Az 1998–99-es tanévi matematika pontverseny állása a szeptember–januári feladatok feldolgozása után

Gyakorlatok

Az eddig feldolgozott feladatok: a szeptember–decemberi számok feladatai, valamint Gy. 3246., Gy. 3247., Gy. 3248., Gy. 3249., Gy. 3251., Gy. 3252., Gy. 3253.

Feladatonként egy helyes megoldással elérhető: 195 pont.

1. *Kunszenti-Kovács Dávid* 8. o.t. 182 pont; **2.** *Csóka Endre* 8. o.t. 129 pont; **3.** *Birkner Tamás* 6. o.t. 125 pont; **4.** *Nagy 444 Zoltán* 8. o.t. 114 pont; **5.** *Hablicsek Márton* 7. o.t. 92 pont; **6–7.** *Rácz Éva* 8. o.t., *Rácz Judit* 8. o.t. 78 pont; **8.** *Backhausz Ágnes* 8. o.t. 71 pont; **9.** *Jelitai Kálmán* 8. o.t. 59 pont; **10.** *Tábor Áron* 8. o.t. 56 pont; **11.** *Nagy 625 Tibor* 8. o.t. 54 pont; **12–14.** *Kiss Zsuzsanna* 8. o.t., *Lang Péter* 8. o.t., *Szekeres Balázs* 8. o.t. 45 pont; **15–16.** *Buti Tamás* 8. o.t., *Tamás Krisztina* 8. o.t. 42 pont; **17.** *Pach Péter Pál* 7. o.t. 41 pont; **18.** *Balogh 126 Zoltán* 8. o.t. 35 pont; **19.** *Juhász Máté L.* 7. o.t. 34 pont; **20–21.** *Kalcsú Áron* 8. o.t., *Lakatos Kristóf* 8. o.t. 31 pont; **22.** *Nyul Balázs* 8. o.t. 28 pont; **23.** *Lakatos Szilvia* 8. o.t. 27 pont; **24.** *Bartha Ferenc Ágoston* 8. o.t. 26 pont; **25.** *Malakuczi Viktor* 8. o.t. 25 pont; **26.** *Töreki 123 Péter* 8. o.t. 22 pont; **27.** *Antal 627 Áron* 8. o.t. 21 pont; **28.** *Kovács 123 Áron* 8. o.t. 19 pont; **29.** *Urbán 300 Krisztián* 8. o.t. 16 pont; **30.** *Sparing Dániel* 8. o.t. 15 pont; **31–33.** *Hangai Attila* 8. o.t., *Pálvölgyi Dénes* 8. o.t., *Pótsa Mátyás* 8. o.t. 14 pont; **34–35.** *Hudecz Viktor* 8. o.t., *Molnár Kolos* 8. o.t. 12 pont; **36.** *Balog Boglárka* 8. o.t. 11 pont; **37.** *Gombkötő Kitti* 7. o.t. 10 pont. Kevesebb pontja van 32 versenyzőnek.

9. osztályosok

1. *Harangi Viktor* 205 pont; **2.** *Somogyi Dávid* 177 pont; **3.** *Gerencsér Balázs* 174 pont; **4.** *Tran Thanh Long* 172 pont; **5.** *Tóth 370 Ágnes* 162 pont; **6.** *Kovács Erika Renáta* 142 pont; **7.** *Csikvári Péter* 141 pont; **8.** *Erdei Zsuzsa* 136 pont; **9.** *Zséger Ádám* 135 pont; **10–11.** *Béky Bence*, *Siska Ádám* 133 pont; **12.** *Csernenszky András* 132 pont; **13.** *Hamar Gergő* 127 pont; **14.** *Ta Vinh Thong* 124 pont; **15.** *Pallos Péter* 121 pont; **16.** *Horváth Illés* 120 pont; **17.** *Szalay Zsófia* 116 pont; **18.** *Boros Vazul* 115 pont; **19.** *Farkas Ágnes* 112 pont; **20–21.** *Csordás Hunor*, *Kerékfy Péter* 111 pont; **22.** *Szirtes Péter* 109 pont; **23.** *Tóth Rudolf* 106 pont; **24.** *Vajk Tamás* 96 pont; **25.** *Kőrösi Attila* 95 pont; **26.** *Devecsery Ágnes* 93 pont; **27.** *Nagy 725 János* 90 pont; **28.** *Tankovics Gábor* 88 pont; **29–31.** *Farkas 327 Dóra*, *Keszthelyi Vilmos*, *Porcs-Makkay Ákos* 86 pont; **32–33.** *Spanczér Ilona*, *Szente Dávid* 81 pont; **34.** *Váradi Vajk* 80 pont; **35.** *Zavarkó Gábor* 76 pont; **36–38.** *Balog Gergely*, *Hauser Edit*, *Szabó 406 Tamás* 75 pont; **39.** *Gyulasi Tamás* 73 pont; **40.** *Szebenyi Zoltán* 71 pont; **41.** *Kádas Attila* 65 pont; **42.** *Walfisch*

