Könyvjánló

Bergengóc Példatár
Typotex Kiadó Budapest, 1999

97. feladat. *A Bergengóc parlamentben* 10 *bizottság működik. Minden honatya két bizottságban dolgozik, és bármely két bizottságnak egy közös tagja van. Hány tagú a Bergengóc Parlament?*

78. feladat. *Egy űrhajós „lakást" épít magának az űrben. A lakás „szobái" egybevágó téglatestek. Csak akkor kap az űrhatóságtól lakhatási engedélyt, ha bármely* 2 *szoba közvetlenül egymásba nyílik. (Ehhez elég az, hogy a* 2 *téglatest „kicsit" fedje egymást – a közös él viszont még kevés!) Hány szobás lakást tudsz építeni?*

Ízelítőül két feladat abból a 120-ból, amelyeken a budapesti Fazekas Gimnázium 7.c. osztályos diákjai tavaly gondolkodtak. Ők megoldották a feladatokat, megoldásaik pedig most könyv alakban is megjelentek, és mindannyian tanulhatunk abból, amit és ahogyan ők tanultak egy év alatt: egyfelől matematikát – erről szól a könyv –, másfelől azt, hogy ilyen könyv megszülethet. *Fazakas Tünde* és *Hraskó András* tanárok megtanították ezt az osztályt, hogyan tehető közhasznúvá a szellemi teljesítmény, és arra is, milyen kaland valamit létrehozni.

Lovász László akadémikus, a magyar matematika kimagasló képviselője – maga is a Fazekas egykori diákja – írja a könyv hátsó borítóján:

„Szeretettel és örömmel ajánlom a tisztelt Olvasónak a Fazekas Gimnázium tanárai és tanulói által összeállított feladatgyűjteményt. . . Ez a kötet azt tanúsítja, hogy a tanár és a diákok a „matekot" továbbra is olyan szeretettel és lelkesedéssel ápolják, mint amikor oda jártam."

Újra kapható a Természet Világa MATEMATIKA különszáma

Több évi szervező és előkészítő munka után a tavalyi év karácsonyi meglepetéseként jelent meg a Természet Világa MATEMATIKA különszáma. A Császár Ákos akadémikus szakmai felügyeletével Staar Gyula főszerkesztő gondozásában megjelent kiadvány széles ívű áttekintést ad a magyar matematika múltjáról és jelenéről: Bolyai János, Riesz Frigyes, Rényi Alfréd, Erdős Pál portréja mellett az élő magyar matematika reprezentatív képviselőinek írásait is olvashatjuk. Emellett a nagyvilág matematikájára is kitekinthetünk.

A tartalomból:

Babai László: Erdős Pál, barátai és kora; *Lovász László:* Egységes tudomány-e a matematika; *Halász Gábor:* Elemi és analitikus számelmélet; *Szász Domokos:* Matematikai biliárdok; *Rimányi Richárd:* A csomók elmélete; *Reiman István:* Matematikai diákolimpiák; *Andrè Weil:* Bourbaki születésének története

A Matematika különszám ismét kapható a Természet Világa Szerkesztőségében (Budapest, VIII. Somogyi Béla u. 6.) és Szerkesztőségünkben is.

Mérőlap felvételire készülőknek II.

Komlós Gyula tanár úr (barátom) emlékére

1. Egy háromszög súlyvonalainak hossza 2,4; 2,6, illetve 1 egység. Mekkora a háromszög területe?

2. Határozza meg az a valós paraméter értékét úgy, hogy az

$$x^2-4x+(3+2a-a^2)=0$$

egyenlet egyik gyöke a másik gyökének a kétszerese legyen.

3. Oldja meg a valós számpárok halmazán ($\mathbf{R}^2$) az

$$x^{\log_2 y}+y^{\log_2 x}=2,$$

$$\log_4 x-\log_4 y=\frac{1}{2}$$

egyenletrendszert.

4. A valós m paraméter mely értékeire lesz az

$$(5-m)x^2-3x+m+3$$

kifejezés értéke minden valós x-re pozitív?

5. Tekintsük azokat a háromszögeket, amelyek területe $T=4\sqrt{3}$ területegység és egyik szögük 60°.

a) E háromszögek közül melyikben lesz a 60°-os szöget közrezáró oldalak összege a legkisebb. Mekkorák ennek a háromszögnek az oldalai és a szögei?

b) E háromszögek közül melyikben lesz a 60°-os szöggel szemközti oldal a legrövidebb?

6. Legyen $A(1;0)$, $B(0;4)$ és $C(c;6)$. Számítsa ki c értékét, ha a háromszög területe 13 területegység.

7. Oldja meg a

$$\sin^4 x+\cos^4 x\geqslant\frac{5}{8}$$

egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

8. Oldja meg a $\sqrt{a-x}+\sqrt{-x}=1$ egyenletet, ahol a valós paraméter, a valós számok halmazán.

Rábai Imre

KöMaL – 1999/9 MAT9909 2001. április 12. – 22:17 (2. lap)

Megoldásvázlatok, eredmények az I. szakköri feladatokhoz (1999/8. sz.)

1. Mindkét egyenletet rendezzük nullára, majd alakítsunk szorzattá.

$$(x-y)(x^2+xy+y^2-21)=0,$$
$$(x+y)(x^2-xy+y^2-13)=0.$$

Ez az egyenletrendszer ekvivalens a következő *négy* egyenletrendszerrel:

(I) $x-y=0$, $x+y=0$; (II) $x-y=0$, $x^2-xy+y^2=13$; (III) $x^2+xy+y^2=21$, $x+y=0$; (IV) $x^2+xy+y^2=21$, $x^2-xy+y^2=13$.

Ezek megoldásai egyben az adott egyenletrendszer megoldásai is.

(I): $x_1=0$, $y_1=0$;

(II): $x_2=\sqrt{13}$, $y_2=\sqrt{13}$; $x_3=-\sqrt{13}$, $y_3=-\sqrt{13}$;

(III): $x_4=\sqrt{21}$, $y_4=-\sqrt{21}$; $x_5=-\sqrt{21}$, $y_5=\sqrt{21}$;

(IV): $x_6=1$, $y_6=4$; $x_7=4$, $y_7=1$; $x_8=-1$, $y_8=-4$; $x_9=-4$, $y_9=-1$.

2. *a*) Mivel

$$\sin(\alpha+\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2},\quad \text{továbbá}\quad \sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

és

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=(-2)\sin\alpha\cdot\sin\beta,$$

azért a feltétellel ekvivalens a következő egyenlet:

$$\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}=0.$$

A megoldások: $\alpha+\beta=2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$; $\alpha=2n\pi$, $\beta\in\mathbf{R}$, $n\in\mathbf{Z}$ vagy $\alpha\in\mathbf{R}$, $\beta=2m\pi$, $m\in\mathbf{Z}$.

b) A megoldások: $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ vagy $x=2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

3. Az igazolást vektorok alkalmazásával végezzük. Felhasználjuk, hogy egy vektornak önmagával való skaláris szorzata megegyezik a vektor hosszának négyzetével, azaz $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}^2=|\mathbf{x}|^2$.

Legyen az $ABCD$ négyszög D csúcsa az origó, $\overrightarrow{DA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{DB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{DC}=\mathbf{c}$. Ekkor $\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}-\mathbf{a}$, $\overrightarrow{CB}=\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\overrightarrow{BA}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

Ezzel a jelöléssel az $ABCD$ négyszög pontosan akkor paralelogramma, ha $\mathbf{b}=\mathbf{a}+\mathbf{c}$.

Ha az $ABCD$ négyszög paralelogramma, akkor $\mathbf{b}=\mathbf{a}+\mathbf{c}$. Az oldalak négyzetének összege ekkor valóban megegyezik az átlók négyzetének összegével, hiszen

$$DA^2+AB^2+BC^2+CD^2=2\mathbf{a}^2+2\mathbf{c}^2,$$

az átlók négyzetének összegének összege pedig

$$DB^2+CA^2=\mathbf{b}^2+(\mathbf{a}-\mathbf{c})^2=(\mathbf{a}+\mathbf{c})^2+(\mathbf{a}-\mathbf{c})^2=2\mathbf{a}^2+2\mathbf{c}^2.$$

Ha az oldalak négyzetének összege megegyezik az átlók négyzetének összegével, akkor

$$\mathbf{a}^2+(\mathbf{b}-\mathbf{a})^2+(\mathbf{c}-\mathbf{b})^2+\mathbf{c}^2=\mathbf{b}^2+(\mathbf{a}-\mathbf{c})^2,$$

ahonnan

$$\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2-2\mathbf{ab}-2\mathbf{bc}+2\mathbf{ac}=\mathbf{0},$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{b})^2=\mathbf{0},$$

ami csak úgy lehetséges, ha $\mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{b}=\mathbf{0}$, azaz $\mathbf{b}=\mathbf{a}+\mathbf{c}$, tehát a négyszög valóban paralelogramma.

4. Felhasználjuk, hogy ha $A>0$, $B>0$, akkor $A+B\geqslant 2\sqrt{AB}$, és az egyenlőség pontosan $A=B$ esetén teljesül. Azonos átalakításokkal

$$\frac{x^2+4}{x+4}=\frac{x^2-16+20}{x+4}=x-4+\frac{20}{x+4}=-8+\left(x+4+\frac{20}{x+4}\right)\geqslant -8+2\sqrt{20}=4\sqrt{5}-8,$$

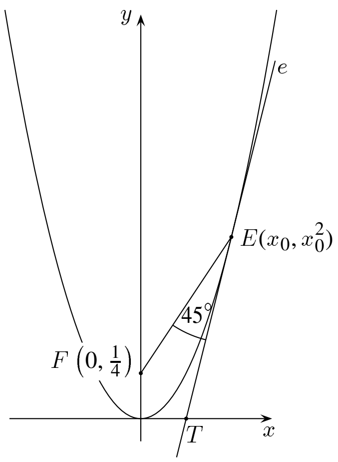
hiszen $x+4>0$.

A függvény legkisebb értéke $4\sqrt{5}-8$, amit akkor vesz fel, ha $x+4=\dfrac{20}{x+4}$ (és $x+4>0$), azaz ha $x=2\sqrt{5}-4$.

Rábai Imre

C gyakorlatok megoldásai

C. 522. *Keressük meg az $y=x^2$ egyenletű parabolának azokat az érintőit, amelyek 45°-os szöget zárnak be a fókuszpontból az érintési pontba húzott szakasszal.*



Megoldás. Tudjuk, hogy az $y=\dfrac{1}{2p}x^2$ másodfokú függvény görbéje egy olyan parabola, amelynek szimmetriatengelye az y tengely, csúcsa az origóban van, és felfelé nyitott. A parabola paramétere p, a fókuszpontnak a d vezéregyenestől való távolságát méri. Esetünkben $y=x^2$, azaz $\dfrac{1}{2p}=1$, $p=\dfrac{1}{2}$, a fókuszpont koordinátái $F\left(0;\dfrac{1}{4}\right)$. Legyen E egy érintési pont (most csak az első síknegyedben vizsgáljuk az érintőket), az E koordinátái $(x_0;x_0^2)$. Annak az e érintőnek az egyenletét keressük, amely az EF egyenessel 45°-os szöget zár be.

Írjuk fel először az EF egyenes egyenletét. EF egy irányvektorának koordinátái $\mathbf{V}\left(x_0;x_0^2-\dfrac{1}{4}\right)$;

egy pontjának koordinátái $F\left(0;\frac{1}{4}\right)$, így EF egyenlete:

$$y=\frac{x_0^2-\frac{1}{4}}{x_0}x+\frac{1}{4}.$$

Ismeretes, hogy a parabola érintőjének általános egyenlete:

$$xx_0=p(y+y_0),$$

ahol x_0, y_0 az érintési pontok koordinátái és p a paraméter.

Esetünkben $p=\frac{1}{2}$, így az érintő egyenlete: $xx_0=\frac{1}{2}(y+x_0^2)$. Rendezve:

(1) $$y=2x_0x-x_0^2.$$

Ha az m_1, m_2 iránytangensű egyenesek nem merőlegesek egymásra, akkor α hajlásszögükre a

$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$$

egyenlőség áll fenn. (Lásd pl. *Hajós György:* Bevezetés a geometriába c. könyv 339. oldal.)

$$\operatorname{tg}45^\circ=1,\qquad m_1=\frac{x_0^2-\frac{1}{4}}{x_0},\qquad m_2=2x_0$$

helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$1=\left|\frac{\frac{x_0^2-\frac{1}{4}}{x_0}-2x_0}{1+\frac{x_0^2-\frac{1}{4}}{x_0}\cdot 2x_0}\right|.$$

$x_0>0$ figyelembevételével rendezve:

$$2x_0^3+\frac{1}{2}x_0=x_0^2+\frac{1}{4},$$

ahonnan

$$2x_0\left(x_0^2+\frac{1}{4}\right)=x_0^2+\frac{1}{4},$$

$x_0^2+\frac{1}{4}>0$-val végigosztva

$$2x_0=1,$$
$$x_0=\frac{1}{2}.$$

Vagyis az E érintési pont koordinátái $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ az első negyedben; $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ a második negyedben. Ezeket az értékeket helyettesítve (1)-be a keresett két érintő egyenlete: $y=x-\frac{1}{4}$, illetve $y=-x-\frac{1}{4}$.

Megjegyzés. A feladatot másképpen is megoldhatjuk, pl. úgy, hogy meghatározzuk az e érintő és az x tengely T metszéspontjának a koordinátáit, és az FET háromszögre felírjuk a koszinusztételt, ahonnan x_0 értéke kiszámítható.

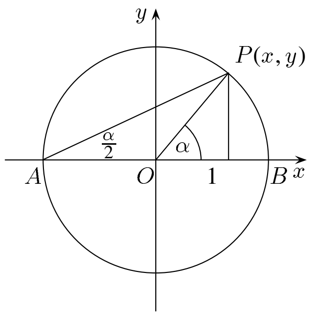
122 dolgozat érkezett. 7 pontos Robotka Zsolt, 6 pontos Ábrány Miklós, Bérces Márton, Fehér Gergely és Strobl Apolka megoldása. 5 pontot kapott 48, 4 pontot 32, 3 pontot 14, 2 pontot 8, 1 pontot 5, 0 pontot 7 beküldő. Nem versenyszerű 3 dolgozat.

