Rátz László Vándorgyűlés ’99

1999. július 5–8. között Szombathelyen gyűltek össze a matematikatanárok Magyarországról és a Felvidékről. Sajnos a Kárpát-medence más részeiből különböző nehézségek miatt kevesen tudtak eljönni.

Több, mint hatszáz általános-, közép- és főiskolai tanár vett részt a szakma legrangosabb rendezvényén, az immár 39. Rátz László Vándorgyűlésen. A Bolyai János Matematikai Társulat által szervezett négynapos rendezvénynek a Berzsenyi Dániel Tanárképző Főiskola adott otthont. A nyitóünnepségen adták át a matematikatanárok legrangosabb kitüntetését, a Beke Manó díjat.

A Beke Manó Emlékdíj Bizottság a díj I. fokozatát ítélte oda

Lajos Józsefnének, a budapesti Móricz Zsigmond Gimnázium tanárának, az Országos Közoktatási Szolgáltató Iroda főmunkatársának, hosszú időn át végzett kiváló és eredményes oktató–nevelő munkájáért.

A Beke Manó díj 2. fokozatában részesültek:

Iker János főiskolai tanár, a szombathelyi Berzsenyi Dániel Tanárképző Főiskola Bolyai János Gyakorló Általános Iskolája és Gimnáziuma igazgatója;

Kálmán László, a miskolci Földes Ferenc Gimnázium tanára;

Lukács Mártonné, a zalaegerszegi Dr. Hamburger Jenő Általános Iskola matematika–fizika tanára, szaktanácsadó;

Thiry Imréné, a budapesti Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium tanára;

Végh Erika, a kőszegi Mezőgazdasági és Kereskedelmi Szakközépiskola tanára;

Zsinkó Erzsébet, a budapesti Tanítóképző Főiskola docense.

A főiskola dísztermében rendezett plenáris ülésen *Nemetz Tibor* a statisztikai becslések középiskolai tanításáról beszélt, *Kajcsos Zsolt* pedig a fizika „hétköznapi matematikáját” mutatta meg. Nagy érdeklődés és több hozzászólás követte *Környei László* államtitkárhelyettes tájékoztatóját az új közoktatási törvényről és véleményét a matematika oktatásáról. A következő napokban párhuzamos előadásokat szerveztek az alsótagozaton, a felsőtagozaton, a középiskolában tanító tanároknak és a felsőoktatásban dolgozó oktatóknak. Az egyes szekciókban a szakma neves képviselői tartottak előadásokat. A teljesség igénye nélkül a következő előadásokat emelném ki: *Dobos Sándor:* Városok viadala; *Kosztolányi József:* Kérdezzünk tovább! (avagy kérdések, amelyeket a tanulók is feltehetnek); *Rácz János:* A parabola tanításáról; *Szalay István:* Feladatok kettős látásmódban; *Pintér Klára:* Beszédes ábrák; *Hortobágyi István:* Körülírt kör, beírt kör, burkoló kör; *Hódi Endre:* Adalékok a középiskolai matematikatanításhoz. A felsőoktatás képviselőinek *Tusnády Gábor,* az érdekes számelméleti problémák iránt érdeklődőknek *Katz Sándor* adott elő, és még sorolhatnánk a színvonalas szakmai programokat. A szokásos nagy sikert aratták a feladatmegoldó szemináriumok.

A Rátz László Vándorgyűlés ideje alatt a tankönyvkiadók is bemutatták legújabb, matematikaoktatással kapcsolatos termékeiket; helyet kaptak a matematika tanítását segítő számítógépes programokról és a grafikus számológépekről szóló bemutatók is. A résztvevők az előadások után Szombathellyel és a város környékével ismerkedhettek. A tanácskozás időtartama alatt az érdeklődők megtekinthették a *Szimmetria a természetben* című számítógépes kiállítást. A következő – jubileumi – vándorgyűlés valószínűleg Szegeden lesz.

Oláh György

Az 1999. évi Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldásai

A szeptemberi számban közölt beszámoló után most a feladatok megoldása következik lényegében úgy, ahogy azt a szerzők, a magyar csapat tagjai a versenyt követően leírták. Ezúton gratulálunk eredményükhöz, és egyúttal megköszönjük közreműködésüket e cikk elkészítésében.

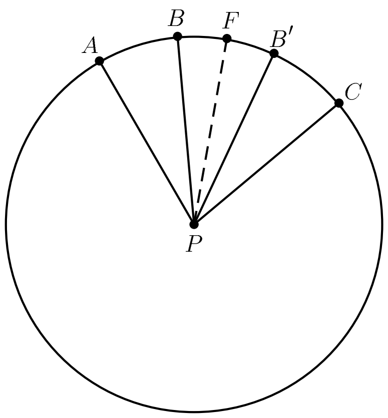
A szerk.

1. *Határozzuk meg az összes olyan, legalább három pontot tartalmazó síkbeli véges S ponthalmazt, amire az alábbi feltétel teljesül:*

> *S bármely két különböző A, B pontjára az AB szakasz felezőmerőlegese szimmetriatengelye az S halmaznak.*

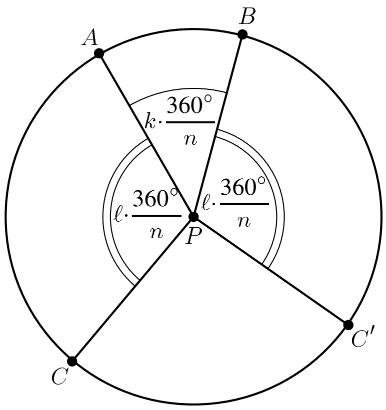
Megoldás. Legyen S egy ilyen ponthalmaz. Ekkor legyen az S-ben lévő pontok súlypontja P, és e egy tetszőleges szimmetriatengely. Ha e-re tükrözzük az S ponthalmazt, akkor ugyanehhez a ponthalmazhoz jutunk, tehát ha a súlypontját tükrözzük e-re, akkor önmagába megy át. Ez azt jelenti, hogy P szükségképpen rajta van az e szimmetriatengelyen, azaz a szimmetriatengelyek mind egy ponton mennek át.

Az S halmaz tetszőleges két A, B pontja egyenlő távolságra van P-től, mert P a felező merőlegesükön van. Tehát S pontjai mind ugyanakkora távolságra vannak P-től, azaz egy P körüli körön vannak.



Tegyük fel, hogy A, B, C három S-beli egymás melletti pont a körön – azaz a B-t tartalmazó AC íven a B-n kívül nincs más S-beli pont –, amelyekre $APB\sphericalangle < BPC\sphericalangle$. Ekkor legyen az AC ív felezőpontja F. Feltevésünk miatt B az AF íven fog elhelyezkedni, tehát ha az AC szakasz felező merőlegesére tükrözzük (ez éppen a PF egyenes), a tükörkép az FC íven lesz, nevezzük B'-nek. Az AC szakasz felező merőlegese szimmetriatengelye S-nek, tehát B' szükségképpen benne van az S ponthalmazban. Ez viszont ellentmond azon feltevésünknek, hogy A, B, C három egymás melletti pont a körön, mivel B' az FC íven van. Tehát $APB\sphericalangle = BPC\sphericalangle$ tetszőleges egymás melletti pontokra, azaz a szomszédos pontokat összekötő ívek hossza egyenlő, az S pontjai egy szabályos sokszög csúcsai.

Megmutatjuk, hogy a szabályos n-szögek eleget is tesznek a feladat feltételeinek.



Két egymás melletti Q és R pontra $QPR\sphericalangle = \frac{2\pi}{n}$, és két tetszőleges csúcspont és a középpont által meghatározott szög ennek egész számszorosa.

Az A, B, C pontok legyenek S tetszőleges pontjai. Legyen

$$APB\sphericalangle = k\cdot\frac{360°}{n}, \quad APC\sphericalangle = \ell\cdot\frac{360°}{n}.$$

Ekkor AB felezőmerőlegesére tükrözve C-t, C'-höz jutunk,

$$BPC'\sphericalangle = APC\sphericalangle = \ell\cdot\frac{360°}{n}.$$

Tehát C' szintén pontja a szabályos n-szögnek, mert a $BPC'\sphericalangle$ $\frac{360°}{n}$ többszöröse, és B pontja a szabályos n-szögnek. Tehát az AB szakasz felezőmerőlegesére szimmetrikus lesz a szabályos n-szög.

Tehát ezek az S ponthalmazok éppen a szabályos n-szögek csúcspontjai, ahol $n\geqslant 3$.

Devecsery András megoldása

2. *Legyen n egy adott egész szám, amire $n\geqslant 2$.*

(a) *Határozzuk meg a legkisebb olyan C konstanst, amire a*

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leqslant C\Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_i\Big)^4$$

egyenlőtlenség minden $x_1, \ldots, x_n\geqslant 0$ valós szám esetén teljesül.

(b) *Határozzuk meg, hogy ezen C konstans mellett mikor áll fenn egyenlőség.*

Megoldás. Ha $x_i=0$ minden i-re, akkor az egyenlőtlenség $0\leqslant C\cdot 0$, ami minden C mellett teljesül, sőt egyenlőség áll fenn. C meghatározása szempontjából tehát a $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i>0$ eset a lényeges, ezt vizsgáljuk tovább. Osszuk el az egyenlőtlenség mindkét oldalát a pozitív $\left(\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i\right)^4$ számmal:

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{x_i}{\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} x_k}\cdot\frac{x_j}{\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} x_k}\left(\left(\frac{x_i}{\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} x_k}\right)^2+\left(\frac{x_j}{\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} x_k}\right)^2\right)\leqslant C.$$

Legyen $a_i = \dfrac{x_i}{\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} x_k}$, így $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n} a_i = 1$ és $0 \leqslant a_i \leqslant 1$. Az egyenlőtlenség új alakja:

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j (a_i^2 + a_j^2) \leqslant C.$$

Becsüljük most meg a bal oldal $a_i^2 + a_j^2$ tényezőit felülről $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k^2$-tel:

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j (a_i^2 + a_j^2) \leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k^2 = \left(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k^2 \right) \left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j \right).$$

A második tényezőt ki tudjuk fejezni, mivel

$$\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k \right)^2 = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k^2 + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j,$$

tehát $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k = 1$ alapján

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j = \frac{1 - \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k^2}{2}.$$

Legyen $M = \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k^2$, így

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j (a_i^2 + a_j^2) \leqslant M \frac{1-M}{2} = \frac{M - M^2}{2} = \frac{1}{8} \left(1 - (2M-1)^2 \right) \leqslant \frac{1}{8},$$

mert $(2M-1)^2 \geqslant 0$.

$\frac{1}{8}$-dal az állítás tehát igaz. Kimutatjuk, hogy ez már éles is, tehát $C = \frac{1}{8}$. Megnézzük, mikor állhat itt egyenlőség. Pontosan akkor, ha

$$(2M-1)^2 = 0, \qquad \text{azaz} \qquad M = \frac{1}{2}, \qquad \text{valamint}$$
$$a_i a_j (a_i^2 + a_j^2) = a_i a_j M \qquad \text{minden } i \neq j \text{ párra.}$$

Ha lenne három pozitív a szám: a_i, a_j, $a_k > 0$, akkor a második feltétel sérülne, hiszen

$$a_i a_j (a_i^2 + a_j^2) < a_i a_j (a_i^2 + a_j^2 + a_k^2) \leqslant a_i a_j M.$$

Tehát két szám, a_i és a_j kivételével a többi a szám nulla. Tehát $\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k = 1$ miatt $a_i + a_j = 1$ és $a_i^2 + a_j^2 = \frac{1}{2}\ M = \frac{1}{2}$ miatt.

Azaz $a_i^2 + (1 - a_i^2) = \frac{1}{2}$, vagyis $4a_i^2 - 4a_i + 2 = 1$, tehát $(2a_i - 1)^2 = 0$, tehát $a_i = \frac{1}{2}$, amiből $a_j = \frac{1}{2}$.

Ekkor ráadásul a bal oldal értéke éppen $\frac{1}{8}$, tehát $C = \frac{1}{8}$.

Ha $a_i = a_j = \frac{1}{2}$, akkor $x_k = 0$, ha $k \neq i, j$ és $x_i = x_j > 0$. Azonban $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ is egyenlőséget eredményez, a (b) részre tehát a válasz:

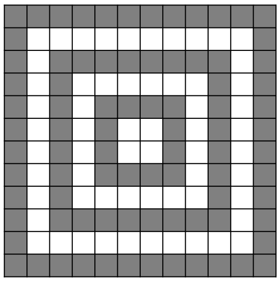
Egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha az x-ek közül $n-2$ darab 0-val egyenlő, a maradék kettő pedig egymással egyenlő.

Lukács László megoldása

3. *Tekintsünk egy $n \times n$-es négyzet alakú táblát, ahol n rögzített páros pozitív egész. A tábla n^2 egységnégyzetre van felosztva. Azt mondjuk, hogy a tábla két különböző négyzete* szomszédos, *ha van egy közös oldaluk.*

A táblán N egységnégyzet meg van jelölve olymódon, hogy minden négyzet (jelölt, vagy nem jelölt) szomszédos legalább egy jelölt négyzettel.

Határozzuk meg N lehetséges legkisebb értékét.



Megoldás. Osszuk be a négyzetet keretekre az ábra szerint, és kívülről kezdve színezzünk minden második keretet feketére. A táblán minden mező pontosan két feketével szomszédos, tehát már ahhoz is meg kell jelölnünk a fekete mezőknek legalább a felét, ha csak annyit akarunk, hogy minden fekete mezőnek legyen megjelölt szomszédja. N tehát legalább ezek számának fele. Számoljuk ezt össze abban az esetben, amikor n 4-gyel is osztható, illetve ha 4-gyel nem osztható (az ábrán a színezés az a) esetnek megfelelő).

a) $4 \mid n$: $\frac{1}{2}\left[12 + (16+12) + \ldots + \left(\frac{n-4}{4}16 + 12\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{n}{4}12 + 16\frac{n-4}{4}\cdot\frac{n}{4}\cdot\frac{1}{2}\right] =$

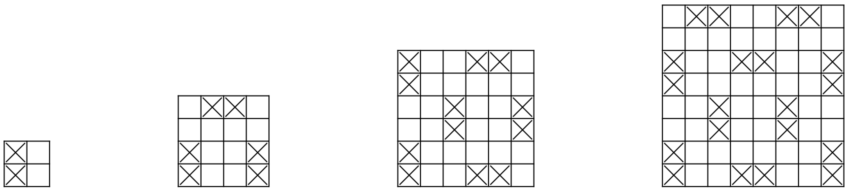
$$= \frac{1}{2}\left[3n + \frac{n(n-4)}{2}\right] = \frac{n^2+2n}{4},$$

b) $4 \nmid n$: $\frac{1}{2}\left[4 + (4+16) + \ldots + \left(4 + \frac{n-2}{4}16\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{n+2}{4}4 + 16\frac{n-2}{4}\cdot\frac{n+2}{4}\cdot\frac{1}{2}\right] =$

$$= \frac{1}{2}\left[n + 2 + \frac{n^2}{2} - 2\right] = \frac{n^2+2n}{4}.$$

Ezt az értéket viszont el is érhetjük, csak a fekete kereten belül jelölve ki mezőket az alábbi módon: a fekete keretek bal alsó sarkából indulva két szomszédos mezőt kijelölünk, majd kettőt nem, majd kettőt megint igen stb., mindig a keret mentén lépegetve. Így nyilván minden keret felét jelöljük ki, így nyilván összesen $\frac{n^2+2n}{4}$ mezőt. A fekete keretek mezőinek nyilván lesz jelölt szomszédja, a fehér keretek mezői mellett pedig van valamelyik szomszédos fekete kereten jelölt mező, hiszen ezek közül a belső jelölését pontosan kettővel „feljebb" kezdtük el, így a két keret jelölt mezői váltogatják egymást.

N lehetséges legkisebb értéke tehát $\frac{n^2+2n}{4}$. A jelölést pl. $n=2$, 4, 6, 8-ra az *ábra* mutatja.



Kiss Gergely és *Keszegh Balázs** megoldása alapján

Megjegyzés. $n=4k+1$-re $\frac{n^2+2n+1}{4}$, $n=4k+3$-ra $\frac{n^2+2n-3}{4}$ mezőt kell kijelölni. Ennek bizonyítását itt nem közüljük.

4. *Határozzuk meg az összes olyan, pozitív egészekből álló* (n,p) *párt, hogy* p *prím,* $n \leqslant 2p$, *és* $(p-1)^n+1$ *osztható* n^{p-1}*-gyel.*

Megoldás. Föltehető, hogy $n>1$, hiszen $n=1$ tetszőleges p prímmel megoldás. Legyen q az n *legkisebb* prímosztója, azaz $n=q^\alpha \cdot m$, ahol $q \nmid m$. q választásából látszik, hogy $(q,m)=1$, és az is, hogy az m páratlan. Ekkor $q \mid n \mid (p-1)^n+1$, azaz

$$(p-1)^{q^\alpha \cdot m} \equiv -1 \pmod q.$$

A kis Fermat-tétel szerint $(p-1)^q \equiv p-1 \pmod q$. Ennek ismételt alkalmazásával

$$(p-1)^n \equiv (p-1)^m \pmod q, \qquad \text{és így}$$

$$(p-1)^m \equiv -1 \pmod q. \tag{1}$$

Ebből az is következik, hogy $(q,p-1)=1$, tehát ismét felhasználva a kis Fermat-tételt

$$(p-1)^{q-1} \equiv 1 \pmod q. \tag{2}$$

(1)-et négyzetre emelve

$$(p-1)^{2m} \equiv 1 \pmod q \tag{3}$$

* *Keszegh Balázs,* a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium tanulója, a szlovák csapat tagjaként vett részt a versenyen.