Dávid 64 pont; **43.** *Potzauf Krisztina* 63 pont; **44–45.** *Jesch Dávid*, *Pongrácz Júlia* 62 pont; **46.** *Asztalos Gyula* 61 pont; **47.** *Nagy 039 Péter* 60 pont; **48–49.** *Gábris Gergely*, *Kucsera Dénes* 59 pont; **50.** *Baur Eszter* 57 pont; **51–53.** *Komlós Gábor*, *Számadó István*, *Zsbán Ambrus* 55 pont; **54.** *Varga Gábor* 53 pont; **55–56.** *Gémes Norbert*, *Tolvaj Nóra* 51 pont; **57.** *Bognár Attila* 50 pont; **58.** *Bertus-Barcza Tímea* 49 pont; **59.** *Nagy 206 István* 47 pont; **60–61.** *Flaskár Anett*, *Németh 999 Antal* 46 pont; **62.** *Kurtz Orsolya* 45 pont; **63–64.** *Csötönyi Nóra*, *Szilágyi Örs* 44 pont; **65.** *Bán Zoltán* 42 pont; **66–69.** *Dumitrasc Alina Lavinia*, *Kőrizs András*, *Molnár 475 Viktor*, *Morvai Krisztina* 41 pont; **70–72.** *Jankovics András*, *Kiss Gergely Péter*, *Major Gergely* 40 pont; **73.** *Izsák Andrea* 39 pont; **74–75.** *Kovács 721 Péter*, *Raikovich Tamás* 38 pont; **76.** *Szebelédi Csaba* 37 pont; **77–79.** *Bíró Ádám*, *Holicska Ádám*, *Várnai Csilla* 35 pont; **80–81.** *Gottlasz Valér*, *Simon András* 34 pont; **82.** *Turchányi Márton* 33 pont; **83–84.** *Kozma Tamás*, *Zsurkó Mátyás* 32 pont; **85.** *Galambos Anikó* 31 pont; **86–88.** *Kovács 625 Erika*, *Kőber Péter*, *Tiszai Attila* 30 pont; **89–92.** *Csányi Gergő*, *Fehérvári Bence*, *Máté Gergő*, *Víg Róbert* 29 pont; **93–94.** *Pogány Ádám*, *Török Andrea* 28 pont; **95–101.** *Barta 679 Zsolt*, *Czinder Attila*, *Marjai Gábor*, *Mult Attila*, *Siroki László*, *Szele Réka*, *Varga 846 Petra* 27 pont; **102–104.** *Kéri Sophia*, *Pajna Gabriella*, *Vámi Petra* 26 pont; **105–107.** *Lestyán Gyula*, *Papp 249 Diána*, *Tóth 666 János* 25 pont; **108–113.** *Bartha 321 Ágnes*, *Dömötör Csilla*, *Majtényi Gergő*, *Németh 278 Andrea*, *Sára Péter*, *Springer Éva* 24 pont; **114–120.** *Apáthy Molnár Sándor*, *Bedekovich Dániel*, *Béres Mária*, *Ligetvári Péter*, *Noszák Csaba*, *Reiss Attila*, *Rischák Rózsa* 23 pont; **121–125.** *Domonkos Lívia*, *Fischer Noémi*, *Iván Szilárd*, *Nagy 666 Beáta*, *Nagy 701 Mária* 22 pont; **126–128.** *Halmos Zsófia*, *Iberpaker Péter*, *Tóth 374 Andrea* 21 pont; **129–131.** *Erdélyi Dániel*, *Pernek Ákos*, *Szabó 184 László* 20 pont; **132–134.** *Czakó Péter*, *Tisch Dániel*, *Várnai Anikó* 19 pont; **135–138.** *Aczél Márton*, *Csáky Attila*, *Tóth 345 Mihály*, *Virág Vera* 18 pont; **139–144.** *Bús Katalin*, *Mészáros Lajos*, *Molnár 354 Tamás*, *Orosz Anna*, *Surányi Gergő*, *Takács Gábor* 17 pont; **145–150.** *Dobler Csaba*, *Györkei Attila*, *Pilissy György*, *Sikló Bernadett*, *Szabó 930 Krisztina*, *Tordai Zsolt* 16 pont; **151–158.** *Faltay György*, *Klein Andrea*, *Kovács 666 Gergely*, *Meggyes Gábor*, *Szakácsi János*, *Szirmay Márta*, *Takáts Marcella*, *Tombor Júlia* 15 pont. Kevesebb pontja van 226 versenyzőnek.

10. osztályosok

1. *Varjú Péter* 174 pont; **2.** *Ambrus Gergely* 171 pont; **3.** *Pogátsa Attila* 168 pont; **4.** *Bálint Gergely* 164 pont; **5.** *Babos Attila* 162 pont; **6–7.** *Deli Lajos*, *Leipold Diána* 155 pont; **8.** *Andrássy Zoltán* 148 pont; **9.** *Lovrics Anna* 146 pont; **10.** *Nagy Tamás* 138 pont; **11.** *Fodor 133 Gyula* 135 pont; **12.** *Siklósi Dávid* 132 pont; **13.** *Vígh Viktor* 130 pont; **14.** *Dőrr Zsuzsanna* 127 pont; **15–16.** *Lovrics Klára*, *Reviczky Ádám János* 123 pont; **17.** *Horváth Szilárd* 122 pont; **18.** *Árvay Eszter* 119 pont; **19.** *Soós 740 Károly* 117 pont; **20.** *Zalán Péter* 112 pont; **21–22.** *Horváth Dénes*, *Mátyási Péter* 109 pont; **23.** *Kisfügedi Viktória* 107 pont; **24.** *Pesti Gábor* 104 pont; **25–26.** *Nagy 139 Gergely*, *Szűcs Zsófia* 102 pont; **27.** *Eördegh Péter* 98 pont; **28.** *Darabos József* 95 pont; **29–30.** *Breuer János*, *Toka László* 94 pont; **31.** *Simon Győző* 92 pont; **32.** *Tormási Imre György* 91 pont; **33–34.** *Szintai Balázs*, *Tokodi Tünde* 90 pont; **35.** *Fazekas 533 Éva* 88 pont; **36.** *Horváth Balázs* 87 pont; **37.** *Szilágyi Tamás* 86 pont; **38.** *Legány Csaba*