C. 530. *Bizonyítsuk be, hogy egy α szög szinusza és koszinusza akkor és csak akkor racionális egyszerre, ha* $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ *racionális (vagy nem értelmezett).*

Javasolta: *Hans Zoltán*

Megoldás. Vegyük fel az egység sugarú körben az α szöget. A mozgó szár és a kör metszéspontja P, koordinátái x és y. A szinusz- és koszinuszértékeket a szokásos módon értelmezve:

$$\sin\alpha = y, \qquad \cos\alpha = x.$$



Az egység sugarú kör és az x tengely A metszéspontjára $PAO\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$.

AP iránytangense: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = m$, BP iránytangense: $-\frac{1}{m}$ (merőlegesek egymásra). Ha $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$ racionális, akkor A és P racionális koordinátájú pontok, így AP iránytangense, azaz $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ is racionális.

Megfordítva, az AP és BP egyenesek egyenletei:

$$y = m(x+1), \qquad \text{illetve} \qquad y = -\frac{1}{m}(x-1).$$

Az egyenesek metszéspontjának koordinátái:

$$x = \frac{1-m^2}{m^2+1} \qquad \text{és} \qquad y = \frac{2m}{m^2+1}.$$

Mivel m racionális, az $x = \sin\alpha$ és $y = \cos\alpha$ is racionális.

Végül ha $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ nincs értelmezve, akkor $\cos\frac{\alpha}{2} = 0$ és $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm 1$. A $\sin\alpha = 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$ összefüggésből $\sin\alpha = 0$, a $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$-ből pedig $\cos\alpha = 1$, azaz $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$ ebben az esetben is racionális értékű.

158 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Birkner Tamás és Lovas Róbert. 5 pontos 37, 4 pontos 18, 3 pontos 26, 2 pontos 45, 1 pontos 14, 0 pontos 16 dolgozat.

C. 534. *Az első* 539 *pozitív egész szám közül kiválasztunk néhányat úgy, hogy azok összege legalább egyharmada az eredeti számok összegének. Legalább hány számot kell ehhez kiválasztanunk?*

Megoldás. Az első 539 pozitív egész szám összege a számtani sorozat ismert összegképlete szerint:

$$S_{539} = \frac{539 \cdot 540}{2} = 145\,530.$$

Ahhoz, hogy a kiválasztott számok összege a fenti összegnek legalább egyharmada legyen és kevés számot kelljen kiválasztanunk az kell, hogy nagy számokat válasszunk.

Legyen a kiválasztott számok közül a legkisebb az x, a továbbiak $x+1$, $x+2$, ..., 539.

Ezek összegéről, S'-ről azt akarjuk, hogy legalább egyharmada legyen S-nek, azaz

$$48\,510 = \frac{145\,530}{3} \leqslant S' = \frac{n}{2}(x+539), \tag{1}$$

ahol n a kiválasztott számok száma. Tudjuk, hogy a számtani sorozatban $a_n = a_1 + (n-1)d$, esetünkben $d=1$ és

$$539 = x + (n-1)\cdot 1,$$

ahonnan $n = 540 - x$. Ezt (1)-be helyettesítve és rendezve:

$$(540-x)(x+539) \geqslant 97\,020.$$

Innen a következő másodfokú egyenlőtlenséghez jutunk:

$$x^2 - x - 194\,040 \leqslant 0.$$

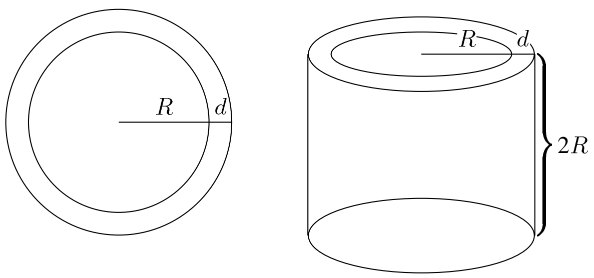
A megfelelő egyenlet pozitív gyöke az $x=441$; ez az egyenlőtlenség legnagyobb megoldása. Ha ez a legkisebb kiválasztott szám, akkor 99 számot kell kiválasztanunk.

Agócs Judit (Budapest, Árpád Gimn., 11. o.t.)

303 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 226, 4 pontot 15, 3 pontot 19, 2 pontot 5, 1 pontot 35, 0 pontot 2 versenyző. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

C. 536. *Egy R sugarú gömböt és egy R sugarú, $2R$ magasságú henger palástját egyforma vastagságú festékréteggel vonunk be. Melyikhez kell több festék?*

Megoldás. A festékréteg vastagságát jelöljük d-vel. Ha a d-vel megnövelt $R+d$ sugarú gömb térfogatából kivonjuk az eredeti R sugarú gömb térfogatát, megkapjuk a felhasznált festék térfogatát. Jelöljük ezt f_g-vel:



$$f_g = \frac{4\pi}{3}\left((R+d)^3 - R^3\right) = \frac{4\pi}{3}\left(3R^2d + 3Rd^2 + d^3\right) = 2\pi d\left(2R^2 + 2Rd + 2d^2/3\right).$$

Hasonlóan a hengerre a térfogatok különbségét f_h-val jelölve:

$$f_h = (R+d)^2\pi \cdot 2R - R^2\pi \cdot 2R = 2\pi d(2R^2 + Rd).$$

Összehasonlítva a térfogatokat rögtön láthatjuk, hogy a gömb befestéséhez több festéket használtunk fel, mivel $d>0$.

Gueth Krisztián Szombathely, Kanizsai D. Gimn., 12. o.t.)

Megjegyzés. A kérdés azért érdekes, mert a gömb felszíne és a henger palástja egyenlő: mindkettő $4R^2\pi$. Amint a megoldásból kiderül, ebből nem következik, hogy az egyenlő vastagságú külső rétegek térfogata is egyenlő, a gömb esetében nagyobb értéket kapunk.

350 dolgozat érkezett. 6 pontos Robotka Zsolt megoldása. 5 pontot kapott 140, 4 pontot 3, 3 pontot 3, 2 pontot 25, 1 pontot 146, 0 pontot 24 beküldő. Nem versenyszerű 8 dolgozat.

C. 537. *Dolgozatírás közben Sanyi az órájára pillantva megállapította, hogy a dolgozatírás idejéből ötször annyi telt el, mint amennyi még hátra van. M perc múlva ez az arány már 8. Mennyi az arány újabb M perc elteltével?*

Megoldás. A dolgozatírás teljes ideje legyen x perc. Amikor Sanyi az órájára pillantott, eltelt $\frac{5}{6}x$ perc, és hátravolt $\frac{1}{6}x$ perc. M perc múlva – ekkor az idők aránya 8 – felírhatjuk, hogy

$$\frac{5}{6}x+M=8\left(\frac{1}{6}x-M\right),$$

ahonnan $M=\frac{1}{18}x$.

Újabb M perc múlva, L-lel jelölve az idők arányát:

$$\frac{5}{6}x+2\frac{1}{18}x=L\left(\frac{1}{6}x-2\cdot\frac{1}{18}x\right),$$

ahonnan $L=17$.

Tehát újabb M perc elteltével az arány 17 lesz.

Kéri Sophia (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.)

301 dolgozat érkezett. 6 pontos Ábrány Miklós és Gajdos Béla megoldása. 5 pontot kapott 252, 4 pontot 10, 3 pontot 12, 2 pontot 1, 1 pontot 2, 0 pontot 5 beküldő. Nem versenyszerű 17 dolgozat.

C. 538. *Milyen p (nem feltétlenül pozitív) prímek esetén lesz a $2p+1$, $4p+1$, $6p+1$ kifejezések értéke is prím?*

Javasolta: *Kovács Ádám,* Budapest

Megoldás. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy $p=+2$ nem megoldása a feladatnak, hiszen ekkor $4p+1=4\cdot 2+1=9$ nem prímszám.

A $p=-2$-re viszont $2p+1=-3$, $4p+1=-7$, $6p+1=-11$, ez tehát megfelelő.

Kérdés, van-e más megoldása is a feladatnak.

Vegyük észre, hogy bármely p egészre p, $2p+1$, $4p+1$ közül pontosan egy osztható 3-mal, a $6p+1$ viszont soha sem osztható 3-mal.

1. Ha p osztható 3-mal, akkor mivel prímszám, ez csak úgy lehet, hogy $p=\pm 3$.

Ha $p=3$, akkor $2p+1=7$, $4p+1=13$, $6p+1=19$
és ha $p=-3$, akkor $2p+1=-5$, $4p+1=-11$, $6p+1=-17$.

Ekkor a kapott értékek mindegyike prímszám, tehát $p=\pm 3$ megoldás.

2. Ha 3 osztója a $(2p+1)$-nek, akkor a $2p+1$ prímszám lehetséges értékei $2p+1=3$, ahonnan $p=1$, ami nem prímszám, vagy $2p+1=-3$, ahonnan $p=-2$, s erről már láttuk, hogy megoldás.

3. Hasonlóan, ha $4p+1=3$, akkor $p=\dfrac{1}{2}$ nem egész szám, vagy $4p+1=-3$ és $p=-1$, ami nem prím.

Összefoglalva: p keresett értékei -2 és ± 3, és több megoldás nincs.

Bartha Ágnes (Kézdivásárhely, Nagy Mózes Líceum, 9. o.t.)

178 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 92, 4 pontot 11, 3 pontot 37, 2 pontot 12, 1 pontot 7, 0 pontot 14 beküldő. Nem versenyszerű 5 dolgozat.

C. 539. *Igazoljuk, hogy bármely hegyesszögű, egyenlő szárú háromszögben*

$$AM=\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha},$$

ahol szokásos módon a *az alapot,* A *és* α *az alappal szemközti csúcsot, illetve szöget,* M *pedig a magasságpontot jelöli.*

I. megoldás. Az ABC háromszögben $(AB=AC)$ a B csúcsból induló magasság talppontját jelöljük T-vel.

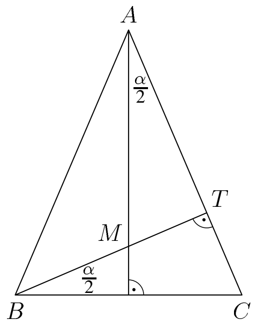
Az AMT háromszög hasonló BTC háromszöghöz, mindkettő derékszögű, és $MAT\sphericalangle=TBC\sphericalangle=\dfrac{\alpha}{2}$, hiszen merőleges szárú hegyesszögek. A hasonlóság miatt

(1) $$\frac{AM}{BC}=\frac{AT}{BT}, \quad \text{innen} \quad AM=BC\cdot\frac{AT}{BT}.$$

Tudjuk, hogy $BC=a$, az ABT derékszögű háromszögből $\dfrac{AT}{BT}=\operatorname{ctg}\alpha$, ezeket helyettesítve (1)-be:

$$AM=a\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha},$$

amit bizonyítani akartunk.



1. ábra

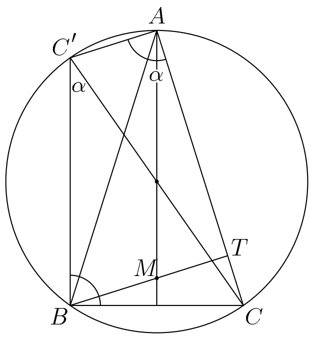
Gérecz Balázs (Pannonhalma, Bencés Gimn., 10. o.t.)

II. megoldás. Rajzoljuk meg az ABC egyenlő szárú háromszög $(AB=AC)$ körülírt körét.

A C pont átellenes pontját a körön jelöljük C'-vel. A $C'BC$ háromszög derékszögű (Thálesz-tétel), és a kerületi szögek tétele szerint $BC'C\sphericalangle = \alpha$.

A $C'AC$ szög ugyancsak derékszög, így $C'A \perp AC$ és $BT \perp AC$ miatt $C'A \parallel BT$. Hasonlóan $C'B \perp BC$ és $AM \perp BC$ miatt $C'B \parallel AM$, azaz az $AC'BM$ négyszög paralelogramma, és így $AM = C'B$.

A $C'BC$ derékszögű háromszögből $\dfrac{BC}{C'B} = \operatorname{tg}\alpha$; $BC = a$ és $C'B = AM$ helyettesítéssel rendezés után a bizonyítandó $AM = \dfrac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$ egyenlőséget kapjuk.

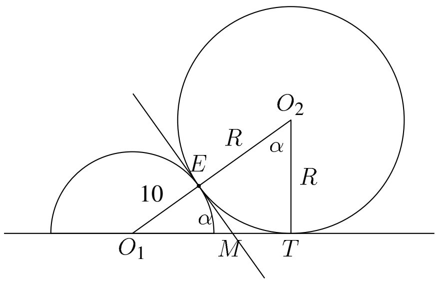


2. ábra

Király Péter (Budapest, Kaffka M. Gimn., 11. o.t.)

167 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Ábrány Miklós, Bérces Márton, Besenyei Ádám, Csató György, Fall Zoltán, Gajdos Béla, Lovas Róbert, Nagy 729 Dávid, Pótó Júlia, Robotka Zsolt, Sapszon János, Szalay Zsófia és Szűcs 816 Júlia. 5 pontos 142, 4 pontos 2, 2 pontos 1, 0 pontos 5 dolgozat. Nem versenyszerű 4.

C. 540. *Vízszintes síkból kiemelkedik (az autósok bosszantására) egy* 10 cm *sugarú félgömb. A síkon gurul egy henger, amely palástjával a félgömbnek ütközik. Jelölje* α *a két test érintési pontjára illeszkedő közös érintősíknak a vízszintessel bezárt szögét. Legalább mekkora a henger sugara, ha* $\alpha \leqslant 30°$*?*



Megoldás. Állítsunk a gömb O_1 középpontján keresztük a vízszintes síkra merőleges síkot. Ez a sík a hengert egy körben metszi, amelynek a középpontját jelöljük O_2-vel, sugarát R-rel. O_2-ből a vízszintes síkra állított merőleges talppontja T, a két kör közös érintési pontja E, a közös érintő a vízszintes síkot az M pontban metszi.

Az $O_1O_2T\sphericalangle = O_1ME\sphericalangle = \alpha$, hiszen merőleges szárú hegyesszögek.