Ha d jelöli $q-1$ és $2m$ legnagyobb közös osztóját, akkor az euklideszi algoritmus felhasználásával (2)-ből és (3)-ból $(p-1)^d \equiv 1 \pmod q$ következik.

A d meghatározásához vegyük észre, hogy q választása szerint az m minden prímosztója nagyobb q-nál, így $(q-1)$-nek és m-nek nincs közös prímosztója. Így $d=(q-1,2m)$ vagy 1, vagy pedig 2. Így mindenképpen $(p-1)^2 \equiv 1 \pmod q$.

Ez pontosan akkor teljesül, ha $p-1 \equiv 1 \pmod q$, vagy pedig $p-1 \equiv -1 \pmod q$.

Az első esetben (1)-ből $(p-1)^m \equiv 1 \equiv -1 \pmod q$, azaz $q=2$ és így $p \equiv 2 \pmod q$ miatt $p=2$. Ekkor a feltételből $n=2$ következik, és így a $p=2$, $n=2$ megoldást kapjuk.

A második esetben $p-1 \equiv -1 \pmod q$, azaz $q \mid p$, és így $q=p>2$, $n=p^\alpha \cdot m$, a feltételből pedig

$$p^{\alpha(p-1)} \mid (p-1)^n+1 \tag{4}$$

következik.

Megmutatjuk, hogy p kitevője $(p-1)^n+1$ prímtényezős felbontásában pontosan $\alpha+1$. Ebből aztán (4) szerint $\alpha(p-1) \leqslant \alpha+1$, azaz $\alpha \cdot (p-2) \leqslant 1$, tehát $\alpha=1$ és $p=3$ adódik.

$1+(p-1)^n$ a binomiális tétel szerint (az n páratlan):

$$1+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}p^k=\underbrace{1-1}_{0}+\binom{n}{1}p+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{n-k}\cdot\binom{n}{k}\cdot p^k.$$

Az összeg első tagja $\binom{n}{1}p=p^{\alpha+1}\cdot m$, és tudjuk, hogy $p \nmid m$. Azt állítjuk, hogy a további tagok valamennyien oszthatók $p^{\alpha+2}$-vel, és így $1+(p-1)^n=p^{\alpha+1}(m+p\cdot K)$ alakú, és így a második tényező valóban nem osztható p-vel.

Legyen tehát $k \geqslant 2$, és tekintsük a k-adik tagot ($n=p^\alpha \cdot m$):

$$\binom{n}{k}p^k=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}\cdot p^k=\frac{p^{\alpha+k}\cdot m}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

Ha $p \geqslant 3$ és $k \geqslant 2$, akkor $p^{k-1}>k$ (ez k-ra vonatkozó indukcióval nyilvánvaló), és így a p prímszám kitevője a k nevezőben legfeljebb $k-2$. Mivel a $p^{\alpha+k}\cdot m\cdot\binom{n-1}{k-1}$ szorzatban csak a k-val való osztás csökkentheti a p kitevőjét, azért ez a kitevő valóban legalább $\alpha+k-(k-2)=\alpha+2$.

A második esetben tehát arra jutottunk, hogy a p prímszám csak 3 lehet, a feltétel pedig így

$$n^2 \mid 2^n+1.$$

Ismeretes, hogy ez csak az $n=1$ és $n=3$ esetben teljesül. Ez volt az 1990. évi pekingi Matematikai Diákolimpia 3. feladata. Megoldása megtalálható *Reiman István:* Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959–1994 (Typotex Kiadó, Budapest, 1997) című könyvének 442–444. oldalán.

Megjegyzés. Az $n \leqslant 2p$ feltétel felhasználásával természetesen nincs szükség erre a hivatkozásra.

Zábrádi Gergely megoldása

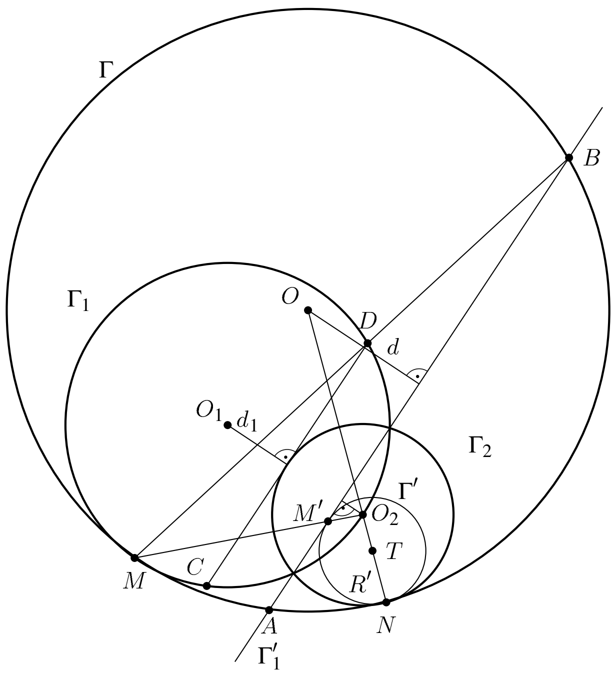
5. *A Γ_1 és Γ_2 körök a Γ kör belsejében vannak és érintik a Γ kört a különböző M, ill. N pontokban.*

Γ_1 átmegy a Γ_2 kör középpontján. A Γ_1 és Γ_2 körök két metszéspontján átmenő egyenes a Γ kört az A és B pontokban metszi. Az MA és MB egyenesek Γ_1-et a C, ill. D pontokban metszik.

Bizonyítsuk be, hogy CD érintője a Γ_2 körnek.

Megoldás. Először meghatározzuk az O pont AB-től mért d távolságát (a távolságok végig előjelesek). Invertáljunk a Γ_2 körre. Γ_1 kör képe egyenes, mert átmegy az O_2 ponton; ezen az egyenesen vannak Γ_1 és Γ_2 közös pontjai, így Γ_1 képe az AB egyenes. Γ képe érinti Γ_1, ill. Γ_2 képét, tehát az AB egyenest és a Γ_2 kört; AB-t M képében, M'-ben érinti (M' az O_2M és AB metszéspontja), Γ_2-t N-ben (N képe önmaga), tehát Γ' középpontja, T az ON egyenes metszéspontja az AB-re M'-ben állított merőlegessel. A Γ' kör átmérője, $2R' = R_2 + \dfrac{R_2^2}{2R - R_2} = \dfrac{2RR_2}{2R - R_2}$ (ha N átellenes pontja Γ-n U, Γ'-n U', akkor az új átmérő hossza $NO_2 + O_2U' = R_2 + \dfrac{R_2^2}{O_2U}$).

Tehát T távolsága AB-től $\dfrac{RR_2}{2R - R_2}$.



O_2 távolsága az inverzió miatt AB-től $\frac{R_2^2}{2R_1}$ (ugyanis az O_2-ből AB-re bocsátott merőleges talppontja a Γ_1 kör O_2-vel átellenes pontjának képe lesz.)

$$\begin{aligned} O_2T &= R_2 - \frac{\frac{2RR_2}{2R-R_2}}{2} = \frac{RR_2 - R_2^2}{2R - R_2} = \frac{R_2(R-R_2)}{2R-R_2} \\ OO_2 &= R - R_2 \\ OT &= \frac{2R(R-R_2)}{2R-R_2}, \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{O_2T}{OT} = \frac{R_2}{2R} \\ 1-\lambda &= \frac{OO_2}{OT} = \frac{2R-R_2}{2R}. \end{aligned}$$

Ezekből látható, hogy ha O távolsága AB-től d, akkor O_2 távolsága AB-től

$$\lambda \cdot d + (1-\lambda) \cdot TM' = \frac{R_2^2}{2R_1}.$$

Tehát

$$d = \frac{1}{\lambda} \frac{R_2^2}{2R_1} - \frac{1-\lambda}{\lambda} \cdot \frac{RR_2}{2R-R_2} = \frac{RR_2}{R_1} - R = \frac{R(R_2-R_1)}{R_1}.$$

Ebből kiszámolhatjuk O_1 távolságát CD-től. Γ_1 középpontosan hasonló Γ-hoz. A hasonlóság középpontja M, aránya $\frac{R_1}{R}$. A Γ-t Γ_1-be vivő hasonlóság O-t O_1-be, AB-t CD-be viszi, tehát O_1 és CD távolsága

$$d_1 = \frac{R_1}{R} \cdot d = R_2 - R_1,$$

ez éppen az igazolandó, mert így O_2 távolsága CD-től $d_1 + R_1$ ($AB \parallel CD$ miatt), ami nem más, mint R_2. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Gyenes Zoltán megoldása

6. *Határozzuk meg az összes olyan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre*

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + x f(y) + f(x) - 1$$

teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.

Megoldás. x helyére $f(y)$-t helyettesítve és a $k = f(0)$ jelölést használva:

$$\begin{aligned} f(0) &= f(f(y)) + (f(y))^2 + f(f(y)) - 1 \\ f(f(y)) &= \frac{1}{2}\left(k + 1 - (f(y))^2\right). \end{aligned}$$

Ezt beírva az eredeti feltételbe:

$$f\,(x-f(y))=\frac{1}{2}\left(k-1-(f(y))^2\right)+xf(y)+f(x).$$

Legyen $g(x)=f(x)+\dfrac{x^2}{2}$. Ekkor

$$g\,(x-f(y))=f\,(x-f(y))+\frac{(x-f(y))^2}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(k-1-(f(y))^2\right)+xf(y)+g(x)-\frac{x^2}{2}+\frac{(x-f(y))^2}{2},$$

$$g\,(x-f(y))=xf(y)+g(x)-\frac{x^2}{2}+\frac{k-1-(f(y))^2}{2}-\frac{(x-f(y))^2}{2}=g(x)+\frac{k-1}{2}.$$

Először belátjuk, hogy $k=1$. Mivel az azonosan 0 függvény nem megoldás, létezik olyan $y\in\mathbb{R}$, amelyre $f(y)\neq 0$, így $x=\dfrac{1}{f(y)}$-t helyettesíthetünk az eredeti képletbe:

$$f(x-f(y))=f(f(y))+f(x),\qquad \text{azaz}\qquad f(a)=f(b)+f(c)$$

alakú egyenlőséget kapunk.

$$g(x-f(a))=g(x)+\frac{k-1}{2},\qquad g((x-f(b))-f(c))=g(x-f(b))+\frac{k-1}{2}=g(x)+k-1.$$

E kettő egyenlőségéből $k-1=\dfrac{k-1}{2}$, azaz $k=1$ következik.

Ekkor viszont $g\,(x-f(y))=g(x)$, tehát $f(x)$ minden x-re periódusa g-nek. Másrészt $f(0)=k=1$, ebből

$$f\,(1)=f\,(f(0))=\frac{1}{2}\,(1+1-1)^2=\frac{1}{2},$$

tehát $\dfrac{1}{2}$ függvényérték, és így g-nek periódusa. De

$$f\,(x-1)=f\,(x-f(0))=f\,(f(0))+xf(0)+f(x)-1=\frac{1}{2}+x+f(x)-1=f(x)-\frac{1}{2}+x$$

is függvényérték, tehát g-nek periódusa.

Azt kaptuk, hogy g-nek periódusa $f(x)$, $f(x-1)$ és $\dfrac{1}{2}$, tehát ugyancsak periódus az $f(x)-f(x-1)+\dfrac{1}{2}$, ami pedig éppen x.

Tehát g minden szám szerint periodikus és csak így konstans lehet.

$g(0)=f(0)+\dfrac{0^2}{2}=1$, tehát $g(x)=1$, amiből $f(x)=1-\dfrac{x^2}{2}$.

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy ez valóban megoldás is.

Terpai Tamás megoldása

A VIII. Nemzetközi Magyar Matematikai Verseny feladatai

9. évfolyam

1. Milyen p és q prímszámokra teljesül a

$$3(p^2-q)=q^2-p$$

egyenlet? *Oláh György* (Komárom)

2. Az ABC háromszögben $AC=BC$ és $ABC\sphericalangle=BAC\sphericalangle=40^\circ$. A BAC szög szögfelezője a BC oldalt a D pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $AD+DC=AB$.

Szabó Magda (Szabadka)

3. Az $ABCD$ érintőnégyszög (A és C átellenes csúcsok) beírt körének középpontja O, sugara r. Az ABO és a CDO háromszögek köré írt körének sugara r_1, illetve r_2. Bizonyítsuk be, hogy r nem lehet nagyobb r_1-nél is és r_2-nél is. *Kántor Sándor* (Debrecen)

4. A valós számok halmazában értelmezett $\circ$ műveletre (amelynél bármely x, $y\in\mathbf{R}$ esetén $x\circ y\in\mathbf{R}$) minden x, y, z valós szám esetén teljesülnek a következő tulajdonságok:

$$x\circ y=y\circ x,$$
$$(x\circ y)z=(xz)\circ(yz),$$
$$(x\circ y)+z=(x+z)\circ(y+z).$$

Mennyi $1999\circ 2000$? *Kántor Sándorné* (Debrecen)

5. Egy téglalap oldalai 37 és 54 egységnyiek. Vegyünk fel a téglalapon (a belsejében vagy a kerületén) 1999 pontot. Bizonyítsuk be, hogy a pontok bármilyen választása esetén lesz közöttük legalább három, amely lefedhető egy $\dfrac{9}{4}$ átmérőjű körlappal. *Benedek Ilona* (Vác)

6. Adottak az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valós számok úgy, hogy $1\leqslant x_i\leqslant n^2$ ($i=1, 2, \ldots, n$) és $1\leqslant i<j\leqslant n$ esetén $x_j-x_i\geqslant j+i$. Határozzuk meg az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számokat.

Bencze Mihály (Brassó)

10. évfolyam

1. Bizonyítsuk be, hogy

$$1997^{1999}+1999^{1997}$$

osztható 3996-tal. *Benedek Ilona* (Vác)

2. Az $ABCD$ trapéz csúcsai egy körre illeszkednek. A trapéz AD és BC szárainak meghosszabbításai az M pontban metszik egymást. A körhöz a B, illetve D pontokban húzott érintők metszéspontja N. Bizonyítsuk be, hogy $MN\parallel AB$. *Neubauer Ferenc* (Munkács)

3. Határozzuk meg az m valós paraméternek azokat az értékeit, amelyekre a

$$9mx(3x-1)(3x-2)(x-1)=1$$

egyenletnek négy (nem feltétlenül különböző) valós gyöke van. *Péter András* (Arad)

4. Adott az ABC egyenlő oldalú háromszög belsejében a P pont úgy, hogy $PA=6$, $PB=8$, $PC=12$. Határozzuk meg az ABC háromszög területét. *Kántor Sándorné* (Debrecen)

5. Legyenek $x>0$, $y>0$, $z>0$ valós számok. Határozzuk meg az

$$x, \qquad y+\frac{1}{z}, \qquad z+\frac{1}{x} \quad \text{és} \quad \frac{1}{y}$$

számok legkisebbikének lehető legnagyobb értékét. *András Szilárd* (Kolozsvár)

6. Hány részre osztják fel a síkot egy 1999 oldalú szabályos sokszög oldalegyenesei? *Oláh György* (Komárom)

11. évfolyam

1. Melyik az a háromjegyű szám, amelynek négyzete is és köbe is ugyanezzel a háromjegyű számmal végződik? *Bogdán Zoltán* (Cegléd)

2. Tekintsük az összes olyan $P(x;y)$ pontot, amelynek koordinátáira

$$x^2y^2+x^2-10xy-8x+16=0$$

teljesül. Milyen értékeket vehet fel az xy szorzat? *Kántor Sándorné* (Debrecen)

3. Határozzuk meg az összes olyan valós együtthatós $p(x)$ polinomot, amelyre minden valós x esetén teljesül az

$$x\cdot p(x)\cdot p(1-x)+x^3+100\geqslant 0$$

egyenlőtlenség. *Erdős Gábor* (Nagykanizsa)

4. Legyen S az ABC hegyesszögű háromszög súlypontja és r a háromszög köré írt kör sugara. Bizonyítsuk be, hogy

$$AS^2+BS^2+CS^2>\frac{8r^2}{3}.$$

Oláh György (Komárom)

5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder súlypontja mind a négy csúcstól egyenlő távolságra van, akkor bármely két szemközti élpár felezőpontjait összekötő szakasz merőleges mindkét élre. *Kiss Sándor* (Nyíregyháza)

6. Igazoljuk, hogy ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n\geqslant 3)$ különböző pozitív egész számok, akkor

$$\frac{1}{x_1^3}+\ldots+\frac{1}{x_n^3}<\frac{11}{8}-\frac{1}{2n(n-1)}.$$

Bencze Mihály (Brassó)

12. évfolyam

1. Az ABC háromszög belsejében lévő P pontra igaz, hogy $PAB\sphericalangle=PBC\sphericalangle=PCA\sphericalangle$. Mivel egyenlő a PAB szög tangensének értéke, ha $AB=13$, $BC=14$ és $AC=15$? *Kiss Sándor* (Nyíregyháza)

2. Egy minden valós számra értelmezett f függvény minden x és y értékre kielégíti a következő egyenlőtlenségeket:

$$f(x)\leqslant x,$$
$$f(x+y)\leqslant f(x)+f(y).$$

Bizonyítsuk be, hogy minden x valós számra $f(x)=x$. *Kántor Sándorné* (Debrecen)

3. Oldjuk meg a következő egyenletet, ha x és y egész számok:

$$x^3-23x^2-23y^2+y^2x+2x=1849.$$

Bíró Bálint (Eger)

4. Legyen A a tízes számrendszerben felírt 1997^{1999} szám számjegyeinek az összege, B pedig az A számjegyeinek az összege. Számítsuk ki B számjegyeinek összegét.