85 pont; **39.** *Schlanger Judit* 82 pont; **40.** *Koch Dénes* 81 pont; **41.** *Kazinczi Csaba* 79 pont; **42–43.** *Csereklei Gábor*, *Fekete Árpád* 76 pont; **44–45.** *Hegyi Márta*, *Pozsonyi Tamás* 75 pont; **46.** *Paál Csaba* 74 pont; **47–48.** *Gyurcsek András*, *Wéber Zoltán* 72 pont; **49.** *Horváth 724 Zoltán* 71 pont; **50.** *Bicskei László* 69 pont; **51–52.** *Bohák András*, *Nagy 777 Péter* 68 pont; **53–54.** *Stépán József*, *Vajda Péter* 67 pont; **55.** *Hosszú Balázs* 66 pont; **56.** *Porkoláb Dániel* 64 pont; **57–59.** *Fehér 007 István*, *Gál 959 Balázs*, *Wéner Balázs* 60 pont; **60.** *Moldvai Levente* 59 pont; **61.** *Durai Pál* 58 pont; **62.** *Erdős János* 57 pont; **63.** *Rábel Henrietta* 56 pont; **64–66.** *Arany Sándor*, *Ignácz Melinda*, *Kerekes Attila* 54 pont; **67–69.** *Börcsök József*, *Karáth Krisztián*, *Kurcz Éva* 53 pont; **70.** *Győző Miklós* 52 pont; **71–72.** *Csurgó Krisztina*, *Polgár 624 Orsolya* 51 pont; **73.** *Kiss 414 Norbert* 49 pont; **74.** *Varga Veronika* 47 pont; **75–77.** *Czímer Balázs*, *Kőszegi Katalin*, *Medgyesi László* 46 pont; **78–80.** *Bartha Tamás (Árpád)*, *Molnár 947 Zoltán*, *Somogyi 555 Tamás* 44 pont; **81–82.** *Bakó Dániel*, *Nagy 729 Dávid* 43 pont; **83.** *Neheli Katalin* 42 pont; **84.** *Roszol László* 41 pont; **85.** *Csete Mónika* 40 pont; **86–88.** *Czupi Márton*, *Görföl Tamás*, *Harcz Ádám* 39 pont; **89–92.** *Fenyvesi Zsuzsanna*, *Gál Katalin*, *Garai Zsolt*, *Kádár 181 Csaba* 37 pont; **93–94.** *Linczmajer Éva*, *Tigyi Árpád* 36 pont; **95–99.** *Hizsák Gábor*, *Imrefi József*, *Kolozsváry Georgina*, *Mészáros Gergely*, *Peresztegi Márton* 35 pont; **100–101.** *Enyedi Gábor*, *Ivancsó Borbála* 34 pont; **102–106.** *Benedek 013 Éva*, *Fiers Márton*, *Horváth 004 Tamás*, *Kántor Attila*, *Somogyi György* 33 pont; **107–110.** *Fehér Gergely*, *Germán Tibor*, *Manóczki Csilla*, *Poór Veronika* 32 pont; **111–116.** *Ádám Zoltán*, *Balogh Róbert*, *Dunai Gábor*, *Hegedűs 913 Vera*, *Jankó Erika*, *Szamosújvári Ilona* 31 pont; **117–121.** *Bánky Szilvia*, *Bartha Erika*, *Czímer Gergő*, *Nagy 820 Balázs* , *Tóth 007 Balázs* 30 pont; **122–124.** *Dávid 159 Róbert*, *Novák Zoltán*, *Székelyhidi Tamás* 29 pont; **125–126.** *Földényi Tamás*, *Szabó Réka* 28 pont; **127–130.** *Antal Ágnes*, *Fellegi Zoltán*, *Kurucz Réka*, *Vona Gábor* 27 pont; **131.** *Karácsonyi József Sándor* 26 pont; **132–141.** *Almási Angelika*, *Bernáth Andrea*, *Bóta Gergő*, *Braun Melinda*, *Cseri István*, *Erki Szabolcs*, *Hülber Árpád*, *Kis Zsófia*, *Magyari Róbert*, *Ráfael Balázs* 25 pont; **142–145.** *Dóra Gábor*, *Fehér Miklós*, *Németh 829 Balázs*, *Vértényi Péter* 24 pont; **146–151.** *Arató Orsolya*, *Baka Nóra*, *Bartucz Dorottya*, *Király Ferenc*, *Kiss Tímea*, *Kovács Krisztián* 23 pont; **152–154.** *Dénes Ágnes*, *Ekler Márton*, *Somlai Henrietta* 22 pont; **155–159.** *Csapár Tímea*, *Dombai Péter*, *Páll Laura*, *Pap Tünde*, *Zrínyi Dániel* 21 pont; **160–167.** *Antal László Balázs*, *Börzsönyi Ádám*, *Kramer Zsófia*, *Kurucz Endre*, *Lepcsényi Lilla*, *Markó István*, *Németh 917 Julianna*, *Sebestyén Gábor* 20 pont; **168–174.** *Balka Richárd*, *Ballók István*, *Czibik Ágnes*, *Hegedűs Vera*, *Hosszú Gergő*, *Kalmár Levente*, *Zsidó Csilla Laura* 19 pont; **175–178.** *Csabina Csilla*, *Laczay Zsolt*, *Remete Dániel*, *Sofró Csaba* 18 pont; **179–182.** *Bozsik Balázs*, *Czigány Balázs*, *Gerencsér Norbert*, *Szentirmai Dávid* 17 pont; **183–187.** *Felber Péter*, *Kada Katalin*, *Krenedits Sándor*, *Reiczigel Zsófia*, *Tamás Gábor Zoltán* 16 pont; **188–193.** *Bíró Gáspár*, *Csaszny Tamás*, *Erdei Miklós*, *Lángh 222 Dániel*, *Ritter Ádám*, *Schmidt 414 András* 15 pont. Kevesebb pontja van 142 versenyzőnek.

Feladatok

Az eddig feldolgozott feladatok: a szeptember–januári számok feladatai, illetve 11. osztályban a **H** jelű gyakorlatok.

Feladatonként egy helyes megoldással elérhető: 150 pont. A **H** jelű gyakorlatokkal: 200 pont.

Legfeljebb 8. osztályosok

1. *Kunszenti-Kovács Dávid* 8. o.t. 121 pont; **2.** *Birkner Tamás* 6. o.t. 96 pont; **3.** *Csóka Endre* 8. o.t. 76 pont; **4.** *Nagy 444 Zoltán* 8. o.t. 19 pont; **5.** *Buti Tamás* 8. o.t. 15 pont; **6.** *Nagy 625 Tibor* 8. o.t. 14 pont; **7–8.** *Lakatos Kristóf* 8. o.t., *Lang Péter* 8. o.t. 8 pont; **9.** *Rácz Balázs* 8. o.t. 5 pont. Kevesebb pontja van 10 versenyzőnek.

9. osztályosok

1. *Harangi Viktor* 145 pont; **2.** *Gerencsér Balázs* 118 pont; **3.** *Tran Thanh Long* 98 pont; **4.** *Csikvári Péter* 78 pont; **5.** *Tóth 370 Ágnes* 73 pont; **6.** *Ta Vinh Thong* 49 pont; **7.** *Erdei Zsuzsa* 41 pont; **8–9.** *Csernenszky András*, *Horváth Illés* 25 pont; **10.** *Kovács Erika Renáta* 20 pont; **11–12.** *Siska Ádám*, *Tóth 374 Andrea* 15 pont; **13–14.** *Devecsery Ágnes*, *Varga 846 Petra* 13 pont; **15–16.** *Bán Zoltán*, *Sára Péter* 12 pont; **17.** *Somogyi Dávid* 11 pont; **18.** *Kőrösi Attila* 8 pont; **19.** *Bartha 321 Ágnes* 7 pont; **20–21.** *Jesch Dávid*, *Zsbán Ambrus* 6 pont; **22–27.** *Beck Ákos*, *Béky Bence*, *Pajna Gabriella*, *Szabó 184 László*, *Ulbert Petra*, *Zoltán Illés* 5 pont. Kevesebb pontja van 41 versenyzőnek.

