Egy meglepő bizonyítás

A számelmélet egyik klasszikus eredménye, hogy minden $4k+1$ alakú prím felírható két négyzetszám összegeként. Fermat tisztázta először, hogy általában milyen számokra létezik ilyen felbontás, és a megoldás igazán nehéz része éppen az, hogy a $4k+1$ alakú prímeknek megvan ez a tulajdonsága. Az eltelt 350 évben számos bizonyítás született erre a tételre, kettő például megtalálható *Erdős–Surányi:* Válogatott fejezetek a számelméletből (Polygon Könyvtár – Szeged, 1996) című könyvében.

Az alábbi, valóban meghökkentő bizonyítás még nincs 10 éves, 1990-ben közölte *Don Zagier* amerikai matematikus. A bizonyítás meglehetősen szokatlan környezetbe helyezi az állítást, sokáig nem világos, miért kerül sor az egyes lépésekre, majd a végkifejletben valóban drámai gyorsasággal fény derül a bizonyítás alapeszméjére, és minden a helyére kerül.

Legyen tehát $p=4k+1$ prím, és tekintsük a következő halmazt:

$$S=\{(x,y,z)\in \mathbf{N}^3:\ x^2+4yz=p\}.$$

Az S nyilván véges halmaz, egy felület bizonyos egész koordinátájú pontjai alkotják.

A bizonyítás célja annak igazolása, hogy az S halmaz elemszáma *páratlan*; az állítás ebből már következik. Aki akar, töprenghet azon, hogy miért, miközben az S halmaz vizsgálatát követi.

Az első mély észrevétel az, hogy az S halmazt két sík, egyenletük $x=y-z$ és $x=2y$, három részre osztja. Ez a felbontás valahogy jobban mutatja az S szerkezetét. Ezek a részek:

$$S_1=\{(x,y,z)\in S:\ x<y-z\}$$

$$S_2=\{(x,y,z)\in S:\ y-z<x<2y\}$$

$$S_3=\{(x,y,z)\in S:\ 2y<x\}$$

Ahhoz, hogy valóban az S felbontást kapjuk, szükséges, hogy a síkok ne tartalmazzanak S-beli pontot. Ha $x=y-z$, akkor $p=(y+z)^2$, ha pedig $x=2y$, akkor $p=4y(y+z)$ következik, de egyik eset sem lehetséges, hiszen a p prímszám. Az *1. táblázatban* látható az S_1, S_2, S_3 felbontás, ha $p=41$.

S_1	S_2	S_3
$(1,5,2)$	$(1,1,10)$	$(5,2,2)$
$(1,10,1)$	$(1,2,5)$	$(3,1,8)$
$(3,8,1)$	$(3,2,4)$	$(5,1,4)$
	$(3,4,2)$	
	$(5,4,1)$	

1. táblázat

Ami a példán látszik, általában is igaz: S_1 és S_3 elemszáma egyenlő, S_2 elemszáma pedig páratlan. Ennek igazolásához Zagier egy leképezést ad meg az S halmazon az alábbiak szerint:

$$f:\begin{cases} S_1\to S_3 & (x,y,z)\mapsto(x+2z,z,y-x-z)\\ S_2\to S_2 & (x,y,z)\mapsto(2y-x,y,x-y+z)\\ S_3\to S_1 & (x,y,z)\mapsto(x-2y,x-y+z,y)\end{cases}$$

Könnyű ellenőrizni – ha maga a leképezés már megvan –, hogy az S_1-en és az S_3-on definiált részek kölcsönösen egyértelműek és egymás inverzei, az S_2-n definiált rész pedig ugyancsak kölcsönösen egyértelmű, és egyenlő önmaga inverzével. Így f az S_1-et S_3-ra, az S_3-at S_1-re, az S_2-t pedig önmagára képezi le kölcsönösen egyértelműen.

A *2. táblázatban* ez a leképezés látható a $p=41$ esetben.

S_1		S_3	S_2
$(1,5,2)$	$\longleftrightarrow$	$(5,2,2)$	$(1,1,10)$
$(1,10,1)$	$\longleftrightarrow$	$(3,1,8)$	$(1,2,5)$
$(3,8,1)$	$\longleftrightarrow$	$(5,1,4)$	$(3,2,4)$
			$(3,4,2)$
			$(5,4,1)$

2. táblázat

Az f tehát fölcseréli az S_1 és S_3 elemeit, S_2-t pedig fixen tartja. S_1 és S_3 ezért egyenlő elemszámú, így ahhoz, hogy S-ben páratlan sok elem legyen, S_2-nek kell páratlan elemszámúnak lennie. Ez csak úgy lehetséges, ha az f által létesített párosításban van – mégpedig páratlan sok – egyenlő elemű pár. A *2. táblázatban* ez az $(1,1,10)$–$(1,1,10)$, amelyre tehát $f(1,1,10)=(1,1,10)$; az f leképezés *fixpontja.* Vizsgáljuk ezért általában f fixpontjait. Ilyet csak S_2-ben találhatunk, hiszen f fölcseréli S_1 és S_3 elemeit.

Mivel S_2-ben $f(x,y,z)=(2y-x,y,x-y+z)$ alakú, $f(x,y,z)=(x,y,z)$ pontosan akkor teljesül, ha $x=y$. Az S halmaz pontjain ez a megszorítás azt jelenti, hogy

$$x^2+4xz=p,$$

azaz $x(x+4z)=p$. Innen $x=1$ – hiszen a p prím – és ezért $z=\dfrac{p-1}{4}$, ami most egész szám, hiszen a p $4k+1$ alakú. Az f leképezésnek tehát *egyetlen fixpontja* van, az $\left(1,1,\dfrac{p-1}{4}\right)$, ebből pedig következik, hogy az S halmaznak páratlan sok eleme van, hiszen f e pont kivételével párokba rendezi az S elemeit.

Nem valószínű, hogy aki eddig követte ezt a lényegében analitikus–kombinatorikus geometriai gondolatmenetet, közelebb érzi a bizonyítandó állítást. Pedig az most már karnyújtásnyira van.

Tekintsük ugyanis ezután a következő, sokkal egyszerűbb leképezést: $g:S\to S$, $g(x,y,z)=(x,z,y)$.

A g tehát fölcseréli az S-beli elemek második két koordinátáját. Mivel az S erre a transzformációra szimmetrikus, a g is kölcsönösen egyértelműen képezi le az S halmazt önmagára, és egyenlő a saját inverzével. Mivel pedig S-nek páratlan sok eleme van, a g által létesített párok sem állhatnak valamennyien különböző elemekből,

a g leképezésnek is van fixpontja.

Van tehát olyan S-beli s elem, amelyre $g(s)=s$, azaz

$$(x,z,y)=(x,y,z),$$

az s ezért (x,y,y) alakú.

Minden összeér, hiszen az S definíciója szerint erre az elemre

$$x^2+4y^2=p,$$

éppen az $x^2+(2y)^2$ alakú felbontás. A *2. táblázatban* ez az S_3-beli $(5,2,2)$, és így kapjuk az $5^2+4^2=41$ alakot.

A bizonyítás itt véget ér, az Olvasó pedig elmélkedhet a gondolatmenet erején és eleganciáján, de a részleteken is.

A fenti bizonyítás nem konstruktív, nem ad módszert arra, hogy miképpen bontható föl egy prímszám. Látszólag többet is kiad: a fentiekből egészen pontosan annyi következik, hogy a g-nek páratlan sok fixpontja van, azaz a p előállításainak száma páratlan.

Pataki János

Felhasznált irodalom: *Martin Aigner–Günter M. Ziegler:* Proofs from THE BOOK, Springer Verlag.

A következőkben egy bizonyítást közlünk arra, hogy ez az előállítás egyértelmű.

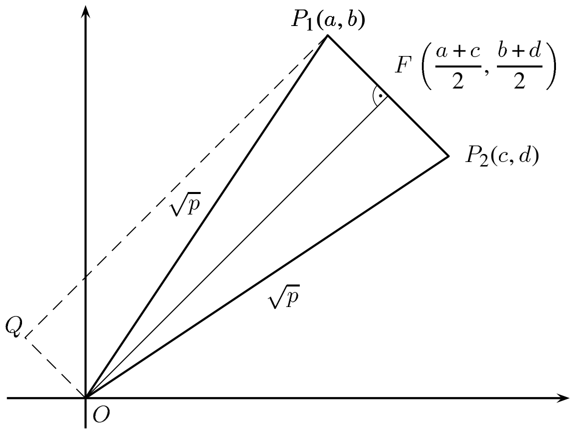
Geometriai bizonyítás a $4k+1$ alakú prímszámok két négyzetszám összegére bontásának egyértelműségére

Tudjuk, hogy minden $4k+1$ alakú prímszám felbontható két négyzetszám összegére. Most – geometriai módszerekkel – bebizonyítjuk, hogy ez a felbontás lényegében egyértelmű. A bizonyítás során először azt igazoljuk, hogy ha egy $p=4k+1$ alakú természetes szám kétféleképpen is felbontható két négyzetszám összegére, akkor található olyan „ferde helyzetű” téglalap, amelynek mind a négy csúcsa rácspont, és átlója $\sqrt{p}$; majd megmutatjuk, hogy ezen téglalap segítségével fel tudjuk írni az eredeti p számnak két valódi osztóját. Ez nem lehetséges, így a felbontás valóban egyértelmű.

Legyen tehát $p=4k+1=a^2+b^2=c^2+d^2$, és a, b, c, d páronként különböző pozitív egészek.

Látható, hogy a és b, illetve c és d egyike páros, másika páratlan, feltehető, hogy

$$\begin{aligned} &a \text{ és } c \text{ páros} \\ &b \text{ és } d \text{ páratlan.} \end{aligned} \tag{1}$$



Vegyük a síkot az egységoldalú négyzetráccsal; az origóból mind a $P_1(a,b)$, mind a $P_2(c,d)$ pontba mutató vektor hossza $\sqrt{p}$.

Ekkor az OP_1P_2 háromszög csúcsai rácspontok, (1) miatt a P_1P_2 szakasz F felezőpontja, $\left(\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2}\right)$ is rácspont, és mivel az OP_1P_2 háromszög egyenlőszárú, ezért $OF\perp P_1P_2$. Tehát az OP_1F háromszög derékszögű, így azt átfogójának felezőpontjára tükrözve téglalapot kapunk, melynek mind a négy csúcsa rácspont, és átlója $\sqrt{p}$ hosszúságú.

Ismeretes, hogy ha egy négyzetrácsban két rácspontot összekötünk, akkor az így kapott szakasz egyik végpontjában rá merőlegest húzva, a vele azonos hosszúságú szakasz másik végpontja is rácspont. Ebből következik, hogy ha két, közös végpontú szakasz mindegyikének mindkét végpontja rácspont és egymásra merőlegesek, akkor mindkét szakasz hossza egész számszorosa a közös végponttól számított első rácspont és a közös végpont távolságának. Ha ez a távolság f, akkor a két említett szakasz, OF és FP_1 hossza kf, illetve hf (k és h pozitív egészek). Ekkor a Pitagorasz-tétel miatt

$$\sqrt{p}=\sqrt{(hf)^2+(kf)^2}.$$

azaz $p=(hf)^2+(kf)^2=(h^2+k^2)f^2$. Mivel f rácspontokat összekötő szakasz, f^2 biztosan egész; mivel h és k egészek, azért h^2+k^2 is egész; így $p=(h^2+k^2)f^2$ szerint p-t két pozitív egész szám szorzatára bontottuk. Ezek csak akkor nem valódi osztók, ha $h^2+k^2=1$, vagy ha $f^2=1$. f egy egész befogójú derékszögű háromszög átfogója, így értéke legalább $\sqrt{2}$, ezért $f^2>1$. $h^2+k^2=1$ pedig csak úgy lehetséges, ha h és k valamelyike 0, ekkor azonban a két szakasz valamelyike 0 hosszúságú volna. Így p-t a két különböző felbontás felhasználásával két 1-nél nagyobb egész szám szorzatára bontottuk, tehát p nem lehet prímszám.

Szabó István
programtervező matematikus

Irodalom: *Erdős Pál–Surányi János:* Válogatott fejezetek a számelméletből (2. kiadás), Polygon Könyvtár, JATE Bolyai Intézet, Szeged, 1996.

Az 1998–99-es tanév matematika pontversenyének összesített eredménye

	F, GY, N pontv.		C pontv.		Összesen	
	benevezett	értékelt	benevezett	értékelt	benevezett	értékelt
1–8. osztályosok:	82	53	94	24	120	58
9. osztályosok:	394	188	420	94	607	230
10. osztályosok:	354	192	263	75	474	234
11. osztályosok:	199	104	309	105	447	191
12. osztályosok:	86	61	175	51	240	105
Összesen:	1115	598	1261	349	1888	818

Az alábbiakban azokat az iskolákat soroljuk fel, amelyeknek volt az 1999/6. számban közölt végeredményben felsorolt diákja. Az iskola neve után álló két számpár a pontversenyben (F, GY és N), illetve a C pontverseny végeredményében szereplő tanulók számát és az általuk szerzett összpontszámot jelzi. A számok után a felsorolt tanulók szaktanárainak neve áll, ahogyan azt a nevezési lapokról kiírtuk. Az esetleges névelírásokért szíves elnézésüket kérjük.

A szerk.

Ajka: *Bródy Imre Gimn.* (–), (1,91), Tulokné Mohacsek Ildikó; **Aszód:** *Petőfi Sándor Gimn. és Szakközépiskola* (1,14), (–), Csobánné Csicsek Judit; **Baja:** *III. Béla Gimn.* (–), (1,107), Sasfalvi Ildikó; **Battonya:** *Mikes Kelemen Középiskola* (–), (1,53), Ménesi Györgyné; **Békéscsaba:** *Rózsa Ferenc Gimn.* (6,772), (4,402), Kovács Tibor, Nagy Sándor, Szabó Zsófia; **Bonyhád:** *Petőfi Sándor Evangélikus Gimn.* (25,2727), (2,147), Hohl Árpád, Jakab Tamás, dr. Katz Sándor, Klészátl Melinda, Kovács Szabolcs; **Budaörs:** *Illyés Gyula Gimn.* (1,38), (1,47), Árendás Péter, Tollner József; **Budapest:** *Alternatív Közgazdasági Gimn.* (1,87), (1,114), Bárd Ágnes; *Arany János Gimn.* (1,112), (1,167), Antall Erzsébet, Spisák Andor; *Árpád Gimn.* (13,484), (3,267), Besnyőné Titter Beáta, Gyimesi Róbert, dr. Mezei István, Mikusi Imre, Mikusi Imréné, Sztojcsevné Fekete Mária, Vajda István; *Baár-Madas Református Gimn.* (–), (1,163), Laczik István; *Bárdos Lajos Általános Iskola és Gimn.* (1,38), (1,48), Hene Éva; *Bartók Béla Zeneművészeti Szki.* (1,41), (1,165), Zentai Zoltán; *Berzsenyi Dániel Gimn.* (29,2246), (2,188), Bánhegyi László, Bényei Károly, Gál Györgyné, dr. Ökördi Péterné, dr. Urbán János; *Kispesti Deák Ferenc Gimn.* (1,42), (1,69), Gál Józsefné; *Deutsche Schule* (1,373), (1,180), Burkhard Reichmann; *ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimn.* (16,1915), (18,1673), Drozdy Győzőné dr., Falta Zoltán, Kotek Gábor, Pető Sándor, Sparingné Köves Ildikó, Tóth Attila; *ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Iskola* (4,642), (4,451), Harró Ágota, Hegyi Györgyné, Széplaki Györgyné; *ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Iskola* (1,245), (–), Gombos Éva, Veszprémi Ferenc; *Eötvös József Gimn.* (2,342), (1,94), Balga Attila, Katona Eleonóra; *Fasori Evangélikus Gimn.* (4,502), (3,380), Nagy-Baló András, Szabó Endréné; *Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.* (91,14765), (13,1011), Beleznay Ferenc, Dobos Sándor, Fazakas Tünde, Hraskó András, Kovács