Boros Zoltán (Debrecen)

5. Bizonyítsuk be, hogy ha az ABC háromszög hegyesszögű, akkor létezik olyan P pont a térben, amelyből az ABC háromszög bármely csúcsát a szemközti oldalegyenes bármely pontjával összekötő szakasz derékszögben látszik. *Kántor Sándor* (Debrecen)

6. Legyenek $a>0$ és $b>0$ adott valós számok, valamint

$$f(x,y,z)=\max\left\{ax+\frac{b}{y},ay+\frac{b}{z},az+\frac{b}{x}\right\}\qquad(x>0,\ y>0,\ z>0).$$

Igazoljuk, hogy az f függvénynek van minimuma, és határozzuk meg ezt a minimumot.

Szász Róbert és Dáné Károly (Marosvásárhely)

Könyvismertetés

Kántor Sándorné–Kántor Sándor: Nemzetközi Magyar Matematikai Versenyek

Ebben a könyvben a szerzők az 1992 és 1999 között megrendezett Nemzetközi Magyar Matematikai Versenyek anyagát dolgozzák fel.

A könyv ellentmondásos címe mindenkinek feltűnik, pedig a megjelölés pontos. Valóban nemzetközi versenyekről van szó, mert a Kárpát-medence különböző országaiban élő tehetséges középiskolások versenye ez, mégis magyar, mert a résztvevők anyanyelve magyar, a feladatokat magyar nyelven tűzik ki, a megoldásokat pedig magyarul írják a résztvevők. Ez a verseny a matematika révén fűzi össze a magyarországi, a délvidéki, az erdélyi, a felvidéki, a kárpátaljai és a horvátországi középiskolásokat. Évente egy alkalommal hol az egyik régióban, hol az anyaországban mérik össze tudásukat a versenyzők. A verseny magas színvonalú, hiszen az eddigi helyezettek közül már kilencen nyertek aranyérmet a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiákon.

A könyv szerzői évfolyamonkénti és évenkénti bontásban közlik az egyes versenyeken az elmúlt 8 év alatt kitűzött feladatokat, ismertetik a feladatok megoldásait, közlik az egyes résztvevők által elért eredményeket, helyezéseket, feltüntetve a tanulók iskoláit is.

A feladatok szerzői tapasztalt matematikatanárok, a feladatok skálája széles, bemutatja az egyes régiók matematikai hagyományait. A kötet közel 200 versenyfeladatot ismertet. Segítséget jelent, és a könyv használhatóságát növeli, hogy a feladatok tematikus besorolását is tartalmazza. Ezenkívül az egyes versenyeken elhangzott előadásokból, érdekes feladatokból is ízelítőt ad.

A Nemzetközi Magyar Matematikai Versenyek című könyv érdekes színfolt a könyvkiadásban, a feladatok feldolgozása révén a diákok jobban fel tudnak készülni a hazai versenyekre, de a felvételi vizsgára is.

Minden matematika iránt érdeklődő diáknak és minden versenyre, felvételire felkészítő tanárnak ajánljuk ezt a kötetet.

Kántor Sándorné–Kántor Sándor: Nemzetközi magyar matematikai versenyek, Studium 96 Bt., Debrecen, 1999. 179 oldal. Ára: 800 Ft (+ postaköltség) Megrendelhető: az 52–345-364 telefonszámon vagy a következő címen: Kántor, Debrecen, Pf. 12. 4010. KLTE Matematikai és Informatikai Intézet.

Mérőlap felvételire készülőknek I.

Bakos Tibor (Tibi bácsi) emlékére

1. Egy bank 300 000 forintos betétre két év elteltével 386 400 forintot fizet. A kamatláb a futamidő második évében 3%-kal csökkent. Mennyi volt a kamatláb az első évben?

2. Az $ABCD$ téglalap AB oldalegyenesén vegyünk fel egy P pontot. Az A ponton át a DP egyenessel párhuzamosan húzott egyenes a CP egyenest a Q pontban metszi. Mekkora távolságra van a Q pont az AB egyenestől, ha $AP=9$, $BP=6$ és $BC=4{,}5$ egység?

3. Adott egy háromszög két oldala, a és c. Tudjuk, hogy

$$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta}=\frac{a}{b},$$

ahol α az a, β pedig a b oldallal szemközti szög. Fejezze ki a-val és c-vel a háromszög b oldalát!

4. Tekintsük a $2a$ oldalhosszúságú $ABCD$ négyzetet. A négyzet AB oldalát egy P pont két részre osztja. Az AP és PB szakaszokra állítsunk négyzetet úgy, hogy azok az eredeti négyzet egy részét lefedjék. Hogyan kell megválasztani a P pont helyzetét, hogy a négyzet lefedetlen területe a legnagyobb legyen? Mekkora ez a terület a függvényében?

5. Mely valós x-ekre teljesül a

$$8|\sin x|\geqslant 4\cos^2 x-1$$

egyenlőtlenség?

6. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos a $3x+4y=1999$ egyenletű egyenessel és a $C(-1;2)$ ponttól 2 egység távolságra halad.

7. Oldja meg a valós számpárok halmazán ($(x,y)\in\mathbf{R}^2$) a

$$\log_2\left(\cos^2(xy)+\frac{1}{4\cos^2(xy)}\right)=-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2$$

kétismeretlenes egyenletet.

8. Oldja meg a valós számok halmazán az

$$a\cdot 3^x+\frac{a}{3^x}=3^{x+2}+2a$$

egyenletet, ahol a valós paraméter.

Rábai Imre

C gyakorlatok megoldásai

C. 526. *Hány olyan 9-cel osztható 7-jegyű szám van, amelynek utolsó előtti számjegye 5?*

Megoldás. Jelöljük a szóbajövő 7-jegyű számokat a szokásos módon:

$$\overline{a_1a_2a_3a_4a_55a_7},$$

ahol az $a_2, \ldots, a_7$ számjegyek értéke 0–9-ig, az a_1 pedig 1-től 9-ig bármely szám lehet.

Ismeretes, hogy egy szám pontosan akkor osztható 9-cel, ha a számjegyeinek összege osztható 9-cel. Adjuk meg először az a_2, a_3, a_4, a_5, a_7 értékeket tetszőlegesen. Ezután az a_1-et mindig egyértelműen meg tudjuk választani úgy, hogy a kapott hétjegyű szám osztható legyen 9-cel. Az a_1 értéke attól függ, hogy a többi hat szám jegyeinek összege 9-cel osztva mennyit ad maradékul. Ez a maradék 9-féle lehet, azért az 1–9-ig terjedő számok között mindig található pontosan egy a_1-nek választható érték, amelyet az összeghez adva az osztható lesz 9-cel.

Az a_2, a_3, a_4, a_5, a_7 pedig $10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10=10^5$ választási lehetőséget ad, azaz ennyi 7-jegyű szám van, amely megfelel a követelményeknek.

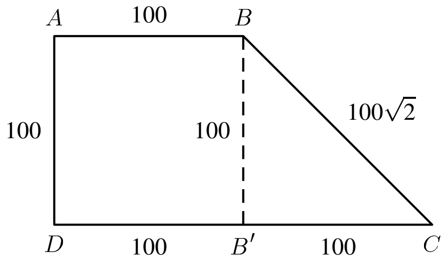
Tóth Gábor (Győr, Jedlik Á. Inf. Szki. és Gimn., 12. o.t.)

Megjegyzés. Gondoljuk végig, változik-e a feladat megoldása, ha nem az utolsó előtti számjegyet rögzítjük, vagy ha a rögzített szám nem 5.

251 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Ábrány Miklós, Balka Richárd, Gajdos Béla, Medve Kinga Sára, Münz Márton és Székelyhidi Tamás. 5 pontos 119, 4 pontos 60, 3 pontos 6, 2 pontos 13, 1 pontos 21, 0 pontos 25 dolgozat. Nem versenyszerű 1.

C. 527. *Egy trapéz alakú tó párhuzamos partszakaszai* 200 m *és* 100 m *hosszúak, a másik két partvonal hajlásszöge ezekhez* 90° *és* 45°*. A tavat két őr járja körbe azonos irányban és tempóban úgy, hogy a tó kerülete mentén a két körüljárási irányban egyenlő távolságot tartanak egymástól. Mekkora a két őr legnagyobb távolsága légvonalban?*

Megoldás. Az $ABCD$ derékszögű trapézban B vetülete a DC-re legyen B' (*1. ábra*). Az $AB=DB'$ miatt $B'C=100$, és a $B'BC$ egyenlő szárú háromszögből $BB'=B'C=AD=100$, $BC=100\sqrt{2}$.



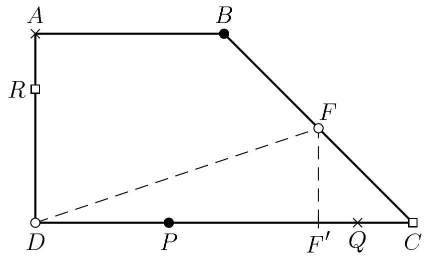
1. ábra

A trapéz tehát egy 100 m oldalú négyzet és egy hozzáillesztett egyenlő szárú derékszögű háromszög, kerülete pedig: $400+100\sqrt{2}$.

A két őr a körüljárás irányában egyenlő távolságot tart egymással, vagyis a kerület mentén mért távolságuk a teljes kerület fele: $d=200+50\sqrt{2}$.

Mivel ez a távolság a mozgás során állandó, elegendő az egyik őr mozgását vizsgálni egy félkerületnyi részen. Legyen F a BC szakasz felezőpontja. Amikor az egyik őr F-ben van, akkor a másik éppen D-ben, hiszen $DA+AB+BF=100+100+50\sqrt{2}=$ $=200+50\sqrt{2}=d$.

Azt vizsgáljuk tehát, hogy mikor van a két őr légvonalban a legmesszebb egymástól, miközben az első őr D-ből F-be jut. A távolságok helyett keressük a távolságok négyzetének maximumát. Ezt megtehetjük, mivel a távolság mindig pozitív.



2. ábra

Osszuk fel a CD oldalt úgy, hogy $DP=$ $=50\sqrt{2}$, $DQ=50\sqrt{2}+100$, és legyen R az AD szakasz azon pontja, amelyre $DR=$ $=50\sqrt{2}$ (*2. ábra*).

Könnyen belátható, hogy (minden esetben a trapéz kerületén haladva ugyanolyan irányban) $\widehat{AQ}=\widehat{BP}=\widehat{DF}=\widehat{RC}=200+50\sqrt{2}$. Kövessük az első őr útját, amíg a D pontból indulva a P, Q, C pontokon keresztül eljut az „átellenes” F pontba.

1. Ha az első őr D-ben van, akkor a másik F-ben. Ekkor a légvonalbeli távolságuk négyzete a DFF' derékszögű háromszögből (F' az F vetülete DC-re):

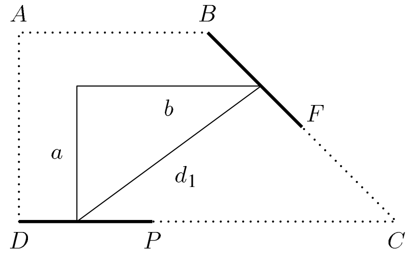
$$DF^2=50^2+150^2=25\,000 \qquad (DF\approx 158{,}1).$$

2. Az első őr haladjon a DP szakaszon P-ig. Ekkor a második az FB szakaszon mozog B-ig; amikor B-be ért, a két őr távolságának négyzete:

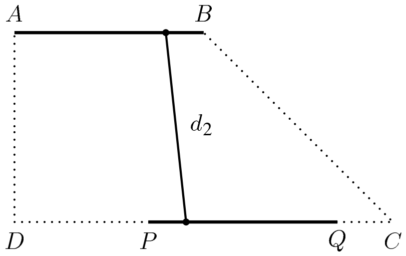
$$PB^2=100^2+(100-50\sqrt{2})^2\approx 24\,858.$$

A közbülső helyeken (*3. ábra*) egy olyan derékszögű háromszög átfogójának négyzetét kapjuk, amelyben az a, b befogókra $a\leqslant 100$ és $b\leqslant 50\sqrt{2}+100$, ezért

$$d_1^2\leqslant 100^2+(50\sqrt{2}+100)^2\approx 39\,142.$$



3. ábra



4. ábra

3. Haladjon az első őr tovább a Q pontig. Amikor az első őr Q-ban, akkor a második őr az A pontban lesz, és a távolságuk négyzete:

$$QA^2 = 100^2 + (100 + 50\sqrt{2})^2 \approx 39\,142.$$

A közbülső helyeken: $a = 100$, $b \leqslant DQ = 100 + 50\sqrt{2}$ miatt

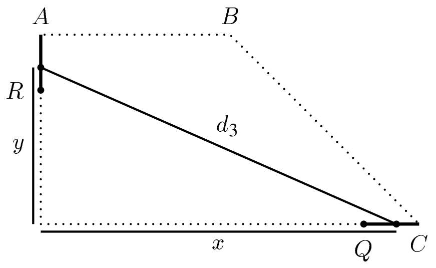
$$d_2^2 < QA^2 = 39\,142. \qquad (\textit{4. ábra}).$$

4. Az első őr a QC szakaszon mozog, a második az AR-en. Láttuk, hogy C és R „átellenes" pontok, így a két őr egyszerre érkezik C-be, illetve R-be. Azt állítjuk, hogy QC, illetve a megfelelő AR szakaszokon mozogva az őrök távolsága növekszik (*5. ábra*). Ekkor ugyanis ez a távolság egy olyan derékszögű háromszög átfogója, ahol a befogók összege, $x + y$ állandó, a kerülete fele.

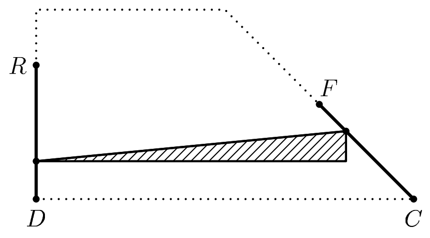
Az $x^2 + y^2 = \dfrac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{2}$ azonosságból pedig következik, hogy ekkor az átfogó hossza a befogók eltérésével nő. Mivel Q-ból C-be, illetve A-ból R-be haladva ez az eltérés valóban növekszik – a hosszabbik befogó nő, a rövidebbik csökken –

$$d_3 < RC^2 = RD^2 + DC^2 = 45\,000.$$

5. Végül, ha az első őr a CF szakaszon halad, a második pedig az RD-n, akkor távolságuk kisebb, mint RC, hiszen a satírozott derékszögű háromszög befogói csökkennek RD-hez, illetve DC-hez képest (*6. ábra*).



5. ábra



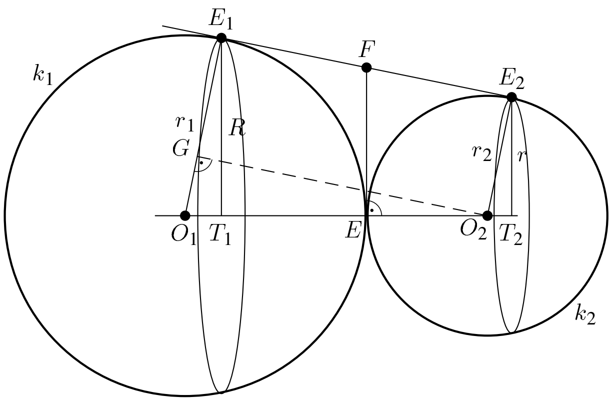
6. ábra

A fentiekből látható, hogy az őrök távolsága légvonalban akkor a legnagyobb, ha egyikük a C, másikuk pedig az R pontban van. Ez a távolság $CR = \sqrt{45\,000} \approx 222{,}1$ méter.

Gajdos Béla (Beregszász, Bethlen G. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

288 dolgozat érkezett. 5 pontos Führer Lívia és Gajdos Béla megoldása. 4 pontos 36, 3 pontos 97, 2 pontos 115, 1 pontos 21, 0 pontos 14 dolgozat. Nem versenyszerű 3.