10. osztályosok

1. *Gelencsér Gábor* 119 pont; **2.** *Csirmaz Előd* 117 pont; **3.** *Horváth 713 György* 95 pont; **4.** *Babos Attila* 85 pont; **5.** *Boros M. Mátyás* 84 pont; **6.** *Szilasi Zoltán* 75 pont; **7.** *Andrássy Zoltán* 49 pont; **8.** *Koch Dénes* 48 pont; **9.** *Nagy Tamás* 47 pont; **10.** *Legány Csaba* 41 pont; **11.** *Kiss 414 Norbert* 36 pont; **12.** *Toka László* 30 pont; **13.** *Nagy 314 Ádám* 27 pont; **14–15.** *Fellegi Zoltán*, *Tóth 612 Márton* 24 pont; **16.** *Zalán Péter* 18 pont; **17.** *Lovrics Anna* 17 pont; **18.** *Somlai Henrietta* 15 pont; **19–20.** *Breuer János*, *Schmidt 414 András* 14 pont; **21–22.** *Poór Veronika*, *Rakamazi Richárd* 10 pont; **23–26.** *Debrődi István*, *Nagy 729 Dávid*, *Pesti Gábor*, *Siklósi Dávid* 9 pont; **27.** *Decsi Tamás* 8 pont; **28–30.** *Benecz Judit*, *Roszol László*, *Székelyhidi Tamás* 7 pont; **31.** *Lovrics Klára* 6 pont; **32–37.** *Balka Richárd*, *Kada Katalin*, *Pásztor Péter*, *Pozsonyi Tamás*, *Róna Szilárd*, *Szamosújvári Ilona* 5 pont. Kevesebb pontja van 27 versenyzőnek.

11. osztályosok

1. *Kiss 345 Gergely* 191 pont; **2.** *Máthé András* 185 pont; **3.** *Zábrádi Gergely* 181 pont; **4.** *Papp Dávid* 177 pont; **5.** *Dénes Attila* 174 pont; **6.** *Keszegh Balázs* 168 pont; **7.** *Pálvölgyi Dömötör* 163 pont; **8.** *Győri Nikolett* 162 pont; **9.** *Csiszár Gábor* 153 pont; **10.** *Gáspár Merse Előd* 146 pont; **11.** *Lábó Eszter* 138 pont; **12–13.** *Baharev Ali*, *Lábó Melinda* 136 pont; **14.** *Venter György* 135 pont; **15.** *Taraza Busra* 134 pont; **16–17.** *Bárány Zsófia Luca*, *Sidó Péter* 110 pont; **18.** *Gajári Dávid* 109 pont; **19.** *Torda Péter* 99 pont; **20–21.** *Horváth 413 László*, *Lengyel 821 Zoltán* 96 pont; **22.** *Vértesi Vera* 91 pont; **23.** *Vitéz Ildikó* 85 pont; **24.** *Bákor Krisztina* 84 pont; **25.** *Pozsár Balázs* 83 pont; **26.** *Pozsonyi Gergő* 80 pont; **27.** *Kovács Benedek* 79 pont; **28–29.** *Varga Balázs*, *Zempléni Márton* 76 pont; **30.** *Münz Márton* 69 pont; **31.** *Herczegh Géza* 67 pont; **32.** *Molnár László Milán* 62 pont; **33.** *Gömöri Péter* 60 pont; **34.** *Robotka Zsolt* 56 pont; **35.** *Szélig Nikoletta* 51 pont; **36–37.** *Jungbauer Alexandra*, *Sipos Ádám* 50 pont; **38.** *Kiss 360 Sándor* 49 pont; **39–40.** *Gyürki István*, *Matin Tamás* 47 pont; **41–42.** *Koczka Gergely*, *Micskei Zoltán* 46 pont; **43.** *Móczó Péter* 45 pont; **44.** *Veres Tímea* 44 pont; **45–46.** *Bíró Márton*, *Bódai Zoltán* 43 pont; **47.** *Hudomiet Péter* 42 pont; **48–50.** *Bíró Annamária Mása*, *Schlotter Ildikó*, *Sinka Bálint* 41 pont; **51.** *Antal István* 40 pont; **52–54.** *Gáspár Katalin*, *Gáspár Krisztina*, *Wilfing András* 39 pont; **55.** *Madarász Ádám* 38 pont; **56–57.** *Tóth 013 Zoltán*, *Vizer Máté* 37 pont; **58.** *Iván Szabolcs* 35 pont; **59.** *Fodor Erzsébet* 32 pont; **60.** *Botos Péter* 31 pont; **61–62.** *Gulyás Gábor*, *Lemmich Attila* 30 pont; **63–65.** *Horváth Hedvig*, *Takács 272 Zsuzsanna*, *Tóth 587 Viktória* 29 pont; **66–67.** *Deme 007 Gábor*, *Kiss Norbert* 28 pont; **68.** *Dombi József Dániel* 27 pont; **69–70.** *Csathó Csaba*, *Simon Zoltán* 26 pont; **71–72.** *Kurucz Keve*, *Németh Lajos* 24 pont; **73–74.** *Csornai Gyula*, *Szabó 131 Katalin* 23 pont; **75–76.** *Bankó Krisztián*, *Baranyai Gábor* 22 pont; **77–79.** *Bicsák Mátyás*, *Hámori Tamás*, *Mansur Boase* 21 pont; **80–83.** *Király Péter*, *Mauthner András*, *Simay Csaba*, *Urr Beáta* 20 pont; **84–85.** *Fehér Katalin*, *Powell Pál* 19 pont; **86–87.** *Estók Előd*, *Tillinkó Zsanett* 18 pont; **88–90.** *Kovács 751 Róbert*, *Molnár 666 Ildikó*, *Újvári Gergely* 17 pont; **91–94.** *Dóczy Pál*, *Juhász 113 Ágnes*, *Kasztner Tamás*, *Kun Márton* 16 pont; **95–96.** *Kiss Ádám*, *Zelenák Amarilla* 15 pont; **97–98.** *Friedl Zita*, *Vitos Botond* 14 pont; **99.** *Lódi Edit* 13 pont; **100–104.** *Baranyai 248 Gábor*, *Pesti 421 Péter*, *Rajna Ákos*, *Soós István*, *Zambó Gábor* 12 pont; **105–111.** *Agócs Judit*, *Csányi Tamás*, *Drén Judit*, *Jung János*, *Ringer Norbert*, *Sors Erika*, *Várady Gábor* 11 pont; **112–114.** *Bokros Krisztián*, *Törőcsik Andrea*, *Ureczky Judit* 10 pont; **115–124.** *Balogh Tamás*, *Benke Noémi*, *Besenyei Ádám*, *Dankai György*, *Edőcs Eszter*, *Jusztin Balázs*, *Riecke Katalin*, *Tamás Rita*, *Tóth Balázs*, *Varga Szilvia* 9 pont. Kevesebb pontja van 71 versenyzőnek.