Csongorné, Laczkó László, Orosz Gyula, Pataki János, Pósa Lajos, Rubóczky György, Solti Lajos, Surányi László, Szászné Simon Judit, Táborné Vincze Márta, Thiry Imréné; *Hunfalvy János Közgazdasági Szakközépiskola* (1,110), (1,95), Angyal Mária; *Jedlik Ányos Gimn.* (13,900), (10,797), Fodor Mária, Gudenus Lászlóné, Kovács Gabriella, dr. Sebestyén Zoltán, dr. Sebestyén Zoltánné; *Kodály Zoltán Magyar Kórusiskola* (–), (3,299), dr. Frigyesi Miklós; *Könyves Kálmán Gimn.* (–), (4,257), Csordás László, Zempléniné Kertész Zsuzsa, ; *Leövey Klára Gimn.* (–), (2,235), Daffek Valéria, Fehérné Dallos Eszter; *Móricz Zsigmond Gimn.* (1,37), (1,88), Lendvai Zsolt; *Németh László Gimn.* (–), (1,142), Filipp Zoltán; *Petőfi Sándor Ált. Isk., Gimn. és Szki.* (–), (1,95), Simoncsicsné Haász Judit; *Piarista Gimn.* (2,135), (2,129), Urbán János, Vízhányó Zsolt; *Szent István Gimn.* (67,4362), (18,1260), Juhász István, dr. Kargay Zoltánné, Lászlóné Sergyán Stefánia, Magyar Zsolt, dr. Mikite Gyuláné, Paróczay József, Rácz János; *Szent László Gimn.* (–), (1,80), Failné Sebestyén Ágnes; *Szerb Antal Gimn.* (–), (1,55), Gyulay Éva; *IMNN Szent Margit Gimn.* (3,229), (2,181), dr. Holczmann Józsefné, Kovácsné Ábrahám Mariann; *Tamási Áron Általános Iskola és Gimn.* (–), (1,128), Zombori Natasa; *Toldy Ferenc Gimn.* (–), (1,158), Bartha Béláné; *Városmajori Gimn.* (–), (2,310), Kovácsné Hadas Ildikó, Pintér László; *Veres Pálné Gimn.* (–), (2,208), Fodor Csaba, Zalán Péterné; *Veres Péter Gimn.* (11,558), (14,1132), Kötél Tamás, Márton Gábor, Rácz Mihályné, Számadó László, Varga Mária; **Cegléd:** *Kossuth Lajos Gimn.* (2,75), (–), Burgmann Lászlóné; **Celldömölk:** *Berzsenyi Dániel Gimn.* (–), (1,81); **Csongrád:** *Batsányi János Gimn.* (5,296), (1,172), Bottyán István, Fülöp Mihályné, Papp Ferencné, dr. Szabó Tamás; **Csorna:** *Hunyadi János Gimn. és Pedagógiai Szakközépiskola* (–), (1,79), Wekszli Árpádné; **Csurgó:** *Csokonai Vitéz Mihály Református Gimn.* (1,41), (–), Melicz Marianna; *Nagyváthy János Középisk.* (1,160), (1,122), Kiss Balázs; **Debrecen:** *Brassai Sámuel Műszaki Középiskola* (–), (1,108), Bálintné Bohács Anikó; *Fazekas Mihály Gimn.* (17,1931), (12,1144), Balázs Tivadar, Berzi Imre, Csarkó Tibor, Kovács Péter, Lakatos Tibor, Nagy Mária, Remeténé Orvos Viola, dr. Szabó Józsefné; *KLTE Gyak. Gimn.* (4,730), (1,105), Bálint János, Bíró Erzsébet, Kovács Gábor; *Debreceni Református Kollégium Gimnáziuma* (–), (1,93), dr. Bajza Istvánné; *Tóth Árpád Gimn.* (1,96), (3,343), Dóry Zoltánné, dr. Makai Imréné; **Dombóvár:** *Illyés Gyula Gimn.* (8,708), (–), Freller Miklós, Mesterházyné dr. Illés Ágnes; **Dorog:** *Komárom–Esztergom megyei Önkormányzat Gimnáziuma és Szakközépiskolája* (1,23), (–), Simigné Tanka Éva; **Dunakeszi:** *Radnóti Miklós Gimn.* (–), (1,56), Szabó János; **Eger:** *Dobó István Gimn.* (1,148), (1,153), Homolyáné Nagy Irma, dr. Pappné Balázs Judit; *Gárdonyi Géza Gimn.* (2,112), (4,246), Csák György; *Pásztorvölgyi Általános Isk. és Gimn.* (4,156), (–), Hevesi Zoltán; *Szilágyi Erzsébet Gimn.* (2,65), (–), Biró Bálint, Gömböcz Klára, Gönczi Sándor; **Esztergom:** *Dobó Katalin Gimn.* (–), (1,127), Csathó Béla; *Komárom–Esztergom megyei Önkormányzati Szent István Gimnáziuma* (–), (3,133), Posch Istvánné, dr. Vágvölgyi Károly; **Érd:** *Vörösmarty Mihály Gimn.* (–), (1,41), Ruzsenszki Magdolna. **Fonyód:** *Mátyás Király Gimn. és Szki.* (3,83), (1,49), Bödör Márta, Németh László; **Gyomaendrőd:** *Kner Imre Gimn., Szakközépiskola és Kollégium* (–), (1,133), Tóthné Szakálos Margit; **Gyula:** *Erkel Ferenc Gimn.* (1,12), (–), Tóth István; **Győr:** *Bercsényi Miklós Gimn.* (–), (1,107), Honti Dénes; *Czuczor Gergely Bencés Gimn.* (6,644), (–), Bárdos Oresztész, Csonka László, Laki Lászlóné; *Jedlik Ányos Informatikai Szakközépiskola és Gimn.* (–), (4,325), Kovács Sándorné, Oross Tiborné; *Kazinczy Ferenc Gimn.* (2,60), (6,337), Poóczáné Kecskeméty Szilvia, Szigeti Béláné; *Krúdy Gyula Gimn. és Vendéglátóipari Szki.* (–), (1,90), Csáki Katalin; *Révai Miklós Gimn.* (4,558), (2,283), dr. Szíjártó Miklósné, Zábrádiné Schmierer Emília, Zsebők Ottó; *Szent-Györgyi Albert Gimn. és Szakközépiskola* (–), (1,114), Szabó Zoltán; **Gyöngyös:** *Berze Nagy János Gimn.* (3,349), (3,249), Hessel László, Kissné

Császár Erzsébet; **Hajdúböszörmény:** *Bocskai István Gimn.* (–), (3,246), Pappné Balogh Erzsébet, Sipekiné Palocsai Éva; **Hajdúszoboszló:** *Hőgyes Endre Gimn.* (3,1052), (10,807), Balla Éva, Csatóné Király Margit, Dankó Sándor, Deli Lajos; **Hatvan:** *Bajza József Gimn.* (1,41), (2,201), Fazekas Gabriella, Fogarasi Béláné; **Heves:** *Eötvös József Gimn.* (–), (8,548), dr. Almádiné Csepplye Zita, Forgó János; **Hévíz:** *Bibó István Alternatív Gimn. és Szki.* (1,54), (–), Hegedűs Géza; **Hódmezővásárhely:** *Bethlen Gábor Református Gimn.* (2,88), (4,298), Fejes Imréné, Lakatos-Tóth István; *Eötvös József Szakközépiskola* (1,48), (1,71), Baloghné Kovács Ágnes; **Jászapáti:** *Mészáros Lőrinc Gimn.* (–), (1,124), Zsoldos János; **Jászberény:** *Lehel Vezér Gimn.* (–), (1,70), Csomorné Szabó Ildikó; **Kaposvár:** *Nagyboldogasszony Római Katolikus Gimn.* (–), (1,73), Veress Róbert; *Táncsics Mihály Gimn.* (6,515), (–), Bernáth Sándor, dr. Iharos Csabáné, Kubatov Antal, Terlaky Edit; **Kapuvár:** *Felsőbüki Nagy Pál Gimn.* (–), (1,41), Nagyné Csáki Klára; **Kecskemét:** *Bányai Júlia Gimn.* (2,114), (7,623), Lukács Lajos, Óváriné Csabai Mária, Pálinkás Ilona; *Bolyai János Gimn.* (2,85), (1,122), Varga József; *Katona József Gimn.* (3,147), (3,257), Horti Attila, dr. Szablics Bálintné; **Keszthely:** *Vajda János Gimn.* (–), (2,130), Batha Kálmánné; **Kiskunfélegyháza:** *Móra Ferenc Gimn.* (1,157), (–), Mohosné Kothencz Irén; **Kiskunhalas:** *Bibó István Gimn.* (2,55), (1,46), Pestality Antal; **Kiskőrös:** *Petőfi Sándor Gimn.* (1,16), (–), dr. Réthey Miklósné; **Kisvárda:** *Dolgozók Bessenyei György Gimnáziuma* (2,97), (1,57), Bíróné Varga Ágnes, Nehéz Rudolf; **Kisújszállás:** *Móricz Zsigmond Gimn. Közgazdasági Szki. és Kollégium* (2,61), (1,47), Ágotai László; **Kunszentmárton:** *József Attila Gimn.* (1,15), (–); *Veress János Gimn., Szakközép- és Szakmunkásképző Iskola* (1,50), (–), Paulovics Illés; **Lenti:** *Gönczi Ferenc Gimn.* (–), (1,52), Kovács Istvánné; **Miskolc:** *Avasi Gimn.* (1,26), (1,124), dr. Pabis Györgyné; *Földes Ferenc Gimn.* (15,1531), (9,628), Fejér Szabolcs, Gulyás Tibor, dr. Hegmanné Ilosvay Zsuzsanna, Héjj Márta, Kéri Henriett, Kovács Attiláné, Pirkó Béla, Szabó Kálmán, Vass Iván, Veres Pál; **Monor:** *József Attila Gimn.* (1,10), (4,183), Kozákné Székely Ildikó; **Mosonmagyaróvár:** *Kossuth Lajos Gimn.* (1,63), (2,90), Bednarikné Vizkeleti Beáta, Gulyás Ferencné, Kovács Zsuzsanna, Vizkeleti Józsefné; **Nagykanizsa:** *Batthyány Lajos Gimn.* (12,827), (3,294), Bujtás Lászlóné, Erdős Gábor, dr. Pintér Ferenc; **Nagykőrös:** *Toldi Miklós Élelmiszeripari Szakközépiskola* (–), (2,146), dr. Szekeres István, Szívós Gáborné; **Nyíregyháza:** *Krúdy Gyula Gimn.* (1,14), (–), Koncz István; *Széchenyi István Közgazdasági Szakközépiskola* (1,47), (–), Zsíros Andrea; **Paks:** *Energetikai Szakképzési Intézet* (–), (3,186), Borbás Tamás; *Vak Bottyán János Gimn.* (–), (1,139), dr. Müller János; **Pannonhalma:** *Bencés Gimn.* (1,40), (–), Feith Péter; **Putnok:** *Serényi Béla Gimn. és Mezőgazdasági Szakközépiskola* (1,53), (–), Szilágyi Istvánné; **Pécs:** *Árpád Fejedelem Gimn. és Ált. Isk.* (–), (1,57), Győrpál Eleméréné; *Janus Pannonius Gimn.* (1,140), (–), Polcz Katalin; **Pápa:** *Pápai Református Kollégium Gimnáziuma* (4,103), (3,211), Bárdos Zoltán, Székely László; *Türr István Gimn.* (1,49), (–), Bátyay Gyuláné, dr. Spissich László; **Salgótarján:** *Táncsics Mihály Közgazdasági és Kereskedelmi Szakközépiskola* (–), (3,285), Jakubovicsné Kozma Margit; **Siklós:** *Táncsics Mihály Gimn.* (1,116), (–), Uracsné Beck Etelka; **Siófok:** *Perczel Mór Gimn.* (–), (1,111), Schutzbach Mártonné; **Sopron:** *Berzsenyi Dániel Gimn.* (–), (1,159), Piacsek István; *Széchenyi István Gimn.* (2,77), (5,452), Lang Ágota, Vass Béla, Vass Béláné; **Szeged:** *Csonka János Műszaki Szakközépiskola* (–), (1,113), Csatóné Konsa Ilona; *Radnóti Miklós Kísérleti Gimn. és Ált. Isk.* (5,954), (2,236), Ábrahám Gábor, Lancsa Jánosné, Mike János, Schultz János; *JATE Ságvári Endre Gyakorló Gimn.* (7,801), (–), dr. Dobi János, Konfárné Nagy Klára, Kovács István, Tarcsay Tamás; *Tömörkény István Gimn.* (1,50), (–), Rauscher Alexandra; **Szekszárd:** *Dienes Valéria Ált. Isk.* (1,181), (–), Szabó Attiláné; *Garay János Gimn.* (18,1878), (10,1224), Kertes Lázár, Pesti Gyula, Varjas Lászlóné;

Szentendre: *Ferences Gimn.* (1,30), (3,249), Luchterhand Irén, P. Lukovits Milán; *Móricz Zsigmond Gimn.* (2,77), (4,217), Herczeg Katalin; **Szolnok:** *II. Rákóczi Ferenc Általános Iskola* (1,66), (1,102), B. Sipos Gabriella; *Kodály Zoltán Ének–Zene Tagozatos Ált. Isk.* (1,139), (1,106), Vermes Tamásné; *Tiszaparti Gimn. és Humán Szakközépiskola* (6,563), (–), Kovácsné Doroszlai Ágnes, Topolyai Tibor, Veres Dénesné; *Varga Katalin Gimn.* (9,546), (13,960), Dalmadiné Nagy Ilona, Kiss László, Kovács Anita, Molnár László, Nagy Tibor, Szabó Győző; *Verseghy Ferenc Gimn.* (7,175), (3,147), Béres Jenő, Pécsi István, Pécsiné Röhri Zsuzsanna, Pogány Gyula, Szécsiné Festő Hegedűs Margit; **Szombathely:** *Kanizsai Dorottya Gimn.* (1,238), (2,212), Módos Tiborné, Sándor Endre; *Kereskedelmi és Vendéglátói Szakképző Iskola* (–), (2,242), László Sándor; *Nagy Lajos Gimn.* (3,216), (1,50), Farkas Gellért, Márton János, Peresztegi Attila; *Premontrei Szt. Norbert Gimn.* (–), (2,155), Valaska Ferdinánd; **Székesfehérvár:** *József Attila Gimn.* (1,15), (–), Németh Lászlóné; *Teleki Blanka Gimn.* (8,597), (2,165), Buday Endre, Mihályi Gyula, Ponáczné Csuthy Márta, Sipos Imre, Siposné Tóth Krisztina; *Tóparti Gimn. és Művészeti Szakközépiskola* (2,129), (1,52), Jarosievitz Zoltán, Nyeste János; **Sárvár:** *Tinódi Sebestyén Gimn.* (1,161), (2,192), Tóth Jánosné; **Tamási:** *Béri Balogh Ádám Gimn.* (3,132), (6,367), Kovács Zsuzsanna, Kurucz Géza, Kurucz Gézáné, Varga István, Witelné Ulrich Anikó; **Tapolca:** *Batsányi János Gimn. és Postaforgalmi Szki.* (–), (1,62), Szabadvári Miklós; **Tata:** *Eötvös József Gimn.* (4,319), (1,99), Kovács Mária, Weszelovszky Éva; **Tatabánya:** *Árpád Gimn.* (3,143), (6,597), Hajnal Károlyné, Lábszkiné Tatai Ilona, Pataki Gábor; **Túrkeve:** *Ványai Ambrus Gimn.* (–), (1,47), Kórizsné Árvai Katalin; **Veszprém:** *Lovassy László Gimn.* (22,1510), (1,134), Békefi Zsuzsa, Farkas István, Kovács Előd, Pálffy Zoltán, Varga Vince; *Vetési Albert Gimn.* (–), (1,61), Kristóf Gábor; **Vác:** *Boronkay György Műsz. Szki.* (3,368), (–), Békesi Gábor, Fábián Gábor; *Madách Imre Gimn.* (1,146), (–), Ujhelyi László; *Piarista Gimn.* (1,29), (1,41), Murányi Tibor; **Zalaegerszeg:** *Ganz Ábrahám Szakközépiskola, Szakmunkásképző és Kollégium* (–), (1,53), Váryné Titz Emma; *Kölcsey Ferenc Gimn.* (1,76), (1,96), Horváth József; *Zrínyi Miklós Gimn.* (26,1764), (2,84), Csiszár Mária, Horváth Attila, Kiss Zsolt, Németh László, Orbán Edit, Pálovics Róbert, Pálovicsné Tusnády Katalin, Vadvári Tibor;

Ausztria, **Linz:** *Akademisches Gymnasium* (1,243), (1,137), Josef Holzmann; Kuvait, **Havalli:** *New English School* (1,281), (–), G. W. Jones; Nagy-Britannia, **London:** (1,26), (–); Németország, **Wissen:** *Kopernikus-Gymnazium Wissen* (–), (1,77), Peter Rente; Norvégia, **Oslo:** *Lycée Francais René Cassin* (1,606), (–), Albert Mistral; Románia, **Kézdivásárhely:** *Nagy Mózes Líceum* (1,104), (1,66), Nyáguly László; **Sepsiszentgyörgy:** *Székely Mikó Kollégium* (1,48), (1,52), Bíró Judit; **Székelyudvarhely:** *Tamási Áron Gimn.* (1,62), (–), Kovács Lajos; Szlovákia, **Dunaszerdahely:** *Magyar Tannyelvű Gimn.* (4,296), (–), Bíró Gizella, Németh Mária, Penzinger Iván; **Ipolyság:** *Magyar Tanítási Nyelvű Gimn.* (–), (1,122), Szabó László; **Révkomárom:** *Ipari Középiskola* (–), (1,45), Oláh György; *Selye János Gimn.* (5,314), (–), Horváth Katalin, Keszegh István; **Somorja:** *Magyar Tannyelvű Gimn.* (1,22), (–), Galambos Ella; **Zseliz:** *Magyar Tannyelvű Gimn.* (1,96), (–), Kuczmann Imre; Ukrajna, **Beregszász:** *Bethlen Gábor Gimn.* (2,200), (2,362), Balázsi Borbála, Hubenkó Erzsébet.