C. 532. *Az r_1 és r_2 sugarú körök kívülről érintik egymást. Egyik közös külső érintőjüknek az érintési pontok közé eső szakaszát megforgatjuk a körök centrálisa körül. Fejezzük ki a keletkező csonkakúp palástjának területét r_1-gyel és r_2-vel.*



Megoldás. A k_1, k_2 körök középpontját jelöljük O_1 és O_2-vel, sugarát r_1 és r_2-vel, és legyen $r_1 \geqslant r_2$. A két kör közös pontja E, az érintési pontok k_1-en E_1, k_2-n E_2. E_1 és E_2 merőleges vetülete az O_1O_2 centrálisra T_1, illetve T_2. A forgatáskor keletkezett csonkakúp alapköreinek sugarai $E_1T_1 = R$, $E_2T_2 = r$, palástjának alkotója $E_1E_2 = a$.

Ismeretes, hogy a csonkakúp palástjának területe:

$$P = \pi(R + r)a. \tag{1}$$

Mivel O_1E_1 és O_2E_2 merőlegesek E_1E_2-re, ha O_2-ből párhuzamost húzunk E_1E_2-vel, amelynek metszéspontja O_2E_2-vel G, akkor $O_1O_2 = r_1 + r_2$ és $O_1G = r_1 - r_2$, így az O_2GO_1 derékszögű háromszögből

$$a = E_1E_2 = O_2G = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{4r_1r_2}. \tag{2}$$

A $T_1T_2E_2E_1$ derékszögű trapézban a szárak: $E_1T_1 = R$ és $E_2T_2 = r$. Messe az E-ben húzott közös érintő az E_1E_2 egyenest F-ben. Tudjuk, hogy egy külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok hossza egyenlő, azért $FE_1 = FE = FE_2$. FE merőleges O_1O_2-re, vagyis FE a trapéz középvonala:

$$\frac{R + r}{2} = FE = FE_2 = FE_1.$$

Azt kaptuk, hogy $R + r$ egyenlő az alkotóval, E_1E_2-vel. $E_1E_2 = R + r = \sqrt{4r_1r_2}$, és (1)-be helyettesítve:

$$P = \pi(R + r)a = \pi\sqrt{4r_1r_2} \cdot \sqrt{4r_1r_2} = 4\pi r_1r_2.$$

Gajdos Béla (Ukrajna, Beregszász, Bethlen G. Gimn., 11. o.t.)

Megjegyzés. A megoldás során lényegében azt láttuk be, hogy mind a körök közös E_1E_2 érintője, mind pedig az $R + r$ összeg egyenlő a két kör átmérőjének a mértani közepével.

226 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Csató György, Gueth Krisztián, Kalcsú Áron és Robotka Zsolt. 5 pontos 145, 4 pontos 33, 3 pontos 9, 2 pontos 2, 1 pontos 18, 0 pontos 13, nem versenyszerű 2 dolgozat.

C. 535. *Hány olyan pozitív, egymáshoz relatív prím számokból álló (rendezetlen) számpár van, amelyben a számok összege* 285*?*

Megoldás. A $285 = a + (285 - a)$ egyenlet azon pozitív egész megoldásait keressük, amelyekre a és $285 - a$ relatív prímek. Ez pontosan azt jelenti, hogy a és 285 relatív prímek. Valóban, ha egy d egész osztója a-nak is és 285-nek is, akkor (a-nak és) $(285 - a)$-nak is osztója; megfordítva, ha egy d egész osztója a-nak is és $(285 - a)$-nak is, akkor osztója (a-nak és) $a + (285 - a) = 285$-nek is. Tehát a és 285 legnagyobb közös osztója egyenlő a és $(285 - a)$ legnagyobb közös osztójával.

Keressük tehát a 285-nél kisebb számok közül azokat, amelyek 285-höz relatív prímek.

Ismeretes, hogy ha az n prímtényezős felbontása

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

akkor a hozzá relatív prím számok számát a

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

összefüggés adja.

Esetünkben $n = 285 = 3 \cdot 5 \cdot 19$, és így

$$\varphi(285) = 285\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{19}\right) = 285 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{18}{19} = 144,$$

a relatív prím számok száma. Mint láttuk, ezek páronként csoportosíthatók úgy, hogy a párok összege 285. Így összesen 72 megfelelő számpár van.

Springer Éva (Budapest, Szent István Gimn., 9. o.t.)

Megjegyzés. A feladatot megoldhatjuk a φ függvény ismerete nélkül is, ha megszámoljuk, hány olyan szám van 285-ig, amely osztható 3-mal, 5-tel, 19-cel, $3 \cdot 5 = 15$-tel, $3 \cdot 19 = 57$-tel, $5 \cdot 19 = 95$-tel és $3 \cdot 5 \cdot 19 = 395$-tel:

3-mal	95 darab szám,
5-tel	57 darab szám,
19-cel	15 darab szám osztható,

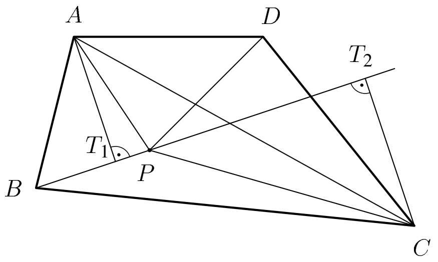
ezek összegéből kell levonni a 15-tel, 57-tel, 95-tel és $3 \cdot 5 \cdot 19 = 285$-tel osztható számok számát, azaz $95 + 57 + 15 - 18 - 5 - 3 + 1 = 141$-et, mert ezekből nem képezhetők relatív prím számpárok. A maradék $285 - 141 = 144$-ből viszont igen.

Bohák András (Budapest, Evangélikus Gimn., 10. o.t.)

191 dolgozat érkezett. 5 pontos 70, 4 pontos 83, 3 pontos 23, 2 pontos 3, 1 pontos 3, 0 pontos 8. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

Matematika gyakorlatok megoldásai

Gy. 3242. *Egy konvex négyszög belsejében található olyan pont, amelyet a csúcsokkal összekötve négy egyenlő területű háromszöget kapunk. Bizonyítsuk be, hogy ez a pont rajta van a négyszög egyik átlóján.*



Megoldás. Legyen a feladatban említett belső pont P. Mivel az APB és BCP háromszögek területe egyenlő, az ezekben közös BP-hez tartozó AT_1 és CT_2 magasságok is egyenlők. Ha T_1 és T_2 egybeesnek, akkor BP felezi AC-t. Ha T_1 és T_2 különbözőek, akkor AT_1CT_2 paralelogramma, amelynek átlói felezik egymást, így BP most is felezi AC-t (*ábra*).

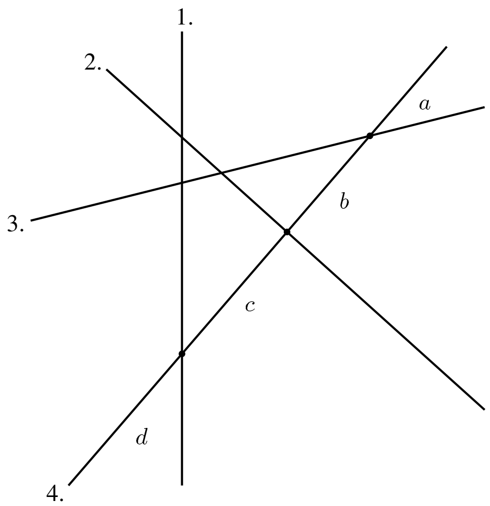
Hasonlóan igaz, hogy PD is felezi az AC átlót. Ezért ha BP és PD különbözőek, P metszéspontjuk az AC átló felezőpontja, míg ha egybeesnek, az éppen azt jelenti, hogy a B, P és a D egy egyenesen vannak, tehát P rajta van a BD átlón.

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Kovács Erika Renáta (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.)

130 dolgozat érkezett. 7 pontos Andrássy Zoltán, 6 pontos Kovács Erika Renáta és Tran Thanh Long megoldása. 5 pontot kapott 39, 4 pontot 30, 3 pontot 12, 2 pontot 12, 1 pontot 14 beküldő. 0 pontos 20 dolgozat.

Gy. 3243. *Osszuk fel a síkot* 1000 *részre a lehető legkevesebb egyenes felhasználásával.* (**H**)



Megoldás. Vizsgáljuk meg először, hogy n egyenes maximálisan hány részre osztja fel a síkot. Az *ábra* első két egyenesével $2+2$ tartomány keletkezik. Könnyen látható, hogy minden további egyenes akkor hozza létre a legtöbb új síkrészt, ha a már korábban felvett egyenesek egyikével sem párhuzamos, és nem megy át két megelőzően felvett egyenes metszéspontján. Ennek megfelelően pl. a negyedik egyenes az első három mindegyikét más-más pontban metszi, és a három „új” metszéspont ezt az egyenest az a, b, c, d szakaszokra bontja. A négy intervallumnak megfelelően négy „új” síkrész jön létre. Ugyanígy beláthatjuk, hogy az n-edik egyenest fölvéve legfeljebb n „új” síkrész keletkezik. Ezért n egyenes legfeljebb $N=2+2+3+\ldots+n$ részre osztja a síkot.

Ismeretes, hogy $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, így

(1) $$N=1+\frac{n(n+1)}{2}.$$

Az (1) képletből $n=44$ esetén $N=991$, tehát 44 egyenes még kevés.

Megmutatjuk, hogy 45 egyenessel az 1000 részre osztás lehetséges. Mivel (1)-ből $n=45$-re 1000-nél nagyobb szám adódik, egy ponton át 2-nél több egyenest próbálunk felvenni. Vegyünk föl 10, egy ponton átmenő egyenest; ezek 20 részre osztják a síkot. A tizenegyedik és minden további egyenest úgy vesszük föl, hogy ne menjen át semelyik korábban létrejött metszésponton, és ne legyen párhuzamos egyik korábban felvett egyenessel sem. Így a tizenegyedik egyenes 11, a tizenkettedik 12, ..., a negyvenötödik 45 „új” síkrészt hoz létre. A síkrészek száma ezzel

$$20+11+12+\ldots+45=1000.$$

Deli Lajos (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., 10. o.t.)
Ta Vinh Thong (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.)

Megjegyzések. 1. A megoldásban nyilvánvalónak vettük, bár indoklásra szorulna, hogy az n-edik egyenes felvehető úgy, hogy mindegyik korábban megrajzolt egyenest messe, és egyikkel se legyen párhuzamos.

2. Az (1) képletet a megoldók többsége teljes indukcióval igazolta.

221 dolgozat érkezett. 5 pontos 71, 4 pontos 45, 3 pontos 92, 2 pontos 1, 1 pontos 6, 0 pontos 6 dolgozat.

Gy. 3244. *Két hasonló és azonos körüljárású háromszög megfelelő csúcsait összekötő szakaszokat megfeleztük. Bizonyítsuk be, hogy ha ezek a felezőpontok háromszöget alkotnak, akkor ez a háromszög az eredetiekhez hasonló.*

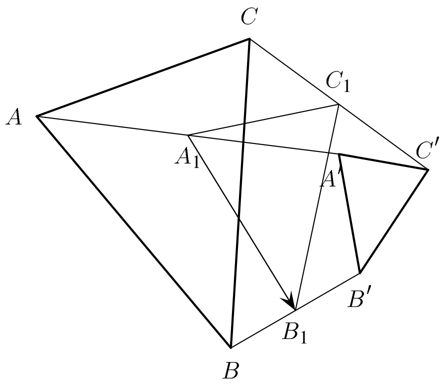
Megoldás. Használjuk az *1. ábra* jelöléseit. Keressünk kapcsolatot a háromszögek oldalvektorai között. Könnyen látható, hogy

$$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_1A'}+\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'B_1} \quad \text{és}$$
$$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1},$$

ezeket összeadva:

$$2\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{AB}, \tag{1}$$

hiszen a jobb oldali első és harmadik tagok összege zérusvektor. Hasonlóan kapjuk, hogy



1. ábra

$$2\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{BC} \tag{2}$$

és

$$2\overrightarrow{C_1A_1}=\overrightarrow{C'A'}+\overrightarrow{CA}. \tag{3}$$

Rajzoljuk le ezután újra az ABC háromszöget, és a megfelelő csúcsaihoz mérjük föl nagyság és irány szerint az $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'C'}$ és $\overrightarrow{C'A'}$ vektorokat a *2. ábra* szerint. Így az

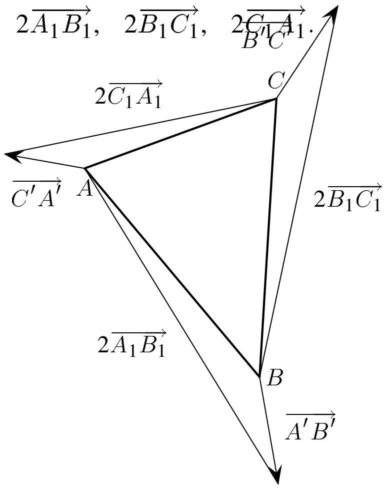
ABC háromszög oldalaihoz illeszkedő három – esetleg elfajuló – háromszöget kapunk, amelyek harmadik oldalának vektora rendre

$$2\overrightarrow{A_1B_1},\quad 2\overrightarrow{B_1C_1},\quad 2\overrightarrow{C_1A_1}. \tag{2}$$

Ez a három háromszög hasonló. Ez abból következik, hogy az ABC és $A'B'C'$ azonos körüljárási irányú hasonló háromszögek megfelelő oldalpárjai egymáshoz képest ugyanakkora szöggel vannak elforgatva, tehát a szóban forgó három háromszögben egyenlő két megfelelő oldalpár aránya és ezek közbezárt szöge. De akkor a (4) alatti vektorok abszolútértékére:

$$\frac{|2\overrightarrow{A_1B_1}|}{AB}=\frac{|2\overrightarrow{B_1C_1}|}{BC}=\frac{|2\overrightarrow{C_1A_1}|}{CA}, \tag{5}$$

amiből $A_1B_1C_1\triangle \sim ABC\triangle$. Mivel az (5) összefüggés az elfajuló esetben is érvényes, a feladat állítását bebizonyítottuk.



2. ábra

Kovács Erika (Budapest, Árpád Gimn., 9. o.t.) dolgozata alapján

89 dolgozat érkezett. 7 pontos Kunszenti-Kovács Dávid, 6 pontos Andrássy Zoltán megoldása. 5 pontot kapott Ambrus Gergely, Babos Attila, Béky Bence, Benedek 013 Éva, Birkner Tamás, Bognár Attila, Csereklei Gábor, Csernenszky András, Csurgó Krisztina, Gerencsér Balázs, Gyurcsek András, Hamar Gergő, Harangi Viktor, Horváth Dénes, Kovács 625 Erika, Kovács 721 Péter, Lovrics Anna, Mátyási Péter, Nagy 139 Gergely, Nagy Tamás, Nagy 444 Zoltán, Pesti Gábor, Polgár 624 Orsolya, Siklósi Dávid, Somogyi Dávid, Tolvaj Nóra, Tran Thanh Long, Váradi Vajk, Varga Gábor, Varjú Péter és Vígh Viktor. 4 pontos 14, 3 pontos 5, 2 pontos 8, 1 pontos 11, 0 pontos 16 dolgozat. Nem versenyszerű 2.

Gy. 3245. *Melyik az a legkisebb k természetes szám, amelyre igaz a következő állítás? „Ha egy tetraéder élszögei között van k darab 60°-os, akkor a tetraéder csak szabályos lehet.”*

Megoldás. Egy tetraéder szabályos, ha minden lapja szabályos háromszög, és lapszögei is egyenlők. Megmutatjuk, hogy a legkisebb ilyen k szám a hét. Ha $k=6$, akkor lehetséges, hogy a tetraéder két lapja szabályos háromszög, és ez a két lap például 90°-os szöget zár be. Ekkor a tetraéder nem szabályos.

Ha $k=7$, akkor a skatulya-elv szerint van legalább két olyan lap, amelyeknek legalább két szöge 60°, és ezeken kívül még van legalább egy olyan lap, amelynek legalább egy szöge 60°-os. Ennek az utóbbi lapnak két oldala közös az előbbi egybevágó szabályos háromszöglapokkal, tehát egyenlő szárú, és mivel van egy 60°-os szöge, szabályos lesz. A negyedik lap mindhárom éle az eddig leírt három egybevágó szabályos háromszög élei közül kerül ki, így ez a lap – és maga a tetraéder is – szabályos.

Breuer János (Budapest, Apáczai Csere J. Gimn., 10. o.t.)
Csóka Endre (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 8. o.t.)
Reviczky Ádám János (Budapest, Szent István Gimn., 10. o.t.)

140 dolgozat érkezett. 5 pontos 55, 4 pontos 28, 3 pontos 12, 2 pontos 12, 1 pontos 8, 0 pontos 25 dolgozat.

Gy. 3246. *Két játékos a következő játékot játssza egy $n \times n$-es sakktáblán. Minden mezőn egy korong van elhelyezve, amelynek egyik oldala piros, a másik kék. A játékosok felváltva lépnek. Aki éppen lép, kiválaszt egy kék korongot, és abban a téglalapban, amelynek bal felső sarka a kiválasztott korong, jobb alsó sarka az egész tábla jobb alsó sarka, minden egyes korongot megfordít. Az veszít, aki nem tud lépni.*

Melyek azok a kiinduló helyzetek, amelyekben a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája?