12. osztályosok

1. *Terpai Tamás* 156 pont; **2.** *Naszódi Gergely* 150 pont; **3.** *Szabadka Zoltán* 148 pont; **4.** *Székelyhidi Gábor* 141 pont; **5.** *Györey Bernadett* 135 pont; **6–7.** *Dancsó Zsuzsanna*, *Pataki Péter* 132 pont; **8.** *Gueth Krisztián* 130 pont; **9.** *Horváth 202 Gábor* 125 pont; **10–11.** *Horváth 472 András*, *Szakács László* 114 pont; **12.** *Szabó 997 Péter* 110 pont; **13.** *Fehér Lajos Károly* 106 pont; **14.** *Balogh Attila* 103 pont; **15.** *Ábrány Miklós* 102 pont; **16–17.** *Barát Anna*, *Huszár Péter* 97 pont; **18.** *Vágvölgyi Péter* 94 pont; **19.** *Lovas Róbert* 86 pont; **20.** *Poronyi Gábor* 83 pont; **21–23.** *Pszota Anikó*, *Szép László*, *Vaik István* 81 pont; **24.** *Mihajlik Gábor* 72 pont; **25.** *Pap Júlia* 64 pont; **26.** *Zalán Eszter* 54 pont; **27.** *Pilászy István* 51 pont; **28.** *Bujdosó Attila* 47 pont; **29–30.** *Szécsi Vajk*, *Yu*

Da 44 pont; **31.** *Benedek Csaba* 43 pont; **32.** *Bosznay Tamás* 38 pont; **33–34.** *Devecsery András*, *Kis-Tóth Ágnes* 37 pont; **35.** *Balogh 666 Péter* 36 pont; **36.** *Rácz Balázs* 35 pont; **37.** *Csikvári Gábor* 34 pont; **38–39.** *Hegyi Péter*, *Nagy 333 Kálmán* 33 pont; **40.** *Mecz Balázs* 32 pont; **41–42.** *Bakos Gábor*, *Vukov Jeromos* 26 pont; **43.** *Takács Gábor* 23 pont; **44.** *Zeke András* 21 pont; **45.** *Kiss 540 Balázs* 20 pont; **46.** *Németh 729 András* 19 pont; **47–48.** *Simon Zoltán*, *Sztranyák Zsolt* 16 pont; **49–50.** *Horváth 948 Márk*, *Nagy 512 Marianna* 15 pont; **51.** *Lovrencsics Lilla* 14 pont; **52–54.** *Bozsó Dávid*, *Hegedűs 396 Péter*, *Kitlei Róbert* 13 pont; **55.** *Bánfi Barnabás* 12 pont; **56.** *Antal Csaba* 11 pont; **57–58.** *Cserkúti Péter*, *Röst János* 9 pont. Kevesebb pontja van 25 versenyzőnek.

Nehezebb feladatok

Az eddig feldolgozott feladatok: a szeptember–februári számok feladatai.

Feladatonként egy helyes megoldással elérhető: 120 pont.

1. *Juhász András* 12. o.t. 97 pont; **2.** *Terpai Tamás* 12. o.t. 79 pont; **3.** *Végh A. László* 12. o.t. 78 pont; **4.** *Lukács László* 12. o.t. 69 pont; **5–6.** *Gerbicz Róbert* 12. o.t., *Gyenes Zoltán* 11. o.t. 45 pont; **7.** *Pálvölgyi Dömötör* 11. o.t. 35 pont; **8–9.** *Harangi Viktor* 9. o.t., *Horváth 202 Gábor* 12. o.t. 28 pont; **10.** *Máthé András* 11. o.t. 27 pont; **11.** *Székelyhidi Gábor* 12. o.t. 24 pont; **12.** *Zábrádi Gergely* 11. o.t. 20 pont; **13.** *Pozsár Balázs* 11. o.t. 18 pont; **14–16.** *Gueth Krisztián* 12. o.t., *Mecz Balázs* 12. o.t., *Papp Dávid* 11. o.t. 17 pont; **17–19.** *Baharev Ali* 11. o.t., *Kiss 345 Gergely* 11. o.t., *Naszódi Gergely* 12. o.t. 15 pont; **20.** *Dancsó Zsuzsanna* 12. o.t. 13 pont; **21–25.** *Dezső Balázs* 11. o.t., *Kunszenti-Kovács Dávid* 8. o.t., *Pataki Péter* 12. o.t., *Tran Thanh Long* 9. o.t., *Yu Da* 12. o.t. 10 pont; **26–28.** *Devecsery András* 12. o.t., *Kiss 360 Sándor* 11. o.t., *Szabó 997 Péter* 12. o.t. 8 pont; **29.** *Pap Júlia* 12. o.t. 7 pont; **30–41.** *Bujdosó Attila* 12. o.t., *Csirmaz Előd* 10. o.t., *Csóka Endre* 8. o.t., *Gelencsér Gábor* 10. o.t., *Gerencsér Balázs* 9. o.t., *Keszegh Balázs* 11. o.t., *Mansur Boase* 11. o.t., *Mészáros András* 12. o.t., *Pálvölgyi Dénes* 8. o.t., *Rácz Balázs* 12. o.t., *Sidó Péter* 11. o.t., *Ta Vinh Thong* 9. o.t. 5 pont. Kevesebb pontja van 27 versenyzőnek.

C jelű gyakorlatok

Az eddig feldolgozott feladatok: a szeptember–januári számok feladatai.

Feladatonként egy helyes megoldással elérhető: 100 pont.

Legfeljebb 10. osztályosok

1. *Birkner Tamás* 6. o.t. 102 pont; **2–3.** *Bohák András* 10. o.t., *Zalán Péter* 10. o.t. 94 pont; **4.** *Szalay Zsófia* 9. o.t. 93 pont; **5.** *Dömötör Csilla* 9. o.t. 92 pont; **6–8.** *Babos Attila* 10. o.t., *Fehér Gergely* 10. o.t., *Nagy 729 Dávid* 10. o.t. 91 pont; **9.** *Csató György* 10. o.t. 89 pont; **10–11.** *Koch Dénes* 10. o.t., *Szűcs 816 Júlia* 10. o.t. 84 pont; **12.** *Medve Kinga Sára* 10. o.t. 81 pont; **13–14.** *Alvarez Olga* 9. o.t., *Békási Sándor* 10. o.t. 79 pont;