Az 1998/99. évi Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny feladatai

KEZDŐK

Első forduló (Mindhárom kategória)

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$\big|1-|x|\big|=\frac{1}{2}-x$$

2. A h_1 hajó egy folyón A-tól B-ig lefelé, majd – azonnal visszafordulva – B-től A-ig felfelé a teljes utat 2,5-szer annyi idő alatt teszi meg, mint a h_2 hajó. Állóvízben a h_2 hajó sebessége a h_1 hajó sebességének kétszerese. Hányszorosa a h_1 hajó állóvízben mért sebessége a folyó sebességének? (A két hajó és a folyó sebessége állandó.)

3. Az ABC szabályos háromszög egy belső pontja P. Legyen P-nek a háromszög AA_1, BB_1, CC_1 magasságaira eső merőleges vetülete rendre P_1, P_2 és P_3. Bizonyítsa be, hogy az $AP_1+BP_2+CP_3$ összeg értéke nem függ a P pont megválasztásától!

4. Tekintse a valós számok halmazán értelmezett

$$f(x):=(x-1)^4+(x-2)^4+(x-3)^4$$

függvényt! Hol veszi fel ez a függvény a legkisebb helyettesítési értékét?

5. Mely n és k pozitív egész számokra teljesül a következő egyenlőség?

$$3^n=2^k+1$$

Második (döntő) forduló

I. kategória: Szakközépiskolások

1. Határozza meg az a, b paraméterek értékét úgy, az alábbi egyenletnek végtelen sok megoldása legyen a valós számok halmazán!

$$\big||x-4|+5-2x\big|=ax+b$$

2. Milyen egész n esetén lesz az alábbi egyenlet megoldása egész szám?

$$n^2(x-1)=5n(2x-1)-25x$$

3. Az ABC háromszögben $\alpha=120^\circ$. Az A csúcsból induló belső szögfelező a BC oldalt A_1-ben metszi. Legyen O az ABC háromszög, O_1 a BA_1A háromszög, O_2 a CAA_1 háromszög köré írt körének középpontja. Bizonyítsa be, hogy az OO_1O_2 háromszög szabályos!

II. kategória: Nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Azonos az I. kategória 3. feladatával.

2. Tekintsük az összes kétjegyű pozitív egész számot! Mutassuk meg, hogy ha közülük akárhogyan választunk ki tizenkét darabot, akkor ezek között mindig van két olyan szám, amelyek különbsége azonos számjegyekből álló kétjegyű szám!

3. Egységoldalú szabályos tízszögbe hány darab egységoldalú szabályos ötszöget tudunk úgy elhelyezni, hogy bármely két ötszögnek ne legyen közös belső pontja?

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Legyen $n \geqslant 3$ egész szám! Tekintsünk egy egységoldalú szabályos $2n$-szöget! Ennek csúcspontjai legyenek a körüljárás sorrendjében: $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$. Tekintsük azt a két darab egységoldalú szabályos n-szöget, melyek a $2n$-szög belsejében vannak, és egyik oldaluk A_1A_2, illetve A_nA_{n+1}. Bizonyítsuk be, hogy ennek a két szabályos n-szögnek van egy közös csúcspontja, viszont több közös pontjuk nincsen!

2. Legyenek x, y, z 21-nél nem nagyobb pozitív valós számok, amelyek összege 48. Mekkora az $(x+4)(y+4)(z+4)$ szorzat legnagyobb és legkisebb értéke?

3. Legyen f az egész valós számhalmazon értelmezett olyan függvény, amelyre minden x valós számra $f(x+1)=f(x)$ és $f(x+\sqrt{2})=f(x)$. Véges sokszor veszi-e fel az f függvény az $f(0)$ értéket az [1; 2] intervallumon?

HALADÓK

Első forduló

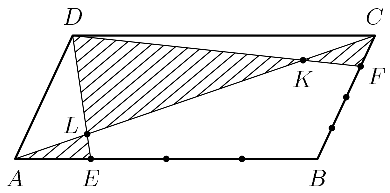
I. kategória: Szakközépiskolai tanulók

1. Az a valós paraméter értéke olyan, hogy az

$$\frac{x^2-(2a+1)x+a^2+a}{x^3-a^2x+a-1}=0$$

egyenletnek pontosan egy valós gyöke van.

Oldjuk meg az egyenletet!

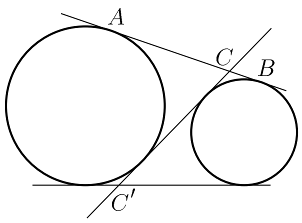


2. Az $ABCD$ paralelogramma AB és BC oldalát négy egyenlő részre osztjuk. Jelölje a BC oldal C-hez legközelebbi osztópontját F, az AB oldal A-hoz legközelebbi osztópontját E! Kössük össze a pontokat az ábrán látható módon. Hányad része a vonalkázott terület a paralelogramma területének?

3. Oldjuk meg a valós számok körében a

$$\sqrt{4-x}=c+\sqrt{x-1}$$

egyenletet, ahol a c paraméter értéke egész szám!



4. Bizonyítsuk be, hogy két kör közös külső érintőszakaszának hossza megegyezik a közös belső érintő egyenesüknek a közös külső érintők közé eső darabjának hosszával ($AB=CC'$)!

5. Legfeljebb hány új egyenes jöhet létre, ha n egyenes metszéspontjait összekötjük egymással?

II. kategória: Nem speciális tantervű gimnáziumi tanulók

1. Oldjuk meg a természetes számok (nemnegatív egész számok) halmazán a

$$3(x-y)=x^2-xy+y^2$$

egyenletet!

2. Az $ABCD$ paralelogramma középpontja O és a DAB szög egyenlő az AOD szöggel. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$AC^2-BD^2=2(AB^2-BC^2)!$$

3. Azonos az előző kategória 3. feladatával.

4. Azonos az előző kategória 4. feladatával.

5. Azonos a az előző kategória 5. feladatával.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Hány egész számokból álló (x,y) számpár elégíti ki a

$$\sqrt{2x-y}=\sqrt{x+2^{1999}}-\sqrt{y-x}$$

egyenletet?

2. Egy paralelogrammában két szomszédos oldal által és az átlók által bezárt hegyesszög egyenlő nagyságú. Bizonyítsuk be, hogy a rövidebb oldal és a hosszabb oldal aránya nagyobb ($\sqrt{2}-1$)-nél!

3. Bizonyítsuk be, hogy $n>7$ esetén az 1, 2, 3, …, $2n$ számok közül nem lehet n darabot úgy kiválasztani, hogy a kiválasztott számokból képzett kéttagú összegek mind különbözők legyenek!

4. Egy tetraéder mindegyik lapja derékszögű háromszög, élei közül pedig három 1 egység hosszú.

a) Hogyan helyezkedhetnek el a derékszögek a csúcsokhoz képest?

b) Mekkora a tetraéder többi éle?

Második forduló

I. kategória: Szakközépiskolai tanulók

1. Oldjuk meg a valós számok körében a

$$\sqrt{3p-x}+\sqrt{x-p}=\sqrt{p+2}$$

egyenletet, ahol a p paraméter egész szám!

2. Egy egyenlő szárú háromszög beírt körének sugara r, az alapjához hozzáírt (az alapot és a szárak meghosszabbítását is érintő) kör sugara r_a, a háromszög köréírt körének sugara pedig R.

a) Igazoljuk, hogy $\sqrt{r\cdot r_a}\leqslant R$!

b) Mekkora $\dfrac{r}{R}$ értéke, ha $\sqrt{r\cdot r_a}=R$?

3. Egy szabályos háromszög oldalait n egyenlő részre osztottuk. Legyen $f(n)$ azoknak a háromszögeknek a száma, amelyeket az osztópontok és a háromszög csúcsai meghatároznak! Adjuk meg $f(n)$-et n függvényeként!

4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder szemközti élei merőlegesek egymásra, akkor van olyan pont a tetraéder belsejében, amely mindegyik él felezőpontjától egyenlő távolságra van!

II. kategória: Nem speciális tantervű gimnáziumi tanulók

1. Oldjuk meg az egész számok halmazán a

$$\sqrt{3x-y}=\sqrt{x+3}-\sqrt{y-x}$$

egyenletet!

2. Egy egyenlő szárú háromszög beírt körének sugara r, az alapjához hozzáírt (az alapot és a szárak egyenesét is érintő) kör sugara r_a, a háromszög köréírt körének sugara pedig R. Mekkora $\dfrac{r}{R}$ értéke, ha $r+r_a=R$?

3. Egy szabályos háromszög oldalait n egyenlő részre osztottuk. Legyen $f(n)$ azoknak a háromszögeknek a száma, amelyeket az osztópontok és a háromszög csúcsai meghatároznak! Milyen n érték esetén lesz $f(n)$ prímszám?

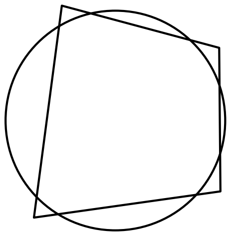
4. Egy kocka alaplapja az $ABCD$ négyzet, fedőlapja az $A_1B_1C_1D_1$ négyzet (AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 merőleges a két négyzet síkjára.) Az A csúcsra, az A_1B_1 él felezőpontjára és a DD_1 él felezőpontjára illeszkedő sík a kockát két részre vágja. Mekkora a keletkezett két test térfogatának aránya?

Harmadik (döntő) forduló

I. kategória: Szakközépiskolások

1. Bizonyítsuk be, hogy ha $x>0$, akkor

$$\frac{x}{x+2}+\frac{1}{3x}+\frac{x}{2x+1}\geqslant 1.$$



2. Egy kör és egy négyszög úgy helyezkedik el a síkon, mint az az ábrán látható. Tudjuk, hogy a kör négyszögön belüli két-két szembenfekvő ívének összege egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy a négyszög húrnégyszög!

3. A 26 és a 65 két olyan kétjegyű szám, hogy ha elhagyjuk a mindkettőben szereplő 6-ost, akkor a kapott két egyjegyű szám hányadosa egyenlő az eredeti két szám hányadosával. Keressük meg az összes különböző kétjegyű számokból álló ilyen tulajdonságú számpárt!

II. kategória: Nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Bizonyítsuk be, hogy ha $x+y>0$ és

$$x^2+y^2+\frac{2xy}{x+y}=1,$$

akkor $x+y=1$.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy négyszög csúcsai egy R, oldalfelező pontjai pedig egy r sugarú körre illeszkednek, akkor a két kör középpontjának távolsága:

$$\sqrt{\frac{R^2}{2}-r^2}.$$

3. A $*$ művelet a valós számpárokon van értelmezve, az (x,y) számpárokhoz rendelt valós számot $x*y$-nal jelöljük. Határozzuk meg $1999*19$ értékét, ha tudjuk, hogy bármely x, y, z valós számra teljesülnek a következő azonosságok:

$$x*x=0,$$

$$x*(y*z)=(x*y)+z.$$

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Egy táblára felírtuk az 1, p, p^2, $\ldots$, p^{2n} számokat, ahol p pozitív prímszám, n pedig pozitív egész szám. Egy lépésben bármely két szám letörölhető, ha helyükbe a letörölt két szám különbségének abszolút értékét írjuk. Ezt az eljárást addig folytatjuk, amíg egyetlen szám marad a táblán. Jelölje a leírt eljárással kapható számok maximumát M, minimumát m. Mennyi p értéke, ha tudjuk, hogy $M+m$ négyzetszám?

2. Oldjuk meg az $x^3+y^3+3xy=1$ egyenletet a valós számpárok körében, ha tudjuk, hogy $x+y>0$.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha az ABC háromszögben $ACB\sphericalangle=45^\circ$, akkor a háromszög lefedhető két, $\dfrac{AB}{2}$ sugarú körlappal!

Az 1998/99. évi Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny eredményei

KEZDŐK

I. kategória: Szakközépiskolások

I. díj: **Pszota Zsolt**, Vác, Boronkay György Műszaki Szki. és Gimn., tanára: Fábián Gábor

II. díj: **Sánta János**, Nyíregyháza, Széchenyi István Közgazdasági Szki. tanára: Vágvölgyi Mária

Sipos Barnabás, Budapest, Trefort Ágoston Kéttannyelvű Szki., tanára: Csapó Judit

III. díj: **Biczó Béla**, Pécs, Zipernowsky Károly Ipari Szki., tanárai: Ivasinka Mátyásné, Németh József

Csontos Béla, Győr, Jedlik Ányos Informatikai Szki. és Gimn., tanára: Honti Dénesné

Csorba Zoltán, Eger, Neumann János Közgazdasági Szki., tanára: Pótáné Márton Mária

Varga Balázs, Budapest, Mechwart András Vasútközlekedési Szki., tanára: Zárbókné dr. Rimek Ilona

I. dicséret: 8–10. *Berg Viktor*, Paks, Energetikai Szki., tanára: Árokszállási Eszter; *Lővei Gábor*, Budapest, Puskás Tivadar Távközlési Technikum, tanára: K. Szabó László; *Szabolcsi Viktória*, Budapest, Varga Jenő Közgazdasági Szki. és Gimn., tanára: Szilágyiné Zanati Anna;

II. dicséret: 11–17. *Ambach Balázs*, Paks, Energetikai Szakképzési Intézet, tanára: Árokszállási Eszter; *Ambrus Péter*, Szeged, Körösy József Közgazdasági és Külkereskedelmi Szki., tanára: Jenei Mária; *Kiss Tímea*, Miskolc, Kereskedelmi és Vendéglátóipari Szki., tanára: Kellei Istvánné; *Kuczogi Gábor*, Budapest, Bolyai János Fővárosi Gyakorló iskola, tanára; Buzogány Lászlóné; *Kun Viktor*, Budapest, Puskás Tivadar Távközlési Technikum, tanára: Szabó László; *Nagy Péter*, Nagykanizsa, Cserháti Sándor Szki., tanára:

Kanizsáné Rezsek Mária; *Téglár Csaba*, Dunaújváros, Rudas Közgazdasági Középiskola, tanárai: Kácsor László, Horváth Éva.

II. kategória: Nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

I. díj: **Jesch Dávid**, Nagykanizsa, Batthány Lajos Gimn., tanára: dr. Pintér Ferenc

II. díj: **Csáky Attila**, Kecskemét, Katona József Gimn., tanára: dr. Szablics Bálintné

Spancér Ilona, Nagykanizsa, Batthány Lajos Gimn., tanára: dr. Pintér Ferenc

Várnai Csilla, Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gimn., tanára: Pető Sándor

Várnai Tímea, Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gimn., tanára: Pető Sándor

III. díj: **Asztalos Márk**, Budapest, Piarista Gimn., tanára: Albert András

Botka Bea, Budapest, Veres Péter Gimn., tanára: Varga Mária

Drozdy Árpád, Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gimn., tanára: Morvai Éva

Körmendi Gyöngyi, Veszprém, Lovassy László Gimn., tanára: Arnhoffer Mihály

I. dicséret: **10.** *Csirmaz Viktor*, Hajdúszoboszló, Hőgyes Endre Gimn. és Szki., tanára: Deli Lajos; **11.** *Csötönyi Nóra*, Bonyhád, Petőfi Sándor Gimn., tanára: Kovács Szabolcs; **12.** *Fejes József*, Kiskunhalas, Bibó István Gimn., tanára: Váradi Krisztián; **13.** *Geszler Zoltán*, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn., tanára: Hámori Veronika; **14.** *Holicska Ádám*, Budapest, Veres Péter Gimn., tanára: Márton Gábor; **15.** *Kiss Ákos*, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn., tanára: Hámori Veronika; **16.** *Kovács Gábor*, Ózd, József Attila Gimn. és Eü. Szki., tanára: Tóth István; **17.** *Kövesi Nagy Dániel*, Mohács, Kisfaludy Károly Gimn., tanára: Kunovszky István; **18.** *Maczó Péter*, Sárospatak, Árpád vezér Gimn., tanára: Lencsés Anna; **19.** *Pajna Gabriella*, Debrecen, Tóth Árpád Gimn., tanára: Dóry Zoltánné; **20.** *Regula Gergely*, Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gimn., tanára: Kotek Gábor; **21.** *Tóth Ágnes*, Hajdúszoboszló, Hőgyes Endre Gimn. és Szki., tanára: Deli Lajos; **22.** *Wittner Lilla*, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn., tanára: Pogáts Ferenc.