Megoldás. Vegyük észre, hogy a játék során a jobb alsó sarokban lévő korong színe minden lépésben megfordul. Így, ha a kiinduló állásban az itt levő korong kék volt, akkor a kezdő játékos nem veszítheti, hiszen mindig tud lépni: a táblán a jobb alsó sarokban levő korong mindig kék, amikor ő következik.

Megmutatjuk, hogy ebben az esetben megfelelő taktikával biztosan nyer is, azaz a játék véges sok lépésben véget ér; tehát a második játékos már nem fog tudni lépni. Válassza a kezdő játékos mindig a bal felső saroktól kezdve soronként haladva az első kék korongot. Az előtte levő korongok tehát mind pirosak – azok nem is változhatnak már többé, és most ez a korong is végleg piros lett. Így a kezdő játékos minden lépésekor legalább eggyel növeli az „elöl álló” piros korongok számát, tehát legkésőbb az $(n^2 - 1)$-edik lépésben már csak egy kék korong lesz: a jobb alsó sarokban.

Ha tehát a kiinduló állásban a jobb alsó sarokban kék korong volt, a kezdő játékosnak mindig van nyerő stratégiája. Ha viszont a jobb alsó sarokban piros volt a korong színe, akkor biztosan nem nyerhet, hiszen az ő lépései után a második játékosnak a jobb alsó korong mindig kék lesz. Ekkor a második játékos fog biztosan nyerni ugyanezzel a taktikával.

Bálint Gergely (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzés. Könnyen megmutatható, hogy a küzdő felek által választott – jó vagy rossz – stratégiától függetlenül a játék mindig befejeződik véges számú lépésben.

97 dolgozat érkezett. 6 pontos Deli Lajos megoldása. 5 pontot kapott Ambrus Gergely, Andrássy Zoltán, Babos Attila, Backhausz Ágnes, Bálint Gergely, Balogh 126 Zoltán, Bartha Tamás, Béky Bence, Csernenszky András, Fehér Gergely, Fodor 133 Gyula, Gerencsér Balázs, Gombkötő Kitti, Hablicsek Márton, Harangi Viktor, Kalcsú Áron, Kerékfy Péter, Koch Dénes, Kovács Erika Renáta, Kunszenti-Kovács Dávid, Nagy 444 Zoltán, Pesti Gábor, Rácz Éva, Reviczky Ádám János, Siklósi Dávid, Simon Győző, Somogyi Dávid, Somogyi 555 Tamás, Tóth 370 Ágnes, Varjú Péter és Vígh Viktor. 4 pontos 17, 3 pontos 28, 2 pontos 5, 1 pontos 9, 0 pontos 5 dolgozat, nem versenyszerű 1.

Gy. 3247. *Melyik szám nagyobb,*

$$1997^{1998^{1999}} \quad \textit{vagy} \quad 1999^{1998^{1997}}?$$

Megoldás.

$$A = 1997^{1998^{1999}} = 1997^{1998^{(1997+2)}} = 1997^{1998^2 \cdot 1998^{1997}} = \left(1997^{1998^2}\right)^{1998^{1997}}.$$

Legyen $a=1997^{1998^2}$, $B=1999^{1998^{1997}}$, $b=1999$.

Mivel $1997^2>1999$, így $1997^{1998^2}>1999$, azaz $a>b$, és mivel mindkettő 1-nél nagyobb szám, így ugyanarra a hatványra emelve őket, megmarad az egyenlőtlenség. Ezért $A=a^{1998^{1997}}>B=b^{1998^{1997}}$.

Tehát a bal oldali szám a nagyobb.

Nagy 725 János (Eger, Dobó I. Gimn., 9. o.t.) és *Karácsonyi József Sándor* (Szekszárd, Garay J. Gimn., 10. o.t.) megoldása alapján

Megjegyzések. **1.** Többen logaritmussal számoltak.

2. *Harangi Viktor* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.) hasonló gondolatmenettel általánosan, minden $k\geqslant 3$ egész számra belátta, hogy $(k-1)^{k^{k+1}}>(k+1)^{k^{k-1}}$.

242 dolgozat érkezett. 7 pontos Deli Lajos, Horváth Szilárd, Nagy Tamás és Szalay Zsófia megoldása. 6 pontot kapott Backhausz Ágnes, Erdei Zsuzsa, Gémes Norbert, Harangi Viktor, Pozsonyi Tamás, Schlanger Judit, Siska Ádám, Somogyi Dávid, Székelyhidi Tamás, Tábor Áron, Tóth 370 Ágnes, Tóth Rudolf, Zalán Péter és Zséger Ádám. 5 pontos 175, 4 pontos 5, 3 pontos 6, 2 pontos 2, 1 pontos 4, 0 pontos 32 dolgozat.

Gy. 3248. *Jelöljön p tetszőleges prímszámot. Keressük meg a*

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{p}$$

egyenlet összes nem negatív egész megoldását.

Megoldás. Ha x és y nem negatív egészek, akkor négyzetre emelve az eredetivel ekvivalens egyenletet kapunk:

$$x+y+2\sqrt{xy}=p. \tag{1}$$

x, y és p is egészek, így $2\sqrt{xy}$ is egész, tehát $\sqrt{xy}$ racionális, azaz $\sqrt{xy}$ is egész kell legyen, tehát xy négyzetszám.

Legyen d az x és y legnagyobb közös osztója. Mivel $d\mid x$ és $d\mid y$, így $d^2\mid xy$, tehát $d\mid\sqrt{xy}$, ezért d osztója (1) bal oldalának, azaz $d\mid p$. Mivel p prím, így $d=1$ vagy $d=p$ lehet.

Ha $d=1$, akkor x és y relatív prímek, ezért mivel xy négyzetszám, x és y is négyzetszám, és (1) miatt $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=p$, ami lehetetlen, hiszen a p prím nem lehet négyzetszám. Így csak $d=p$ állhat fenn, ekkor x és y közül az egyik p-vel, a másik 0-vel egyenlő.

Az egyenletnek tehát csak $x=0$; $y=p$ és $y=0$; $x=p$ a megoldásai.

Koch Dénes (Linz, Akademisches Gymn., 10. o.t.) dolgozata alapján

182 dolgozat érkezett. 6 pontos Deli Lajos és Horváth Szilárd megoldása. 5 pontot kapott 127, 4 pontot 13, 3 pontot 13, 2 pontot 8, 1 pontot 8, 0 pontot 9 beküldő. Nem versenyszerű 2 dolgozat.

Matematika feladatok megoldásai

F. 3241. *Az ABC háromszög AB, AC, illetve CB oldalán lévő C_1, B_1, A_1 pontokra*

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}=\lambda.$$

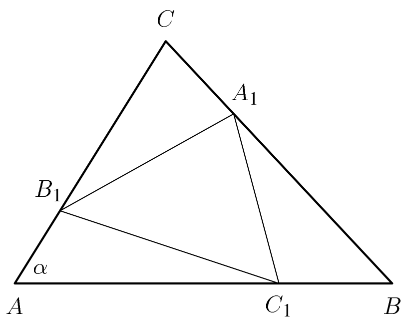
Legyen az AC_1B_1, BC_1A_1, CA_1B_1, $A_1B_1C_1$ és ABC háromszögek beírt köreinek sugara rendre r_1, r_2, r_3, r_4 és r. Milyen λ értékekre teljesül az

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_4}+\frac{4}{r}$$

egyenlőség?

Javasolta: *Bíró Bálint,* Eger

Megoldás. Jelöljük az AC_1B_1, BC_1A_1, CA_1B_1, $A_1B_1C_1$ és ABC háromszögek területét és kerületét rendre T_1, K_1; T_2, K_2; T_3, K_3; T_4, K_4 és T, K-val. Tudjuk, hogy egy háromszög területének kétszerese megegyezik kerületének és a beírt kör sugarának szorzatával. Az öt háromszög kerületére nyilvánvalóan teljesülő $\frac{K_1+K_2+K_3}{2}=\frac{K_4+K}{2}$ egyenlőséget tehát

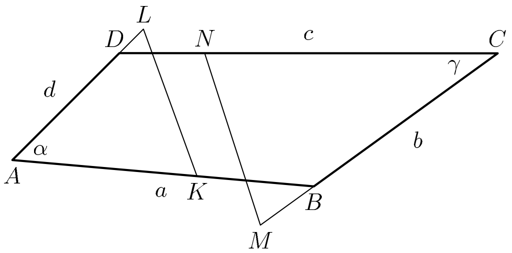


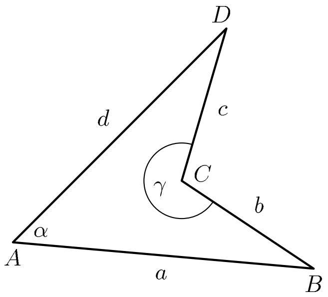
$$\text{(1)}\qquad \frac{T_1}{r_1}+\frac{T_2}{r_2}+\frac{T_3}{r_3}=\frac{T_4}{r_4}+\frac{T}{r}$$

alakba is írhatjuk.

Legyen $\alpha=BAC\sphericalangle$. Ekkor $2T=AB\cdot AC\cdot\sin\alpha$ és $2T_1=AB_1\cdot AC_1\cdot\sin\alpha$. Mivel $\frac{AC_1}{C_1B}=\lambda$ és $AC_1+C_1B=AB$, azért $AC_1=\frac{\lambda}{1+\lambda}\cdot AB$; a $\frac{CB_1}{B_1A}=\lambda$ és $CB_1+B_1A=CA$ összefüggésekből pedig $AB_1=\frac{1}{1+\lambda}\cdot AC$ adódik. Vagyis

$$2T_1=AB_1\cdot AC_1\cdot\sin\alpha=\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\alpha=\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\cdot 2T.$$





Ugyanígy látható be, hogy $T_2 = T_3 = \dfrac{\lambda}{(1+\lambda)^2} \cdot T$ is teljesül. Ebből következik, hogy $T_4 = T - (T_1 + T_2 + T_3) = \left(1 - \dfrac{3\lambda}{(1+\lambda)^2}\right) \cdot T$. Ezeket az (1) egyenlőségbe írva:

$$\frac{\lambda \cdot T}{(1+\lambda)^2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right) = \left(1 - \frac{3\lambda}{(1+\lambda)^2}\right)\frac{T}{r_4} + \frac{T}{r}.$$

Ezt rendezve, és felhasználva az $\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3} = \dfrac{1}{r_4}+\dfrac{4}{r}$ feltételt, kapjuk, hogy

$$\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\left(\frac{1}{r_4}+\frac{4}{r}\right) = \frac{1-\lambda+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} \cdot \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r}.$$

Ezt $(1+\lambda)^2$-tel szorozva, majd ismét rendezve:

$$\lambda \cdot \frac{1}{r_4} + 4\lambda \cdot \frac{1}{r} = (1-\lambda+\lambda^2) \cdot \frac{1}{r_4} + (1+2\lambda+\lambda^2) \cdot \frac{1}{r},$$

$$0 = (1-\lambda)^2 \cdot \left(\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r}\right).$$

Ez csak akkor teljesülhet, ha $\lambda = 1$.

A $\lambda = 1$ esetben az A_1, B_1, C_1 pontok a háromszög oldalfelező pontjai, ezért a négy kis háromszög mindegyike hasonló az ABC háromszöghöz, a hasonlóság aránya $1:2$. Tehát ekkor $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \dfrac{1}{2}r$, vagyis valóban teljesül az $\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3} = \dfrac{1}{r_4}+\dfrac{4}{r}$ összefüggés.

82 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 55, 4 pontot 9, 3 pontot 4, 2 pontot 3, 1 pontot 3, 0 pontot 8 versenyző.

F. 3247. *Az $ABCD$ négyszög A-ból induló oldalainak mértani közepét A-ból felmérve az AB és az AD félegyenesekre, kapjuk a K és az L pontokat, a C-ből induló oldalainak mértani közepét C-ből felmérve a CB és a CD félegyenesekre pedig az M és az N pontokat. Milyen feltétel mellett teljesül, hogy $KL = MN$?*

Megoldás. Jelöljük az $ABCD$ négyszög oldalait az *ábrákon* látható módon a, b, c, d-vel, az A és a C csúcsnál lévő szögét pedig α-val, illetve γ-val.

A $KL = MN$ feltétel pontosan akkor teljesül, ha $KL^2 - MN^2 = 0$, vagyis – a koszinusztételt alkalmazva az AKL és a CNM háromszögekre – ha

$$\text{(1)}\quad \left[(\sqrt{ad})^2 + (\sqrt{ad})^2 - 2\sqrt{ad}\cdot\sqrt{ad}\cos\alpha\right] - \left[(\sqrt{bc})^2 + (\sqrt{bc})^2 - 2\sqrt{bc}\cdot\sqrt{bc}\cos\gamma\right] = 0.$$

Viszont az ABD és a CBD háromszögek közös BD oldalára felírt koszinusztétel szerint

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma,$$

ezért az (1) feltételt átalakíthatjuk a következő módon:

$$0 = (2ad - 2ad\cos\alpha) - (2bc - 2bc\cos\gamma) = 2ad - 2bc + b^2 + c^2 - (a^2 + d^2) =$$
$$= (b - c)^2 - (a - d)^2 = (a + b - c - d)(b + d - a - c).$$

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, mondhatjuk, hogy $KL = MN$ pontosan akkor teljesül, ha $a + b = c + d$ vagy $a + c = b + d$. (Ez a feltétel úgy is fogalmazható, hogy az A és C pontok ugyanazon a B és D fókuszú hiperbolán vannak.)

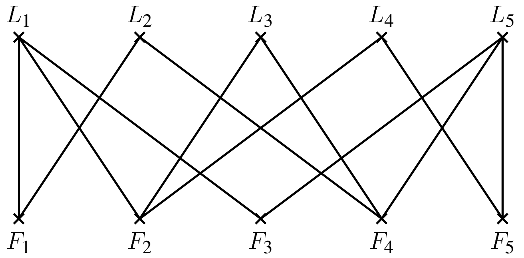
Terpai Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

107 dolgozat érkezett. 5 pontos 83, 4 pontos 2, 3 pontos 3, 2 pontos 1, 1 pontos 8, 0 pontos 10 dolgozat.

F. 3248. *Egy 5 lányból és 5 fiúból álló társaság azonos nemű tagjai nem ismerik egymást, továbbá nincs két olyan lány, akinek lenne két közös fiúismerőse. Legfeljebb hány ismeretség van a társaság tagjai között? Hogyan módosul a válasz, ha a társaságban 7 lány és 7 fiú van?*

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy 5 fiú és 5 lány esetén az ismeretségek száma legfeljebb 12. Tegyük fel, hogy ez nem igaz, a tagok közt legalább 13 ismeretség van. Ekkor a skatulya-elv alapján van 2 lány, akik együttvéve legalább 6 fiút ismernek. Ennél több fiút viszont nem is ismerhetnek, hiszen 5 fiú van, és ezek közül legfeljebb egyet ismernek mindketten. Tehát van 2 lány, akik együtt 6 ismeretséggel rendelkeznek, minden fiút ismer valamelyikük, egyet pedig mindketten. Ekkor viszont a többi lánynak fejenként legfeljebb 2 ismerőse lehet, egy a fenti lányok közül az egyik, egy pedig a másik fiúismerősei közül, különben valamelyiküknek 2 közös ismerőse lenne. Így az 5 lánynak összesen legfeljebb $6 + 3\cdot 2 = 12$ ismerőse van, ami ellentmond a feltevésünknek.

Az *1. ábrán* látható, hogy 12 ismeretség viszont már lehetséges a feltételeknek megfelelő módon. A lányokat az L_1, L_2, $\ldots$, L_5, a fiúkat az F_1, F_2, $\ldots$, F_5 pontok jelképezik, a társaság két tagja pedig pontosan akkor ismeri egymást, ha a megfelelő pontok össze vannak kötve.



1. ábra

Megmutatjuk, hogy 7 lány és 7 fiú esetén az ismeretségek száma legfeljebb 21. Tegyük fel, hogy ennél több. Ekkor a skatulya-elv alapján van egy lány, akinek legalább 4 ismerőse van. Ha egy másik lánnyal együtt valamennyi fiút ismerik, akkor ketten együtt legfeljebb 8 ismeretséggel rendelkeznek, a többiek pedig az előző esetekben is alkalmazott gondolatmenet szerint egyenként legfeljebb kettővel, vagyis az összes ismeretségek száma legfeljebb $8+5\cdot 2=18$, ami ellentmondás. Nincs tehát olyan lány, aki az első lány által nem ismert „szabad” fiúk mindegyikét ismerné.

Ekkor viszont csak úgy jöhet létre 22 ismeretség, ha az első lány pontosan 4 fiút ismer, a többi lány mindegyike pedig 2-2 szabad fiút, valamint az első lány ismerősei közül 1-1 fiút ismer. ($22=4+6\cdot 3$, 22-nél több ismeretség nem jöhet létre.) Ez azt jelenti, hogy a 6 lány közt biztosan van kettő, akiknek van közös ismerőse az első lány által ismert 4 fiú között (ismét a skatulya-elvet használtuk, $6>4$). De ez a két lány a 3 szabad fiú közül 2-2-t ismer, tehát a szabad fiúk közt is van közös ismerősük, ami ellentmond a feladat feltételeinek. Tehát az ismeretségek száma valóban legfeljebb 21.