Az O_1O_2T háromszögből $\cos\alpha = \dfrac{R}{R+10}$, ahonnan

$$R = \frac{10\cos\alpha}{1-\cos\alpha}. \tag{1}$$

Ha $\alpha = 30°$, $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ és $R = 10\left(3+2\sqrt{3}\right) \approx 64{,}64$.

Azt állítjuk, hogy a $0 < \alpha \leqslant 30°$ intervallumban ez a legkisebb R érték.

(1) jobb oldalát alakítsuk át a következőképpen:

$$10\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=10\frac{\cos\alpha-1+1}{1-\cos\alpha}=10\left(\frac{1}{1-\cos\alpha}-1\right).$$

Ha $0<\alpha<30^\circ$, akkor α csökkenésével $\cos\alpha$ nő, $1-\cos\alpha$ csökken, és $\dfrac{1}{1-\cos\alpha}$ nő (és persze -1-et levonva és 10-zel szorozva is nőni fog). Az $R:\alpha\to\dfrac{10\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$ függvény tehát szigorúan monoton csökkenő, ha $0<\alpha<90^\circ$.

R tehát valóban 30°-nál veszi fel a legkisebb értékét, ha $0<\alpha\leqslant 30^\circ$.

193 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 167, 4 pontot 7, 3 pontot 3, 2 pontot 2, 1 pontot 8, 0 pontot 6 beküldő.

C. 541. *Egy hatoldalas házi dolgozatban négy ábrát kell elhelyeznünk. Az ábrák sorrendje meghatározott és egy oldalon legfeljebb két ábra lehet. Hányféleképpen tehető ez meg? (Az ábrák egy-egy oldalon belüli helyzetére nem vagyunk tekintettel.)*

Megoldás. A feladatot három esetre bontjuk:

1. Mindegyik ábra külön oldalon van;
2. Két (egymás után következő) ábra egy oldalon, a másik két ábra külön oldalon van;
3. 2-2 ábra van egy-egy oldalon.

Az 1. esetben a 6 oldalból választjuk ki azt a 4-et, amelyiken ábra van: ez $\binom{6}{4}=\dfrac{6!}{4!\cdot 2!}=$ $=15$-féleképpen lehetséges.

A 2. esetben 3 oldalt választunk ki az ábrák számára, ez $\binom{6}{3}$-féleképpen lehetséges. Ezután a 4 ábrából 3-féleképpen rakhatunk kettőt egy oldalra, ami összesen $3\cdot\binom{6}{3}=$ $=3\cdot\dfrac{6!}{3!\cdot 3!}=60$ lehetőséget jelent.

A 3. esetben a 6 oldalból kiválasztunk 2 oldalt, s ez kiszámolva ugyanannyi, mint az első eset, vagyis 15 lehetőség.

Összesen tehát $15+60+15=90$ lehetőség van az ábrák elhelyezésére az adott feltételek mellett.

Hablicsek Márton (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 7. o.t.)

168 dolgozat érkezett. 6 pontos Ábrány Miklós, Farkas 327 Dóra, Orbán Viktor és Szűcs 816 Júlia megoldása. 5 pontot kapott 122, 4 pontot 2, 3 pontot 3, 2 pontot 4, 1 pontot 5, 0 pontot 28 beküldő.

C. 542. *Milyen pozitív egész n-ekre teljesül az*

$$(n-2)\left(2+2^2+\ldots+2^n\right)<n\cdot 2^n$$

egyenlőtlenség?

Megoldás. A zárójelben álló 2-hatványok összegét felírhatjuk mint egy mértani sorozat összegét, amelyben $a_1=2$, $q=2$; ekkor

$$S_n=2(2^n-1).$$

Az (1) egyenlőtlenség tehát így írható fel:

$$(n-2)2(2^n-1)<n\cdot 2^n.$$

Elvégezve a beszorzást és a 2 hatványait egy oldalra csoportosítva:

$$2^n(n-4)<2n-4.$$

Ha $n>4$, akkor mindkét oldalt eloszthatjuk $2(n-4)>0$-val. Ekkor

$$2^{n-1}<\frac{2n-4}{2(n-4)}=\frac{2(n-2)}{2(n-4)}=\frac{n-4+2}{n-4}=1+\frac{2}{n-4}.$$

A jobb oldal értéke legfeljebb 3, így ha $n>4$, akkor a jobb oldal biztosan kisebb, mint a bal oldal; az (1) egyenlőtlenség tehát nem állhat fenn.

Azt viszont könnyen ellenőrizhetjük, hogy ha n értéke 1, 2, 3 vagy 4, akkor (1) valóban teljesül.

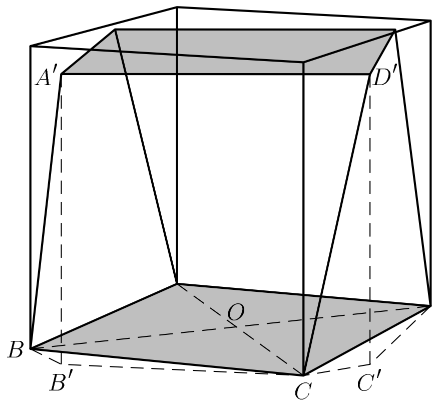
147 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Birkner Tamás. 5 pontos 78, 4 pontos 40, 3 pontos 16, 2 pontos 7, 1 pontos 5 dolgozat.

C. 544. *„Szerkezetkész” egységkockánknak van alap- és fedőlapja, továbbá oldalélei. A fedőlapot az alaplaphoz képest α hegyesszöggel elcsavarjuk a két lap középpontját összekötő egyenes mint tengely körül. Mennyivel kerül közelebb a fedőlap az alaplaphoz, ha az oldalélek hossza nem változik és a csúcsok összeköttetése is megmarad?*

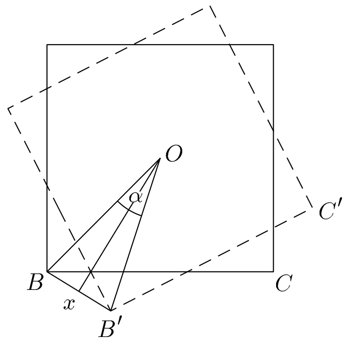
Megoldás. A kocka magassága az elcsavarás előtt $m=1$, a négyzetlapok átlójának hossza $\sqrt{2}$.

A megcsavarás után (csak a fedőlap csavarodik el) az elfordult A' és D' csúcsok vetületét az alapsíkra jelölje B', illetve C', az alapnégyzet középpontját O (*1. ábra*).

Az eredeti és az elfordult négyzet felülnézeti képén (*2. ábra*) $OB=OB'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $BB'=x$. Az OBB' egyenlő szárú háromszögben $BOB'\sphericalangle=\alpha$ és $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, ahonnan $x=\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}$.



1. ábra



2. ábra

Mivel elcsavaráskor az oldalélek hossza nem változik, az *1. ábra* jelölései szerint $A'B=1$, $A'B'=m'$ az új magasság, és az $A'BB'$ derékszögű háromszögből: $m'^2+x^2=$ $=1$, ahonnan

$$m'=\sqrt{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{1-2\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\cos\alpha}.$$

Az eredeti és az elcsavart magasság különbsége megadja, hogy mennyivel került közelebb a fedőlap az alaplaphoz:

$$m-m'=1-\sqrt{\cos\alpha}.$$

Megjegyzés. Az eredmény mást is elárul. Ha $\alpha=0$, $\cos\alpha$ értéke 1, tehát ha semmit sem csavarunk el, akkor a távolság sem változik. Van a csavarásnak maximuma, és ez 90°. Ekkor, ha elképzeljük a csavarást, az addig „függőleges” (alapsíkra merőleges) élek az alapsíkba fordulnak, az alaplap és a fedőlap most egymáson fekszik.

Várallyay György (Budapest, Kodály Z. Magyar Kórusisk., 12. o.t.)

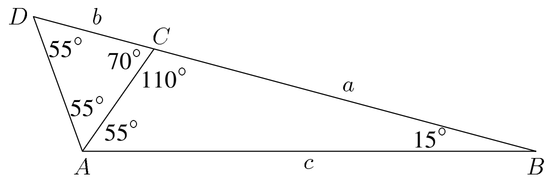
96 dolgozat érkezett. 6 pontos Gajdos Béla megoldása. 5 pontot kapott 55, 4 pontot 11, 3 pontot 3, 2 pontot 1, 1 pontot 2, 0 pontot 23 beküldő.

Matematika gyakorlatok megoldásai

Gy. 3251. *Egy háromszög* a, b, c *oldalaival szemközti szögei* 55, 15 *és* 110 *fokosak. Bizonyítsuk be, hogy* $c^2-a^2=ab$.

Megoldás. Mérjünk fel egy b hosszúságú szakaszt a BC oldal C-n túli meghosszabbítására, legyen a végpontja D.

Az ACD egyenlő szárú háromszög szárai 70°-os szöget zárnak be, így az alapon fekvő szögek 55°-osak. Az ABC háromszög tehát hasonló a DBA háromszöghöz, azaz $\frac{c}{a}=\frac{a+b}{c}$.



Ezt az egyenlőséget átrendezve kapjuk, hogy $c^2=a^2+ab$, ami az állítással ekvivalens.

240 dolgozat érkezett. 7 pontos Harangi Viktor, Hegyi Márta és Lovrics Anna megoldása. 6 pontot kapott Andrássy Zoltán, Bartha Tamás, Bíró Ádám, Boros Vazul, Breuer János, Kunszenti-Kovács Dávid, Nagy Tamás, Pogátsa Attila, Porcs-Makkay Ákos, Simon András, Siska Ádám, Somogyi Dávid, Szalay Zsófia, Tran Thanh Long és Zalán Péter, 5 pontot 103 versenyző. 4 pontos 52, 3 pontos 28, 2 pontos 14, 1 pontos 2, 0 pontos 7 dolgozat. Nem versenyszerű 16.

Gy. 3254. *Van-e olyan köbszám, amelynek tízes számrendszerbeli alakja $ababab1$ alakú?*

Spanyol versenyfeladat

Megoldás. Feltételezve, hogy $a\neq 0$, olyan x számot keresünk, amelynek köbe hétjegyű, ezért $x\geqslant 100$ és $x\leqslant 215$, mivel $216^3=1\,007\,7696$ már nyolcjegyű.

Ha $x^3=\overline{ababab1}$, akkor $x^3-1=\overline{ababab0}$ alakú, tehát 10-zel osztható, és mivel számjegyeinek összege $3(a+b)$, 3-mal is osztható. Belátjuk, hogy ha x^3-1 osztható 30-cal, akkor $x-1$ is.

$x-1$ osztható 10-zel, mivel ha x^3 1-re végződik, akkor, végignézve a páratlan egyjegyű számok köbeit, x is biztosan 1-re végződött.

x^3 pontosan akkor ad 1 maradékot 3-mal osztva, amikor x. Ez hasonlóan látható be, a maradék (a 0, az 1 és a 2) köbének ellenőrzésével. Ez azt jelenti, hogy $x-1$ osztható 3-mal.

Csak négy darab 30-cal osztható 99 és 214 közé eső szám van, így $x=121$, 151, 181 és 211 lehetne. Ezeket köbre emelve láthatjuk, hogy a feladatnak csak $211^3=9393931$ a megoldása.

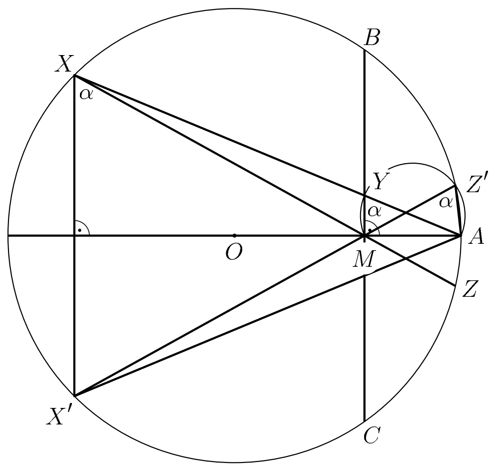
Megjegyzés. A megoldók többsége több-kevesebb számolással megtalálta az egyetlen megoldást. *Somogyi Dávid* (Fazekas F. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.) azt is megnézte, lehetséges-e $a=0$, illetve tetszőleges c számjegy esetén is, hogy egy köbszám $\overline{abababc}$ alakú. x és x^3 30-cal való osztási maradékainak táblázatát felírva belátta, hogy a fenti megoldáson kívül csak a 0, az 1 és a 8 olyan köbszámok, amelyek tízes számrendszerbeli alakja $\overline{abababc}$.

274 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Somogyi Dávid. 5 pontos 263, 3 pontos 1, 1 pontos 1, 0 pontos 8 dolgozat.

Gy. 3259. *Az O középpontú kör OA sugarát a BC húr merőlegesen metszi az M pontban. Legyen X a nagyobbik BC ív tetszőleges pontja, XA és BC metszéspontja Y, az XM egyenes és a kör második metszéspontja pedig Z. Bizonyítsuk be, hogy $AY \geqslant MZ$.*

Megoldás. A pontok jelölése az *ábrán* látható. Jelöljük még X'-vel és Z'-vel az X és a Z pontok OA-ra vonatkozó tükörképét.

A kerületi szögek tétele miatt $\alpha = X'Z'A\sphericalangle = X'XA\sphericalangle$, és párhuzamos szárú szögek miatt $X'XA\sphericalangle = MYA\sphericalangle$. Y és Z' tehát rajta van az MA szakaszra írt α szögű látóköríven. Thálesz tétele miatt ennek a körnek YA átmérője, ezért legalább olyan hosszú, mint a kör egy húrja: $YA \geqslant MZ' = MZ$.



Harangi Viktor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.)

45 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Ambrus Gergely, Babos Attila, Bálint Gergely, Birkner Tamás, Csikvári Péter, Csóka Endre, Deli Lajos, Eördegh Péter, Erdei Zsuzsa, Fodor 133 Gyula, Hamar Gergő, Harangi Viktor, Horváth Dénes, Kovács Erika Renáta, Leipold Diána, Nagy 444 Zoltán, Pogátsa Attila, Rácz Éva, Siklósi Dávid, Sparing Dániel, Stépán József, Tóth 370 Ágnes, Tran Thanh Long, Váradi Vajk és Vígh Viktor. 4 pontos 7, 3 pontos 3, 2 pontos 3, 1 pontos 3, 0 pontos 4 dolgozat.