II. dicséret: *Ábel Dániel*, Budapest, Németh László Gimn., tanára: Holló Gábor; *Babos Tamás*, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn., tanára: Pogáts Ferenc; *Bartha Gábor*, Budapest, Eötvös József Gimn., tanára: Halász Ágnes; *Gyökeres Ágnes*, Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gimn., tanára: Kotek Gábor; *Hamar Gergő*, Dombóvár, Illyés Gyula Gimn., tanára: Mesterházyné dr. Illés Ágnes; *Nagy János*, Eger, Dobó István Gimn., tanára: Homolyáné Nagy Irma; *Szabados Réka*, Budapest, Eötvös József Gimn., tanára: Halász Ágnes; *Vadász Péter*, Pécs, Leöwey Klára Gimn., tanára: Kovács Ágnes.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

I. díj: **Béky Bence**, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimn., tanárai: Fazakas Tünde, Táborné Vincze Márta, Surányi László, Montágh Balázs

II. díj **Horváth Illés**, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn., tanárai: Fazakas Tünde, Táborné Vincze Márta

Zsbán Ambrus, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn., tanárai: Fazakas Tünde, Táborné Vincze Márta

III. díj: **Csikvári Péter**, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn., tanárai: Fazakas Tünde, Táborné Vincze Márta, Pósa Lajos, Montágh Balázs

Gerencsér Balázs, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn., tanárai: Fazakas Tünde, Táborné Vincze Márta, Pósa Lajos

Harangi Viktor, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn., tanárai: Fazakas Tünde, Táborné Vincze Márta, Pósa Lajos

Pallos Péter, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn., tanárai: Fazakas Tünde, Táborné Vincze Márta

Tran Thanh Long, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn., tanárai: Fazakas Tünde, Táborné Vincze Márta, Pósa Lajos

I. dicséret: 9–10. *Csordás Hunor*, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn., tanárai: Fazakas Tünde, Táborné Vincze Márta; *Devecsery Ágnes*, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn., tanárai: Fazakas Tünde, Táborné Vincze Márta.

II. dicséret: 11–14. *Farkas Dóra*, Veszprém, Lovassy László Gimn., tanárai: Békefi Zsuzsa, Pálffy Zoltán; *Koreck Ferenc*, Szeged, Radnóti Miklós Gimn., tanárai: Vincze István, Mike János; *Kovács Erika Renáta*, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn., tanárai: Fazakas Tünde, Táborné Vincze Márta, Pósa Lajos, Surányi László; *Zséger Ádám*, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn., tanárai: Fazakas Tünde, Táborné Vincze Márta, Pósa Lajos.

HALADÓK

I. kategória: Szakközépiskolások

I. díj: **Pataki Gergely**, Eger, Neumann János Közgazdasági Szki. és Gimn., tanára: Liptainé Reszegi Ágnes

II. díj: **Perge István**, Eger, Neumann János Közgazdasági Szki. és Gimn., tanára: Szakaliné Haraszti Éva

III. díj: **Lestár Miklós**, Budapest, II. Rákóczi Ferenc Fővárosi Gyakorló Közgazdasági Szki., tanára: Sallayné Jani Éva

Dicséret: 4–5. *Márton Albert*, Eger, Neumann János Közgazdasági Szki. és Gimn., tanára: Szakaliné Haraszti Éva; *Novák Ádám*, Eger, Neumann János Közgazdasági Szki. és Gimn., tanára: Farkas Erzsébet.

II. kategória: Nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

I. díj: **Bohák András**, Budapest, Evangélikus Gimnázium,
tanára: Nagy-Baló András
Vörös László, Győr, Révai Miklós Gimnázium,
tanárai: Zábrádiné Smierer Emília, Zsebők Ottó, Pósa Lajos.

II. díj: **Pesti Gábor**, Nagykanizsa, Batthány Lajos Gimnázium,
tanára: Erdős Gábor
Zajdó Csaba, Debrecen, Tóth Árpád Gimnázium,
tanára: Kovács Ákos

III. díj: **Breuer János**, Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimnázium,
tanára: Sparingné Köves Ildikó
Joó Dániel, Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gimnázium,
tanára: Papp Györgyné
Vannák Dzsamila, Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gimnázium,
tanára: Sparingné Köves Ildikó

Dicséret: 8–10. *Boros M. Mátyás*, Budapest, Veres Péter Gimnázium, tanára: Kötél Tamás; *Vizer Tibor*, Kecskemét, Piarista Gimnázium, tanára: Mikulás Domonkos; *Zalán Péter*, Budapest, Evangélikus Gimnázium, tanárai: Nagy-Baló András, dr. Dobos Krisztina, Laczkó László.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

I. díj: **Ambrus Gergely**, Szeged, Radnóti Miklós Gimnázium,
tanárai: Mike János, Schultz János
Csereklei Gábor, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium,
tanára: Laczkó László
Varjú Péter, Szeged, Radnóti Miklós Gimnázium,
tanárai: Mike János, Schultz János

II. díj: **Csirmaz Előd**, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium,
tanára: Laczkó László
Horváth György, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium,
tanára: Laczkó László

III. díj: **Nagy Dávid**, Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium,
tanára: Balázs Tivadar
Nagy Tamás, Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimnázium,
tanárai: Horváth Attila, Vadvári Tibor

I. dicséret: 8. *Somogyi Tamás*, Budapest, Szent István Gimnázium, tanárai: Paróczay József, Rácz János; **9.** *Végh Viktor*, Szeged, Ságvári Endre Gimnázium, tanárai: Konfárné Nagy Klára, dr. Dobi János; **10.** *Czímer Gergő*, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium, tanára: Laczkó László; **11.** *Szeti Balázs*, Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimnázium, tanárai: Mihályi Gyula, Budai Endre;

II. dicséret: 12. *Gyurcsek András*, Veszprém, Lovassy László Gimnázium, tanárai: Varga Vince, Békefi Zsuzsa; **13.** *Rokob András*, Miskolc Földes Ferenc Gimnázium, tanárai: Gulyás Tibor, ifj. Szabó Kálmán; **14.** *Nagy Gergely*, Veszprém, Lovassy László Gimnázium, tanárai: Varga Vince, Békefi Zsuzsa; **15.** *Földényi Tamás*, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium, tanára: Laczkó László; **16.** *Poór Veronika*, Budapest, Szent István Gimnázium, tanárai: Rácz János, Paróczai József; **17.** *Nagy Ádám*, Budapest, Szent István Gimnázium, tanárai: Rácz János, Paróczai József; **18.** *Schmidt András*, Budapest, Szent István Gimnázium, tanárai: Rácz János, Paróczai József;

Az 1998/99. évi Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny feladatai

I. kategória: Szakközépiskolák

Első (iskolai) forduló

1. Határozza meg a

$$2x^5+3x^4-2x^3-x^2+3x+1$$

polinom számértékét, ha $\dfrac{1}{x}=1-x^2$.

2. A természetes számok H részhalmazának elemei a következő tulajdonsággal rendelkeznek:

a) $6\in H$.

b) Ha $x\in H$, akkor $3x\in H$.

c) Ha $(8x-2862)\in H$, akkor $x\in H$.

Bizonyítsa be, hogy $1998\in H$!

3. Az $ABCD$ húrnégyszög AC átlója a húrnégyszöghöz tartozó kör átmérője. Bizonyítsa be, hogy a négyszög szemközti oldalainak a BD átlóra eső merőleges vetületei egyenlő hosszúak!

4. A p valós paraméter mely értékei mellett van valós megoldása a

$$\frac{\sin 3x\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-4x\right)+1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-7x\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)+p}=0$$

egyenletnek?

Számítsa ki az egyenlet gyökeit!

5. Bergengóciában a hivatalos fizetőeszköz a peták. A 10, 15 és 20 petákos érmék ezüstből, az 1, 2 és 3 petákos érmék rézből készültek. A pályaudvaron található automata pénzváltó a következőképpen tudja felváltani az ezüstérméket:

$$\begin{aligned}20&=15+2+2+1\\15&=10+2+2+1\\10&=3+3+2+2\end{aligned}$$

Pistának kizárólag ezüstérmékben 125 petákja volt, és valamennyi ezüstpénzét rézre váltotta fel. Jancsi, miután megszámolta, hogy Pistának mely rézérmékből hány darabja lett a váltás után, kijelentette: „Most egyértelműen meg tudom mondani, hogy milyen ezüstérméid voltak.”

Milyen következtetéssel tudta Jancsi egyértelműen megállapítani, hogy Pistának a váltás előtt milyen ezüstérméi voltak? (Megjegyezzük, hogy Jancsi Pista ezüstérméiről csupán annyit tudott, hogy összes pénze a váltás előtt a 20, 15 és 10 petákosok közül került ki.)

6. A valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto f(x)$ függvényről a következőket tudjuk:

$$f(x-2)+2f(-x)=x^2+1.$$

Határozza meg az $f(x)$ függvény szélsőértékének helyét és nagyságát!

Második forduló

1. Legyen A egy legalább kétjegyű (tízes számrendszerbeli) egész szám. Tekintsük azt a B számot, amely úgy keletkezik, hogy az A szám számjegyeit fordított sorrendben írjuk le. Bizonyítsa be, hogy ha A első és utolsó számjegyeinek különbsége páros szám, akkor $|A-B|$ osztható 18-cal!

2. Az ABC derékszögű háromszög AC és BC befogói fölé kifelé megrajzoljuk az $ACDE$ és a $BFGC$ négyzeteket. Az AF egyenes a BC oldalt K pontban, a BE egyenes az AC oldalt H pontban metszi. Jelöljük a BE és az AF egyenesek közös pontját M-mel. Bizonyítsa be, hogy a $KCHM$ négyszög területe az AMB háromszög területével egyenlő!

3. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$\left[\log_{(\sqrt{x}-1)}(x-1)+\log_{(x-1)}(\sqrt{x}-1)^2+5\right]^2 =$$
$$=4\left[\log_{(\sqrt{x}-1)}(x-1)+2\right]\left[\log_{(x-1)}(\sqrt{x}-1)^2+3\right].$$

4. Az ABC háromszögben az $ACB\sphericalangle=60^\circ$, a $CAB\sphericalangle$ szögfelezője a BC oldalt a D pontban, az $ABC\sphericalangle$ felezője az AC oldalt az E pontban metszi. Az AD és a BE szakaszok metszéspontja O. Bizonyítsa be, hogy

$$CD+CE=CO\sqrt{3}.$$

5. Az $ABCD$ téglalap oldalai: $AB=CD=5a$, $BC=DA=3a$ hosszúságúak ($a\in\mathbf{R}^+$). Az oldalakra ugyanazon körüljárási irányban felmérjük az

$$x=AA_1=BB_1=CC_1=DD_1$$

szakaszokat úgy, hogy az $A_1B_1C_1D_1$ paralelogramma a téglalap belsejében legyen.

Határozza meg azon x értéket, amely mellett a beírt $A_1B_1C_1D_1$ paralelogramma hegyesszöge a legkisebb! Számítsa ki ezt a legkisebb szöget!

Harmadik (döntő) forduló

1. Határozza meg azokat a k és m egész számokat, amelyekre teljesül a következő egyenlet:

$$k^2+m^2+k+m+4\sqrt{k^2-2km+m+11}+4\sqrt{m^2-2km+k+19}=4km-30.$$

2. Az ABC szabályos háromszög AB oldalán jelöljünk ki egy P belső pontot. Ezután rajzoljunk az AP és a BP szakaszok fölé kifelé egy-egy szabályos APQ és BPR háromszöget. Az ABC háromszög súlypontját jelöljük S_1-gyel, az APQ háromszög súlypontját S_2-vel, a BPR háromszög súlypontját S_3-mal.

Hogyan választható meg a P pont, ha azt akarjuk, hogy az $S_1S_2S_3$ háromszög területe *a)* minimális, *b)* maximális legyen?

3. *a)* Igazolja, hogy a p valós paraméter bármely értékénél a

$$2x^2-10px+7p-1=0$$

egyenletnek két különböző valós gyöke van.

b) A p értékétől függően hány gyöke van az egyenletnek a $]-1;1[$ intervallumban?

II. kategória: Nem speciális tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Mely természetes n szám esetén teljesül, hogy

$$\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_n(n+1)=10?$$

2. Az x_0, x_1, x_2, $\ldots$ sorozatban $x_0=a$, $x_1=b$ adott pozitív számok, és a sorozat további tagjainak képzési szabálya:

$$x_{n+2}=\frac{x_{n+1}+1}{x_n}\qquad(n=0,1,2,\ldots).$$

Fejezzük ki x_{1998} értékét a és b segítségével!

3. Határozzuk meg a derékszögű koordinátarendszer síkjában azoknak a pontoknak a halmazát, amelyekre igaz, hogy létezik olyan téglalap, amelynek a kerülete a pont első koordinátájával, területe pedig a pont második koordinátájával egyenlő!

4. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$x+2y+3z=2\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2y-1}+\sqrt{3z-1}\right).$$

5. Az ABC derékszögű háromszög hozzáírt köreinek (külső érintő köreinek) a középpontjai A', B', C'. Bizonyítsuk be, hogy az $A'B'C'$ háromszög területe legalább $(\sqrt{8}+2)$-szerese az ABC háromszög területének!

Második forduló

1. Felírtunk a táblára n db valós számot ($n \geqslant 5$); ezek a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

a) a számok között nincs a 0, de ott van az 1999;

b) a felírt számok közül bármely négy (megfelelő sorrendben véve) egy mértani sorozat egymás utáni négy tagja.

Adjuk meg a felírt számokat!

2. Egy derékszögű háromszögbe kétféle módon is beírtunk egy négyzetet: az első esetben a négyzet két oldala egy-egy befogón van, egy csúcsa pedig az átfogón; a második esetben a négyzet oldala az átfogón van, egy-egy csúcsa pedig egy-egy befogón. Az első esetben a négyzet területe 441, a másodikban 440 területegység. Mekkora a befogók összege?

3. Egy szabályos négyoldalú gúla beírt gömbjének a középpontja, valamint élérintő gömbjének a középpontja egyenlő távol van a gúla alapsíkjától. Mekkora a gúla térfogata, ha alapélének a hossza 2? (Az élérintő gömb a gúla minden élét az él belső pontjában érinti, a beírt gömb pedig minden lapot belső pontban érint.)

4. Tekintsük azokat a pozitív egészekből álló (x, y) párokat, amelyek kielégítik az

$$x^2 - y^2 = 10^2 \cdot 30^{2n}$$

egyenletet (n pozitív egész).

a) Határozzuk meg az egyenletet kielégítő (x, y) párok számát n függvényeként.

b) Bizonyítsuk be, hogy ezeknek a pároknak a száma nem lehet négyzetszám.

Harmadik (döntő) forduló

1. Oldjuk meg az 1-nél nem nagyobb pozitív számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{x}{1+y+zx} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{1+x+yz} = \frac{3}{x+y+z}.$$

2. Legfeljebb mekkora lehet annak a tetraédernek a térfogata, amelynek az élfelező pontjai egy egységsugarú gömbön helyezkednek el?

3. Egy $n^2 \times n^2$-es sakktábla mezőire pozitív egész számokat írunk úgy, hogy két szomszédos mezőn lévő szám különbségének az abszolút értéke nem nagyobb n-nél. Bizonyítsuk be, hogy legalább $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ számú mezőn ugyanaz a szám áll. ($\left[\frac{n}{2}\right]$ az $\frac{n}{2}$ egészrészét jelöli; két mező szomszédos, ha van közös oldaluk.)

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok

Első forduló

1. Valamikor a huszadik században a 99 évnél nem idősebb és különböző korú Alexander és Bernát mindketten éppen annyi idősek voltak, mint amennyi a születési évszámukban a számjegyek összege. Hány év közöttük a korkülönbség?

2. Az ABC háromszög AB oldalának egy belső pontja a D pont. Az ACD háromszögbe és a CDB háromszögbe írt körök egymást a CD szakaszon érintik. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszögbe írt kör az AB oldalt a D pontban érinti.

3. Egy szabályos négyoldalú gúla köré írható gömb sugara R. A gúla oldallapjainak (összesen négy darab) síkját, valamint a gúla körülírt gömbjét belülről érintő gömb sugara ϱ. Mekkora szöget zár be a gúla két szomszédos oldallapja, ha $\dfrac{R}{\varrho}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$?

4. Van-e olyan $P(x)$ egész együtthatós polinom, amelyre $P(10)=400$, $P(14)=440$ és $P(18)=520$?

5. Az a, b, c pozitív számokra és az $n\geqslant 2$ egészre $a^n+b^n=c^n$. Mely k pozitív egészekre szerkeszthető az a^k, b^k, c^k oldalakkal tompaszögű háromszög?

Második (döntő) forduló

1. Legyen $n>1$ tetszőleges, és jelöljük k-val az n-nél nem nagyobb (pozitív) prímek számát. Tekintsünk $k+1$ darab olyan pozitív egészt, amelyek közül egyik sem osztója az összes többi szorzatának. Bizonyítsuk be, hogy a $k+1$ pozitív egész között van olyan, amely nagyobb, mint n.