15. *Buthi Irma* 9. o.t. 78 pont; **16–18.** *Lajtha Balázs* 10. o.t., *Medgyesi László* 10. o.t., *Terjéki László Dénes* 9. o.t. 76 pont; **19–20.** *Kós Viktória* 10. o.t., *Legány Csaba* 10. o.t. 75 pont; **21.** *Börcsök József* 10. o.t. 74 pont; **22–25.** *Lang Péter* 8. o.t., *Pajna Gabriella* 9. o.t., *Pozsonyi Tamás* 10. o.t., *Szabó 314 Zsolt* 9. o.t. 71 pont; **26–31.** *Farkas 327 Dóra* 9. o.t., *Farkas Melinda* 9. o.t., *Hablicsek Márton* 7. o.t., *Jesch Dávid* 9. o.t., *Kádas Attila* 9. o.t., *Tóth 777 Balázs* 10. o.t. 70 pont; **32.** *Baur Eszter* 9. o.t. 69 pont; **33.** *Kmellár Béla* 10. o.t. 68 pont; **34–35.** *Kovács 954 Szabolcs* 9. o.t., *Nagy 625 Tibor* 8. o.t. 67 pont; **36.** *Németh 917 Julianna* 10. o.t. 66 pont; **37.** *Molnár András* 9. o.t. 65 pont; **38–39.** *Székelyhidi Tamás* 10. o.t., *Vanya Ádám* 10. o.t. 64 pont; **40.** *Lakatos Szilvia* 8. o.t. 63 pont; **41–42.** *Kalmár Levente* 10. o.t., *Somlai Henrietta* 10. o.t. 62 pont; **43–44.** *Antal Ágnes* 10. o.t., *Papp Gábor Richárd* 9. o.t. 61 pont; **45–49.** *Börzsönyi Ádám* 10. o.t., *Fazekas 533 Éva* 10. o.t., *Nagy 213 Gergely* 9. o.t., *Németh 278 Andrea* 9. o.t., *Pintér Miklós* 9. o.t. 60 pont; **50.** *Bozsik Balázs* 10. o.t. 59 pont; **51–53.** *Hegyi Márta* 10. o.t., *Kovács 494 Andrea* 9. o.t., *Spanczér Ilona* 9. o.t. 58 pont; **54–56.** *Barta 679 Zsolt* 9. o.t., *Király Attila* 10. o.t., *Molnár 984 Adrienn* 9. o.t. 57 pont; **57–61.** *Lakatos Kristóf* 8. o.t., *Reiss Attila* 9. o.t., *Siroki László* 9. o.t., *Vígh Attila* 10. o.t., *Vona Gábor* 10. o.t. 56 pont; **62–66.** *Kalcsú Áron* 8. o.t., *Kiss 189 Csaba* 10. o.t., *Pájer Boróka* 10. o.t., *Várnai Csilla* 9. o.t., *Veres 618 Dániel* 10. o.t. 55 pont; **67–69.** *Kovács 721 Péter* 9. o.t., *Markó Péter* 10. o.t., *Végh Anita* 10. o.t. 54 pont; **70–72.** *Kolláth Endre* 10. o.t., *Nyul Balázs* 8. o.t., *Péczeli Viktor* 9. o.t. 53 pont; **73–79.** *Buti Tamás* 8. o.t., *Földes Péter* 9. o.t., *Komlós Gábor* 9. o.t., *Sparing Dániel* 8. o.t., *Szabó 213 Adrienn* 9. o.t., *Szekeres 761 András* 10. o.t., *Szekeres Balázs* 8. o.t. 52 pont; **80–84.** *Benczúr Zsolt* 9. o.t., *Frigyesi Zoltán* 10. o.t., *Nagy 281 Dávid* 10. o.t., *Sajtos Erika* 10. o.t., *Tímár Gábor* 9. o.t. 51 pont; **85–87.** *Bán Zoltán* 9. o.t., *Flores Diana* 9. o.t., *Palotás Bálint* 9. o.t. 50 pont; **88–90.** *Czakó Péter* 9. o.t., *Regula Gergely* 9. o.t., *Tisch Dániel* 9. o.t. 49 pont; **91–93.** *Darabos Andrea* 10. o.t., *Dőry Magdolna* 8. o.t., *Horváth Illés* 9. o.t. 48 pont; **94–99.** *Bécsy Ádám* 9. o.t., *Bozsik Judit* 9. o.t., *Csete Mónika* 10. o.t., *Gottlasz Valér* 9. o.t., *Merazga Oktávia* 10. o.t., *Víg Róbert* 9. o.t. 47 pont; **100–104.** *Bálint Zsuzsanna* 10. o.t., *Barta Péter* 9. o.t., *Geresdi Attila* 9. o.t., *Maróti László* 8. o.t., *Rischák Rózsa* 9. o.t. 46 pont; **105–108.** *Erdélyi Dániel* 9. o.t., *Vági Andrea* 8. o.t., *Varga 123 Áron* 9. o.t., *Veréb Tamás* 9. o.t. 45 pont; **109–114.** *Aczél Márton* 9. o.t., *Borosán Péter* 9. o.t., *Fejes Tamás* 9. o.t., *Horváth 303 Bálint* 10. o.t., *Makk Péter* 9. o.t., *Nagy 206 István* 9. o.t. 44 pont; **115–117.** *Mult Attila* 9. o.t., *Plézer Nóra* 9. o.t., *Vincze-Pap Gergely* 10. o.t. 43 pont; **118.** *Tamás Krisztina* 8. o.t. 42 pont; **119–123.** *Farkas Tamás* 8. o.t., *Filep Gergely* 9. o.t., *Morvai Krisztina* 9. o.t., *Németh 829 Balázs* 10. o.t., *Virág Dorottya* 10. o.t. 41 pont; **124–125.** *Gyökeres Ágnes* 9. o.t., *Wacha András* 8. o.t. 40 pont; **126–130.** *Ásványi Katalin* 9. o.t., *Csáky Attila* 9. o.t., *Enyingi Katalin* 10. o.t., *Halmos Zsófia* 9. o.t., *Pach Péter Pál* 7. o.t. 39 pont; **131–135.** *Abonyi Gergely* 10. o.t., *Bartha Ferenc Ágoston* 8. o.t., *Lajkó Miklós* 8. o.t., *Molnár 475 Viktor* 9. o.t., *Sörös Csaba* 10. o.t. 38 pont; **136–145.** *Bodor András József* 10. o.t., *Dorogházi Edina* 9. o.t., *Juhász Andrea* 9. o.t., *Juhász Sándor* 10. o.t., *Kiss 111 Péter* 10. o.t., *Kotnyek Barbara* 9. o.t., *Kőrizs András* 9. o.t., *Pernek Ákos* 9. o.t., *Soproni Péter* 9. o.t., *Várnai Anikó* 9. o.t. 37 pont; **146–149.** *Bakonyi Ákos* 8. o.t., *Drozdy Árpád* 9. o.t., *Herpai Csaba* 10. o.t., *Minárik Gábor* 10. o.t. 36 pont; **150–155.** *Dányádi Zsolt* 7. o.t., *Fehér Miklós* 10. o.t., *Kada Katalin* 10. o.t., *Osztrovszky Györgyi* 9. o.t., *Sofró Csaba* 10. o.t., *Tősér Kinga* 10. o.t.