Gy. 3260. *Egy derékszögű koordinátarendszerben megrajzolt négyzet oldalai* 45°*-os szöget zárnak be a tengelyekkel. Lehetséges-e, hogy a négyzet belsejében pontosan* 7 *rácspont található?*

Megoldás. Alkalmazzuk a síkra az origó középpontú, 45°-os, $\sqrt{2}$ arányú forgatva nyújtást. Ekkor a rácspontok átmennek a „fehér” rácspontokba, ha sakktáblaszerűen színezzük őket, és az origó színe fehér; a négyzet pedig tengelypárhuzamossá válik. Lehet-e egy tengelypárhuzamos négyzetben pontosan 7 db fehér rácspont?

Egy tengelypárhuzamos négyzetben a rácspontok téglalapszerűen helyezkednek el.

1. eset. A téglalap egyik oldalának hossza páros: $2k \times l$; ekkor $k \cdot l$ darab fehér rácspont van benne. Ha $kl = 7$, akkor a téglalap csak 14×1-es vagy 7×2-es lehet. Ha egy tengelypárhuzamos téglalap belsejében a rácspontok 14×1 alakban helyezkednek el, akkor a téglalap a, b oldalaira: $14 < a \leqslant 16$ és $0 < b \leqslant 2$, így biztosan $a \neq b$, tehát a téglalap nem négyzet. Ugyanígy kezelhető a 7×2-es eset is.

2. eset. A négyzetben a rácspontok $(2k+1) \times (2l+1)$ alakban helyezkednek el. Ha $n = (2k+1)(2l+1)$, akkor a téglalapban vagy $\dfrac{n+1}{2}$ vagy $\dfrac{n-1}{2}$ fehér rácspont található.

Ez csak úgy lehet 7, ha $n=13$ vagy 15; így a rácspontok elrendezése a négyzetben a következő lehet: 1×13, 1×15, 3×5. Mindhárom eset a fentiekhez hasonlóan kizárható.

A feladat kérdésére adott válasz tehát: nem lehetséges.

Megjegyzés. Varjú Péter (Szeged, Radnóti M. Gimn., 10. o.t.) megmutatta, hogy akkor lenne igenlő a válasz, ha a feladatban a 7 helyett $2k(k+1)$, $k(2k+1)$, $2k^2$, $(k+1)(2k+1)$ vagy $(k+1)^2+$ $+k^2$ alakú szám szerepelne; a 7 nem ilyen alakú.

95 dolgozat érkezett. 6 pontos Ambrus Gergely és Pallos Péter, 5 pontos Andrássy Zoltán, Babos Attila, Csernenszky András, Csikvári Péter, Deli Lajos, Dunai Gábor, Gerencsér Balázs, Harangi Viktor, Horváth Illés, Kovács Erika Renáta, Kunszenti-Kovács Dávid, Reviczky Ádám János, Simon Győző, Somogyi Dávid, Szebenyi Zoltán és Varjú Péter megoldása. 4 pontot kapott 13, 3 pontot 17, 2 pontot 4, 1 pontot 30, 0 pontot 13 dolgozat.

Gy. 3262. *Mutassuk meg, hogy bármely* 3×3*-as bűvös négyzet első sorában szereplő számok négyzetének összege egyenlő a harmadik sor számainak négyzetösszegével. (Bűvös négyzetnek nevezzük az olyan* $n\times n$*-es számtáblázatot, amelynek minden sorában, oszlopában és a két átlójában a számok összege ugyanannyi.)*

Javasolta: *Kiss Sándor,* Nyíregyháza

A gyakorlatot Bakos Tibor tanár úr emlékére javasolta a kitűző.

k	l	m
n	o	p
q	r	s

1. ábra

I. megoldás. Az *1. ábra* jelöléseivel be kell látnunk, hogy

$$k^2+l^2+m^2=q^2+r^2+s^2, \tag{1}$$

azaz

$$k^2-s^2+l^2-r^2+m^2-q^2=0,$$

azaz

$$(k-s)(k+s)+(l-r)(l+r)+(m-q)(m+q)=0. \tag{2}$$

Mivel $k+o+s=l+o+r=m+o+q=S$ (S a bűvös négyzet állandója),

$$k+s=l+r=m+q=S-o,$$

tehát (2) így írható:

$$(S-o)(k-s+l-r+m-q)=0. \tag{3}$$

De $k+l+m=q+r+s(=S)$, tehát a szorzat második tényezője 0, ezért az valóban 0. Így az állítást igazoltuk.

II. megoldás. A feladat a következő állítás segítségével is megoldható:

Állítás: A 3×3-as bűvös négyzet állandója háromszorosa a középső elemnek.

Ez az *1. ábra* segítségével a következőképpen látható be. Írjuk fel a bűvös tulajdonságot a középső sorra, a két átlóra, majd az első és harmadik oszlopra:

$$\begin{array}{cc} n+o+p=S & k+n+q=S \\ k+o+s=S & m+p+s=S \\ m+o+q=S & \end{array}$$

Vonjuk ki az első három egyenlőség összegéből az utolsó kettő összegét:

$$\cancel{n}+o+\cancel{p}+\cancel{k}+o+\cancel{s}+\cancel{m}+o+\cancel{q}-\cancel{k}-\cancel{n}-\cancel{q}-\cancel{m}-\cancel{p}-\cancel{s}=3S-2S,$$

$$\text{és így valóban}\qquad 3o=S.$$

Ezt az állítást megtalálhatjuk *Bakos Tibor:* Ki tud többet a bűvös négyzetekről? című könyvének 43. oldalán is, a *3. ábra* pedig azt is megmutatja, hogyan is néz ki általában egy 3×3-as bűvös négyzet.

Most Bakos Tibor jelölését használjuk: legyen a középső (centrális) elem C, és jelöljük $(C+D)$-vel a bal felső sarokban, $C+d$-vel a jobb felső sarokban álló számot. (Most D és d tetszőleges (negatív) szám is lehet) (*2. ábra*).

$C+D$		$C+d$
	C	

2. ábra

$C+D$	$C-D-d$	$C+d$
$C-D+d$	C	$C+D-d$
$C-d$	$C+D+d$	$C-D$

3. ábra

Mivel $3C=S$, azért mindkét átlóban $3C$ kell legyen a számok összege: vagyis a bal alsó és jobb alsó sarokban $C-d$, illetve $C-D$ kell álljon. Innen már könnyen adódik a bűvös négyzet többi eleme is – ez látható a 3. ábrán.

A bizonyítandó állítás ekkor:

$$(C+D)^2+(C-D-d)^2+(C+d)^2=(C-d)^2+(C+D+d)^2+(C-D)^2.$$

A négyzetreemelést elvégezve láthatjuk, hogy mindkét oldalon ugyanazok a tagok állnak, a feladat állítása teljesül.

Boros Vazul (Berzsenyi D. Gimn., 9. o.t.) dolgozata alapján

180 dolgozat érkezett. 6 pontos Boros Vazul, Horváth Szilárd, Tóth 370 Ágnes és Zalán Péter megoldása. 5 pontot kapott 146, 4 pontot 11, 3 pontot 1, 2 pontot 3, 1 pontot 7, 0 pontot 8 beküldő.

Gy. 3264. *Milyen k természetes számokra igaz, hogy $2^{2k+3}+3^{k+2}\cdot 7^k$ osztható 17-tel?*

I. megoldás.

$$2^{2k+3}+3^{k+2}\cdot 7^k=8\cdot 2^{2k}+9\cdot 3^k\cdot 7^k=8\cdot 4^k+(9+8)3^k\cdot 7^k-8\cdot 3^k\cdot 7^k=$$
$$=17\cdot 21^k-8\cdot(21^k-4^k).$$

A különbség első tagja osztható 17-tel, a második tagja pedig osztható a hatványalapok különbségével, $21-4=17$-tel. Így az eredeti kifejezés is osztható 17-tel minden k természetes szám esetén.

II. megoldás. (Teljes indukcióval.) $k=0$-ra a kifejezés értéke 17. Legyen $k>0$, és tegyük fel, hogy $2^{2k+3}+3^{k+2}\cdot 7^k$ osztható 17-tel.

Ekkor

$$\underbrace{2^{2k+5}}_{4\cdot 2^{2k+3}}+\underbrace{3^{k+3}\cdot 7^{k+1}}_{(3\cdot 7)\cdot 3^{k+2}\cdot 7^k}=4\cdot\left(2^{2k+3}+3^{k+2}\cdot 7^k\right)+17\cdot 3^{k+2}7^k.$$

A zárójelben lévő tag az indukciós feltevés miatt osztható 17-tel, tehát $k+1$-re is teljesül az oszthatóság.

Így $2^{2k+3}+3^{k+2}\cdot 7^k$ minden $k\in\mathbf{N}$ esetén osztható 17-tel.

Kovács 625 Erika (Budapest, Árpád Gimn., 9. o.t.) dolgozata alapján

238 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Bálint Gergely, Bognár Attila, Boros Vazul, Czigány Balázs, Deli Lajos, Erdei Zsuzsa, Horváth Szilárd, Karácsony Veronika, Kovács 625 Erika, Kovács Erika Renáta, Nagy 139 Gergely, Nagy Tamás, Nagy 444 Zoltán, Nyul Balázs, Pogátsa Attila, Somogyi Dávid, Spanczér Ilona, Tóth 370 Ágnes és Veres Péter. 5 pontos 192, 4 pontos 14, 2 pontos 7, 1 pontos 3, 0 pontos 3 dolgozat.

Gy. 3272. *Egy téglatest a, b, c élei egész számok, felszínének és térfogatának mérőszáma megegyezik. Mekkorák az élei, ha tudjuk, hogy $c=\dfrac{a\cdot b}{2}$?*

Javasolta: *Kovács Ádám,* Budapest

Megoldás. A téglatest térfogata $a\cdot b\cdot c$, felszíne pedig $2(ab+bc+ca)$. Írjuk fel a felszín és a térfogat közti összefüggést $c=\dfrac{ab}{2}$-t behelyettesítve:

$$ab\cdot\frac{ab}{2}=2\left(ab+\frac{ab^2}{2}+\frac{a^2b}{2}\right) \tag{1}$$

egyenlőséghez jutunk. Szorozzuk meg mindkét oldalt $\dfrac{2}{ab}$-vel:

$$\begin{aligned} ab&=4+2b+2a, \qquad (2)\\ a(b-2)&=4+2b\\ a&=2+\frac{8}{b-2}. \end{aligned}$$

Mivel a és b egészek, azért szükséges, hogy $b-2$ osztója legyen 8-nak.
Ha $b-2=8$, akkor a téglatest éleinek mérőszámai 3, 10, 15
ha $b-2=4$, akkor a téglatest éleinek mérőszámai 4, 6, 12,
ha $b-2=2$, akkor a téglatest éleinek mérőszámai 4, 6, 12,
ha $b-2=1$, akkor a téglatest éleinek mérőszámai 3, 10, 15,
ha $b-2=-1$, akkor a negatív lenne,
ha $b-2=-2$, akkor $b=0$ volna,
ha $b-2=-4$ vagy -8, akkor b negatív szám lenne.

Így két megoldást kapunk: a 3, 10, 15 és a 4, 6, 12 élű téglatesteket.

Megjegyzés. Ha kicsit ügyesebbek vagyunk, a fenti (2) képletet szimmetrikusan alakíthatjuk:

$$(a-2)(b-2)=8. \tag{2'}$$

Úgy kell a-t és b-t meghatároznunk, hogy maguk is pozitív egészek legyenek, és $a-2$ és $b-2$ szorzata 8 legyen. A lehetőségek: $1\cdot 8$; $2\cdot 4$; $(-1)\cdot(-8)$; $(-2)\cdot(-4)$, az első megoldáshoz hasonlóan nézhetők végig.

210 dolgozat érkezett. 5 pontos 175, 4 pontos 25, 3 pontos 6, 2 pontos 1, 1 pontos 2, 0 pontos 1 dolgozat.

Gy. 3273. *Mutassuk meg, hogy $5^{12}+2^{10}$ összetett szám.* (**H**)

Szentpétervári Matematikai Olimpia

Megoldás.

$$A=5^{12}+2^{10}=5^{12}+2^{10}+2\cdot(5^6\cdot 2^5)-2\cdot(5^6\cdot 2^5)=(5^6+2^5)^2-5^6\cdot 2^6=$$
$$=(5^6+2^5-5^3\cdot 2^3)(5^6+2^5+5^3\cdot 2^3).$$

A szorzat második tényezője nyilván nagyobb 1-nél. Belátjuk, hogy $5^6+2^5-5^3\cdot 2^3>1$.

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt ugyanis

$$5^6+2^5\geqslant 2\sqrt{5^6\cdot 2^5}=\sqrt{2}\cdot 5^3\cdot 2^3,$$

így

$$5^6+2^5-5^3\cdot 2^3\geqslant 5^3\cdot 2^3(\sqrt{2}-1)>1.$$

Tehát az A felírható két, 1-nél nagyobb egész szám szorzataként, azaz összetett szám.

Teljesen hasonló módon bizonyítható, hogy $a^{4k}+2^{4m+2}$ mindig összetett szám, ha a, k és m pozitív egészek:

$$a^{4k}+2^{4m+2}=\left(a^{2k}+2^{2m+1}-a^k2^{m+1}\right)\left(a^{2k}+2^{2m+1}+a^k2^{m+1}\right).$$

Veres Péter (Székelyudvarhely, Tamási Á. Gimn., 10. o.t.)

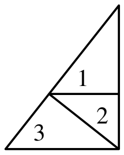
Megjegyzések. 1. Mivel a szorzat első tényezője 5-tel osztva 2 maradékot ad, így azonnal adódik, hogy nem lehet 1.