2. Az x^4-2x^2+ax+b polinomnak négy különböző gyöke van a valós számok körében. Bizonyítsuk be, hogy mindegyik gyök abszolút értéke kisebb, mint $\sqrt{3}$.

3. Tegyük fel, hogy egy konvex sokszög minden oldala egész szám és a kerülete páratlan szám. Bizonyítsuk be, hogy a sokszög területe legalább $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Az 1998/99. évi Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny eredményei

I. kategória
Szakközépiskolások

I. díj: **Sipos Péter** 13. o., Budapest, Trefort Á. Kéttannyelvű Műszaki Szki. és Gimn.
Felkészítő tanár: Varsóczi Károly

II. díj: **Kudela Gábor** 12. o., Mosonmagyaróvár, Bolyai János Közgazdasági Szki.
Felkészítő tanár: Kurcsics Rafaella

III. díj: **Szeremi Katalin** 12. o., Eger, Egri Közgazdasági Szakközépiskola
Felkészítő tanár: Szabóné Buzás Katalin, Veres Nándor

4. **Spisák Ferenc** 12. o., Eger, Neumann János Közgazd. Szki. és Gimn.
Felkészítő tanár: Szakaliné Haraszti Éva

5. **Tamás Katalin** 12. o., Békéscsaba, Széchenyi I. Közgazd. és Külker. Szki.
Felkészítő tanár: Rókáné Rózsa Anikó

6. **Gyurcsek Tamás** 11. o., Szolnok, Pálfy J. Műszeripari és Vegyipari Szki.
Felkészítő tanár: Báthori Attila

7. **Varga Zsolt** 12. o., Békéscsaba, Széchenyi I. Közgazd. és Külker. Szki.
Felkészítő tanár: Schédl Ilona

8. **Barák Tamás** 12. o., Békéscsaba, Széchenyi I. Közgazd. és Külker. Szki.
Felkészítő tanár: Schédl llona

9. **Gyulai József** 12. o., Kecskemét, Kada Elek Közgazdasági Szki.
Felkészítő tanár: Illés Judit

10. **Gyovai Tamás** 11. o., Szeged, Kőrösy J. Közgazdasági és Külker. Szki.
Felkészítő tanár: Szalai Éva

Miniszteri dicséretben részesült:

11. *Mihajlik Gábor* 12. o., Vác, Boronkay György Műszaki Szki.; **12.** *Farkas Zoltán* 12. o., Nagykanizsa, Cserháti S. Mezőgazd. és Gépészeti Szki.; **13.** *Mózer Csaba* 12. o., Nyíregyháza, Széchenyi I. Közgazdasági Szki.; **14.** *Belicza András* 11. o., Budapest, Puskás Tivadar Távközlési Technikum; **15.** *Bátyai Krisztián* 12. o., Paks, Energetikai Szakképzési Int. Műsz. Szki.; **16.** *Dankó Zoltán* 12. o., Nyíregyháza, Széchenyi I. Közgazdasági Szki.; **17.** *Miklósi Rita* 12. o., Eger, Neumann János Közgazd. Szki. és Gimn.; **18.** *Szabó Cecília* 12. o., Kisbér, Táncsics M. Gimn. és Közgazd. Szki.; **19.** *Tóth Tamás* 12. o., Debrecen, Bethlen G. Közgazd. és Postaforg. Szki.; **20.** *Varga Gábor* 12. o., Paks, Energetikai Szakképzési Int. Műsz. Szki.; **21.** *Vígh Melinda* 11. o., Budapest, Hunfalvy J. Közgazdasági Szki.; **22.** *Hegedűs Zoltán Csaba* 11. o., Miskolc, Andrássy Gyula Műszaki Szki.; **23.** *Petrovszki Péter* 13. o., Békéscsaba, Széchenyi I. Közgazd. és Külker. Szki.; **24.** *Pilisy Balázs* 12. o., Eger, Neumann János Közgazd. Szki. és Gimn.; **25.** *Balogh Péter* 12. o., Vác, Boronkay György Műszaki Szki.; **26.** *Hodossy András* 13. o., Budapest, Xantus János Idegenforgalmi Középiskola; **27.** *Fülöp Hajnalka* 12. o., Dunaújváros, Rudas Közgazdasági Szki.; **28.** *Gera Zoltán* 12. o., Budapest, Neumann János Számítástechnikai Szki.; **29.** *Holecz Hedvig* 12. o., Salgótarján, Táncsics Mihály Közgazdasági Szki.; **30.** *Kígyósi Balázs* 11. o., Kaposvár, Noszlopy Gáspár Közgazdasági Szki.

II. kategória
Nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

I. díj: **Zábrádi Gergely** 11. o., Győr, Révai Miklós Gimn.
Felkészítő tanár: dr. Szíjártó Miklósné, Zsebők Ottó, Pósa Lajos

II. díj: **Gueth Krisztián** 12. o., Szombathely, Kanizsai Dorottya Gimn.
Felkészítő tanár: Módos Tiborné, Sándor Endre

III. díj: **Iván Szabolcs** 11. o., Kecskemét, Bolyai János Gimn.
Felkészítő tanár: Varga József

4. **Stoll Péter** 12. o., Miskolc, Földes Ferenc Gimn.
Felkészítő tanár: Fejér Szabolcs

5. **Lengyel Tímea** 12. o., Kaposvár, Munkácsy Mihály Gimn. és Szki.
Felkészítő tanár: Gelencsér Jenő

6. **Lovas Róbert** 12. o., Csongrád, Batsányi János Gimn. és Óvónői Szki.
Felkészítő tanár: Papp Ferencné

7. **Bujdosó Attila** 12. o., Budapest, Veres Péter Gimn. Felkészítő tanár: Varga Mária

8. **Gál Tamás** 12. o., Zalaegerszeg, Kölcsey Ferenc Gimn.
Felkészítő tanár: Forgács Ferencné

9. **Imre Gábor** 12. o., Budapest, Babits Mihály Gimn.
Felkészítő tanár: Fereneczfi Magdolna

10. **Mecz Balázs** 12. o., Pápa, Türr István Gimn. és Óvónői. Szki.
Felkészítő tanár: Bátyai Gyuláné, dr. Spissich László

Miniszteri dicséretben részesült:

11. *Pál András* 12. o., Budapest, Eötvös József Gimn.; **12.** *Máthé András* 11. o., Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gyakorlógimn.; **13.** *Dancsó Zsuzsanna* 12. o., Budapest, ELTE Trefort Ágoston Gyakorlóiskola; **14.** *Boros Márton* 12. o., Budapest, Eötvös József Gimn.; **15.** *Gyenes Zoltán* 11. o., Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gyakorlógimn.; **16.** *Nagy Marianna* 12. o., Kecskemét, Bányai Júlia Gimn.; **17.** *Madarász Tamás* 12. o., Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyakorlóiskolája; **18.** *Gergely Péter Miklós* 12. o., Budapest, Kölcsey Ferenc Gimn.; **19.** *Pandur Sándor* 12. o., Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gyakorlógimn.; **20.** *Hegedűs Ákos* 11. o., Pécs, Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnáziuma; **21.** *Führer Lívia* 12. o., Sopron, Berzsenyi Dániel Evangélikus Gimn.; **22.** *Herczeg Géza* 11. o., Szolnok, Varga Katalin Gimn.; **23.** *Jung János* 11. o., Bonyhád, Petőfi Sándor Evangélikus Gimn.; **24.** *Ivaskó György* 11. o., Baja, III. Béla Gimn.; **25.** *Mag Kornélia* 12. o., Kunszentmiklós, Baksay Sándor Református Gimn.; **26.** *Sindely Dániel* 12. o., Kiskunhalas, Szilády Áron Református Gimn.; **27.** *Erős Zsolt* 12. o., Békéscsaba, Belvárosi Ált. Isk. és Gimn.; **28.** *László Krisztina* 12. o., Nyíregyháza, Nyíregyházi Ev. Kossuth L. Gimn.; **29.** *Pilászy István* 12. o., Budapest, Piarista Gimn.; **30.** *Kiss Gergely* 12. o., Kecskemét, Katona József Gimn.

III. kategória
Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

I. díj: **Terpai Tamás** 12. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.
Felkészítő tanár: Táborné Vincze Márta, Pataki János, Beleznay Ferenc

II. díj: **Kósa Botond** 12. o., Budapest, Szent István Gimnázium
Felkészítő tanár: Magyar Zsolt

III. díj **Lukács László** 12. o., Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium
Felkészítő tanár: Szabó Kálmán, Gulyás Tibor

4. **Németh András** 12. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.
Felkészítő tanár: Táborné Vincze Márta, Beleznay Ferenc, Pataki János

5. **Végh Zoltán** 12. o., Szeged, JATE Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium
Felkészítő tanár: dr. Dobi János, Kovács István

6. **Juhász András** 12. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.
Felkészítő tanár: Táborné Vincze Márta, Pataki János

7. **Vizer Máté** 11. o. Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.
Felkészítő tanár: Surányi László, Pataki János, Beleznay Ferenc

8. **Keszegh Balázs** 11. o. Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.
Felkészítő tanár: Surányi László, Pataki János

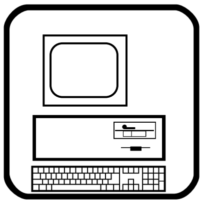
9. **Tar Zsolt** 12. o., Debrecen, Fazekas Mihály Gimn.
Felkészítő tanár: Nagy Erzsébet, Berzi Imre

10. **Horváth Gábor** 12. o., Debrecen, Fazekas Mihály Gimn.
Felkészítő tanár: Nagy Erzsébet, Reiman István, Pósa Lajos

Miniszteri dicséretben részesült:

11. *Szabó Péter* 12. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.; **12.** *Kenyeres Péter* 12. o., Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimn.; **13.** *Gerbicz Róbert* 12. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.; **14.** *Szabadka Zoltán* 12. o., Veszprém, Lovassy László Gimn.; **15.** *Devecsery András* 12. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.; **16.** *Balogh Ferenc* 12. o., Szeged, Radnóti Miklós Gimn.; **17.** *Csiszár Gábor* 11. o., Budapest, Szent István Gimn.; **18.** *Kiss Gergely* 11. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.; **19.** *Kajtár Márton* 11. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.; **20.** *Venter György* 11. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.; **21.** *Végh László* 12. o., Debrecen, Fazekas Mihály Gimn.; **22.** *Csikvári Gábor* 12. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.; **23.** *Fehér Lajos Károly* 12. o., Debrecen, Fazekas Mihály Gimn.; **24.** *Hudomiet Péter* 11. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.; **25–29.** *Hesz Gábor* 12. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.; *Pálvölgyi Dömötör* 11. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.; *Patakfalvy Zsolt* 12. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.; *Szécsi Vajk* 12. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.; *Tóth Bálint* 12. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.

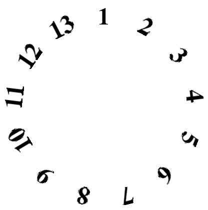
Nemes Tihamér OKSzTV 1998/99



A Nemes Tihamér OKSzTV-n az 1998/99-es tanévben az első fordulóban 5314 tanuló vett részt 394 iskolából, közülük 685-en Erdélyből, 56-an Szlovákiából. A második, regionális fordulót az ország 30 városában rendeztük, amelyen 672 tanuló vett részt. A harmadik fordulót, az országos döntőt Budapesten rendeztük két helyszínen, 229 tanuló részvételével.

A harmadik fordulóban több programozási feladatot kellett megoldani a versenyzőknek. Ízelítőül bemutatjuk a három kategória egy-egy feladatát.

I. kategória



Egy kiszámolós játékban N gyerek körbe áll az ábrának megfelelően. A kiszámolás az elsőnél kezdődik, majd minden K-adikat kell kihagyni úgy, hogy végül csak egyetlen gyerek maradjon. Először tehát a K. marad ki, majd a $2 \cdot K$., ... Ha az utolsóhoz értünk, a kör tovább folytatódik.

Példa:

$N = 13$, $K = 6$

A kimaradók sorban: 6, 12, 5, 13, 8, 3, 1, 11, 2, 7, 4, 10.

Végül megmarad: 9.

Készíts programot, amely beolvassa a gyerekek számát ($1 < N \leqslant 100$) és azt, hogy minden hányadikat kell kihagyni ($K \geqslant 1$), majd kiírja képernyőre a kiszámolós játékban kiesőket, majd pedig a végén megmaradt gyerek sorszámát!

II. kategória

Byteland ország követsége fogadást rendezett. A fogadásra N számú ország nagykövetét hívták meg. A vendégek különböző időpontokban érkeztek, és minden vendég azonos ideig volt jelen a fogadáson. A házigazda feljegyezte, hogy ki kivel találkozott a fogadás során. Az előbb érkezett A vendég találkozott a később érkezett B vendéggel, ha A később távozott, mint B érkezett. Azt is tudjuk, hogy az első vendég érkezésétől az utolsó távozásáig minden időpontban jelen volt legalább egy vendég. A feladat annak kiderítése, hogy a vendégek milyen sorrendben érkezhettek a fogadásra. Írj programot (FOGAD.PAS vagy FOGAD.C), amely kiszámítja a vendégek egy lehetséges érkezési sorrendjét (nem az érkezési időpontokat). A FOGAD.BE állomány első sora a vendégek ($2 < N \leqslant 200$) számát tartalmazza. A második sorban a fogadás alatt találkozott vendégpárok száma áll ($1 \leqslant M \leqslant 10\,000$). A következő M sor mindegyike egy X Y számpárt ($1 \leqslant X$, $Y \leqslant N$) tartalmaz egy szóközzel elválasztva, ami azt jelenti, hogy az X és az Y vendég találkozott a fogadás során. A FOGAD.KI állomány első és egyetlen sorába N számot kell írni egy-egy szóközzel elválasztva, ami a vendégek egy lehetséges érkezési sorrendje.

III. kategória

Az iskola színháztermében N számú ülőhely van. A következő előadásra M tanuló kérhet jegyet, és mindegyik meghívott tanuló két hely sorszámát megadhatja mint az általa előnyben részesítettet. Írj programot (ULTET.PAS vagy ULTET.C), amely kiszámítja, hogy legjobb esetben hány tanuló kaphat olyan jegyet, amely az igénylésének megfelel. A program azt is megadja, hogy mely tanulók kapják az igénylésüknek megfelelő helyeket. Kiszámítandó továbbá, hogy lehet-e az igényeket úgy kielégíteni, hogy a kiosztott helyek összefüggő tartományt alkossanak. Az ULTET.BE állomány első sorában az ülőhelyek száma ($1 \leqslant N \leqslant 200$), második sorában a tanulók száma ($1 \leqslant M \leqslant 250$) van. A következő M sor mindegyike két különböző ülőhely sorszámot (A B) tartalmaz egy szóközzel elválasztva ($1 \leqslant A$, $B \leqslant N$). Az állomány $(i+2)$-edik sora az i-edik tanuló kívánságát tartalmazza. Az ULTET.KI állomány első sorába azon tanulók T számát kell írni, ahányan a legjobb esetben megkaphatják a két, kívánságuknak megfelelő ülőhely valamelyikét. A második sorba egy legjobb kiosztás szerinti ültetést kell írni, tehát T számpárt, amelynek első tagja egy tanuló sorszáma, második tagja pedig azt az általa kívánt ülőhelysorszámot tartalmazza, amit a tanuló kap a legjobb kiosztás szerint. A második sorban a számokat egy-egy szóköz válassza el. A harmadik sorba az IGEN szót kell írni, ha van olyan legjobb kiosztás, amely szerint nincs üresen maradt szék a foglalt helyek között, egyébként pedig a NEM szót.

A verseny végeredménye a következő:

I. kategória

1–2. **Ritzinger Péter**, Győr, Apor Vilmos Iskolaközpont, 7. o.t.;
Dézsi Richárd, Kunszentmiklós, Baksay Sándor Református Gimnázium 8. o.t.;

3–5. **Simon Balázs**, Győr, Révai Miklós Gimnázium, 8. o.t.;
Kovács Márton, Miskolc, Fényi Gyula Jezsuita Gimnázium, 8. o.t.;
Nagy Ákos, Debrecen, Petőfi Sándor Általános Iskola, 7. o.t.;

6–7. **Sztupák Szilárd**, Miskolc, Hermann Ottó Gimnázium, 7. o.t.;
Bárkai János, Budapest, Gárdonyi Géza Általános Iskola, 8. o.t.;

8–9. **Préda Máté**, Budapest, Óbudai Gimnázium, 8. o.t.;
Siklós Jácint, Kaposvár, Kinizsi Lakótelepi Általános Iskola, 8. o.t.;

10–13. **Szatmári Zsolt**, Jászberény, Lehel Vezér Gimnázium, 8. o.t.;
Rátky Gábor, Budapest, Eötvös József Gimnázium, 8. o.t.;
Bujtás Balázs, Lébény, Lébényi Általános Iskola, 8. o.t.;
Bálint Márton, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium, 8. o.t.