35 pont; **156–160.** *Illés Zoltán* 9. o.t., *Kovács 666 Gergely* 9. o.t., *Novits László* 10. o.t., *Pótó Júlia* 10. o.t., *Rakamazi Richárd* 10. o.t. 34 pont; **161–165.** *Feró Dalma* 10. o.t., *Imre Tamás* 9. o.t., *Lánczi Levente* 9. o.t., *Papp 249 Diána* 9. o.t., *Vadai Zsolt* 9. o.t. 33 pont; **166–178.** *Bödők Donát* 9. o.t., *Kéri Sophia* 9. o.t., *Kovács 123 Áron* 8. o.t., *Kovács Dávid* 9. o.t., *Ligetvári Péter* 9. o.t., *Nagy 701 Mária* 9. o.t., *Nagy Mónika* 9. o.t., *Patzkó Ágnes* 9. o.t., *Tóth 345 Mihály* 9. o.t., *Ujlaki Mátyás* 10. o.t., *Varga 846 Petra* 9. o.t., *Vicsek Miklós* 10. o.t., *Zoltán Illés* 9. o.t. 32 pont; **179–182.** *Jenei Viktor* 10. o.t., *Koncz Vera Zsuzsa* 9. o.t., *Nárai Csilla* 9. o.t., *Varga Lajos* 9. o.t. 31 pont; **183–189.** *Czirják Emese* 9. o.t., *Danyi Barbara* 10. o.t., *Németh Zsófia* 10. o.t., *Róna Szilárd* 10. o.t., *Springer Éva* 9. o.t., *Tóth 666 János* 9. o.t., *Török Andrea* 9. o.t. 30 pont; **190–197.** *Bácsi László* 9. o.t., *Kármán Péter* 10. o.t., *Kolozs Balázs* 9. o.t., *Pszota Zsolt* 9. o.t., *Szöllősi Ádám* 8. o.t., *Tallián Miklós* 10. o.t., *Tamás Gábor Zoltán* 10. o.t., *Varga 480 Edit* 9. o.t. 29 pont; **198–201.** *Csabina Csilla* 10. o.t., *Földesi Gergely* 9. o.t., *Juhász Sándor* 9. o.t., *Somlai Ágnes* 9. o.t. 28 pont; **202–204.** *Csonga Zoltán* 9. o.t., *Lengyel Dániel* 10. o.t., *Pintér Csaba* 10. o.t. 27 pont; **205–213.** *Bartha 321 Ágnes* 9. o.t., *Fülöp Nóra* 10. o.t., *Gálosfai Krisztina* 8. o.t., *Nagy 712 Gábor* 10. o.t., *Pap Tünde* 10. o.t., *Papp 932 Katalin* 9. o.t., *Simon 015 Tamás* 10. o.t., *Szentirmai Dávid* 10. o.t., *Zámbó Virág* 9. o.t. 26 pont; **214–224.** *Antal 100 Péter* 8. o.t., *Boros Csaba* 10. o.t., *Csikós Gábor* 10. o.t., *Gyócsi Péter* 9. o.t., *Kiss 727 Barnabás* 9. o.t., *Kovács Anikó* 9. o.t., *Nagy 666 Beáta* 9. o.t., *Sebestyén Zita* 10. o.t., *Szalai Attila* 8. o.t., *Tábor Áron* 8. o.t., *Vígh Ilona* 9. o.t. 25 pont; **225–235.** *Balogh 126 Zoltán* 8. o.t., *Baráth Edit* 9. o.t., *Baross Gergely* 10. o.t., *Buti András* 10. o.t., *Czibik Ágnes* 10. o.t., *Hangya Miklós* 7. o.t., *Heé Éva* 9. o.t., *Németh 513 Róbert* 10. o.t., *Ócsai Katalin* 9. o.t., *Pálvölgyi Dénes* 8. o.t., *Tóth 182 Viktor* 9. o.t. 24 pont; **236–243.** *Baté Zsuzsanna* 10. o.t., *Bíró Gáspár* 10. o.t., *Prekopcsák Zoltán* 8. o.t., *Radó Rózsa* 10. o.t., *Szalontay Luca* 10. o.t., *Szelencsik Zsanett* 10. o.t., *Tolnay Adrienn* 10. o.t., *Völgyi Csaba* 9. o.t. 23 pont; **244–251.** *Csala Anikó* 10. o.t., *Havasi András* 10. o.t., *Kadlecsik Zsolt* 9. o.t., *Kiss 183 Árpád* 10. o.t., *Reményi Zsolt* 10. o.t., *Soós Péter* 9. o.t., *Szabó 930 Krisztina* 9. o.t., *Tolvaj Borbála* 10. o.t. 22 pont; **252–262.** *Bognár Krisztina* 10. o.t., *Bús Katalin* 9. o.t., *Csuka Zsuzsanna* 9. o.t., *Farkas Ákos* 10. o.t., *Hajdu Eszter* 10. o.t., *Herman Veronika* 10. o.t., *Kovács 532 Attila* 8. o.t., *Molnár Adrienn* 10. o.t., *Pásztor Péter* 10. o.t., *Töreki 123 Péter* 8. o.t., *Véber Andrea* 9. o.t. 21 pont; **263–272.** *Bodnár Barbara* 9. o.t., *Dávid 159 Róbert* 10. o.t., *Juhász Tamás* 9. o.t., *Laczay Zsolt* 10. o.t., *Mándy Péter* 8. o.t., *Nyirkos Judit* 7. o.t., *Raikovich Tamás* 9. o.t., *Rudas Rozália* 10. o.t., *Sára Péter* 9. o.t., *Szabadi Annamária* 10. o.t. 20 pont. Kevesebb pontja van 485 versenyzőnek.