2. A feladatban a közismert x^4+4y^4 szorzattá alakítása van elrejtve.

185 dolgozat érkezett. 6 pontos Babos Attila, Birkner Tamás, Fodor 133 Gyula, Hablicsek Márton, Harangi Viktor, Keszegh Balázs, Kiss 345 Gergely, Kovács Erika Renáta, Kunszenti-Kovács Dávid, Lábó Eszter, Lábó Melinda, Lovrics Anna, Lovrics Klára, Nagy 444 Zoltán, Pálvölgyi Dömötör, Pogátsa Attila, Sipos Ádám, Somogyi Dávid, Székelyhidi Tamás, Szélig Nikoletta, Venter György, Veres Péter és Zséger Ádám megoldása. 5 pontos 160, 0 pontos 2 dolgozat.

Gy. 3274. *Van három egybevágó, derékszögű háromszög alakú papírdarabunk. Ezek bármelyikét a magassága mentén kettévághatjuk. A kapott háromszögek közül valamelyiket ismét kettévághatjuk a magassága mentén, és így tovább. Mekkora lehet a befogók aránya, ha tudjuk, hogy az eljárás során mindig található két egybevágó háromszög?*

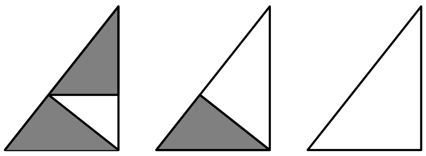
Megoldás. Azt bizonyítjuk be, hogy az arány csak $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ lehet. Itt λ_1 az egyenlő szárú derékszögű háromszög befogóaránya, λ_2 pedig az egyetlen olyané, amit az *1. ábra* szerint felvágva az 1-es és 3-as darab egybevágó lesz. (Ezt egyszerűen ki lehet számolni.)



1. ábra

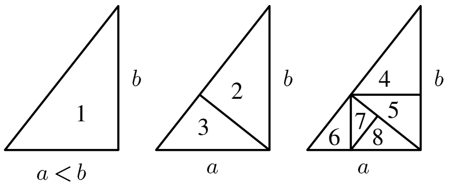
Először belátjuk, hogy λ_1, illetve λ_2 arányok esetén valóban mindig lesz két egybevágó darab minden vágás után.

Ha λ_1 az arány, akkor minden vágás két egybevágó egyenlő szárú derékszögű részre oszt, így az utolsó vágás mindig szolgáltat két egybevágó háromszöget.


2. ábra

Ha λ_2 az arány, akkor tegyük fel, hogy sikerült úgy vágni, hogy a végén csupa különböző darab keletkezett. Válasszuk ki a legrövidebb (legkevesebb vágásból álló) ilyen vágássorozatot! Vegyük észre még azt, hogy nem számít a vágások sorrendje.

A három eredeti háromszög közül kettőt biztosan kettévágtunk. Nézzük a két vágás során keletkezett két nagyobbik darabot. Ezek közül az egyiket biztosan ketté kellett vágni. Így van három egybevágó, az eredetihez hasonló háromszög (*2. ábra*). Felejtsük el a többit részt, és folytassuk csak ezeken az eltervezett vágásokat. Az eljárás végén a feltevésünk szerint csupa különböző darab lesz. A három kisebb darabon tehát kevesebb vágás is elég volt, ez pedig ellentmondás, hiszen feltettük azt is, hogy egy minimális vágássorozatból indultunk ki.



3. ábra

Most megmutatjuk, hogy ha a befogók aránya különbözik λ_1-től és λ_2-től, akkor a *3. ábrán* jelölt vágások után kapott nyolc hasonló háromszög között nincsenek egybevágók. A tömörség kedvéért az alábbiakban H_i egyszerre jelöli az ábrán i-vel jelölt számozott háromszöget, ennek területét, illetve a háromszög pontjaiból álló halmazt.

Ha két háromszögnek az ábrán van közös oldala, akkor területük nagyságviszonya eldönthető: az a kisebbik, ahol ez a közös oldal átfogó, illetve ahol ez a közös oldal a nagyobbik befogó, hiszen háromszögeink hasonlók.

Így kapjuk az alábbi egyenlőtlenségláncot:

$$H_1 > H_2 \cong H_4 \cup H_5 > H_4 > H_5 \cong H_7 \cup H_8 > H_8 > H_7,$$

azaz

$$H_1 > H_2 > H_4 > H_5 > H_8 > H_7. \tag{1}$$

Csak két háromszöget nem tudtunk besorolni, ezek H_3 és H_6. Mivel $H_2 > H_3 \cong \cong H_6 \cup H_7 \cup H_8 > H_5$, azért $H_2 > H_3 > H_5$ és hasonlóan, $H_5 \cong H_7 \cup H_8 > H_6 > H_7$, ezért $H_5 > H_6 > H_7$.

Az (1) egyenlőtlenség szerint így csak $H_3 \cong H_4$, illetve $H_6 \cong H_8$ volna lehetséges, azonban mindkettő azt jelentené, hogy a befogók aránya λ_2.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

73 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Babos Attila, Bálint Gergely, Csikvári Péter, Deli Lajos, Gerencsér Balázs, Kunszenti-Kovács Dávid, Somogyi Dávid, Tran Thanh Long és Varjú Péter. 4 pontos 13, 3 pontos 13, 2 pontos 7, 1 pontos 28, 0 pontos 3 dolgozat.

Gy. 3278. *Egy 3×3-as bűvös négyzet ábra szerinti három eleme, a, b és c adott. Határozzuk meg a hiányzó elemeket (minden sorban, minden oszlopban és a két átlóban a számok összege ugyanannyi).*

Dr. Kiss Sándor (Nyíregyháza) ötlete alapján

Megoldás. Jelöljük a hiányzó elemeket az *1. ábra* szerint T, U, V, X, Y és Z-vel! Legyen S a bűvös állandó, azaz a sorokban, oszlopokban vagy átlókban szereplő számok összege. Igazak a következők:

T	**b**	U
a	V	**c**
X	Y	Z

1. ábra

(1) $$S - c = U + Z$$

(2) $$S - a = T + X$$

(3) $$a + c = U + X$$

(4) $$a + c = T + Z$$

(1)-et és (2)-t, illetve (3)-at és (4)-et összeadva következik, hogy

$$2S - a - x = 2a + 2c, \qquad \text{így} \qquad S = 3\cdot\frac{a+c}{2}.$$

Ebből sorra, egymás után kiszámolhatók az ismeretlen elemek:

$$V = 3\cdot\frac{a+c}{2} - (a+c) = \frac{a+c}{2}, \qquad Y = 3\cdot\frac{a+c}{2} - \frac{a+c}{2} - b = a + c - b.$$

(2)-ből (3)-at kivonva:

$$T - U = 3\cdot\frac{a+c}{2} - 2a - c, \qquad \text{másrészt} \qquad T + U = 3\cdot\frac{a+c}{2} - b.$$

E két utóbbit összeadva és rendezve kapjuk, hogy

$$T = \frac{a+2c-b}{2},$$

$$U = 3\frac{a+c}{2} - \frac{a+2c-b}{2} - b = \frac{2a+c-b}{2},$$

$$Z = 3\frac{a+c}{2} - \frac{a+2c-b}{2} - c = \frac{a+b}{2},$$

$$X = 3\frac{a+c}{2} - \frac{a+2c-b}{2} - a = \frac{c+b}{2}.$$

$\frac{a+2c-b}{2}$	b	$\frac{2a+c-b}{2}$
a	$\frac{a+c}{2}$	c
$\frac{c+b}{2}$	$a+c-b$	$\frac{a+b}{2}$

2. ábra

A *2. ábra* alapján is könnyen ellenőrizhető, hogy az így egyértelműen meghatározott elemekkel valóban bűvös négyzetet kaptunk.

Lakatos Szilvia (Budapest, II. Rákóczi F. Ált. Isk. 8. o.t.) megoldása alapján

Megjegyzés. A megoldásból következik és a **Gy. 3262.** megoldásában is szerepelt (ld. e szám 528. oldalán), hogy a bűvös állandó, az egy sorban, egy oszlopban vagy egy átlóban álló elemek összege éppen a középső elem háromszorosa, így a középső elem a vele egy sorban, oszlopban vagy átlóban álló másik két elem számtani közepe.

x	y	$3b-x-y$
$4b-2x-y$	b	$2x+y-2b$
$x+y-b$	$2b-y$	$2b-x$

3. ábra

Kiss Elemér: *Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából* című könyvének 102–103. oldalán közöl egy olyan 3 × 3-as általános bűvös négyzetet, amelyet Bolyai János feljegyzései között talált (*3. ábrán*), de a hozzá fűzött magyarázatnak csak nagyon kis töredéke maradt meg.

Látható, hogy itt a három, kulcshelyzetet elfoglaló szám másképp helyezkedik el a bűvös négyzetben, azonban most is egyértelműen meghatározzák a többi hat számot. Ezt is abból kiindulva bizonyíthatjuk legkönnyebben, hogy a bűvös állandó a középső elem háromszorosa. Az érdeklődők megvizsgálhatják, mi a helyzet akkor, ha a 3 × 3-as bűvös négyzet más-más három elemét tekintjük adottnak, illetve milyen más általános alakban írható fel a bűvös négyzet.[1]

Berger György ny. tanár, Marosvásárhely

156 dolgozat érkezett. 5 pontos 126, 4 pontos 11, 3 pontos 13, 1 pontos 1, 0 pontos 5.

Matematika feladatok megoldásai

F. 3253. *Adott a k körvonal és rajta a P pont. Szerkesszük meg a k P-beli érintőjét egy darab egyélű vonalzó segítségével.*[2]

Megoldás. Vegyük fel k-n az E_1, E_2, E_3 és E_4 pontokat úgy, hogy az E_1E_4, E_2P és E_3P egyenesek egyike se menjen át k középpontján, továbbá az E_1E_2 és E_4P egyenesek M metszéspontját az E_3E_4 és a PE_1 egyenesek N metszéspontjával összekötő

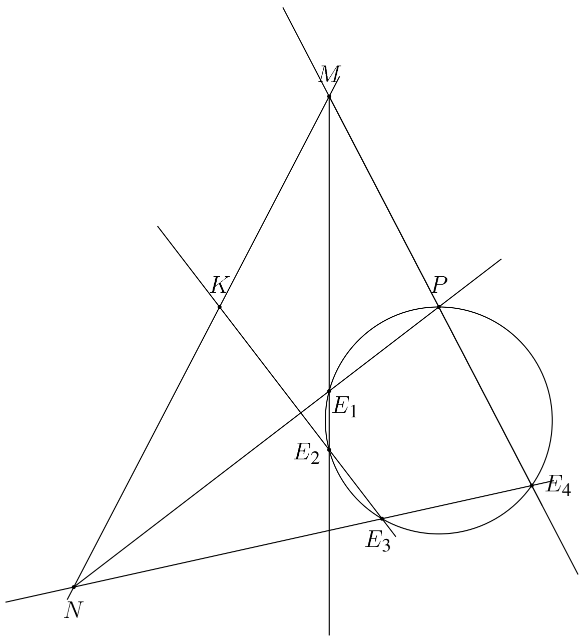
[1] Ajánlott irodalom:

Kiss Elemér: *Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából,* Akadémiai Kiadó és TypoTEX Kiadó, Budapest, 1999

Bakos Tibor: *Ki tud többet a bűvös négyzetekről,* ELFT, Budapest, 1998

Berger György: *Bűvös négyzetek,* Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1986

[2] A feladat az 1998/8-as szám 450–455. oldalain olvasható cikkhez kapcsolódott. A feladatra adott megoldásunk is feltételezi e cikk néhány tételének ismeretét.



egyenes ne legyen párhuzamos az E_2E_3 egyenessel (lásd az *ábrát*). Ilyen pontok nyilván léteznek k-n.

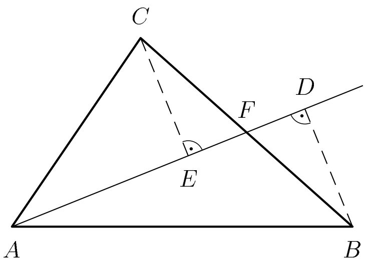
Az E_1, E_2, E_3 és E_4 pontok felvétele után az M és az N pontokat egyetlen vonalzó segítségével könnyen megszerkeszthetjük. Ezután szerkesszük meg az MN és az E_2E_3 egyenesek K metszéspontját, végül kössük össze K-t P-vel. Azt állítjuk, hogy a KP egyenes a k kör P-beli érintője. Alkalmazzuk *Pascal tételét* a k-ba írt $E_1E_2E_3E_4PP$ elfajult hatszögre. A tétel szerint a hatszög szemközti oldalpárjainak metszéspontjai egy egyenesre illeszkednek (az elfajuló PP oldal éppen k P-beli érintője). Tehát az $E_1E_2 \cap E_4P = M$, az $E_3E_4 \cap PE_1 = N$ és az E_2E_3 egyenesnek k P-beli érintőjével alkotott metszéspontjai egy egyenesen vannak. Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy az MN egyenesnek és az E_2E_3 egyenesnek a metszéspontján átmegy k P-beli érintője, ami szerkesztésünk helyességét bizonyítja.

53 dolgozat érkezett. 5 pontos 44, 0 pontos 9.

F. 3265. *Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja legyen F. Mutassuk meg, hogy*

$$\operatorname{ctg} FAC\sphericalangle - \operatorname{ctg} FAB\sphericalangle = 2\operatorname{ctg} AFB\sphericalangle.$$

Javasolta: *Vörös Zoltán,* Budapest

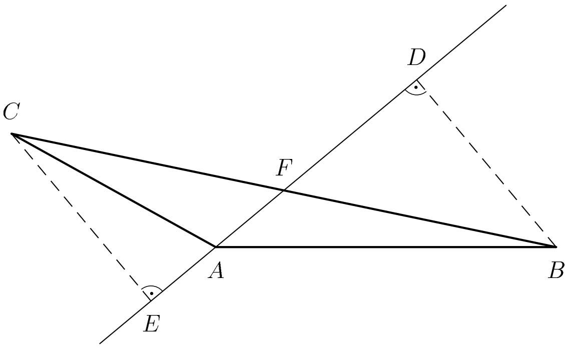


1. ábra

Megoldás. Bocsássunk merőlegeseket a B és C csúcsokból az AF egyenesre, jelöljük ezek talppontját D-vel, illetve E-vel (*1. ábra*). Ha $AB=AC$, akkor nyilván $D\equiv F\equiv E$, ha pedig $AB\neq AC$, akkor a BDF és a CEF derékszögű háromszögek egybevágóak, mert az F-nél lévő szögeik csúcsszögek és $BF=FC$. Ezért mindig igaz, hogy $BD=CE$ és $FD==FE$.