II. kategória

1. **Erdélyi Róbert,** Kiskunhalas, Bibó István Gimnázium, 10. o.t.;

2. **Rokob András,** Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, 10. o.t.;

3. **Novák Ádám,** Eger, Neumann János Szki., 10. o.t.;

4. **Pallos Péter,** Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium, 9. o.t.;

5. **Csirmaz Előd,** Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium, 10. o.t.;

6. **Pollák Gergely,** Szeged, Ságvári Endre Gimnázium, 10. o.t.;

7–8. **Turi Péter,** Győr, Révai Miklós Gimnázium, 9. o.t.;
Novák Zoltán, Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimnázium, 10. o.t.;

9. **Gyebnár Gábor,** Szeged, Ságvári Endre Gimnázium, 10. o.t.;

10. **Pszota Zsolt,** Vác, Boronkai György Szki., 9. o.t.;

III. kategória

1. **Rácz Balázs,** Budapest, Veres Péter Gimnázium, 12. o.t.;

2–4. **Ágó Péter,** Budapest, Petrik Lajos Szki., 12. o.t.;
Gunda Lénárd, Debrecen, KLTE Gyakorló Gimnázium, 11. o.t.;
Varga Kornél, Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, 11. o.t.;

5. **Darabos Dániel,** Tatabánya, Bárdos László Gimnázium, 12. o.t.;

6. **Dezső Balázs,** Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimnázium, 11. o.t.;

7. **Fazekas Ferenc,** Debrecen, Mechwart András Gépipari Szki., 12. o.t.;

8. **Förhécz András,** Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimnázium, 12. o.t.;

9. **Sáfár Szilveszter,** Szeged, Ságvári Endre Gimnázium, 11. o.t.;

10. **Merksz Andor,** Pannonhalma, Bencés Gimnázium, 12. o.t.;

11–12. *Hesz Gábor,* Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium, 12. o.t.; *Balog Krisztián,* Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, 12. o.t.; **13.** *Csillag Kristóf,* Püspökladány, Karacs Ferenc Gimnázium, 11. o.t.; **14–15.** *Fazekas Dániel,* Győr, Révai Miklós Gimnázium, 12. o.t.; *Kovács Zoltán,* Budapest, Eötvös József Gimnázium, 11. o.t.; **16.** *Felföldi Zsolt,* Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium, 12. o.t.; **17.** *Pócsi György,* Debrecen, KLTE Gyakorló Gimnázium, 11. o.t.; **18.** *Hangai Réka,* Eger, Neumann János Szki., 12. o.t.; **19–21.** *Szakali János,* Eger, Neumann János Szki., 12. o.t.; *Subert Viktor,* Eger, Neumann János Szki., 12. o.t.; *Varga Tamás,* Budapest, Berzsenyi Dániel Gimnázium, 12. o.t.

A III. kategória 1–10. helyezettje jogosult az érettségi, illetve felvételi kedvezmény igénybe vételére (egyes intézményekben az 1–20. helyezett).

Zsakó László

Az Informatikai Diákolimpiák válogatóversenye

A Nemes Tihamér OKSzTV legjobb helyezést elért tanulói indulhatnak minden évben a diákolimpiák (a Közép-Európai Informatikai Diákolimpia – CEOI és a Nemzetközi Informatikai Diákolimpia – IOI) válogatóversenyén. Az idei válogatóversenyt május 7–8-án tartottuk az ELTE TTK Informatikai Tanszékcsoport számítógéplaborjaiban.

A válogatóversenyen a versenyzők a diákolimpiai szabályoknak megfelelően a Borland Pascal 7.0 vagy a Borland C^{++} 3.0 programozási nyelveket használhatják.

A válogatóverseny 4 fordulóból állt. Mindegyik fordulóban 3-3 programozási feladatot kellett megoldani 2 óra alatt. A programokat a diákolimpiák és a Nemes Tihamér OKSzTV szabályainak megfelelően automatikusan értékeltük, a tesztelési eredmények alapján pontoztuk.

A második forduló után a versenybizottság az indulók kb. 50%-ára, a harmadik forduló után pedig 30%-ára csökkentette a létszámot.

Ízelítőül bemutatunk két feladatot a válogatóverseny feladatai közül:

Bányászrobot. Egy robotot helyezünk egy labirintusba, megjelölve a kezdő- és a célpozícióját. A robotot el kell vezetni a célig, feltéve, hogy minden lépés 1 időegységbe kerül. A robot a labirintus járatain közlekedhet vízszintes vagy függőleges irányban a 4 szomszéd hely valamelyikére lépve, valamint képes a labirintus falait is kibontani. Egy egységnyi fal kibontása a robotnak F időegységbe kerül. Készíts programot (BANYASZ.PAS vagy BANYASZ.C), amely megadja, hogy minimum mennyi idő múlva érhet a robot a kezdőpozícióból a célpozícióba! A BANYASZ.BE állomány első sorában a négyzetrács magassága és szélessége ($1 \leqslant N$, $M \leqslant 100$), valamint a fal kibontásához szükséges idő ($1 \leqslant F \leqslant 100$) van, egy-egy szóközzel elválasztva. A következő N sor mindegyike pontosan M karaktert tartalmaz, az üres helyeken szóközt, a foglalt helyeken $*$-ot, a robot kezdőpozícióján K betűt, célpozícióján pedig C betűt. A BANYASZ.KI állományba egyetlen sort kell írni, azt a minimális időtartamot, ami alatt a robot a kezdőhelyről a célpozícióba érhet.

Képtár. A piripócsi kastély termeiben egy képkiállítást rendeztek be. N terem falain helyeztek el képeket. Egy bejárási útvonalat kell tervezni, amely az 1. teremből indul, és az összes termen végighalad úgy, hogy a látogatók az összes képet pontosan egyszer láthassák, majd az 1. teremben ér véget. Ha egy teremből egy szomszéd terembe átmegyünk, akkor csak a jobb oldalon, a bejárat és a kijárat közötti falon levő képeket látja a látogató. Készíts programot (KEPTAR.PAS vagy KEPTAR.C), amely az 1. teremből kiindulva megadja a bejárási útvonalat! A KEPTAR.BE állomány első sorában a termek száma ($1 \leqslant N \leqslant 1000$) van. A következő N sor az egyes termekkel szomszédos termek sorszámát tartalmazza (legalább 1, legfeljebb 20), az óramutató járásával ellentétes sorrendben. Minden sorban annyi szám van egy-egy szóközzel elválasztva, ahány teremmel szomszédos az illető terem. A KEPTAR.KI állományba egyetlen sort kell írni, a bejárás sorrendjében a bejárás során érintett termek sorszámát.

A verseny eredményei

A II–III. kategória legjobb tíz 10–11. osztályos helyezettje vett részt a CEOI válogatóversenyén, amelynek eredményeképpen kiválasztottuk az idei Közép-Európai Informatikai Diákolimpián, Brnoban (Csehország) résztvevő magyar csapat tagjait:

Sáfár Szilveszter	Szeged	Ságvári Endre Gimnázium
Rokob András	Miskolc	Földes Ferenc Gimnázium
Novák Ádám	Eger	Neumann János Szki.
Csillag Kristóf	Püspökladány	Karacs Ferenc Gimnázium

A Nemes Tihamér OKSzTV III. kategóriájának 1–21. helyezettje vett részt a IOI válogatóversenyén, amelynek eredményeképpen az idei Nemzetközi Informatikai Diákolimpián, Antalyaban (Törökország) az alábbi tanulók indulnak:

Rácz Balázs	Budapest	Veres Péter Gimnázium
Sáfár Szilveszter	Szeged	Ságvári Endre Gimnázium
Felföldi Zsolt	Budapest	Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium
Förhécz András	Székesfehérvár	Teleki Blanka Gimnázium

Zsakó László

Az 1999. évi Hajnal Imre Matematika Tesztverseny

1999. március 20-án rendezték meg a Bolyai János Matematikai Társulat Békés megyei versenyét Gyulán, az Erkel Ferenc Gimnáziumban. 108 tanuló töltötte ki a 30 kérdésből álló tesztet, amelyre 120 perc állt rendelkezésükre. A feladatsort *Kosztolányi József* (JATE, Szeged) állította össze, a verseny szervezője *Marczis György* szaktanácsadó volt. A meghívott előadók között szerepelt *Toró Tibor* akadémikus Temesvárról, *Fábosné Zách Enikő, Somfai Zsuzsa* és *Emese György* budapesti tanárok és *dr. Németh József*, a JATE docense.

A házigazda, *dr. Kereskényi Miklós,* az Erkel Gimnázium igazgatója jövő évre is meghívta a rendezvény résztvevőit.

Az eredmények:

1. *Dénes Attila,* Békéscsaba, Rózsa Ferenc Gimnázium, tanára: Szabó Zsófia;

2. *Barák Tibor,* Békéscsaba, Széchenyi István Közgazd. Szki., tanára: Schédl Ilona;
Baur Edina, Békéscsaba, Rózsa Ferenc Gimnázium, tanára: Bajnok Zsolt;

3. *Kádas Attila,* Békéscsaba, Rózsa Ferenc Gimnázium, tanára: Szabó Zsófia;

4. *Benkő Zoltán,* Orosháza, Táncsics Mihály Gimnázium, tanára: Hegedűs Zoltán;

5. *Baur Eszter,* Békéscsaba, Rózsa Ferenc Gimnázium, tanára: Szabó Zsófia.

Matematika Határok Nélkül | Mathématiques Sans Frontieres

Versenyfelhívás

Az 1999–2000-es tanévben is meghirdetjük a „Mathématiques Sans Frontieres – Matematika Határok Nélkül” nemzetközi vetélkedő magyarországi fordulóját budapesti, Békés megyei, Hajdú-Bihar megyei és Borsod-Abaúj-Zemplén megyei

középiskolák első osztályai (9. évfolyam) számára.

A verseny szülőhazája a franciaországi Elzász tartomány. A fokozatosan nemzetközivé terebélyesedő erőpróbán hagyományosan már hazánk is részt vesz.

A „Matematika Határok Nélkül” osztályok közötti erőpróba, tehát csak **teljes osztályok** jelentkezését várjuk, ezen belül is csak a nem speciális matematika tagozatos osztályokét. (Versenyen kívül az utóbbiak is részt vehetnek a játékban.) A feladatokat az osztályok csoportmunkában oldhatják meg, tevékenységüket önállóan szervezve. A feladatok jellege, szövegezése lehetővé teszi, hogy a matematikában kevésbé eredményes tanulók is hatékonyan hozzájáruljanak osztályuk teljesítményéhez. A feladatok közül az egyik idegen nyelven – angol, német, francia, olasz, spanyol – lesz megfogalmazva, s a megoldást is a felsoroltak közül választott nyelven kell megadni. Természetesen a többi feladat szövege magyar nyelvű, és a megoldást is magyar nyelven várjuk.

A verseny felügyeletét a versenyző osztályok tanárai látják el egy konkurens osztálynál. Ezért csak olyan jelentkezést fogadunk el, ahol a tanár – vagy az általa felkért kollégája – vállalja az egyszeri ügyeletet.

A verseny időpontja: 2000. március 23. (csütörtök) 15 órától 16 óra 30 percig.

A versenyt megelőzi egy próba-forduló. Ennek eredménye nem számít a végeredménybe, kizárólag az osztály felkészülését szolgálja, megszervezése az osztály szaktanárának feladata. (A próba-forduló feladatait néhány példányban a jelentkezők rendelkezésére bocsátjuk.)

A győztes osztályok jutalma – az előző évekhez hasonlóan – 1 napos kirándulás a gänsendorfi Safari-parkba. A helyezett osztályok díja a jelentkező osztályok számától és a szponzori támogatások nagyságától függ.

A jelentkezési lapon a következő adatokat kérjük feltüntetni:

1. Iskola neve, típusa, címe, telefonszáma, e-mail címe.
2. Az osztály jele, létszáma, továbbá, hogy 4, 6 vagy 8 osztályos képzésben vesz-e részt az osztály.
3. A matematika heti óraszáma, a matematikatanár(ok) neve.
4. A felügyeletet vállaló tanár neve (benevezett osztályonként egy fő).

A jelentkezési határidő: 1999. november 22.

A jelentkezéseket az alábbi címre kérjük:

Budapesten: „Matematika Határok Nélkül”, Berzsenyi Dániel Gimnázium,
1133 Budapest, Kárpát u. 49–53. msf@s2.berzsenyi.isk.tvnet.hu

Békés megyében: Szabó Zsófia, Rózsa Ferenc Gimnázium, Békéscsaba, Andrássy út 56.

Borsod-Abaúj-Zemplén megyében: Kiss István, Ságvári Endre Gimnázium,
3700 Kazincbarcika, Jószerencsét út 2.

Hajdú-Bihar megyében: Deli Lajos, Hőgyes Endre Gimn. és Szakközépiskola,
4200 Hajdúszoboszló, Rákóczi út 44.

További információ a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium honlapján található:

HTTP://BERZSENYI.TVNET/HU

Ismét lehet jelentkezni középiskolás kutatónak!

1995-től jelentkezhet minden olyan középiskolás az ország legjobb kutatóhelyeire, aki már valamilyen módon bizonyította, hogy jobb, mint társai, vagy akire környezete felfigyelt. A tehetséges diákok és a kutatásban segítő tanáraik, mentoraik egymásratalálását egy kiadvány segíti, amelyik a mentorok listáját tartalmazza. Az 1999 elején napvilágot látott harmadik, bővített kiadás több, mint ötszáz tudományos műhelyt sorol fel. Ezek a kutatóhelyek 30 magyar városban találhatók Soprontól Szarvasig. A kutatható témákat mintegy 2300 címszó fedi le az abortusztól a zsírsavanyagcseréig. A mentornak jelentkezők között a Magyar Tudományos Akadémia 68 tagja, alkotmánybíró, miniszter és szakterületének számos kiemelkedő professzora akad. A mozgalom védnöki tisztségét *Göncz Árpád* köztársasági elnök és *Pokorni Zoltán* oktatási miniszter vállalták el.

1997 márciusában rendeztük meg a kutató diákok első országos konferenciáját Kecskeméten, amelyet 1998 és 1999 nyarán egy-egy káptalanfüredi táborozás követett. A konferenciákra 40–90 diák jött el, és közülük 20–30-an számoltak be eredményeikről. A diákelőadások mellett akadémiánk tagjai, *Balogh János,* és *Vámos Tibor* professzorok és más magyar tudósok beszéltek elhivatottságukról, a kutatás szépségeiről. Egyik kutató diákunk már tavaly is kijutott egy német tehetséggondozó táborba, idén pedig a német út mellett ketten az izraeli Weizmann Intézet nyári kutatótáborában vettek részt. Káptalanfüredi táborunkat 2000 nyarán is megrendezzük. Ide minden diákot szeretettel várunk, aki addig belefog valamilyen kutatásba. Terveink szerint a diákok jövőre külföldi táborokba juthatnak el, valamint részt vehetnek az egyetemisták számára megrendezett országos diákköri konferencián. Minderről és sok más izgalmas lehetőségről részletes és naprakész információk találhatók a mozgalom honlapján, a

`http://kutdiak.kee.hu/`

címen. A honlapon lehet jelentkezni a kutató diákok közé is. Az érdeklődőket fogadó mentorok listája a mozgalom szervezőjétől, *dr. Csermely Pétertől* is kérhető (1444 Bp. pf. 260; e-mail ⟨`csermely@puskin.sote.hu`⟩). Akármilyen módon is jelentkezik az érdeklődő diák, vagy a diákok figyelmét e lehetőségre felhívni kívánó tanár, a név és a postacím mellett kérjük annak rövid indoklását is, hogy miért érdeklődik a kutatások iránt.

Könyvajánló

Simon Singh: A nagy Fermat-sejtés

Park Kiadó, Budapest, 1999. Fordította Pappné Kovács Katalin

„A világot 350 éven keresztül lázban tartó matematikai probléma szenzációs megoldásának lebilincselő története" – hangzik a könyv alcíme. Hazai – európai – ízlésünknek nem nagyon felel meg az ilyen harsány stílus, szerencsére a könyvre sem jellemző a továbbiakban. Bárhol kinyitva szépen fogalmazott mondatokat találunk benne, amelyek mentesek a túlzó jelzőktől. Nincs is rájuk szükség: a történet maga lenyűgöző, az izgalom átsüt a visszafogott mondatokon. Csak gratulálni lehet a fordítónak, hogy ezt sikerült szép magyar nyelvünkön is visszaadnia.

