szervesen illeszkedik a Budapesti Műszaki Egyetemen folyó *alkalmazás-orientált* tudományos képzés széles spektrumába, amely a klasszikus mérnökképzés mellett magában foglal olyan matematika-igényes új területeket is, mint az informatika, közgazdaságtudomány, anyagtudomány, gazdasági tervezés-elemzés, műszaki management, rendszerelmélet stb.

A Budapesti Műszaki Egyetem matematikus szakát elsősorban azoknak a végzős gimnazistáknak ajánljuk, akik, amellett, hogy szeretik és tudják a matematikát, indíttatást éreznek magukban a **matematika alkalmazásai** iránt is. A matematikai **modellalkotás** és **elemzés** egyre inkább szerves részét képezi a műszaki, gazdasági és természettudományos tevékenység kreatív ágainak. E tevékenység jól képzett, invenciózus, mozgékony elméjű fiatal matematikusokat igényel. Az ilyen szakemberek iránti társadalmi igény látványosan növekszik.

HA E KIHÍVÁSOKBAN LÁTSZ FANTÁZIÁT, JELENTKEZZ A BME MATEMATIKUS SZAKÁRA!

A szak felvételi rendszere megegyezik a műszaki felsőoktatás felvételi rendszerével, amelynek részletes leírása megtalálható a hivatalos *Felsőoktatási felvételi tájékoztató*-ban. Nyelvvizsgákért max. 12 többletpont kapható. A középiskolai matematika és/vagy fizika versenyeken kimagaslóan jó eredményt elért jelentkezők mentesülnek a felvételi kötelezettség alól. Az 1999-es felvételi ponthatárunk a legmagasabb volt az ország matematikus szakjai között.

A szak képzési rendje nagy vonalakban a következő: Az 1–5. félévben a modern matematika alapismereteinek elsajátítása folyik, a tudományegyetemi matematikus képzéssel lényegében azonos tematikával. A 6–10. félévben a hallgatók ún. modul rendszer keretében választhatnak alkalmazott- vagy elméletibb jellegű szakirányok között.

Elméleti jellegű szakosodás évtizedek óta megszokott a tudományegyetemeken; a BME Matematika Intézet ezenkívül új, alkalmazás-orientált képzési lehetőségeket is kínál. Íme néhány példa:

- sztochasztikus matematika és alkalmazásai: pénzügyi és tőzsdei folyamatok matematikája, biztosítási matematika, statisztika, információelmélet;
- diszkrét matematika és alkalmazásai: számítástudomány, operációkutatás, kriptográfia;
- matematikai analízis és alkalmazásai: dinamikai rendszerek, differenciálegyenletek, biomatematika, matematikai fizika;
- mérnöki alkalmazott matematika: rendszerelmélet, hírközléselmélet, gyártórendszerek.

Végzett hallgatóink számára folyamatban van a BME Gazdaság- és Társadalomtudományi Karán folyó műszaki menedzser szak gyorsított elvégzése rendjének kidolgozása is.

Kollégiumi elhelyezkedés: vidéki diákjaink részére a BME kollégiumaiban elhelyezés biztosítható.

Posztgraduális matematikus képzés a BME-n: végzős diákjaink, a műszaki vagy gazdasági életben való elhelyezkedés mellett természetesen részt vehetnek egyetemünkön folyó doktorandusz (PhD) képzésben is, a Matematika Intézet Doktori Iskolájának keretében.

Bővebb információ szerezhető a Budapesti Műszaki Egyetem Természettudományi Kar Matematika Intézet titkárságán, a 463-2762 budapesti telefonszámon, illetve intézetünk internetes honlapján: `http://math.bme.hu`

Szeretettel várjuk kedves leendő diákjainkat.

Budapesti Műszaki Egyetem
Természettudományi Kar
Matematika Intézet

KöMaL – 2000/1 MAT0001 cianmagentayellowblack2002. június 19. – 8:44 (44. lap)

NEGYEDIKESEK FIGYELEM!

MEGÚJULT MATEMATIKUSKÉPZÉS A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEMEN

Új szakirányok:
gazdaságmatematikus (közgazdász-matematikus, pénzügyi matematikus),
informatikai matematikus

A gazdaságirányítás, a bankok és biztosító társaságok egyre több olyan szakembert igényelnek, akik igen alapos matematikai tudással rendelkeznek. Ez abból is kitűnik, hogy egyre többen helyezkednek el matematikus diplomával ilyen intézményekben. Ezt kívánjuk megkönnyíteni a gazdaságmatematikus szakirány bevezetésével, amelyen közgazdász-matematikusi, illetve pénzügyi matematikusi ismeretek szerezhetők. Hasonlóan szükség van olyan szakemberekre is, akik az informatika, a számítástudomány és számítástechnika terén felmerülő, a mindennapi programozási gyakorlaton túlmutató elméleti jellegű modelleket is kezelni tudják. Ilyen szakemberek képzését biztosítja az informatikai matematikus szakirány.

A két szakirány hároméves közös matematikai alapképzésre épül, de már a második évtől speciális tárgyak is szerepelnek. Ezt követően a matematikai tárgyak mellett a választott szakiránynak megfelelően megjelennek olyan tárgyak is, mint mikro- és makroökonómia, marketing, vállalati pénzügyek, menedzsment, banküzemtan, pénzügypolitika, biztosítás-gazdaságtan, gazdasági informatika, illetve algoritmusok és adatstruktúrák, adatbázisok, számítógéphálózatok.

A két új szakirány mellett változatlanul megmarad a már nagy múltra visszatekintő matematikus szakunk is: azok, akik az elméleti matematika iránt érdeklődnek, tiszta matematikai tárgyak tanulásával folytatják tanulmányaikat az első három év után, és szereznek matematikus diplomát.

Mi az előnye az új képzésnek?

- Hallgatóink akár a harmadik év végén dönthetnek szakirányukról, miután alaposan tájékozódtak a különböző képzésekről (még bele is kóstolhatnak azokba egy-egy tárgy korábbi felvételével).
- A matematikus diploma által megkövetelt magas szintű matematikai ismereteken túl hallgatóink szert tehetnek olyan szakirányú alapműveltségre is, amely megkönnyíti, felgyorsítja a gazdasági–pénzügyi–irányítási szférában elhelyezkedni kívánók számára a megfelelő szaktudás megszerzését.
- Az új képzés nagymértékben megkönnyíti végzett hallgatóink elhelyezkedését.

A felvétel részleteiről a Felsőoktatási Felvételi Tájékoztatóban olvashatnak, de bármilyen további információért közvetlenül hozzánk is fordulhanak a következő címen:

SZTE TTK Bolyai Intézet
6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.
Tel.: (62)-544-093; (62)-426-246
E-mail: szabol@math.u-szeged.hu
Dr. Szabó László egyetemi docens