Az állításban szereplő szögfüggvényeket az AEC, BDA és FDB – esetleg elfajuló – derékszögű háromszögek befogóival kifejezve:

$$\operatorname{ctg} FAC\sphericalangle=\frac{AE}{CE},\qquad \operatorname{ctg} FAB\sphericalangle=\frac{AD}{BD}\quad \text{és}\quad \operatorname{ctg} AFB\sphericalangle=\frac{DF}{BD},$$



2. ábra

ahol AE, AD és DF irányított szakaszokat jelöl úgy, hogy az AF egyenesen az A-ból F-be mutató irány a pozitív; BD és CE pedig pozitívak (*2. ábra*). A bizonyítandó állítás tehát:

$$\text{(1)}\quad \frac{AE}{CE}-\frac{AD}{BD}=2\cdot\frac{DF}{BD}.$$

Felhasználva, hogy $BD=CE$ és $2DF=DE$, (1) pontosan akkor igaz, ha

$$AE-AD=DE,\qquad \text{vagyis}\qquad AE=AD+DE.$$

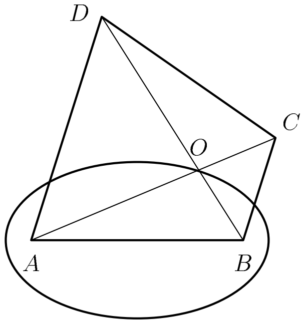
Ez az összefüggés az irányított szakaszok közt nyilván teljesül, s mivel ekvivalens a bizonyítandó állításunkkal, ezért az is igaz.

105 dolgozat érkezett. 6 pontos Csiszár Gábor és Pataki Péter megoldása. 5 pontot kapott 87, 4 pontot 10, 3 pontot 4, 1 pontot 1, 0 pontot 1 beküldő.

F. 3266. *Adottak az egyenlő hosszúságú AB és CD szakaszok. AB-t rögzítjük, CD-t pedig úgy mozgatjuk a síkban, hogy az $ABCD$ négyszög AC és BD átlói egyenlőek és állandó hosszúságúak legyenek. Milyen pályát ír le a mozgás során az $ABCD$ négyszög átlóinak metszéspontja?*

Megoldás. Jelöljük a négyszög átlóinak metszéspontját O-val. Az ABC és a DCB háromszögek egybevágóak, mert oldalaik páronként megegyeznek. A két háromszög egymás tükörképe BC felező merőlegesére. Így $AO=DO$ és $OB=OC$. Ha az átló hossza d, akkor $AO+OB=AO+OC=d$. Ez azt jelenti, hogy O az A, B fókuszú, d nagytengelyű ellipszisre illeszkedik.

Ha O ennek az ellipszisnek AB-vel alkotott valamelyik metszéspontja, akkor az AB és a CD szakaszok egy egyenesre esnek, nem jön létre az $ABCD$ négyszög. Ha viszont O ezektől különböző pont az ellipszisen, akkor AO-nak az O-n túli meghosszabbítására OB-t felmérve megkapjuk C-t és hasonlóan D-t is. Erre a négyszögre teljesülnek a feladat feltételei.



Tehát a keresett ponthalmaz: az A, B fókuszú, d nagytengelyű ellipszis pontjai, kivéve a nagytengely két végpontját.

Gueth Krisztián (Szombathely, Kanizsai D. Gimn., 12. o.t.)

95 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Terpai Tamás, 5 pontot Andrássy Zoltán, Babos Attila, Bujdosó Attila, Csikvári Péter, Csóka Endre, Fehér Lajos Károly, Gerencsér Balázs, Gueth Krisztián, Harangi Viktor, Horváth 713 György, Lábó Melinda, Nagy 314 Ádám, Naszódi Gergely, Pap Júlia, Pataki Péter, Szabadka Zoltán, Vágvölgyi Péter és Zábrádi Gergely. 4 pontos 39, 3 pontos 30, 1 pontos 5, 0 pontos 2 dolgozat.

F. 3268. *Legyen p egy $4k+3$ alakú prímszám. Igazoljuk, hogy ha az x, y pozitív egész számokra $x^2-xy+\frac{p+1}{4}y^2$ osztható p-vel, akkor léteznek olyan u, v egészek, amelyekre*

$$x^2-xy+\frac{p+1}{4}y^2=p\left(u^2-uv+\frac{p+1}{4}v^2\right).$$

Megoldás. Ha $x^2-xy+\frac{p+1}{4}y^2$ osztható p-vel, akkor a 4-szerese is p-vel osztható:

$$p \mid 4x^2-4xy+(p+1)y^2=(2x-y)^2+py^2.$$

Így $2x-y$ is osztható p-vel, azaz van olyan r egész szám, amelyre

$$2x-y=pr. \tag{1}$$

Legyen $v=r$ és $u=x-\frac{r(p-1)}{2}$ (p páratlan prím, ezért $\frac{p-1}{2}$ és így u is egész). Ekkor (1) figyelembevételével

$$p\left(u^2-uv+\frac{p+1}{4}v^2\right)=\frac{p}{4}(4u^2-4uv+(p+1)v^2)=\frac{p}{4}\left((2u-v)^2+pv^2\right)=$$
$$\frac{p}{4}\left((2x-rp)^2+pr^2\right)=\frac{py^2}{4}+\frac{(2x-y)^2}{4}=x^2-xy+\frac{p+1}{4}y^2.$$

Fehér Lajos Károly (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 12. o.t.)

54 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Székelyhidi Gábor, 5 pontot Ábrány Miklós, Balogh Attila, Bárány Zsófia Luca, Boros M. Mátyás, Bujdosó Attila, Dancsó Zsuzsanna, Fehér Lajos

Károly, Gáspár Merse Előd, Gueth Krisztián, Győri Nikolett, Harangi Viktor, Horváth 202 Gábor, Keszegh Balázs, Kiss 345 Gergely, Kunszenti-Kovács Dávid, Lábó Eszter, Lábó Melinda, Máthé András, Pálvölgyi Dömötör, Pap Júlia, Papp Dávid, Pozsár Balázs, Sidó Péter, Szabadka Zoltán, Terpai Tamás, Tran Thanh Long és Vitéz Ildikó. 4 pontos 9, 3 pontos 1, 0 pontos 7 dolgozat. Nem versenyszerű 9.

F. 3269. *Határozzuk meg az $s+1$ alapú számrendszerben felírt $1+22+333+4444+ +\ldots+\underbrace{sss\ldots s}_{s\text{-szer}}$ összeg $(s-1)$-gyel való osztási maradékát.*

Megoldás. Ha $s=2$, akkor $s-1=1$ és így a maradék 0. Tegyük fel a továbbiakban, hogy $s>2$. Jelölje S_i az $(s+1)$-es alapú számrendszerben felírt $\underbrace{iii\ldots i}_{i\text{-szer}}$ számot.

$$S_i=i\cdot\underbrace{111\ldots1}_{i\text{-szer}}=i\cdot\left((s+1)^{i-1}+(s+1)^{i-2}+\ldots+1\right).$$

Az $(s+1)$-et $(s-1)$-gyel osztva a maradék 2, ezért S_i és $i(2^{i-1}+2^{i-2}+\ldots+1)= =i(2^i-1)$ ugyanazt a maradékot adja $(s-1)$-gyel osztva.

Tehát $1+22+\ldots+ss\ldots s$ ugyanakkora maradékot ad $(s-1)$-gyel osztva, mint

$$1(2^1-1)+2(2^2-1)+\ldots+s(2^s-1)=1\cdot2+2\cdot2^2+\ldots+s\cdot2^s-\frac{s(s+1)}{2}.$$

Legyen

$$B=1\cdot2^1+2\cdot2^2+\ldots+s\cdot2^s-2,$$

ekkor

$$2B=1\cdot2^2+2\cdot2^2+\ldots+s\cdot2^{s+1}-4.$$

A két egyenlet különbsége:

$$B=-2^1-2^2-\ldots-2^s+s\cdot2^{s+1}-2=(s-1)2^{s+1},$$

ami osztható $(s-1)$-gyel.

Tehát a feladatban meghatározandó mennyiség $\left(2-\dfrac{s(s+1)}{2}\right)$-nek az $(s-1)$-gyel való osztási maradéka.

Ez 1, ha s páros, és $\dfrac{s+1}{2}$, ha s páratlan.

Máthé András (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gimm., 11. o.t.) dolgozata alapján

46 dolgozat érkezett. 5 pontos Babos Attila, Bákor Krisztina, Dénes Attila, Györey Bernadett, Győri Nikolett, Horváth 202 Gábor, Keszegh Balázs, Kunszenti-Kovács Dávid, Lábó Eszter, Lábó Melinda, Máthé András, Naszódi Gergely, Pap Júlia, Papp Dávid, Pataki Péter, Pilászy István, Szabadka Zoltán, Székelyhidi Gábor és Terpai Tamás megoldása. 4 pontot kapott 7, 3 pontot 1, 2 pontot 5, 1 pontot 3, 0 pontot 11 beküldő.

F. 3270. *Tekintsük azokat a $p(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ polinomokat, amelyek együtthatói 3-nál kisebb pozitív számok, és amelyeknek nincs valós gyöke. Legfeljebb mekkora lehet abc értéke?*

Megoldás. Mivel a p polinom folytonos függvény és $p(0)=1>0$, azért $p(-1)\leqslant 0$ esetén a Bolzano-tétel szerint p felveszi a 0 értéket a $[-1,0]$ intervallumon. De p-nek nincs valós gyöke, így $p(-1)=1-a+b-c+1>0$, ahonnan $a+c<b+2<5$. Tehát $(a+c)^2<25$. A zárójelet felbontva és a $2ac\leqslant a^2+c^2$ összefüggést felhasználva kapjuk, hogy $ac<6{,}25$. A $b<3$ feltétel miatt így $abc<18{,}75$. Ha tehát a, b, c 3-nál kisebb pozitív számok és p-nek nincs gyöke, akkor $abc<18{,}75$.

Megmutatjuk azt is, hogy abc a [0; 18,75) intervallumban minden értéket felvehet. Legyen $a=c=2{,}5-\varepsilon$ és $b=3-\dfrac{\varepsilon}{2}$. Ha ε a (0; 2,5) intervallumon mozog, akkor abc a Bolzano-tétel alapján minden értéket felvesz a (0; 18,75) intervallumon.

Most már csak azt kell bizonyítani, hogy ekkor p-nek nincs valós gyöke. Tegyük fel az ellenkezőjét:

$$x^4+(2{,}5-\varepsilon)x^3+\left(3-\frac{\varepsilon}{2}\right)x^2+(2{,}5-\varepsilon)+1=0.$$

Mivel $x\neq 0$, oszthatunk x^2-tel:

$$x^2+\frac{1}{x^2}+(2{,}5-\varepsilon)\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(3-\frac{\varepsilon}{2}\right)=0.$$

Átalakítva:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+(2{,}5-\varepsilon)\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)=0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképlete szerint $x+\dfrac{1}{x}$ értékére

$$\frac{\varepsilon-2{,}5\pm\sqrt{\varepsilon^2-3\varepsilon+2{,}25}}{2}$$

adódik. A gyökjel alatt $(\varepsilon-1{,}5)^2$ áll, tehát $x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{2}$ vagy $x+\dfrac{1}{x}=\varepsilon-2$.

Mindkét egyenletet megszorozva x-szel olyan egyenleteket kapunk, amelyeknek nincs valós gyöke. Tehát ellentmondásra jutottunk.

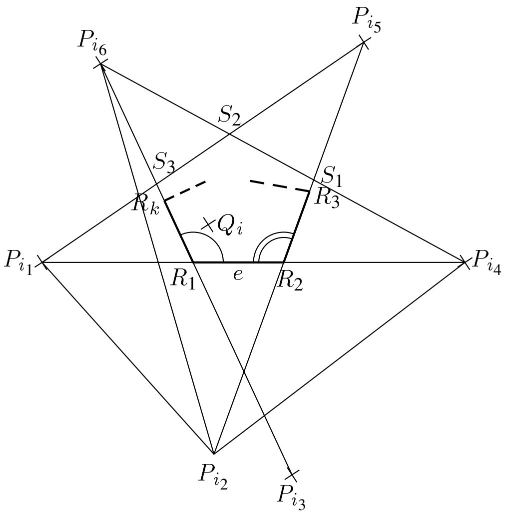
Szabadka Zoltán (Veszprém, Lovassy L. Gimn., 12. o.t.)

35 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Csiszár Gábor, Dancsó Zsuzsanna, Gueth Krisztián, Györey Bernadett, Győri Nikolett, Harangi Viktor, Horváth 202 Gábor, Kiss 345 Gergely, Kunszenti-Kovács Dávid, Máthé András, Naszódi Gergely, Papp Dávid, Pataki Péter, Szabadka Zoltán, Terpai Tamás. 4 pontos 7, 3 pontos 3, 2 pontos 3, nem versenyszerű 7 dolgozat.

F. 3271. *A $P_1P_2\dots P_n$ konvex n-szög belsejében úgy helyeztük el a Q_1, Q_2, ..., Q_{n-2} pontokat, hogy bármelyik $P_iP_jP_k$ háromszög belsejébe pontosan egy esik közülük. Igazoljuk, hogy ha az n-szöget az összes átlója behúzásával felosztjuk, akkor mindegyik Q_ℓ pont egy háromszög alakú tartományba esik.*

Sarlós Ferenc ötletéből

Megoldás. Tegyük fel, hogy valamelyik Q_i pont az átlók által meghatározott tartományok közül egy háromnál több oldalú k-szögbe esik. Azt állítjuk, hogy ennek az $R_1R_2\dots R_k$ k-szögnek van egy olyan e éle, amelyen lévő két belső szög összege nagyobb, mint 180°. Ellenkező esetben ugyanis az egyes éleken lévő szögeket összeadva azt kapnánk, hogy a sokszög szögei összegének kétszerese kisebb, mint $k\cdot 180^\circ$. De a sokszög szögösszege $(k-2)\cdot 180^\circ$, a $2\cdot(k-2)\cdot 180^\circ < k\cdot 180^\circ$ egyenlőtlenségből viszont $k<4$ következne, mi pedig föltételeztük, hogy $k\geqslant 4$.