Nem a Fermat-sejtés bizonyítását találja a könyvben az olvasó, hiszen kellő matematikai felkészültség nélkül ez úgysem lenne érthető. De minden matematikát szerető középiskolás számára különleges élvezet végigkövetni egy-egy egyszerű bizonyítást, leszakítani egy-egy szál virágot az út mentén, amely a bizonyításhoz vezet. A szerző jó arányérzékkel helyezi el ezeket a kisebb-nagyobb tételeket, részben ismert állításokat, bizonyításokat: az érdeklődő olvasót tanítja, de sohasem untatja velük. A könyv középpontjában nem is csak a matematika áll, hanem vele együtt azok az emberek, akik a matematikát csinálják. Akik csupán matematikai tehetségüket, tudásukat tekintve különböznek a többi embertől, egyébként pedig ugyanolyan esendők, mint mi, valamennyien.

Ezért ajánlható a könyv nemcsak matematikusoknak, hanem másoknak is, akik szeretik az izgalmas történeteket. Persze, van egy veszély, ami minden igényes matematikai előadás sajátja: az előadó olyan alacsony szinten kezdi, amennyire csak lehetséges, s azután meredeken ível felfelé, olyan magasra, ahová már alig bírja követni őt a hallgatóság. Ez a könyv is kellően alacsony szintről indul, ezért aki akarja, át is ugorhatja a Pitagorasz-tételt vagy a königsbergi hidakat (bár ez utóbbinál egy apró fordítási hibára bukkanhatunk). De mindenki megtalálja magának azt a pontot, ahol élvezi a matematikát, ettől kezdve pedig fogva tartja maga a bizonyítás izgalmas története. Jó szórakozást!

R. Gy.

Bruce Schechter: Agyam nyitva áll!

Erdős Pál matematikai utazásai

Vince Kiadó–Park Kiadó, Budapest, 1999.

Erdős Pál, a világutazó magyar matematikus 1996 szeptemberében egy varsói szállodai szobában 83 évesen – mégis váratlanul – hunyt el. Élete nagyon különbözött az átlagemberétől, szinte csak a matematikának élt, mégis rengeteg ismerőse volt, közöttük néhány nagyon jó barátja. Az ő elbeszélésükből, írásaikból és a régóta közszájon forgó anekdotákból írta meg könyvét a szerző – aki életében soha nem találkozott Erdőssel, és eddig a matematikához sem volt sok köze. A közérthető matematikával fűszerezett életrajzi mű mégis hiteles, és lebilincselően érdekes. Érdekes minden olvasónak, annak is, aki még sohasem hallott Pali bácsiról és annak is, aki többször találkozott vele vagy a történetekben felbukkanó barátaival.

A könyv végére azonban már az olvasó is megismeri azt a nem mindennapi embert, aki prímszámaival és halmazaival felülemelkedett országhatárokon, politikán, valláson, pénzen és szerelmen, és olyan szabad volt, mint amilyenek mi csak álmainkban lehetünk.

O.V.

Nemrég jelent meg

Kiss Elemér: Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából, Typotex Kiadó, Budapest. (Megjelent angol és magyar nyelven is!)

Péter Rózsa: Játék a végtelennel, Typotex Kiadó, Budapest.

Új kiadása annak a könyvnek, amelyet szerzője elsősorban nem-matematikus érdeklődésű intellektuális embereknek szánt, amelynek alapja Benedek Marcellel folytatott levelezése volt.

Raymond Smullyan: Seherezádé rejtélye, Typotex Kiadó, Budapest. Bámulatos klasszikus és modern fejtörők.

Szakköri feladatok I.

Szőkefalvi Nagy Béla professzor úr emlékére

1. Oldja meg a valós számpárok halmazán ($\mathbf{R}^2$) az

$$x^3 - y^3 = 21(x-y), \qquad x^3 + y^3 = 13(x+y)$$

egyenletrendszert.

2. a) Milyen α, β számokra igaz, hogy

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha + \sin\beta\,?$$

b) Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \sin x + \sin\frac{\pi}{6}$$

egyenletet.

3. Igazolja, hogy egy négyszög pontosan akkor (akkor és csak akkor) paralelogramma, ha az átlók négyzetének összege megegyezik az oldalak négyzetének összegével.

4. Határozza meg az $x \mapsto \dfrac{x^2+4}{x+4}$, $x > -4$ függvény legkisebb értékét. Mely x helyen veszi fel a függvény ezt a legkisebb értéket?

Rábai Imre

Megoldásvázlatok, eredmények az I. mérőlap (1999/7. sz.) feladataihoz

1. Ha a kamatláb az első évben $p\%$ volt, akkor

$$300\,000\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p-3}{100}\right) = 386\,400,$$

$$30(100+p)(100+p-3) = 30\cdot 12\,880,$$

$$p^2 - 197p - 3180 = 0,$$

$p_1 = 15$ ($p_2 = -212$). A kamatláb az első évben 15%-os volt.

2. Vegyük fel egy egyenesen az A és P pontokat ($AP = 9$ egység) és az egyenestől 4,5 egység távolságra haladó (egyik) párhuzamos egyenest, majd ezen az egyenesen a megfelelő D pontot ($AD \perp AP$).

A B pont a P ponttól 6 egység távolságra van az AP egyenesen. Két ilyen B pont van, B_1 és B_2, $AB_2 = 9+6 = 15$ egység, $AB_2 = 9-6 = 3$ egység. Így két C és két Q pont van, C_1 és C_2, valamint Q_1 és Q_2.

Az APQ_1 és a DC_1P, illetve az APQ_2 és a DC_2P háromszögek hasonlók. Ha a Q_1, illetve a Q_2 pont távolsága az AB_1, illetve AB_2 egyenestől d_1, illetve d_2, akkor

$$d_1 = 9 \cdot \frac{4{,}5}{15} = 2{,}7 \text{ egység}, \quad \text{illetve} \quad d_2 = 9 \cdot \frac{4{,}5}{3} = 13{,}5 \text{ egység}.$$

3. A feltételekből adódik, hogy α és β hegyesszögek. A szinusztétel alkalmazásával

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta},$$

ahonnan $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$, azaz $2\alpha = 2\beta + 2k\pi$ vagy $2\alpha + 2\beta = \pi + 2k\pi$, tehát $\alpha = \beta$ vagy $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Az első esetben $b = a$, a másodikban $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

4. A lefedetlen terület akkor a legnagyobb, ha a lefedett terület a legkisebb. Az AP és BP szakaszok hosszának az összege $2a$; az egyik legyen $a - x$, a másik $a + x$, ahol $0 \leqslant x < a$.

A lefedett terület: $T(x) = (a - x)^2 + (a + x)^2 = 2x^2 + 2a^2$, ahol $0 \leqslant x < a$.

T akkor a legkisebb, ha $x = 0$, P az AB szakasz felezőpontja. A lefedetlen terület legnagyobb értéke innen $4a^2 - 2a^2 = 2a^2$ területegység.

5. Mivel $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ és $\sin^2 x = |\sin x|^2$, azért $4 \cdot |\sin x|^2 + 8|\sin x| - 5 \geqslant 0$, azaz

$$4\left(|\sin x| - \frac{1}{2}\right)\left(|\sin x| + \frac{5}{2}\right) \geqslant 0.$$

$|\sin x| + \frac{5}{2} > 0$ minden valós x-re, tehát a feltétel $|\sin x| \geqslant \frac{1}{2}$, azaz $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$ vagy $\sin x \leqslant -\frac{1}{2}$. Az egyenlőtlenség a

$$\frac{\pi}{6} + k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + k\pi, \qquad k \in \mathbf{Z}$$

valós számokra teljesül.

6. Az adott egyenessel párhuzamos egyenesek egyenlete $3x + 4y + k = 0$ ($k \in \mathbf{R}$). Ezek közül keressük azokat, amelyekre

$$2 = \frac{|3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|k + 5|}{\sqrt{25}}.$$

Innen $10 = |k + 5|$, azaz $k + 5 = 10$ vagy $k + 5 = -10$, $k = 5$ vagy $k = -15$. A feltételeknek a $3x + 4y + 5 = 0$ és a $3x + 4y - 15 = 0$ egyenletű egyenesek felelnek meg.

(Azokat az egyeneseket keressük, amelyek érintik az $(x + 1)^2 - (y - 2)^2 = 4$ egyenletű kört is. Így a k értékét diszkrimináns feltétellel is megkaphatjuk. A feladat a szerkesztés menetének számítással való követése révén is megoldható.)

7. Ismeretes, hogy ha $A > 0$ és $B > 0$, akkor $A + B \geqslant 2\sqrt{AB}$, és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $A = B$.

Ennek és az $x \mapsto \log_2 x$ függvény szigorú monoton növekedésének alkalmazásával

$$\log_2\left(\cos^2(xy) + \frac{1}{4\cos^2(xy)}\right) \geqslant \log_2\left(2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}}\right) = \log_2 1 = 0.$$

Mivel $-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0$, azért azok az $(x;y)$ számpárok a megoldások, amelyekre

$$\cos^2(xy)=\frac{1}{4\cos^2(xy)} \qquad \text{és} \qquad y=\frac{1}{2}.$$

Innen $\cos^4\frac{x}{2}=\frac{1}{4}$, $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{1+\cos x}{2}=\frac{1}{2}$, $\cos x=0$.

A megoldások: $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $y_k=\frac{1}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

8. Mivel $3^x>0$ minden valós x-re, azért – azonos átalakításokkal és rendezéssel –

$$(a-9)\cdot(3^x)^2-2a\cdot 3^x+a=0.$$

Ha $a=9$, akkor $3^x=\frac{1}{2}$, $x_0=\log_3\frac{1}{2}$.

Ha $a\neq 9$, akkor a (3^x)-re másodfokú egyenlet diszkriminánsa:

$$D=4a^2-4a(a-9)=36a.$$

Így, ha $a<0$, akkor nincs megoldás, ha $a\geqslant 0$, akkor *lehet* megoldás.

Ha $a\geqslant 0$, akkor $a=\left(\sqrt{a}\right)^2$, így $3^x=\frac{2a\pm 6\sqrt{a}}{2(a-9)}$. Azonos átalakításokkal

$$\frac{2a\pm 6\sqrt{a}}{2(a-9)}=\frac{2\sqrt{a}(\sqrt{a}\pm 3)}{2(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)},$$

$$\text{tehát} \qquad 3^x=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3} \qquad \text{vagy} \qquad 3^x=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3}.$$

Mivel $3^x>0$, azért $a=0$ esetén nincs megoldás;

az $x_1=\log_3\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3}$ akkor megoldás, ha $a>0$ és $a\neq 9$,

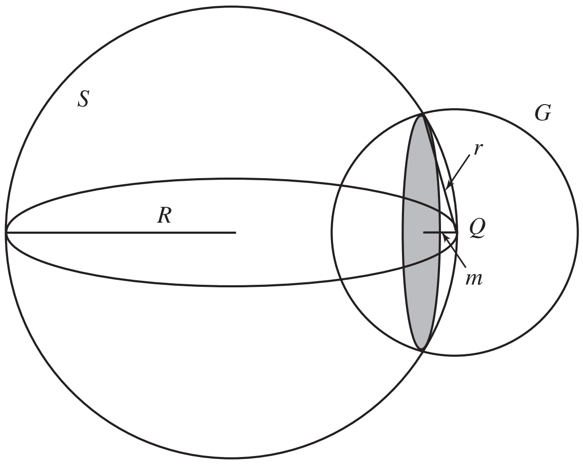
az $x_2=\log_3\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3}$ akkor megoldás, ha $a>9$.

Így, ha $a\leqslant 0$, akkor nincs megoldás; ha $0<a<9$ vagy $a=9$, akkor egy megoldás van, x_1, illetve x_0; ha $a>9$, akkor két megoldás van, x_1 és x_2.

Rábai Imre

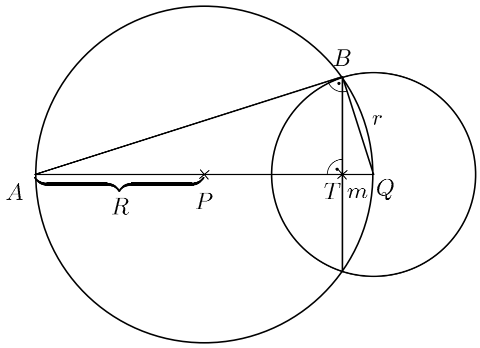
Matematika feladatok megoldásai

F. 3255. *Egy egységsugarú gömbfelszín négy pontja köré egymást páronként nem metsző gömböket rajzoltunk. Mutassuk meg, hogy ha e gömbök sugarainak összege* 2*, akkor az egységgömb felszínének legalább a negyedét lefedik.*



1. ábra

Megoldás. Először kiszámoljuk, hogy egy R sugarú gömb S felszínének mekkora részét fedi le egy olyan r sugarú ($0 \leqslant r \leqslant 2R$) G gömb, amelynek középpontja S-en van. A két gömb metszésvonala egy k kör. Ha k síkjának és G középpontjának a távolságát m-mel jelöljük, akkor a G által S-ből lefedett gömbsüveg felszíne az ismert képlet alapján $2R \cdot \pi \cdot m$ (*1. ábra*). Tudjuk, hogy S, G és k középpontjai – jelöljük ezeket rendre P, Q, T-vel – egy egyenesre illeszkednek. Tekintsünk egy olyan síkmetszetet, amely tartalmazza ezt az egyenest (*2. ábra*). Az ábrán látható ABQ háromszög Thalész tétele szerint derékszögű, így alkalmazhatjuk a befogótételt: $BQ^2 = AQ \cdot TQ$, azaz $r^2 = 2R \cdot m$. Tehát a G által S felszínéből lefedett gömbsüveg felszíne $r^2 \cdot \pi$.



2. ábra

Jelöljük ezután a feladatban szereplő négy gömb sugarát r_1, r_2, r_3, r_4-gyel. Mivel a négy gömb páronként diszjunkt, az általuk lefedett felszín az előzőek alapján $(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2) \cdot \pi$. Az egység sugarú gömb felszíne 4π, így azt kell igazolnunk, hogy

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 \geqslant 1.$$

Tudjuk, hogy $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 2$; a számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 \geqslant 4 \cdot \left(\frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}{4}\right)^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

Ezzel a bizonyítandó állítást beláttuk.

90 dolgozat érkezett. 6 pontos 4 (Gerencsér Balázs, Lábó Eszter, Lábó Melinda, Székelyhidi Gábor) 5 pontos 62, 4 pontos 6, 3 pontos 2, 2 pontos 2, 1 pontos 7, 0 pontos 4, Nem versenyszerű 3.

F. 3264. *Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív x-re*

$$\left(1+\frac{[x]}{x}\right)^x \geqslant 2^{[x]}.$$

I. megoldás. A bizonyítás során felhasználjuk a súlyozott számtani és súlyozott mértani közép közötti egyenlőtlenséget, amely az $s_1, s_2, \ldots, s_n$ valós pozitív súlyokra és az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számokra a következő:

$$\frac{s_1a_1+s_2a_2+\ldots+s_na_n}{s_1+s_2+\ldots+s_n} \geqslant \left(a_1^{s_1}a_2^{s_2}\ldots a_n^{s_n}\right)^{\frac{1}{s_1+s_2+\ldots+s_n}},$$

és egyenlőség csak $a_1=a_2=\ldots=a_n$ esetén áll fenn.

Ha x pozitív egész, akkor $x=[x]$, így $\left(1+\frac{[x]}{x}\right)^x=2^{[x]}$, azaz egyenlőség van.

Ha x nem egész, de $x<1$, akkor $[x]=0$, és ezért ekkor is egyenlőség áll fenn.

Ha x nem egész és $x>1$, úgy $x-[x]>0$ és $[x]>0$, tehát alkalmazhatjuk a súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az $s_1=x-[x]$ és $s_2=[x]$ súlyokra és az $a_1=1$ és $a_2=2$ számokra:

$$\frac{x-[x]+2[x]}{x} > \sqrt[x]{2^{[x]}}, \qquad \text{ahonnan} \qquad \left(1+\frac{[x]}{x}\right)^x > 2^{[x]}.$$

Vagyis az állítást igazoltuk, és egyenlőség $x<1$ vagy egész x esetén van.

Harangi Viktor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.)

II. megoldás. A Bernoulli-egyenlőtlenséget alkalmazzuk: mivel $0\leqslant\frac{[x]}{x}<1$, azért

$$(1+1)^{\frac{[x]}{x}} \leqslant 1+\frac{[x]}{x}.$$

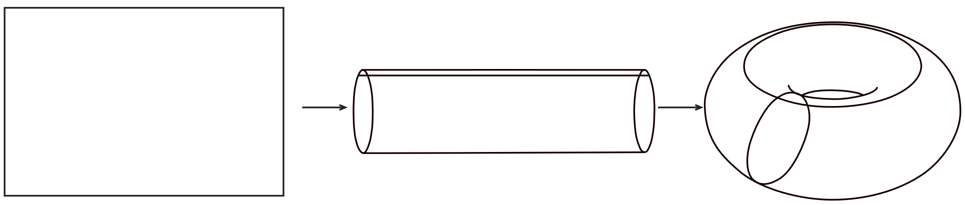
Ezt az egyenlőtlenséget az x-edik hatványra emelve a bizonyítandó állítást kapjuk. Egyenlőség akkor van, ha $\frac{[x]}{x}=0$ vagy 1, vagyis ha $x<1$ vagy x egész.