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
L_7	1	1		1			
L_6		1	1		1		
L_5			1	1		1	
L_4				1	1		1
L_3	1				1	1	
L_2		1				1	1
L_1	1		1				1

2. ábra

Azt, hogy 21 ismeretség elérhető, a *2. ábrán* látható táblázat mutatja. A sorok a lányokat, az oszlopok a fiúkat jelképezik, egy sor és egy oszlop kereszteződésébe pontosan akkor írtunk 1-est, ha a megfelelő fiú és lány ismeri egymást.

Dancsó Zsuzsanna (Budapest, ELTE Trefort Á. Gyak. Isk., 12. o.t.)

Megjegyzések. 1. Meg lehet mutatni, hogy 21 ismeretség csak úgy jöhet létre a feltételeknek megfelelő módon, ahogyan azt példánkban megadtuk (azaz a fiúkat és a lányokat megszámozhatjuk úgy, hogy az ismeretségek éppen a táblázatban megadottak legyenek).

2. Feladatunk tulajdonképpen egy gráfelméleti szélsőérték-probléma két speciális esetével foglalkozik. A probléma a következő:

Legfeljebb hány éle lehet egy olyan páros gráfnak, amelynek mind csúcshalmazában n csúcs van, és nem tartalmaz négyszöget?

A feladat megoldása megtalálható pl. *Reiman István:* A geometria és határterületei című könyvének 334–336. oldalain. Általában igaz, hogy az élek száma legfeljebb $\left(n+\sqrt{4n^3-3n^2}\right)/2$, s ez a korlát csak akkor érhető el, ha létezik ún. q-adrendű véges projektív sík, ahol $n=q^2+q+1$.

131 dolgozat érkezett. 7 pontos Taraza Busra, 6 pontos Györey Bernadett, Máthé András, Papp Dávid és Szabó 997 Péter megoldása. 5 pontot kapott Boros M. Mátyás, Csirmaz Előd, Csiszár Gábor, Csóka Endre, Dancsó Zsuzsanna, Dénes Attila, Devecsery András, Fehér Lajos Károly, Gelencsér Gábor, Gerencsér Balázs, Győri Nikolett, Gyürki István, Harangi Viktor, Horváth 202 Gábor, Horváth 713 György, Keszegh Balázs, Kiss 345 Gergely, Kunszenti-Kovács Dávid, Lábó Eszter, Lábó Melinda, Naszódi Gergely, Pálvölgyi Dömötör, Pap Júlia, Pozsonyi Gergő, Szabadka Zoltán, Szécsi Vajk, Terpai Tamás, Tran Thanh Long, Vágvölgyi Péter és Zábrádi Gergely megoldása. 4 pontot kapott 11, 3 pontot 9, 2 pontot 27, 1 pontot 27, 0 pontot 22 beküldő.

F. 3249. *Egy konvex poliéder minden lapja páratlan oldalú sokszög, és minden csúcsában páratlan sok él találkozik. Lehetséges-e, hogy a háromszöglapok számának és a három élre illeszkedő csúcsok számának az összege 9?*

Megoldás. Jelöljük a test éleinek számát e-vel, az i oldalú lapok számát ℓ_i-vel, az i számú élt tartalmazó csúcsok számát pedig c_i-vel ($i=3, 5, 7, \ldots$). Mivel a test minden éle két lapon van rajta, illetve két csúcsban végződik, azért

$$2e=3\ell_3+5\ell_5+7\ell_7+\ldots+i\cdot\ell_i+\ldots \quad \text{és} \quad 2e=3c_3+5c_5+7c_7+\ldots+ic_i+\ldots$$

A poliéder konvex, ezért érvényes rá Euler tétele: $e+2=(\ell_3+\ell_5+\ell_7+\ldots)+(c_3+c_5+ +c_7+\ldots)$. Ezt 4-gyel szorozva és az előző két egyenlőséget felhasználva, átalakítva kapjuk, hogy

$$4(\ell_3+\ell_5+\ell_7+\ldots)+4(c_3+c_5+c_7+\ldots)=4e+8=$$
$$2e+2e+8=(3\ell_3+5\ell_5+7\ell_7+\ldots)+(3c_3+5c_5+7c_7+\ldots)+8.$$

Ezt rendezve

$$\ell_3+c_3=8+(\ell_5+3\ell_7+\ldots+(i-4)\ell_i+\ldots)+(c_5+3c_7+\ldots+(i-4)c_i+\ldots)$$

adódik.

A feladat feltételei szerint $\ell_3+c_3=9$, ami csak úgy lehetséges, ha a testnek a háromszöglapokon kívül pontosan egy ötszöglapja van, vagy a három élre illeszkedő csúcsokon kívül pontosan egy ötélű csúcsa van. Az első esetben $\ell_5=1$ és $c_5=0$, tehát

$$2e=3\ell_3+5\cdot 1=3c_3=3\cdot(9-\ell_3),$$

vagyis $3\ell_3+5=27-3\ell_3$, azaz $\ell_3=\dfrac{11}{3}$, ami nyilván nem lehet, mert a háromszöglapok szám egész szám. A második esetben teljesen hasonló módon $c_3=\dfrac{11}{3}$ adódik, ami szintén lehetetlen.

Ezzel megmutattuk, hogy a feladat kérdésére a válasz: nem.

Birkner Tamás (Budapest, Deutsche Schule, 6. o.t.) dolgozata alapján

52 dolgozat érkezett. 6 pontos Terpai Tamás megoldása. 5 pontot kapott 37, 4 pontot 9, 1 pontot 1, 0 pontot 4 beküldő.

F. 3251. *Egy ping-pong versenyen bármely két versenyző pontosan egyszer játszott egymással. Egy A versenyző akkor kapott díjat, ha bármely másik B résztvevőt vagy legyőzött, vagy legyőzött valakit, aki B-t megverte. Mutassuk meg, hogy ha pontosan egy játékos kapott díjat, akkor ő mindenkit legyőzött.*

Kínai versenyfeladat

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy legalább egy versenyző kapott díjat. Legyen a versenyzők száma n. Válasszuk ki a legtöbb győzelmet szerzett versenyzőt (ha több ilyen is van, ezek egyikét), jelöljük őt A-val, győzelmeinek számát pedig k-val. Ha $k=n-1$, akkor A mindenkit legyőzött, tehát díjazott. Ha $k<n-1$, akkor van legalább egy olyan versenyző, aki A-t legyőzte. Tegyük fel, hogy A nem kapott díjat, azaz van olyan C versenyző, aki A-t megverte, és nem kapott ki egy olyan versenyzőtől sem, akit A legyőzött. Ekkor azonban C megverte az összes, A-tól vereséget szenvedett versenyzőt és A-t is, azaz legalább $k+1$ győzelme van, ami ellentmond annak, hogy A győzelmeinek száma maximális. Tehát A díjazott.

Térjünk rá a feladat állításának igazolására. Tegyük fel, hogy egyedül A kapott díjat, ugyanakkor nem győzött le mindenkit. Legyen B_1, B_2, $\ldots$, B_k az összes olyan versenyző, akit A legyőzött, a többi (C_1, C_2, $\ldots$, C_{n-k}) versenyző pedig megverte A-t. Mivel A díjazott, azért az összes C versenyző kikapott legalább egy B-től.

Tekintsük a C versenyzők egymás közötti mérkőzéseit. A már bizonyítottak szerint ebben a „minibajnokságban” van díjazott, azaz olyan, aki az összes többi C-t vagy megverte, vagy egy legyőzőjét megverte. Jelöljük őt C_1-gyel.

C_1 (mint ahogy az összes C) megverte A-t, és megverte az összes B egy legyőzőjét, nevezetesen A-t. Ez azt jelenti, hogy C_1 a teljes bajnokságban is díjat kapott, ez pedig ellentmond annak, hogy A az egyedüli díjazott. Tehát a C versenyzők halmaza üres, az A valóban legyőzött mindenkit.

105 dolgozat érkezett. 5 pontos 47, 4 pontos 24, 3 pontos 16, 2 pontos 7, 1 pontos 3, 0 pontos 8.

F. 3254. *Egy transzformáció a sík $P(x;y)$ pontjához $|x|\neq|y|$ esetén a*

$$P'\left(\frac{x}{x^2-y^2};\frac{y}{x^2-y^2}\right)$$

pontot rendeli, $|x|=|y|$ esetén pedig önmagát. Határozzuk meg a sík egyeneseinek a transzformációval kapott képét.

Megoldás. Jelöljük T-vel a megadott transzformációt. Először megmutatjuk, hogy T inverze megegyezik T-vel. Ehhez elegendő azt belátnunk, hogy ha T-t egymás után kétszer alkalmazzuk, akkor minden pont képe önmaga. Ez nyilvánvaló azon pontok esetén, amelyek illeszkednek az $y=x$ vagy az $y=-x$ egyenletű egyenesekre. Legyen $Q(a,b)$ egy olyan pont, amelyre $|a|\neq|b|$. Ekkor

$$T(T(Q(a,b)))=T\left(Q'\left(\frac{a}{a^2-b^2};\frac{b}{a^2-b^2}\right)\right)=$$

$$=Q''\left(\frac{\frac{a}{a^2-b^2}}{\left(\frac{a}{a^2-b^2}\right)^2-\left(\frac{b}{a^2-b^2}\right)^2};\frac{\frac{b}{a^2-b^2}}{\left(\frac{a}{a^2-b^2}\right)^2-\left(\frac{b}{a^2-b^2}\right)^2}\right).$$

A Q'' pont koordinátáiban szereplő emeletes törteket átalakítva:

$$\frac{\frac{a}{a^2-b^2}}{\left(\frac{a}{a^2-b^2}\right)^2-\left(\frac{b}{a^2-b^2}\right)^2}=\frac{a(a^2-b^2)}{a^2-b^2}=a \quad \text{és} \quad \frac{\frac{b}{a^2-b^2}}{\left(\frac{a}{a^2-b^2}\right)^2-\left(\frac{b}{a^2-b^2}\right)^2}=\frac{b(a^2-b^2)}{a^2-b^2}=b,$$

tehát Q'' valóban megegyezik Q-val.

Ha a síkon egy $\mathcal{A}$ alakzat egyenlete $F(x,y)=0$, S pedig olyan invertálható transzformáció, amelynek S^{-1} inverze a $P(x,y)$ pontot a $P'(x',y')$ pontba viszi, akkor az $\mathcal{A}$ alakzat S-nél származó képének egyenlete $F(x',y')=0$, mert $P\in S(\mathcal{A})$ pontosan akkor teljesül, ha $S^{-1}(P)\in S^{-1}(S(\mathcal{A}))$, azaz ha $P'\in\mathcal{A}$.

Esetünkben $T^{-1}=T$, tehát a transzformáció inverze is helyben hagyja azokat a pontokat, amelyeknek koordinátáira $|x|=|y|$ teljesül, $|x|\neq|y|$ esetén pedig $T^{-1}(P(x,y))=P'\left(\frac{x}{x^2-y^2};\frac{y}{x^2-y^2}\right)$. A sík minden e egyenesének egyenlete felírható $Ax+By+C=0$ alakban, ahol $A^2+B^2\neq 0$. Az e egyenesnek azok a pontjai, amelyek rajta vannak az $y=x$ vagy az $y=-x$ egyenletű egyeneseken, helyben maradnak a T transzformációnál, az e további pontjai pedig az előzőek alapján az

$$A\frac{x}{x^2-y^2}+B\frac{y}{x^2-y^2}+C=0$$

egyenletű alakzatra kerülnek. E pontok megegyeznek a

$$C(x^2-y^2)+Ax+By=0 \tag{1}$$

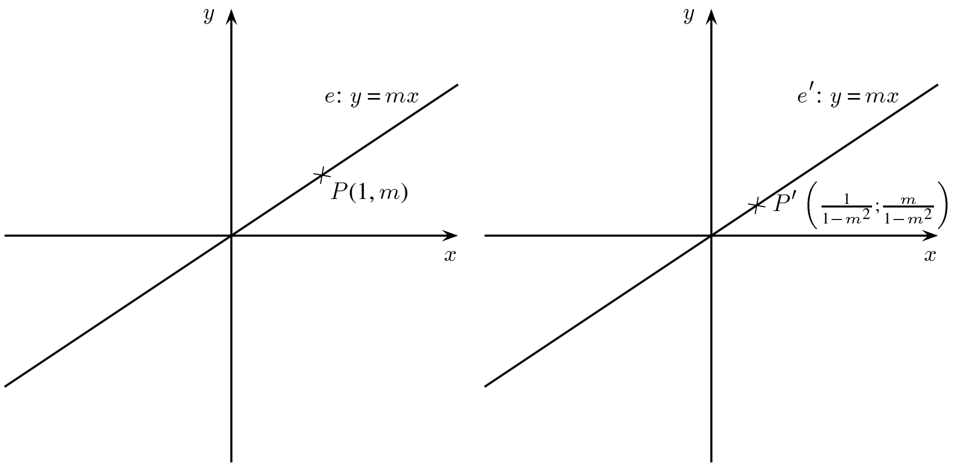
egyenletű alakzat pontjaival. Az (1) egyenlet $C=0$ esetén $A^2+B^2\neq 0$ miatt egy origón átmenő egyenes egyenlete. Ha $C\neq 0$, akkor (1) a következő alakra hozható:

$$\left(x+\frac{A}{2C}\right)^2-\left(y-\frac{B}{2C}\right)^2=\frac{A^2-B^2}{4C^2}. \tag{2}$$

Ez $|A|\neq|B|$ esetén egy hiperbola, $|A|=|B|$ esetén pedig egy metsző egyenespár egyenlete.

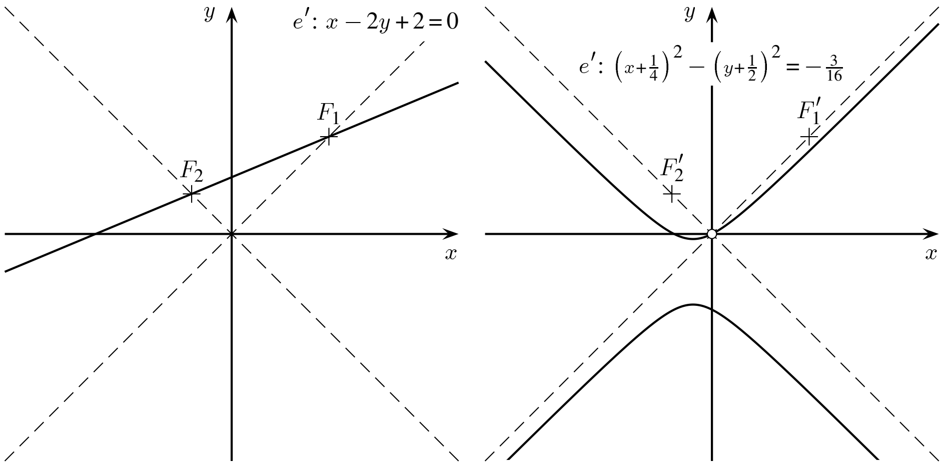
Ezek alapján a sík egyeneseinek T-nél kapott képe a következő:

i) Ha e egy origón átmenő egyenes, akkor képe önmaga (*1. ábra*). Ha egyenlete $y=\pm x$, akkor a képe T definíciója szerint önmaga. Ha pedig egyenlete $Ax+By=0$, akkor $C=0$ miatt az (1) egyenlet, tehát e képének egyenlete is $Ax+By=0$, és ennek az egyenesnek minden pontja előáll képként.

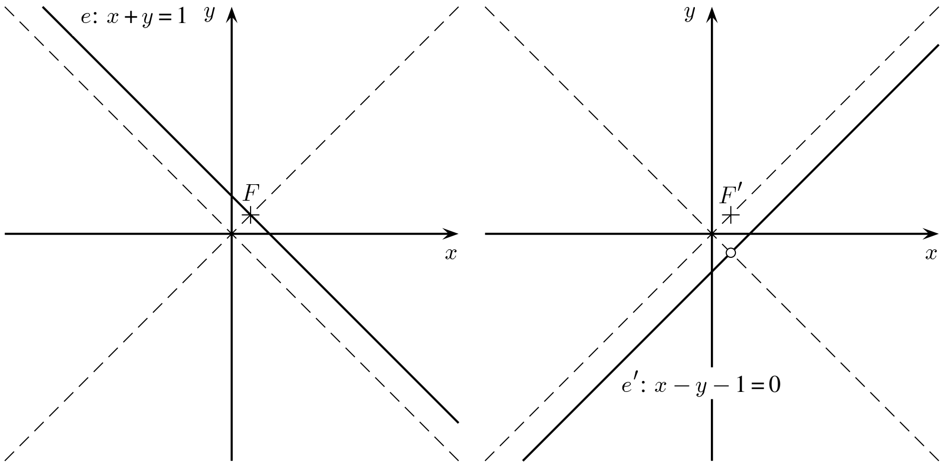


1. ábra

ii) Ha e nem megy át az origón és nem párhuzamos az $y=\pm x$ egyenletű egyenesek egyikével sem – azaz ha $C\neq 0$ és $|A|\neq|B|$ –, akkor e-nek az $y=\pm x$ egyenletű egyenesekkel való metszéspontjai helyben maradnak, a további pontok képei pedig a (2) egyenletű hiperbolának az origótól különböző összes pontját befutják (*2. ábra*).