Válasszuk úgy a betűzést, hogy e végpontjai R_1 és R_2 legyenek. Az eredeti sokszög három különböző átlója tartalmazza az R_1R_2, R_2R_3 és R_kR_1 szakaszokat, legyenek ezen átlók végpontjai P_{i_1} és P_{i_4}, P_{i_2} és P_{i_5}, valamint P_{i_3} és P_{i_6} (lásd az *ábrát*). Mivel az e élen lévő két szög összege nagyobb, mint 180° és a $P_1P_2\dots P_n$ sokszög konvex, azért a kiválasztott hat darab P_j pont az ábrán látható módon helyezkedik el. Az esetleg előfordulhat, hogy P_{i_2} és P_{i_3} egybeesik, P_{i_2} viszont nem lehet a $P_{i_3}P_{i_6}$ átló P_{i_1}-gyel átellenes oldalán, mert akkor a $P_{i_2}P_{i_6}$ átló metszené az $R_1R_2\dots R_k$ k-szöget. Legyenek S_1, S_2 és S_3 az ábrán látható átlók metszéspontjai. Ekkor az $R_1R_2S_1S_2S_3$ ötszög tartalmazza az $R_1R_2\dots R_k$ k-szöget, s így az abban lévő Q_i pontot is. Az ötszöget viszont tartalmazza a $P_{i_1}P_{i_2}P_{i_5}$ háromszög, ezért feltételeink szerint a Q_1, Q_2, ..., Q_{n-2} pontok közül ez a háromszög csak Q_i-t tartalmazza. Hasonlóan belátható, hogy a $P_{i_2}P_{i_4}P_{i_6}$ háromszög is csak Q_i-t tartalmazza. Mivel a $P_{i_1}P_{i_2}P_{i_5}$ és $P_{i_2}P_{i_4}P_{i_6}$ háromszögek együttesen lefedik a $P_{i_1}P_{i_2}P_{i_4}$ háromszöget, ez utóbbi háromszögben is csak a Q_i pont van a Q_1, Q_2, ...,

Q_{n-2} pontok közül. Ez viszont ellentmond annak, hogy a Q_i pont a $P_{i_1}P_{i_4}$ egyenesnek P_{i_2}-vel ellentétes oldalán van. Ezért eredeti feltevésünk hibás, vagyis mindegyik Q_ℓ pontnak egy háromszög alakú tartományba kell esnie.

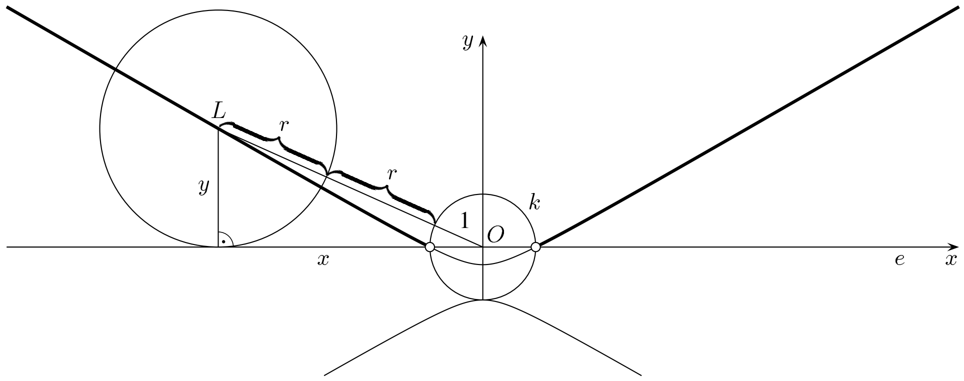
Székelyhidi Gábor (Kuwait, New English School, 12. o.t.) dolgozata alapján

26 dolgozat érkezett. 5 pontos Dancsó Zsuzsanna, Györey Bernadett, Kunszenti-Kovács Dávid, Lábó Eszter, Naszódi Gergely, Székelyhidi Gábor és Terpai Tamás megoldása. 4 pontot kapott 3, 3 pontot 5, 2 pontot 2, 1 pontot 2, 0 pontot 7 beküldő.

F. 3273. *Adott a k kör és annak egy e átmérő egyenese. Határozzuk meg azon körök középpontjainak halmazát, amelyek e-t érintik, k-hoz legközelebbi pontjuknak k-tól való távolsága pedig megegyezik a sugarukkal.*

Megoldás. Vegyünk fel egy derékszögű koordináta-rendszert úgy, hogy k középpontja legyen az O origó, az x tengely essen egybe e-vel, az egység pedig legyen k sugara. Ebben a koordináta-rendszerben fogjuk megadni a feltételeknek eleget tevő középpontok halmazának egyenletét.

Elegendő az $y \geqslant 0$ félsík pontjaival foglalkoznunk, mert a megfelelő pontok halmaza is szimmetrikus lesz az x tengelyre, hiszen k is és e is az. Legyen l egy, a feltételeknek eleget tevő kör, sugarának hossza legyen r, középpontja pedig a $L(x, y)$ pont. Két esetet különböztetünk meg.



1. ábra

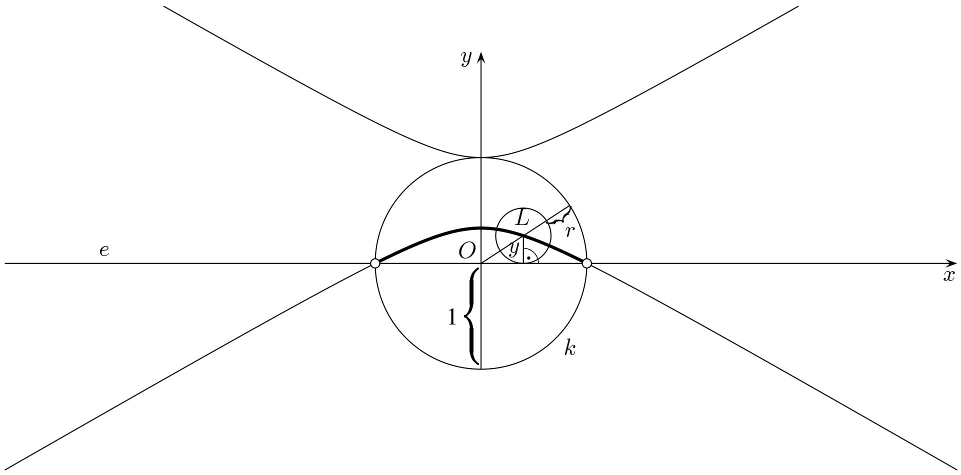
i) Az L pont k-n kívül van (azaz $x^2+y^2>1$). Ekkor l-nek k-hoz legközelebbi pontja az OL szakasz és k metszéspontja (*1. ábra*), tehát $OL=2r+1$. Mivel l érinti az x tengelyt, azért $r=y$. A Pitagorasz-tételt alkalmazva az ábrán látható OL átfogójú derékszögű háromszögre:

$$x^2+y^2=(2r+1)^2.$$

Ebből, felhasználva, hogy $r=y$, kapjuk a

$$9\left(y+\frac{2}{3}\right)^2-3x^2=1 \tag{1}$$

egyenletet. L tehát rajta van az (1) egyenletű hiperbolán. Ha ennek a hiperbolának egy olyan pontját vesszük – az *1. ábrán* vastagabb vonallal jelölt rész –, amelyik k-n kívül, az $y \geqslant 0$ félsíkban van, akkor erre az $L'(x', y')$ pontra teljesül, hogy $\sqrt{x'^2 + y'^2} = 2y' + 1$, vagyis ha L' körül egy y' sugarú kört rajzolunk, akkor az érinti az x tengelyt, k-hoz legközelebbi pontja pedig k-tól $(2y' + 1) - 1 - y' = y'$ távolságra van, vagyis eleget tesz a feladat feltételeinek.



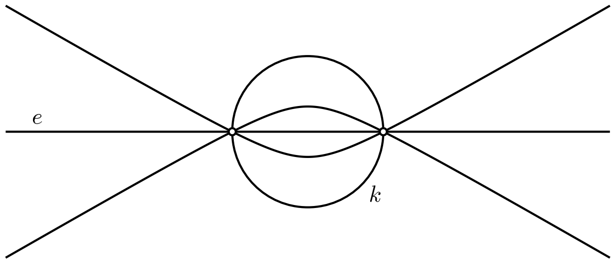
2. ábra

ii) Ha az L pont k-n belül van (azaz $x^2 + y^2 < 1$), akkor l-nek k-hoz legközelebbi pontja az O-ból induló OL félegyenes és l metszéspontja (*2. ábra*). Ismét felírva Pitagorasz tételét:

$$x^2 + y^2 = (1 - 2r)^2.$$

Most is igaz, hogy $r = y$, ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$9\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 - 3x^2 = 1. \tag{2}$$



3. ábra

L tehát rajta van a (2) egyenletű hiperbolán. Ugyanúgy, mint az előző esetben, most is belátható, hogy a hiperbola minden olyan pontja eleget tesz a feladat feltételeinek, amely k belsejében és az $y \geqslant 0$ félsíkban van – a *2. ábrán* vastagabb vonallal jelölt rész.

A két esetben tehát hiperboladarabok és ezeknek az x tengelyre vonatkozó tükörképe a feltételeknek eleget tevő körközéppontok halmaza. Ez látható a *3. ábrán.* Mivel az (1) és (2) egyenletű hiperbolák egymás tükörképei az x tengelyre, azért a keresett halmaz valójában a két hiperbola egy-egy ágából tevődik össze.

Kiss Gergely (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.)

84 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 31, 4 pontot 13, 3 pontot 25, 2 pontot 8, 1 pontot 3, 0 pontot 4 versenyző.

F. 3274. *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:*

$$x+y+z=0$$
$$x^3+y^3+z^3=0$$
$$x^{1999}-y^{1999}+z^{1999}=2^{2000}.$$

Javasolta: *Nagy Tamás,* Zalaegerszeg

Megoldás. Az $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ azonosságot kétszer alkalmazva

$$\begin{aligned}0&=(x+y+z)^3=((x+y)+z)^3=(x+y)^3+z^3+3(x+y)z(x+y+z)=\\&=x^3+y^3+3xy(x+y)+z^3+3(x+y)z(x+y+z)=\\&=x^3+y^3+z^3+3(z+y)(x+z)(y+z)=\\&=3(x+y)(x+z)(y+z),\qquad \text{hiszen } x^3+y^3+z^3 \text{ értéke most } 0.\end{aligned}$$

Az első két egyenletből álló rendszer megoldásai így pontosan azok az x, y, z számhármasok, amelyek egyik eleme 0, a másik két elem pedig egymás ellentettje. Ha $z=0$ és $y=-x$, akkor a harmadik egyenlet szerint $2x^{1999}=2^{2000}$, ebből az $x=2$, $y=-2$, $z=0$ megoldást kapjuk. Ha $y=0$ és $z=-x$, akkor hasonlóan eljárva $0=2^{2000}$ adódik, ami nem ad megoldást. Végül, ha $x=0$ és $z=-y$, akkor $-2y^{1999}=2^{2000}$ szerint az $x=0$, $y=-2$, $z=2$ megoldást kapjuk.

Jesch David (Nagykanizsa Batthyány L. Gimn., 9. o.t.)
Torda Péter (Gyöngyös, Berze Nagy J. Gimn., 11. o.t.)

166 dolgozat érkezett. 5 pontos 101, 4 pontos 32, 3 pontos 10, 2 pontos 7, 1 pontos 5, 0 pontos 3. Nem versenyszerű 8 dolgozat.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (560–564.)

C. 560. Egy cipó 25%-kal kisebb tömegű, mint egy fehér kenyér, ráadásul 20%-kal drágább. Igaz viszont, hogy a cipó az utolsó morzsáig elfogy, míg a kenyér 15%-a mindig ránkszárad. Ugyanakkora fogyasztást feltételezve hány százalékkal költünk többet, ha cipót veszünk, mint ha kenyeret?

C. 561. Keressük meg azokat a p prímeket, amelyekre a p^2+11 számnak pontosan 6 pozitív osztója van.

C. 562. Keressük meg azt a pozitív egész n számot, amelyre

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=100.$$

C. 563. Egy O középpontú, r sugarú körben az átmérőnél kisebb húr legyen AB, az AO és BO sugarak által meghatározott kisebb körcikkbe beírt kör sugara pedig ϱ. Adjuk meg AB-t r és ϱ segítségével.

C. 564. Egy téglatest oldalélei 26, 20 és 8 egység hosszúak. A 26×8-as lapok fölé építsünk olyan egyenes sátortetőket, amelyek „ferde” éleinek hossza 13, „vízszintes” éle pedig 20 egység. Mekkora a téglatest azon részének térfogata, amelyet úgy kapunk, hogy eltávolítjuk a téglából a sátortetőknek a téglatesthez illeszkedő lapjukra vonatkozó tükörképeit?

Beküldési határidő: 2000. január 15.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest, Pf. 47. 1255

A B pontversenyben kitűzött feladatok (3322–3331.)

B. 3322. Legfeljebb hány részre osztja a teret 4 olyan sík, amely egy ponton halad át?
(*3 pont*)

B. 3323. Keressük meg azt a legbővebb intervallumot, amelyben $\frac{19}{99}$ a legkisebb nevezőjű tört.
(*5 pont*)

B. 3324. Hányféleképpen írható fel 1999^{1999} egymás után következő természetes számok összegeként?

(*4 pont*) Javasolta: *Káspári Tamás,* Paks

B. 3325. A p_1, p_2, p_3, p_4 prímszámokat négyesikreknek nevezzük akkor, ha $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$, és $p_4 - p_1 = 8$. Bizonyítsuk be, hogy ha a p_1, p_2, p_3, p_4 és a q_1, q_2, q_3, q_4 prímszámok is négyesikrek, továbbá p_1 és q_1 nagyobbak 5-nél, akkor $p_1 - q_1$ osztható 30-cal, de nem lehet 60.

(*3 pont*)

B. 3326. Egy szabályos oktaéder egyik lapját merőlegesen vetítjük a szemközti lap síkjára. A szemközti lap területének hányadrészét fedi le a vetület?