102 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Papp Dávid, Pataki Péter és Torda Péter. 5 pontos 49, 4 pontos 14, 3 pontos 15, 2 pontos 6, 1 pontos 3, 0 pontos 8 dolgozat. Nem versenyszerű 4.

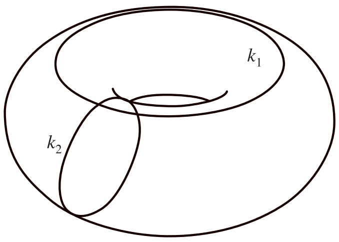
F. 3267. *Ismert, hogy ha egy gömb alakú bolygó felszínén van három ház és három kút, akkor nem tudunk a kutakat és a házakat összekötő, összesen kilenc darab, egymást nem metsző utat építeni.*

Igaz-e hasonló állítás, ha a házak és a kutak egy tórusz alakú bolygón vannak?

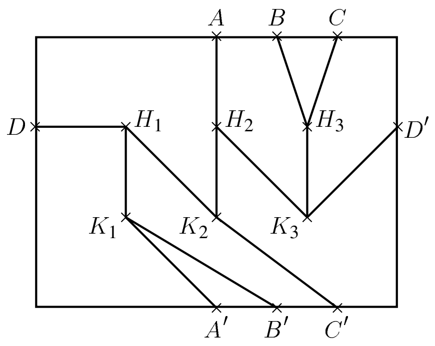
Megoldás. Nem, az állítás nem igaz. Egy tórusz alakú bolygón építhető kilenc darab, a házakat és a kutakat összekötő, egymást nem metsző út. Ennek bizonyítására egy példát adunk. Felhasználjuk a tórusz egy egyszerű előállítását: Egy téglalap két szemben lévő élét összeragasztva egy hengert kapunk. Ha ennek a hengernek a két alaplapját ismét összeragasztjuk, akkor egy tórusz keletkezik (*1. ábra*). (Eljárásunk visszafelé is működik, ha a *2. ábrán* látható tóruszt a berajzolt két körvonal mentén felvágjuk, akkor felszínét egy téglalappá simíthatjuk ki.)



1. ábra



2. ábra



3. ábra

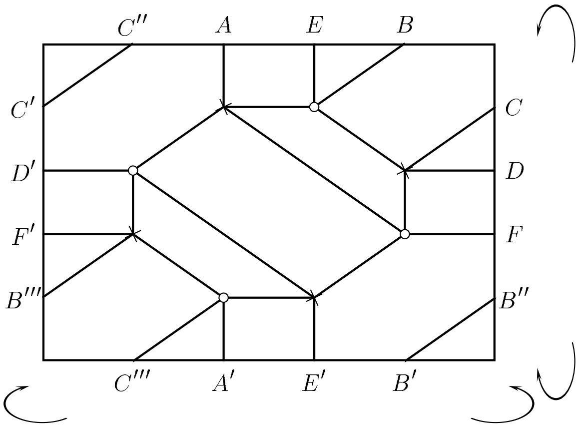
Elegendő tehát egy téglalapra rajzolva megadni a konstrukciót. Ez látható a *3. ábrán.* A téglalap szemközti éleit összeragasztva egy tóruszt kapunk, aminek a felszínén az A, A'; B, B'; C, C' és D, D'; pontok páronként egybeesnek, s a házakat a kutakkal összekötő utak pedig a nem metszik egymást a tóruszon, hiszen a téglalapon sem metszették.

Vitéz Ildikó (Miskolc, Földes F. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

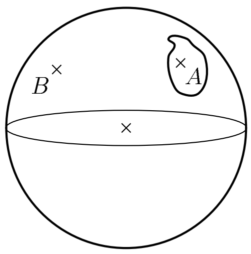
Megjegyzések. 1. Meg lehet mutatni, hogy akárhogyan is helyezkedik el a 3 ház és a 3 kút a tóruszon, mindig építhető 9 darab, őket összekötő, egymást nem metsző út.

2. A tóruszon még 4 ház és 4 kút esetén is építhető 16, egymást nem metsző összekötő út (*4. ábra*), 5 ház és 5 kút viszont már nem köthető össze 25 egymást páronként nem metsző úttal.

3. A tórusz és a gömb eltérő viselkedésének az az oka, hogy a gömbfelszín ún. *egyszeresen összefüggő felület*, ami azt jelenti, hogy ha bármilyen zárt görbét rajzolunk rá, akkor a felületen lesznek olyan pontok – például az *5. ábrán* látható A és B –, amelyeket nem tudunk összekötni úgy, hogy a zárt görbét ne messük. A tórusz viszont nem ilyen, a *2. ábrán* látható *két* kör berajzolása után még mindig össze tudjuk kötni a felület két tetszőleges pontját úgy, hogy az összekötő görbe egyik körvonalat se messe.



4. ábra



5. ábra

82 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Csirmaz Előd, Gáspár Merse Előd, Kunszenti-Kovács Dávid, Naszódi Gergely, Pálvölgyi Dömötör, Szabó 997 Péter, Székelyhidi Gábor, Terpai Tamás és Zsbán Ambrus. 5 pontos 70, 3 pontos 1, 0 pontos 2 dolgozat.

F. 3282. *Milyen határok között változik x^2+2xy, ha $x^2+y^2=1$?*

Megoldás. Az $x^2+y^2=1$ feltétel szerint van olyan α valós szám, amelyre $x=\sin\alpha$ és $y=\cos\alpha$. A vizsgált kifejezés így

$$x^2+2xy=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\sin 2\alpha=\frac{1+(2\sin 2\alpha-\cos 2\alpha)}{2}.$$

A zárójelben álló függvényről megmutatjuk, hogy értékkészlete a zárt $\left[-\sqrt{5},\sqrt{5}\right]$ intervallum.

Mivel $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=1$, azért létezik olyan β, amelyre $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ és $\sin\beta=$ $=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Ezzel az

$$f(\alpha)=\sin(2\alpha-\beta)=\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha$$

függvény értékkészlete a $[-1,1]$ intervallum, ami állításunkkal egyenértékű. Tehát x^2+2xy értékei az $\left[\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$ intervallum pontjait futják futják be.

Papp Dávid (Budapest, Szent István Gimn., 11. o.t.)

82 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Györey Bernadett, Papp Dávid és Terpai Tamás. 5 pontos 51, 4 pontos 5, 3 pontos 5, 2 pontos 1, 1 pontos 5, 0 pontos 12 dolgozat.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (555–559.)

C. 555. Melyik az a legkisebb egész szám, amelyik kétféleképpen is felírható két különböző pozitív négyzetszám összegeként?

C. 556. Egy öt fordulóból álló futóverseny sorozaton 50 induló vett részt. Bandi minden egyes fordulóban a 10. helyen végzett. A verseny végeredményét az egyes fordulóban elért időeredmények összeadásával határozzák meg. Előfordulhatott-e, hogy az összetett versenyben Bandi

a) az első b) az utolsó helyen végzett?

C. 557. Igazoljuk, hogy nem létezik olyan egymást követő, pozitív páratlan számokból álló, legalább két elemű számsorozat, amelynek összege prímszám.

Javasolta: *Vajda Szilárd,* Kolozsvár

C. 558. Hány különböző rácsnégyzet jelölhető ki az $n\times n$-es négyzetrácson úgy, hogy oldalai párhuzamosak legyenek a négyzetrács oldalaival?

Javasolta: *Bakonyi Gábor* Budapest

C. 559. Egy kúpba (csúcsával lefelé tartva) vizet töltünk, így a víz 10 cm magasan áll benne. Nyílását lezárva alaplapjára állítjuk a kúpot, így most 2 cm magasan áll benne a víz. Milyen magas a kúp?

Javasolta: *Koncz Levente,* Budapest

❄

Beküldési határidő: 1999. december 15.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest, Pf. 47. 1255

A B pontversenyben kitűzött feladatok (3312–3321.)

B. 3312. Szilveszter észrevette, hogy ha születési évének számjegyeit összeadja, azt a számot kapja, amely nagyapja születési évszámának utolsó két jegyéből áll. Szilveszter születési évszámának utolsó két jegyét összeolvasva pedig nagyapja jelenlegi életkorát kapjuk. Hány éves Szilveszter?

(*3 pont*) Javasolta: *Nyul Balázs 9. o. t.,* Debrecen

B. 3313. Az $ABCD$ rombuszt a BD átlója két szabályos háromszögre vágja. Az AD szakaszon adott egy P, a CD szakaszon pedig egy Q pont úgy, hogy a $PBQ\sphericalangle = 60^\circ$. Mekkora a PBQ háromszög másik két szöge?

(*3 pont*)

B. 3314. Meg lehet-e számozni egy szabályos oktaéder éleit az 1, 2, ..., 12 számokkal úgy, hogy mindegyik csúcsban ugyanannyi legyen az oda befutó élekre írt számok összege?

(*3 pont*) Javasolta: *Rémenyi Gusztáv,* Budapest

B. 3315. Adjuk meg azt az $f(x)=ax$ alakú függvényt, amely a $g(x)=x^2$ függvényt „jól" közelíti az $x=0{,}1;\ 0{,}2;\ \dots;\ 0{,}5$ helyeken abban az értelemben, hogy az ezeken a helyeken számított $|f(x)-g(x)|$ hibák közül a legnagyobbik a lehető legkisebb.

(*4 pont*) Javasolta: *Bakonyi Gábor,* Budapest

B. 3316. Legyen P az ABC háromszög egy belső pontja. Az AP és a BP egyenesek messék a háromszög szemközti oldalát a D, illetve az E pontban. Mutassuk meg, hogy ha $AP=BP$ és $BE=CE$, akkor $\dfrac{1}{AP}=\dfrac{1}{AD}+\dfrac{1}{AC}$.

(*4 pont*) Javasolta: *Lee, Ho-joo,* Korea

B. 3317. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sqrt{x+1999\sqrt{x+1999\sqrt{x+1999\sqrt{x+1999\sqrt{2000x}}}}}=x.$$

(*4 pont*) Javasolta: *Hans Zoltán,* Nagykanizsa

B. 3318. Az egységnyi sugarú k_1 és k_2 körök a P pontban érintik egymást. A két kör egyik, a P-n át nem menő közös érintője az e egyenes. Legyen $i>2$ esetén k_i az a k_{i-2}-től különböző kör, amely érinti k_1-et, k_{i-1}-et és e-t. Határozzuk meg k_{1999} sugarát.

(*5 pont*)

B. 3319. Ismert, hogy egy adott körbe írható négy csúcsú síkidomok közül a négyzet területe a legnagyobb. Igaz-e, hogy egy adott gömbbe írható nyolc csúcsú testek közül a beírható kocka térfogata a legnagyobb?

(*4 pont*)

B. 3320. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$x^{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Lovrics László,* Budapest

B. 3321. Legyen K egy konvex sokszög. Mutassuk meg, hogy elhelyezhető a síkon 6 darab K-val egybevágó sokszög úgy, hogy ezek mindegyikének van a K-val közös határpontja, de a hét sokszög közül semelyik kettőnek nincs közös belső pontja.

(*5 pont*)

Beküldési határidő: 1999. december 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (221–223.)

A. 221. Legyenek az N négyzet csúcsai a (± 1999; ± 1999) koordinátájú pontok, a H háromszög csúcsai pedig (-1; 0), (0; -1) és (1; 1). A H háromszögnek legfeljebb hány egymásba nem nyúló, eltolt példányát lehet elhelyezni az N négyzetben?

Javasolta: *Pap Gyula,* Debrecen

A. 222. Az a, b, c egész számok legnagyobb közös osztója 1. Az (a, b, c) számhármast más számhármasokra cserélhetjük úgy, hogy minden lépésben az egyik számot növeljük vagy csökkentjük a számhármas egy másik elemének valamilyen többszörösével. Igaz-e, hogy az a, b, c számok megválasztásától függetlenül, legfeljebb 10 lépésben eljuthatunk az $(1, 0, 0)$ számhármashoz?

Javasolta: *Abért Miklós,* Budapest

A. 223. Keressük meg az összes olyan $f : R \to R$ függvényt, amelyre

$$f(x - f(y)) = f\left(x + y^{1999}\right) + f\left(f(y) + y^{1999}\right) + 1$$

teljesül tetszőleges x, y valós számok esetén.

Beküldési határidő: 1999. december 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS

(Volume 49. No. 8. November 1999)

New exercises for practice – competition C (see page 488): **C. 555.** Find the smallest integer which can be expressed as the sum of two distinct positive squares in two different ways. **C. 556.** A foot race is organized in five rounds. There are 50 contestants whose times are recorded in each round. The overall result is then determined by adding up the results achieved in the five rounds. Suppose that Bob finishes 10th each time. Is it possible that he will have (a) the best (b) the worst overall result? **C. 557.** Prove that consecutive odd positive integers never add up to a prime number if there are at least two terms. (Proposed by *Sz. Vajda,* Kolozsvár) **C. 558.** In an $n \times n$ square grid, determine the number of those squares whose vertices are grid points and whose edges are parallel to the lines of the grid. **C. 559.** A cone shaped container, with its apex pointing downwards, is partly filled with water such that the surface of the water is 100 mm above the apex of the container. The container is then closed and turned upside down. Now the height of the water inside is only 20 mm. Determine the altitude of the cone. (Proposed by *L. Koncz,* Budapest)

New problems – competition B (see page 488): **B. 3312.** Adding up the digits of his year of birth, Jack noticed that the result is the very number formed by the last two digits of his grandfather's year of birth. Moreover, the last two digits of Jack's year of birth form his grandfather's current age. How old is Jack? (*3 points*) (Proposed by *B. Nyul,* Debrecen) **B. 3313.** A rhombus $ABCD$ is divided into two equilateral triangles by its diagonal BD. Points P and Q lie on segments AD and CD, respectively, such that $\angle PBQ=60^\circ$. Find the measure of the remaining two angles of triangle PBQ. (*3 points*) **B. 3314.** Is it possible to assign the numbers 1,2,3,...,11,12 to the edges of a regular octahedron such that the sum of the numbers assigned to the edges starting from any vertex of the octahedron is the same? (*3 points*) (Proposed by *G. Reményi,* Budapest) **B. 3315.** Find a function f of the form $f(x)=ax$ which is a 'good' approximation of the function $g(x)=x^2$ at the values $x=0.1$, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 in the following sense: the largest one of the errors $|f(x)-g(x)|$ calculated at these values is as small as possible. (*4 points*) (Proposed by *G. Bakonyi,* Budapest) **B. 3316.** P denotes any point inside a triangle ABC. Lines AP and BP intersect the opposite sides of the triangle at points D and E, respectively. Prove $1/AP=1/AD+1/AC$, provided that $AP=BP$ and $BE=CE$. (*4 points*) (Proposed by *H. Lee,* Korea) **B. 3317.** Solve the equation

$$\sqrt{x+1999\sqrt{x+1999\sqrt{x+1999\sqrt{x+1999\sqrt{2000x}}}}}=x.$$

(*4 points*) (Proposed by *Z. Hans,* Nagykanizsa) **B. 3318.** Circles k_1 and k_2, each of unit radius, touch at a point P. A line tangent to each circle, not passing through P, is denoted by e. Let, for $i>2$, k_i denote the circle, different from k_{i-2}, which is tangent to k_1,k_{i-1} and e. Determine the radius of k_{1999}. (*5 points*) **B. 3319.** It is known that of all polygons determined by four points lying in a given circle, the inscribed squares have the greatest area. Is it also true that among all polyhedra determined by eight points on a given sphere, the cubes have the greatest volume? (*4 points*) **B. 3320.** Solve the equation

$$x^{x^{1/2}}=1/2.$$

(*5 points*) (Proposed by *L. Lovrics,* Budapest) **B. 3321.** There is given a convex polygon K in the plane. Prove that six congruent copies of K can be placed around K such that each shares a common boundary point with K, but the interiors of the seven polygons are mutually disjoint. (*5 points*)

New advanced problems – competition A (see page 490): **A. 221.** Consider a square N whose vertices have coordinates (±1999; ±1999). Let H denote the triangle with vertices (-1; 0), (0; -1) and (1; 1). How many non-overlapping translated copies of H can be packed into N? (Proposed by *Gy. Pap,* Debrecen) **A. 222.** The greatest common divisor of integers a, b, c is 1. The triplet a, b, c can be altered into another triplet such that in each step one of the numbers in the actual triplet is increased or decreased by an integer multiple of another element of the triplet. Is it true that, no matter how the numbers a,b,c are given, the triplet (1,0,0) can be obtained in at most 10 steps? (Proposed by *M. Abért,* Budapest) **A. 223.** Determine all real functions f which satisfy

$$f\left(x-f(y)\right)=f\left(x+y^{1999}\right)+f\left(f(y)+y^{1999}\right)+1$$

for any real numbers x, y.