2. ábra



3. ábra

iii) Ha e nem megy át az origón, de párhuzamos az $y=\pm x$ egyenletű egyenesek egyikével – azaz ha $C\neq 0$ és $|A|=|B|$ –, akkor a (2) egyenlet

$$\left(x+y+\frac{A-B}{2C}\right)\left(x-y+\frac{A+B}{2C}\right)=0 \tag{3}$$

alakba írható. $|A|=|B|$ miatt a két egyenes egyike megegyezik az $y=\pm x$ egyenesek egyikével. Az e egyenes képe a (3) egyenlettel leírt egyenespár másik egyenese lesz, kivéve a *3. ábrán* látható metszéspontot. Ezen kívül ebben az esetben is lesz egy fixpont, e-nek az $y=x$ vagy az $y=-x$ egyenletű egyenessel való metszéspontja.

Szilasi Zoltán (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján

57 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Szilasi Zoltán. 5 pontos Baharev Ali, Dancsó Zsuzsanna, Dénes Attila, Györey Bernadett, Győri Nikolett, Harangi Viktor, Horváth 202 Gábor, Horváth 413

László, Kiss 345 Gergely, Kunszenti-Kovács Dávid, Máthé András, Naszódi Gergely, Németh 729 András, Pszota Anikó, Szabadka Zoltán, Szabó 997 Péter, Székelyhidi Gábor, Terpai Tamás, Vaik István, Vitéz Ildikó és Zábrádi Gergely megoldása. 4 pontot kapott 10, 3 pontot 8, 2 pontot 8, 1 pontot 5, 0 pontot 4 beküldő.

F. 3256. *Legyenek* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *pozitív valós számok, amelyek összege* 1. *Bizonyítsuk be, hogy ekkor:*

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\ldots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geqslant \frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}.$$

I. megoldás. A feladat feltétele szerint $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$. A számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenség alapján:

$$\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}} \leqslant \frac{n\cdot\sqrt{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}}}{\sqrt{n-1}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}},$$

Így elegendő az

$$\text{(1)}\qquad \frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\ldots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geqslant \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}$$

egyenlőtlenséget bizonyítanunk. Ehhez az (1) bal oldalán álló törteket átalakítjuk:

$$\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}=-\frac{1-x_i}{\sqrt{1-x_i}}+\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}=-\sqrt{1-x_i}+\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}.$$

Ezután alsó becslést keresünk a

$$-\sqrt{1-x_1}-\sqrt{1-x_2}-\ldots-\sqrt{1-x_n} \quad \text{és az} \quad \frac{1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1-x_2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1-x_n}}$$

összegekre.

A számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenség szerint:

$$\text{(2)}\qquad -\left(\sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+\ldots+\sqrt{1-x_n}\right) \geqslant$$
$$\geqslant -n\sqrt{\frac{(1-x_1)+(1-x_2)+\ldots+(1-x_n)}{n}}=-\frac{\sqrt{n}(n-1)}{\sqrt{n-1}}.$$

A harmonikus és számtani, majd a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1-x_2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1-x_n}} \geqslant \frac{n^2}{\sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+\ldots+\sqrt{1-x_n}} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{n^2}{n\sqrt{\frac{(1-x_1)+(1-x_2)+\ldots+(1-x_n)}{n}}}=\frac{\sqrt{n}\cdot n}{\sqrt{n-1}}.$$

A (2) és (3) egyenlőtlenségeket összeadva:

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\ldots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}\geqslant\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}.$$

Ezzel a feladat állítását beláttuk. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x_1 = x_2=\ldots=x_n=\frac{1}{n}$.

II. megoldás. Az

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\ldots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}\geqslant\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}$$

egyenlőtlenségre adunk másik bizonyítást. Ehhez a Jensen egyenlőtlenséget (megtalálható pl. *Molnár Emil:* Matematikai versenyfeladatok gyűjteménye 1947–1970, Tankönyvkiadó, 1974. c. könyv 516. oldalán) fogjuk használni: ha $f(x)$ konvex függvény, akkor

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}\geqslant f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right);$$

egyenlőség csak $x_1=x_2=\ldots=x_n$ esetén áll fenn.

Az $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x}}$ függvény a $(0,1)$ intervallumon konvex, mert a második deriváltja $\frac{4-x}{4\left(\sqrt{1-x}\right)^5}$, $0<x<1$ esetén pozitív. Az $f(x)$ függvényre alkalmazva a Jensen-egyenlőtlenséget, adódik a kívánt állítás.

80 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Terpai Tamás. 5 pontos 58, 4 pontos 9, 3 pontos 1, 2 pontos 3, 1 pontos 2, 0 pontos 6 dolgozat.

F. 3259. *Egy derékszögű háromszög α és β hegyesszögeire:*

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{tg}^3\beta=70.$$

Határozzuk meg a szögeket.

Javasolta: *Fitos László,* Esztergom

Megoldás. Tudjuk, hogy a derékszögű háromszög hegyesszögeinek tangensei egymás reciprokai, ezért a $\operatorname{tg}\alpha=x$ jelöléssel egyenletünk

$$x+\frac{1}{x}+x^2+\frac{1}{x^2}+x^3+\frac{1}{x^3}=70$$

alakba írható. Ez egy ún. reciprok-egyenlet, célszerű $x+\frac{1}{x}$ helyére egy A-val jelölt, új ismeretlent bevezetni. Ekkor $x^2+\frac{1}{x^2}=A^2-2$ és $x^3+\frac{1}{x^3}=A^3-3A$, így az egyenlet

$$A+A^2-2+A^3-3A=70.$$

Rendezve és szorzattá bontva kapjuk, hogy

$$(A-4)(A^2+5A+18)=0.$$

Mivel $A^2+5A+18=(A+2{,}5)^2+11{,}75>0$, azért az egyenlet egyetlen valós gyöke $A=4$. Ebből kapjuk, hogy $x+\dfrac{1}{x}=4$, azaz $x^2-4x+1=0$. Tehát $x_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$.

Mivel $2+\sqrt{3}=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$, azért a háromszög két hegyesszögének tangense $2+\sqrt{3}$, illetve $2-\sqrt{3}$, tehát a háromszög hegyesszögei 75° és 15°. (Ezen szögek szögfüggvényeit az addíciós tételek segítségével tudjuk pontosan meghatározni, pl.

$$\operatorname{tg}75^\circ=\operatorname{tg}(45^\circ+30^\circ)=\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}30^\circ}{1-\operatorname{tg}45^\circ\cdot\operatorname{tg}30^\circ}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}.)$$

Venter György (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

142 dolgozat érkezett. 5 pontos 91, 4 pontos 22, 3 pontos 5, 2 pontos 4, 1 pontos 6, 0 pontos 3 dolgozat. Nem versenyszerű 11.

F. 3260. *A sík $A_1, A_2, \ldots, A_n$, B és C pontjairól tudjuk, hogy*

$$\sum_{i=1}^{n}A_iB=\sum_{i=1}^{n}A_iC=d,$$

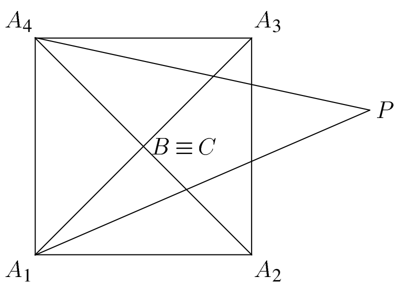
továbbá a sík minden P pontjára igaz, hogy

$$\sum_{i=1}^{n}A_iP\geqslant d.$$

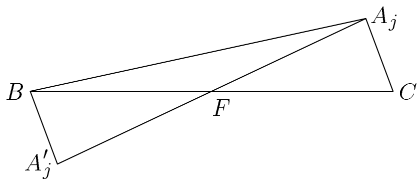
Mutassuk meg, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontok egy egyenesen vannak.

Megoldás. Az állítás nem igaz, ha B és C egybeesik. Legyen például $n=4$, az A_1, A_2, A_3, A_4 pontok alkossanak négyzetet, B és C pedig essen egybe ezen négyzet átlóinak metszéspontjával. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség miatt a sík minden P pontjára igaz, hogy $A_1P+A_3P\geqslant A_1A_3=A_1B+A_3B$ és $A_2P+A_4P\geqslant A_2A_4=A_2B+A_4B$ (*1. ábra*), tehát

$$\sum_{i=1}^{4}A_iP\geqslant\sum_{i=1}^{4}A_iB=\sum_{i=1}^{4}A_iC.$$



1. ábra



2. ábra

Megmutatjuk, hogy ha viszont B és C különböző pontok, akkor igaz az állítás. Tegyük fel ennek az ellenkezőjét. Ekkor az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontok nincsenek mind egy egyenesen, ezért biztosan van köztük egy olyan A_j pont, amelyik nincs rajta a BC egyenesen. Legyen a BC szakasz felezőpontja F, A'_j pedig A_j-nek az F-re vonatkozó tükörképe (*2. ábra*). Ekkor a tükrözés miatt $A_jC = A'_jB$, és így az $A_jBA'_j$ nemelfajuló háromszög oldalaira felírva a háromszög-egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$A_jB + A_jC = A_jB + A'_jB > A_jA'_j = 2A_jF.$$

Hasonló módon kapjuk, hogy minden A_i pont esetén

$$A_iB + A_iC \geqslant 2A_iF,$$

(egyenlőség csak akkor lehet, ha A_i rajta van a BC egyenesen). Ezeket összeadva és felhasználva, hogy az A_j pontra vonatkozó egyenlőtlenségben soha nincs egyenlőség, kapjuk, hogy

$$2d = \sum_{i=1}^{n} A_iB + \sum_{i=1}^{n} A_iC > 2\sum_{i=1}^{n} A_iF,$$

azaz $d > \sum_{i=1}^{n} A_iF$. Ez ellentmond feladatunk feltételeinek, tehát kezdeti feltevésünk hibás volt.

Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontok tehát valóban egy egyenesen vannak.

Megjegyzés. Könnyen látható, hogy egy egyenesen lévő $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontok esetén, ha n páros, léteznek a feladat feltételeinek eleget tevő különböző B és C pontok.

Koch Dénes (Linz, Akademische Gymnasium, 10. o.t.) dolgozata alapján

43 dolgozat érkezett. 5 pontos 37, 0 pontos 6.

F. 3261. *Mutassuk meg, hogy ha a tér v_1, v_2, v_3, v_4 nem egy síkban lévő vektorainak összege* **0***, akkor létezik olyan tetraéder, amelynek S_1, S_2, S_3, S_4 lapjai merőlegesek a v_i vektorokra, és S_i területének mérőszáma megegyezik v_i hosszának mérőszámával.*

Megoldás. A megoldáshoz a vektorok skaláris szorzatán kívül a vektoriális szorzásra is szükségünk lesz; az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok vektoriális szorzatán azt a $\mathbf{z} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vektort értjük, amely $\mathbf{u}$-ra is és $\mathbf{v}$-re is merőleges, $\mathbf{z}$ hossza $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ hosszának, valamint közbezárt szögük szinuszának a szorzata, és $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ebben a sorrendben ún. jobbrendszert alkot. Felhasználjuk a következő azonosságokat:

$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

$\mathbf{t} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{t} \times \mathbf{u} + \mathbf{t} \times \mathbf{v}$ (disztributivitás)

$\mathbf{t} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{tv})\mathbf{u} - (\mathbf{tu})\mathbf{v}$ (kifejtési tétel)

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})\mathbf{t} = (\mathbf{v} \times \mathbf{t})\mathbf{u} = (\mathbf{t} \times \mathbf{u})\mathbf{v}$ (az $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{t}$ vektorok ún. *vegyes szorzata;* ez pontosan akkor **0**, ha a három vektor egysíkú.)

Először azt mutatjuk meg, hogy ha egy tetraéder minden lapjára „kifelé” azt a vektort állítjuk, amely a lapra merőleges és a hossza e lap területe, akkor az így kapott négy vektor összege **0**. Jelöljük a tetraéder egyik csúcsából a másik három csúcsba mutató vektort **a**, **b**, **c**-vel; a négy szóban forgó vektor – ha **a**, **b** és **c** ebben a sorrendben jobbrendszert alkot, ami feltehető:

$$\mathbf{w}_1=\frac{1}{2}\mathbf{b}\times\mathbf{a},\qquad \mathbf{w}_2=\frac{1}{2}\mathbf{c}\times\mathbf{b},\qquad \mathbf{w}_3=\frac{1}{2}\mathbf{a}\times\mathbf{c},\qquad \mathbf{w}_4=(\mathbf{a}-\mathbf{c})\times(\mathbf{b}-\mathbf{c}).$$

A disztributivitás szerint $2\mathbf{w}_4=\mathbf{a}\times\mathbf{b}-\mathbf{a}\times\mathbf{c}-\mathbf{c}\times\mathbf{b}$, ezért valóban $\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2+\mathbf{w}_3+\mathbf{w}_4=$ $=\mathbf{0}$.

Térjünk rá ezután a feladat állítására. A feltételek alapján például $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_3$ nem egysíkúak. Nyilván elegendő olyan (szükségképpen nem egysíkú) **a**, **b**, **c** vektorokat találni, amelyekre

$$\begin{aligned}\mathbf{b}\times\mathbf{c}&=2\mathbf{v}_1,\\ \mathbf{c}\times\mathbf{a}&=2\mathbf{v}_2,\\ \mathbf{a}\times\mathbf{b}&=2\mathbf{v}_3.\end{aligned}\tag{1}$$

Az első két egyenlet megfelelő oldalait vektoriálisan összeszorozva:

$$(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=4\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2.$$

A bal oldalt a kifejtési tétel szerint átalakítva:

$$(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\mathbf{a}]\,\mathbf{c}-[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\mathbf{c}]\,\mathbf{a}=[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\mathbf{a}]\,\mathbf{c}.$$

Jelöljük a keresett **a**, **b**, **c** vektorok vegyes szorzatát W-vel; ekkor $W\mathbf{c}=4\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2$, hasonlóan $W\mathbf{b}=4\mathbf{v}_3\times\mathbf{v}_1$ és $W\mathbf{a}=4\mathbf{v}_2\times\mathbf{v}_3$. Ez azt mutatja, hogy (1) egyenletrendszerünk megoldása csak az $\mathbf{a}_0=\mathbf{v}_2\times\mathbf{v}_3$, $\mathbf{b}_0=\mathbf{v}_3\times\mathbf{v}_1$, $\mathbf{c}_0=\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2$ vektorhármas skalárszorosa lehet. Valóban (az előbbiekhez hasonló átalakítással),

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_0\times\mathbf{c}_0&=(\mathbf{v}_3\times\mathbf{v}_1)\times(\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2)=\big[(\mathbf{v}_3\times\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_2\big]\,\mathbf{v}_1,\\ \mathbf{c}_0\times\mathbf{a}_0&=\big[(\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_3\big]\,\mathbf{v}_2,\\ \mathbf{a}_0\times\mathbf{b}_0&=\big[(\mathbf{v}_2\times\mathbf{v}_3)\mathbf{v}_1\big]\,\mathbf{v}_3.\end{aligned}$$

A $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ vektorok (nemnulla) vegyes szorzatát V-vel jelölve így $\mathbf{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{V}}\mathbf{v}_2\times\mathbf{v}_3$, $\mathbf{b}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{V}}\mathbf{v}_3\times\mathbf{v}_1$, $\mathbf{c}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{V}}\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2$ megoldása (1)-nek, feltéve, hogy $V>0$; ez viszont a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ vektorok sorrendjének alkalmas megválasztásával elérhető, ezért eleve föltehető.

Szilasi Zoltán (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzések. 1. A vektoriális szorzás felhasznált tulajdonságainak igazolása megtalálható pl. *Hajós György:* Bevezetés a geometriába c. könyvében.

2. A megoldás első felében tetraéderre igazolt állítás (e speciális eset eredményének felhasználásával!) tetszőleges konvex poliéderre is igazolható: a kifelé mutató, a megfelelő lapokra merőleges és lapterület-hosszúságú vektorok összege **0**.

27 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Dancsó Zsuzsanna, Dénes Attila, Gáspár Merse Előd, Gerencsér Balázs, Gueth Krisztián, Harangi Viktor, Horváth 472 András, Horváth 202 Gábor, Keszegh Balázs, Kiss 345 Gergely, Máthé András, Naszódi Gergely, Szabadka Zoltán, Székelyhidi Gábor, Szilasi Zoltán, Terpai Tamás és Vaik István. 4 pontos 3, 2 pontos 4, 1 pontos 1, 0 pontos 2 dolgozat.