(*4 pont*) Javasolta: *Juhász Máté 8. o.t.,* Budapest

B. 3327. Adjunk meg egy egész együtthatós polinomot, amelynek a $\cos 18^\circ$ zérushelye!

(*4 pont*)

B. 3328. Egy konvex sokszög minden oldalegyenesét az oldalra merőleges irányban kifelé eltoltuk 5 cm-rel. Mutassuk meg, hogy az így kapott sokszög kerülete több, mint 30 cm-rel nagyobb az eredeti sokszög kerületénél.

(*3 pont*) Javasolta: *Magyar Zsolt,* Budapest

B. 3329. Egy 31 fős osztályban a szokásos módon akarják egymást karácsonykor megajándékozni a gyerekek: december elején az egyik osztályfőnöki órán egy kalapba beleteszik a 31 nevet, és sorban mindenki kihúzza annak a nevét, akinek ajándékot készít. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a húzást meg kell ismételni, mert valaki a saját nevét húzta?

(*4 pont*)

B. 3330. Egy 105 egység oldalú négyzet belsejében 1999 egységnégyzetet helyeztünk el. Mutassuk meg, hogy elhelyezhető még egy egységnégyzet úgy, hogy ne legyen a többivel közös pontja.

(*5 pont*)

B. 3331. A 12.b osztályba ugyanannyi fiú jár, mint lány, így a szalagavatón mindenkinek lesz az osztályból táncpartnere. A párok összeállításához minden fiú rangsorolja az összes lányt, és fordítva. Mutassuk meg, hogy párba állíthatók úgy, hogy ne legyen olyan fiú és lány, akik mindketten szívesebben táncoltak volna egymással, mint a nekik jutó partnerrel.

(*5 pont*)

Beküldési határidő: 2000. január 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (224–226.)

A. 224. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pozitív $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokra

$$\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\cdot\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right)\geqslant(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n).$$

A. 225. Jelölje S_1 és S_2 az 1, 2, ..., n számok páratlan, illetve páros osztói számának összegét. Igazoljuk, hogy

$$|S_1-S_2-n\cdot\ln 2|<\sqrt{n}+1.$$

A. 226. Adott egy gráf, amelynek csúcsai a pozitív egész számok és nem tartalmaz $k\times k$-as teljes páros részgráfot. (k egy rögzített pozitív egész.) Igazoljuk, hogy létezik tetszőlegesen hosszú számtani sorozat, amelynek semelyik két eleme között nincs él.

Javasolta: *Solymosi József,* Budapest

Beküldési határidő: 2000. január 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS

(Volume 49. No. 9. December 1999)

New exercises for practice – competition C (see page 544): **C. 560.** A loaf of rye bread has a mass 25% smaller than a loaf of wheat bread, moreover, it is 20% more expensive. On the other hand, we always eat the whole loaf of rye bread, while 15% of the wheat bread becomes dry before we could finish up the whole loaf. Assuming the same consumption, determine, in percentage, how much more we spend if we consume rye bread instead of wheat bread. **C. 561.** Find those prime numbers p for which p^2+11 has exactly 6 positive divisors. **C. 562.** Which positive integers n satisfy $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=100$? **C. 563.** In a circle of centre O and radius r, let AB denote any chord shorter than the diameter of the circle. Let ϱ denote the radius of the circle inscribed the smaller sector of the the circle bounded by the radii OA and OB. Express the length of AB in terms of r and ϱ. **C. 564.** The edges of a solid rectangular box are 26, 20 and 8 units long. Attached to each 26×8 face, build a tent roof whose lateral edges are 13 units long and whose 'top' edge, parallel to its base, is 20 units long. Remove from the box the parts obtained by reflecting these tent roofs in their respective bases. Determine the volume of the solid which remains from the box.

New problems – competition B (see page 544): **B. 3322.** Find the maximum number of parts into which the space can be divided by 4 concurrent planes. (*3 points*) **B. 3323.** What is the longest interval in which the fraction of smallest denominator is $\frac{19}{99}$? (*5 points*) **B. 3324.** How many ways are there to express 1999^{1999} as the sum of consecutive natural numbers? (*4 points*) (Proposed by *T. Káspári,* Paks) **B. 3325.** Prime numbers p_1, p_2, p_3, p_4 are called 'quadruplets' if $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ and $p_4 - p_1 = 8$. Prove that if both p_1, p_2, p_3, p_4 and q_1, q_2, q_3, q_4 are quadruplets such that $p_1, q_1 > 5$, then $p_1 - q_1$ is divisible by 30. Prove, moreover, that $p_1 - q_1$ is never equal to 60. (*3 points*) **B. 3326.** One face of a regular octahedron is projected perpendicularly to the plane of the opposite face. What proportion of the area of the opposite face is covered by the projection? (*4 points*) (Proposed by *M. Juhász,* Budapest) **B. 3327.** Give an example of a nonzero polynomial of integral coefficients which admits $\cos 18^\circ$ as a root. (*4 points*) **B. 3328.** A convex polygon is 'enlarged' by translating the line of each side outwards by 50 mm, perpendicularly to the given side. Show that the perimeter of the polygon is increased by more than 300 mm. (*3 points*) (Proposed by *Zs. Magyar,* Budapest) **B. 3329.** A class of 31 students organize a Christmas party and they decide to present each other. Each of them draws the name of the one whom (s)he should present from a box. What is the probability that this drawing must be repeated because someone has drawn his or her own name? (*4 pont*) **B. 3330.** There are 1999 unit squares inside a square whose sides are 105 units long. Prove that one more unit square, disjoint from each of the others, can be placed inside the big square. (*5 points*) **B. 3331.** In a certain school there are as many senior boys as girls therefore each senior student can have a partner for the dance at the graduation ball. Before arranging the couples, the girls are ranked by each boy, and vice versa. Prove that it is possible to arrange the pairs in such a way that there is not a boy and a girl who would rather dance with each other than with their actual partners. (*5 points*)

New advanced problems – competition A (see page 546): **A. 224.** Prove that arbitrary positive numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ satisfy the following inequality

$$\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\cdot\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right) \geqslant (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n).$$

A. 225. Let S_1 and S_2 denote the sum of the numbers of odd resp. even divisors of the numbers $1, 2, \ldots, n$. Prove that $|S_1 - S_2 - n\cdot\ln 2| < \sqrt{n}+1$. **A. 226.** Let k denote an arbitrary positive integer, and consider any graph whose vertex set is the set of positive integers and which does not contain a complete $k\times k$ bipartite subgraph. Prove that there exist arbitrarily long arithmetic progressions such that no two elements of the same progression are joined by an edge in the graph. (Proposed by *J. Solymosi,* Budapest)

CD-ajánló

A IX. Nemzetközi Magyar Matematikai Verseny

szervező bizottsága feladatjavaslatokat vár a verseny lebonyolításához. Kérjük a kedves kollégákat, hogy a javaslataikat (a megoldással és a forrás feltüntetésével) 2000. január 31-ig szíveskedjenek elküldeni az alábbi címre:

Dr. Bíró Gizella
Magyar Tannyelvű Gimnázium
92 901 Dunaszerdahely, Május 1. tér
SZLOVÁKIA

Negyedikesek figyelem!
Alkalmazott matematikus képzés az Eötvös Loránd Tudományegyetemen

A mai ipar és gazdaság termékeinek értékét jelentős mértékben meghatározza a bennük rejlő szellemi munka. Ezért a modern ipar igényli a matematika professzionális, nagy számítógépes háttér melletti alkalmazását új termékek kifejlesztésére, meglévő technológiák optimalizálására, marketing stratégiák kidolgozására. Nyugati egyetemeken képeznek ilyen célra szakembereket. A szak neve „technomatematikus”, és az itt végzetteket az ipar szívesen alkalmazza. Az ELTE Természettudományi Karán 1996-ban újra megindult

alkalmazott matematikus szak

ezen követelményeket kielégítő, teljesen új tematikával. A szakon belül modern banki, biztosítási és tőzsdei, valamint műszaki és természettudományi folyamatok korszerű matematikai és számítástechnikai kezelésével ismertetjük meg a hallgatókat. Az ECMI (European Consortium for Mathematics in Industry) tapasztalataival támogatja ezt a szakot.

A szak olyan alkalmazott matematikusok képzését tűzi ki célul, akik: 1. mérnökökkel, közgazdászokkal és természettudományos szakemberekkel közösen tudnak dolgozni műszaki és gazdasági problémák megoldásán, ezen szakemberek nyelvét beszélik; 2. modern matematikai eljárások alkalmazásában gyakorlatuk van, képesek ezeket a mindenkori feladathoz illeszteni; 3. maguk is tudnak új matematikai módszereket és modelleket kifejleszteni; 4. a modern számítógépes eszközöket biztosan és célirányosan alkalmazzák.

Az alkalmazott matematikus szak anyaga négy részből áll: matematika, informatika, műszaki-mérnöki, valamint közgazdasági ismeretek. A matematika alapozása ezen képzésen belül azért különösen széleskörű, mert a jövendőbeli ipari fejlődésre csak így lehet felkészülni. A képzés fontos része az **ipari gyakorlat**, amely a 7–8. félévben teljesíthető.

Az érettségizett fiatalok az ELTE Természettudományos Karának felvételi eljárási rendjében (amely azonos a matematikus szakéval) nyerhetnek felvételt az alkalmazott matematikus szakra.

Érdeklődni lehet a kövekező címen: Dr. Stoyan Gisbert, ELTE TTK, 1117 Budapest, Pázmány P. sétány 1/D. Tel.: 463-3914, Fax: 463-1648.

e-mail: `stoyan@cs.elte.hu`, internet: `http://valerie.inf.elte.hu/~stoyan`

A Budapesti Műszaki Egyetem Matematika Intézetének közleménye pályaválasztóknak

MATEMATIKUSKÉPZÉS A BME-N

A világ rangos műszaki egyetemeinek gyakorlatát követve és saját jó hagyományát felelevenítve a Budapesti Műszaki Egyetem Természettudományi Kara 1997-ben beindította a **matematikusképzést.** A képzést a Kar Matematika Intézete gondozza.

Olyan szakembereket képzünk, akik érzékenyek a gyakorlati problémák iránt, és képesek alkotó módon felhasználni ismereteiket; akik amellett, hogy otthonosan mozognak a matematika elvont területein, tudnak kommunikálni és együttműködni a matematikán kívüli szakemberekkel is. Előreláthatóan az Európához csatlakozó, fejlődő magyar gazdaságnak szüksége lesz ilyen szakemberekre. Matematikus képzésünk szervesen illeszkedik a Budapesti Műszaki Egyetemen folyó *alkalmazás-orientált* tudományos képzés széles spektrumába, amely a klasszikus mérnökképzés mellett magában foglal olyan matematika-igényes új területeket is, mint az informatika, közgazdaságtudomány, anyagtudomány, gazdasági tervezés-elemzés, műszaki management, rendszerelmélet stb.

A Budapesti Műszaki Egyetem matematikus szakát elsősorban azoknak a végzős gimnazistáknak ajánljuk, akik, amellett, hogy szeretik és tudják a matematikát, indíttatást éreznek magukban a **matematika alkalmazásai** iránt is. A matematikai **modellalkotás** és **elemzés** egyre inkább szerves részét képezi a műszaki, gazdasági és természettudományos tevékenység kreatív ágainak. E tevékenység jól képzett, invenciózus, mozgékony elméjű fiatal matematikusokat igényel. Az ilyen szakemberek iránti társadalmi igény látványosan növekszik.

HA E KIHÍVÁSOKBAN LÁTSZ FANTÁZIÁT, JELENTKEZZ A BME MATEMATIKUS SZAKÁRA!

A szak felvételi rendszere megegyezik a műszaki felsőoktatás felvételi rendszerével, amelynek részletes leírása megtalálható a hivatalos *Felsőoktatási felvételi tájékoztató*-ban. Nyelvvizsgákért max. 12 többletpont kapható. A középiskolai matematika és/vagy fizika versenyeken kimagaslóan jó eredményt elért jelentkezők mentesülnek a felvételi kötelezettség alól. Az 1999-es felvételi ponthatárunk a legmagasabb volt az ország matematikus szakjai között.

A szak képzési rendje nagy vonalakban a következő: Az 1–5. félévben a modern matematika alapismereteinek elsajátítása folyik, a tudományegyetemi matematikus képzéssel lényegében azonos tematikával. A 6–10. félévben a hallgatók ún. modul rendszer keretében választhatnak alkalmazott- vagy elméletibb jellegű szakirányok között.

Elméleti jellegű szakosodás évtizedek óta megszokott a tudományegyetemeken; a BME Matematika Intézet ezenkívül új, alkalmazás-orientált képzési lehetőségeket is kínál. Íme néhány példa:

- sztochasztikus matematika és alkalmazásai: pénzügyi és tőzsdei folyamatok matematikája, biztosítási matematika, statisztika, információelmélet;
- diszkrét matematika és alkalmazásai: számítástudomány, operációkutatás, kriptográfia;
- matematikai analízis és alkalmazásai: dinamikai rendszerek, differenciálegyenletek, biomatematika, matematikai fizika;
- mérnöki alkalmazott matematika: rendszerelmélet, hírközléselmélet, gyártórendszerek.

Végzett hallgatóink számára folyamatban van a BME Gazdaság- és Társadalomtudományi Karán folyó műszaki menedzser szak gyorsított elvégzése rendjének kidolgozása is.

Kollégiumi elhelyezkedés: vidéki diákjaink részére a BME kollégiumaiban elhelyezés biztosítható.

Posztgraduális matematikus képzés a BME-n: végzős diákjaink, a műszaki vagy gazdasági életben való elhelyezkedés mellett természetesen részt vehetnek egyetemünkön folyó doktorandusz (PhD) képzésben is, a Matematika Intézet Doktori Iskolájának keretében.

Bővebb információ szerezhető a Budapesti Műszaki Egyetem Természettudományi Kar Matematika Intézet titkárságán, a 463-2762 budapesti telefonszámon, illetve intézetünk internetes honlapján: `http://math.bme.hu`

Szeretettel várjuk kedves leendő diákjainkat.

Budapesti Műszaki Egyetem
Természettudományi Kar
Matematika Intézet