F. 3262. *Bizonyítsuk be, hogy a* $2^{2^{1999}}-1$ *számnak van* 1999 *darab különböző prímosztója.*

Megoldás. Alkalmazzuk 1999-szer a $2^{2^n}-1=\left(2^{2^{n-1}}-1\right)\left(2^{2^{n-1}}+1\right)$ azonosságot:

$$2^{2^{1999}}-1=\left(2^{2^{1998}}-1\right)\left(2^{2^{1998}}+1\right)=\left(2^{2^{1997}}-1\right)\left(2^{2^{1997}}+1\right)\left(2^{2^{1998}}+1\right)=$$
$$=\ldots=\left(2^{2^{0}}+1\right)\left(2^{2^{1}}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(2^{2^{1998}}+1\right).$$

Belátjuk, hogy a $2^{2^0}+1$, $2^{2^1}+1$, ..., $2^{2^{1998}}+1$ szorzótényezők páronként relatív prímek.

$2^{2^k}+1$ és $2^{2^k}-1$ relatív prímek, mert egymást követő páratlan számok. $\left(2^{2^k}-1\right)$-nek viszont osztója $2^{2^\ell}+1$, ha $\ell<k$, mivel az előzőek szerint

$$2^{2^k}-1=\left(2^{2^0}+1\right)\left(2^{2^1}+1\right)\ldots\left(2^{2^{k-1}}+1\right).$$

Így $\ell<k$ esetén $2^{2^k}+1$ és $2^{2^\ell}+1$ relatív prímek.

$\left(2^{2^{1999}}-1\right)$-et tehát felbontottuk 1999 darab olyan 1-nél nagyobb szorzótényezőre, amelyek közül bármely kettő relatív prím. Ezért ennek a számnak valóban legalább 1999 különböző prímosztója van.

Vitéz Ildikó (Miskolc, Földes F. Gimn., 11. o.t.)

118 dolgozat érkezett. 6 pontos Máthé András, Pataki Péter, Szép László és Torda Péter megoldása. 5 pontot kapott 67, 4 pontot 10, 3 pontot 11, 2 pontot 18, 1 pontot 3, 0 pontot 1 versenyző. Nem versenyszerű 4 dolgozat.

F. 3263. *Legfeljebb hány különböző* 3*-tagú számtani sorozatot tudunk kiválasztani egy* $a_1<a_2<\ldots<a_n$ *valós elemű sorozatból?*

Amerikai versenyfeladat

Megoldás. Minden n pozitív egészre jelöljük k_n-nel azt a legkisebb pozitív egészet, amelyre fennáll, hogy *minden* $a_1<a_2<\ldots<a_n$ valós számsorozatból legfeljebb k_n darab 3-tagú számtani sorozat választható ki. Nyilván $k_1=k_2=0$. Megmutatjuk, hogy $k_{n+1}-k_n\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$ minden n-re teljesül. Legyen $n>2$ és $a_1<a_2<\ldots<a_{n+1}$; az a_{n+1}-et nem tartalmazó, 3-tagú számtani sorozatok száma legfeljebb k_n.

Tegyük fel először, hogy a sorozat középső eleme, $a_{\lceil\frac{n}{2}\rceil}<\frac{a_1+a_{n+1}}{2}$. Az a_{n+1}-et tartalmazó 3-tagú számtani sorozatok középső a_i eleme (ami a sorozatot egyértelműen meghatározza) legalább $\frac{a_1+a_{n+1}}{2} > a_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$, ezért $i > \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$; így i legfeljebb $n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left[\frac{n}{2}\right]$-féle értéket vehet föl. Esetünkben tehát az a_{n+1}-et tartalmazó 3-tagú számtani sorozatok száma is legfeljebb $\left[\frac{n}{2}\right]$.

Ha $a_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \geqslant \frac{a_1+a_{n+1}}{2}$, akkor tekintsük a $b_i = -a_{n+2-i}$ sorozatot. Ebből nyilván ugyanannyi 3-tagú számtani sorozat választható ki, mint az $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$ számok közül, $b_1 < b_2 < \ldots < b_{n+1}$, és itt

$$b_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} = -a_{\left[\frac{n}{2}\right]+2} < -a_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \leqslant \frac{-a_1-a_{n+1}}{2} = \frac{b_1+b_{n+1}}{2}.$$

Ezért a b_{n+1}-et tartalmazó 3-tagú számtani sorozatok száma az előbbiek szerint legfeljebb $\left[\frac{n}{2}\right]$. Ezzel beláttuk, hogy az $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$ közül legfeljebb $k_n + \left[\frac{n}{2}\right]$ 3-tagú számtani sorozat választható ki, tehát $k_{n+1} \leqslant k_n + \left[\frac{n}{2}\right]$. A $k_1 = k_2 = 0$ értékek figyelembevételével ebből $k_n \leqslant \left[\frac{2}{2}\right] + \left[\frac{3}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n-1}{2}\right] = \ell_n$.

Tekintsük ezután az S_n: $1 < 2 < \ldots < n$ sorozatot, $n = 3, 4, 5, \ldots$-re. Az n-re vonatkozó indukcióval igazoljuk, hogy az S_n-ből kiválasztható 3-tagú számtani sorozatok száma pontosan ℓ_n; és így $k_n = \ell_n$.

Az $n = 3$ értékre ez nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy igaz $n = m$-re; ekkor az S_{m+1}-ből kiválasztható $(m+1)$-et tartalmazó 3-tagú számtani sorozatok:

$$2i - m - 1 < i < m + 1,$$

ahol $1 \leqslant 2i - m - 1$ és $i \leqslant m$, azaz

$$\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Tehát az ilyen i-k száma $m - \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil = \left[\frac{m}{2}\right]$, ezért az S_{m+1}-ből kiválasztható 3-tagú számtani sorozatok száma $\ell_m + \left[\frac{m}{2}\right] = \ell_{m+1}$, amit bizonyítani akartunk.

Az $\ell_n = k_n$ értékét (a számtani sorozatok összegzésével) zárt alakban is felírhatjuk; eszerint

$$k_n = \left[\frac{2}{2}\right] + \left[\frac{3}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n-1}{2}\right] = \left[\frac{(n-1)^2}{4}\right].$$

66 dolgozat érkezett. 5 pontos Babos Attila, Bákor Krisztina, Birkner Tamás, Csikvári Péter, Csiszár Gábor, Gueth Krisztián, Győri Nikolett, Harangi Viktor, Horváth 472 András, Horváth 202 Gábor, Kiss 345 Gergely, Kovács Erika Renáta, Lengyel 821 Zoltán, Máthé András, Naszódi Gergely, Pálvölgyi Dömötör, Szabadka Zoltán, Szabó 997 Péter, Szakács László, Székelyhidi Gábor, Terpai Tamás, Tóth 370 Ágnes és Zábrádi Gergely megoldása. 4 pontot kapott 5, 3 pontot 6, 2 pontot 4, 1 pontot 21, 0 pontot 7 versenyző.

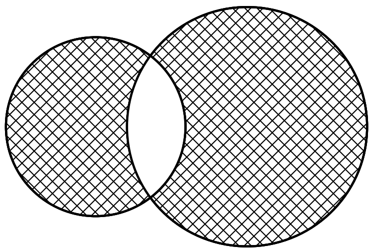
A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (550–554.)

C. 550. Egy horgász a napi zsákmánya össztömegének 35%-át kitevő három legnagyobb halat a mélyhűtőbe tette. A három legkisebb halat, amelyek együttesen a megmaradt rész $\frac{5}{13}$-át tették ki, elvitte a macska, a többit pedig megfőzték ebédre. Hány halat fogott a horgász?

Javasolta: *Dobos Sándor* Budapest

C. 551. Határozzuk meg az $x^2+y^2=x$, $2xy=y$ egyenletrendszer összes megoldását.

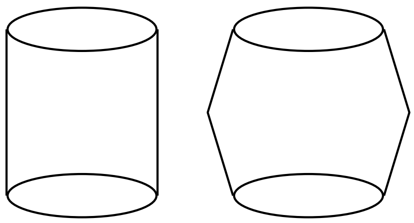
Javasolta: *Fried Ervin* Budapest



1. ábra

C. 552. Az ábrán látható két kör középpontja 5 cm-re van egymástól, sugaraik hossza 3 cm és 4 cm. Mekkora a két satírozott terület különbsége?

C. 553. Egy 20 cm magas, 10 cm átmérőjű henger „meghízott". Magassága és alapjai nem változtak, alkotója viszont 1 mm-rel megnyúlt, és így két egybevágó csonkakúppá formálódott. Hány százalékkal nőtt a henger térfogata?



2. ábra

C. 554. Mutassuk meg, hogy van olyan a szám, hogy $\log_2 x+\log_3 x=\log_a x$ teljesül minden pozitív x-re.

❄

Beküldési határidő: 1999. november 15.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest, Pf. 47. 1255

A B pontversenyben kitűzött feladatok (3302-3308.)

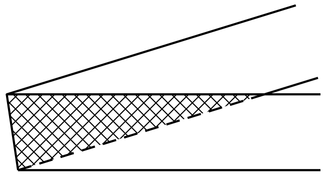
B. 3302. Egy jegypénztárnál nyolcan állnak sorba. Négyüknél egy-egy 100 Ft-os, a másik négynél egy-egy 200 Ft-os van, sorrendjük véletlenszerű. A jegy ára 100 Ft, a kassza kezdetben üres. Mindenki egy jegyet szeretne vásárolni. A lehetséges sorrendek hányadrésze olyan, hogy a pénztáros fennakadás nélkül ki tudja adni a jegyeket?

(*3 pont*)

B. 3303. Egy 5 cm széles papírcsíkot gyűrődés nélkül áthajtunk az ábra szerint.

Milyen kicsi lehet a kétszer lefedett, satírozott rész területe?

(*4 pont*)



3. ábra

B. 3304. Meg lehet-e számozni egy kocka éleit az 1, 2, 3, ..., 11, 12 számokkal úgy, hogy mindegyik csúcsban ugyanannyi legyen az ide befutó élekre írt számok összege?

(*4 pont*) Javasolta: *Reményi Gusztáv* Budapest

B. 3305. Sándor Mátyás esetéből okulva a hazafiak vezére egy egyenletet küldött barátainak:

$$2x^2+4xy+7y^2-12x-2y+N=0.$$

A titkos üzenet az volt, hogy a hónap N-edik napján legyen a felkelés. A hazafiak gyakran mondogatták, hogy a felkelés az egyetlen megoldás. Ez jellemzte N-et is: az egyenletet egyetlen (x,y) valós számpár elégítette ki. Mennyi N értéke?

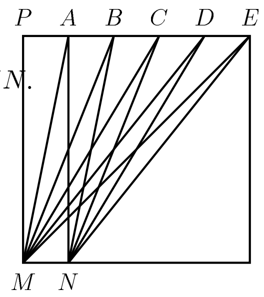
(*4 pont*)

B. 3306. Az egységnyi területű ABC háromszög AB oldalán a harmadolópontok legyenek D és E, az AC oldalán a felezőpont pedig F. A CB egyenesét az FE egyenes G-ben, az FD egyenes H-ban metszi. Határozzuk meg az FGH háromszög területét.

(*3 pont*)

B. 3307. Határozzuk meg az ábrán látható négyzetben az MAN, MBN, MCN, MDN, MEN szögek összegét, ha tudjuk, hogy $PA=AB=BC=CD=DE=MN$.

(*3 pont*) Orosz versenyfeladat



4. ábra

B. 3308. Hány olyan ikerprím számpár van, amelyek összege prímhatvány? (Ikerprímnek nevezünk két prímszámot, ha a különbségük 2.)

(*4 pont*) Javasolta: *Kovács Ádám* Budapest

B. 3309. Egy kocka minden lapján kijelöltük a középvonalak $1:3$ arányú osztópontjait. Hogyan aránylik a pontok által meghatározott konvex test térfogata a kocka térfogatához?

(*4 pont*)

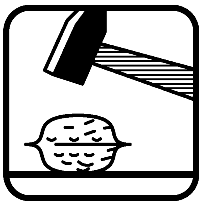
B. 3310. Mutassuk meg, hogy az $(x^2+y^2)^3=27x^2y^2$ egyenletű görbe belefoglalható egy 4 egység oldalú négyzetbe.

(*5 pont*)

B. 3311. Igazoljuk, hogy ha $0<x<\frac{\pi}{2}$, akkor $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3>\cos x$.

(*5 pont*) *Kovács Ádám* (Budapest) javaslata alapján

Beküldési határidő: 1999. november 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (218–220.)

A. 218. Határozzuk meg azokat a folytonos $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ függvényeket, amelyekre tetszőleges x, y pozitív számok esetén

$$f\left(\frac{1}{f(xy)}\right)=f(x)f(y).$$

A. 219. A H ponthalmaz a sík $2n$ pontját tartalmazza, közülük semelyik három nem esik egy egyenesre. Ha P és Q két különböző H-beli pont, és H-nak pontosan ugyanannyi pontja esik a PQ egyenes két oldalára, akkor a PQ szakaszt *felező szakasznak* hívjuk. Bizonyítsuk be, hogy ha a felező szakaszok száma n, akkor közülük bármelyik kettő metszi egymást.

Javasolta: *Solymosi József* Budapest

A. 220. Jelöljük tetszőleges pozitív egész n számra $S(n)$-nel az n jegyeinek összegét tízes számrendszerben. Igazoljuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} S(2^n)=\infty.$$

Beküldési határidő: 1999. november 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS

(Volume 49. No. 7. October 1999)

New exercises for practice – competition C (see page 424): **C. 550.** An angler went out fishing one day. When he returned he put the three largest fish, which comprised the 35% of the total mass of the fish he caught, into the freezer. The three smallest fish that formed $\frac{5}{13}$ of the remaining part were taken by the cat, and the rest was cooked for lunch. How many fish did the angler catch that day? (Proposed by *S. Dobos,* Budapest) **C. 551.** Find all solutions of the following system of equations: $x^2+y^2=x$, $2xy=y$. (Proposed by *E. Fried,* Budapest) **C. 552.** The circles on the figure have radii 3 cm and 4 cm, respectively and their centres are 5 cm apart (see fig. 1 on page 424). Find the difference between the areas of the two shaded regions. **C. 553.** A cylinder of diameter 10 cm and height 20 cm went under the following deformation. Its bases and its height remained the same while its generators increased by 1 mm, and thus it took the shape of two congruent frustum of cones joined at their bases (see fig. 2 on page 424). In what proportion did the volume of the solid increase? **C. 554.** Prove that there exists a number a such that $\log_2 x+\log_3 x=\log_a x$ holds for every positive number x.

New problems – competition B (see page 425): **B. 3302.** Eight people are waiting in a queue at a box office. Each of them wants to buy a 10 dollar ticket. Four of them have only 10 dollar notes while the others have 20 dollar notes only. Consider all possible orders of the eight people. Assuming that there is no cash at the box office in the beginning, find the proportion of those orders in which the cashier can sell a ticked to everyone without getting to any problem. (*3 points*) **B. 3303.** A strip of paper, 5 cm wide, is folded without creasing as shown on the diagram (see fig. 3 on page 425). How small can the twice covered shaded area be? (*4 points*) **B. 3304.** Is it possible to assign the numbers $1,2,3,\ldots,11,12$ to the edges of a cube such that the sum of the numbers assigned to the edges starting from each vertex is the same? (*4 points*) (Proposed by *G. Reményi,* Budapest) **B. 3305.** Determine the value of the real parameter N such that the equation $2x^2+4xy+7y^2-12x-2y+N=0$ has exactly one solution (x,y). (*4 points*) **B. 3306.** In a triangle ABC of unit area, D and E are trisecting AB and the midpoint of the side AC is denoted by F. The lines FE and FD intersect line CB at G and H, respectively. Find the area of triangle FGH. (*3 points*) **B. 3307.** Fig. 4 on page 425 shows a square. $PA=AB=BC=CD=$ $=DE=NM$. What is the sum of the angles MAN, MBN, MCN, MDN, MEN shown on the diagram? (*3 points*) (Russian competition problem) **B. 3308.** Two prime numbers which differ by 2 are called twin primes. Consider twin primes whose sum is a power of a prime. How many such pairs can be found? (*4 points*) (Proposed by *Á. Kovács,* Budapest) **B. 3309.** On each face of a cube, consider those 4 points which divide the two midlines of the face in the ratio $1:3$. How does the volume of the polyhedron determined by these points relate to the volume of the cube? (*4 points*) **B. 3310.** Prove that the curve of equation $(x^2+y^2)^3=27x^2y^2$ can be included in a square of side 4. (*5 points*) **B. 3311.** Prove that $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3>\cos x$ if $0<x<\frac{\pi}{2}$. (*5 points*) (Based on a problem proposed by *Á. Kovács,* Budapest)

New advanced problems – competition A (see page 426): **A. 218.** Find all continuous functions $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ which satisfy $f\left(\frac{1}{f(xy)}\right)=f(x)f(y)$ for arbitrary positive numbers x and y. **A. 219.** A set H consists of $2n$ points in the plane, no three collinear. Let P and Q denote any two distinct points of H. Segment PQ is called a *halving segment* if the same number of points of H lie on each side of line PQ. Assuming that H has exactly n halving segments, prove that any two such segments intersect.(Proposed by *J. Solymosi,* Budapest) **A. 220.** Given any positive integer n in decimal system, denote the sum of its digits by $S(n)$. Prove that $\lim\limits_{n\to\infty} S(2^n)=\infty$.