11–12. osztályosok

1. *Farkas Milán* 12. o.t. 101 pont; **2.** *Gajdos Béla* 11. o.t. 100 pont; **3.** *Ábrány Miklós* 12. o.t. 98 pont; **4.** *Robotka Zsolt* 11. o.t. 95 pont; **5–6.** *Bicsák Mátyás* 11. o.t., *Gueth Krisztián* 12. o.t. 94 pont; **7.** *Lovas Róbert* 12. o.t. 91 pont; **8–9.** *Bérces Márton* 12. o.t., *Buruzs Ádám* 11. o.t. 90 pont; **10–12.** *Nagy 512 Marianna* 12. o.t., *Schmeiszer Kornél* 11. o.t., *Szászi Zsuzsanna* 11. o.t. 88 pont; **13–14.** *Kegyes Tamás* 11. o.t., *Zombori Zsolt* 11. o.t. 87 pont; **15.** *Fall Zoltán* 12. o.t. 86 pont; **16–17.** *Führer Lívia* 12. o.t., *Szekeres Nóra* 11. o.t. 85 pont; **18.** *Kardos Péter* 11. o.t. 84 pont; **19–21.** *Agócs Judit* 11. o.t., *Münz Márton* 11. o.t., *Schmeiszer Krisztián* 11. o.t. 81 pont;

22. *Friedl Zita* 11. o.t. 80 pont; **23–24.** *Révai Balázs* 11. o.t., *Várallyay György* 12. o.t. 79 pont; **25–29.** *Fazekas Gábor* 11. o.t., *Fehér 666 Ágnes* 12. o.t., *Kovács 899 Péter* 12. o.t., *Németh Péter* 12. o.t., *Orbán Viktor* 12. o.t. 77 pont; **30–31.** *Havran Dániel* 11. o.t., *Strobl Apolka* 11. o.t. 75 pont; **32.** *Mezei Irén* 12. o.t. 74 pont; **33.** *Szőllősi Loránd* 12. o.t. 73 pont; **34.** *Wilfing András* 11. o.t. 72 pont; **35.** *Klausz Ferenc* 11. o.t. 71 pont; **36.** *Menyhárt Sándor* 11. o.t. 70 pont; **37.** *Tóth 111 Gábor* 12. o.t. 69 pont; **38–39.** *Besenyei Ádám* 11. o.t., *Károly Zoltán* 12. o.t. 68 pont; **40–42.** *Juhász 113 Ágnes* 11. o.t., *Koczka Gergely* 11. o.t., *Molnár László Milán* 11. o.t. 67 pont; **43–46.** *Bankó Krisztián* 11. o.t., *Davidovics Gábor* 12. o.t., *Karika Róbert* 11. o.t., *Sallai 123 Enikő* 11. o.t. 66 pont; **47–49.** *Brulich Ákos* 12. o.t., *Patay Gergely* 11. o.t., *Sipos Tünde* 12. o.t. 65 pont; **50–51.** *Fehérvári Sándor* 11. o.t., *Horváth 413 László* 11. o.t. 64 pont; **52.** *Szekeres Lilla* 11. o.t. 63 pont; **53–55.** *Czeglédi Erika* 11. o.t., *Kocsis 444 Gábor* 12. o.t., *Portschy Szabolcs* 12. o.t. 62 pont; **56–57.** *Hegyi Péter* 12. o.t., *Lévai István* 11. o.t. 61 pont; **58–62.** *Aranyossy Márta* 12. o.t., *Bécsi Kristóf* 11. o.t., *Keresztély Éva* 12. o.t., *Matécsa 999 Márta* 11. o.t., *Schwarz Attila* 12. o.t. 60 pont; **63–66.** *Bakó Péter* 11. o.t., *Csornai Gyula* 11. o.t., *Gyérmán János* 11. o.t., *Harangi Norbert* 11. o.t. 59 pont; **67–68.** *Darányi Adrienn* 11. o.t., *Szontágh Zsuzsanna* 12. o.t. 58 pont; **69–74.** *Csurdi Abigél* 11. o.t., *Kanyó Katalin* 11. o.t., *Makó Veronika* 12. o.t., *Samu Axel* 12. o.t., *Simon Zoltán* 11. o.t., *Újhelyi Bernadett* 12. o.t. 57 pont; **75.** *Kardos Zsófia* 12. o.t. 54 pont; **76–80.** *Gyarmati-Szabó István* 11. o.t., *Jancski Dóra* 11. o.t., *Kósa Gabriella* 11. o.t., *Kulcsár Péter* 12. o.t., *Takács Nóra* 11. o.t. 53 pont; **81–82.** *Mátrai Rita* 12. o.t., *Varga Dániel* 11. o.t. 52 pont; **83–84.** *Kriston Vízi Gábor* 11. o.t., *Mehrl Nándor* 11. o.t. 51 pont; **85–86.** *Antal István* 11. o.t., *Pári Csaba* 12. o.t. 50 pont; **87–89.** *Bagyal Adrienn* 11. o.t., *Beregszászi Krisztián* 11. o.t., *Berta Andrea* 11. o.t. 49 pont; **90–92.** *Döme Botond* 11. o.t., *Jombik Péter* 12. o.t., *Tolvaj Vera* 11. o.t. 48 pont; **93–94.** *Kovács 999 Zsolt* 11. o.t., *Tóth Balázs* 11. o.t. 47 pont; **95–97.** *Kallus Edit* 12. o.t., *Nyisztor Noémi* 11. o.t., *Túri Bálint* 11. o.t. 45 pont; **98–101.** *Lődör Zoltán* 11. o.t., *Oláh Tibor Benjámin* 11. o.t., *Szegedi Máté* 12. o.t., *Szépe Bálint* 11. o.t. 44 pont; **102–104.** *Menyhárt Ferenc* 11. o.t., *Mezőfi Lajos* 12. o.t., *Pálinkás Tünde* 11. o.t. 43 pont; **105–111.** *Bíró Márton* 11. o.t., *Inzelt György* 11. o.t., *Oláh Szabolcs* 11. o.t., *Pintér Zsuzsanna* 11. o.t., *Szép László* 12. o.t., *Togobickij Vera* 11. o.t., *Varga 951 Attila* 11. o.t. 42 pont; **112–115.** *Kállay Viktória* 11. o.t., *Kovács Szabolcs* 12. o.t., *Sinkovicz Katalin* 11. o.t., *Taraza Busra* 11. o.t. 41 pont; **116–119.** *Geri Péter* 11. o.t., *Groma Veronika* 11. o.t., *Kiss Marietta* 12. o.t., *Soós István* 11. o.t. 40 pont; **120–122.** *Molnár Csaba* 12. o.t., *Rádi Krisztina* 11. o.t., *Rozovits Zoltán* 11. o.t. 39 pont; **123–125.** *Király Péter* 11. o.t., *Kiss 360 Sándor* 11. o.t., *Kozma Gergely* 12. o.t. 38 pont; **126–130.** *Bacsárdi László* 11. o.t., *Dávid Anita* 11. o.t., *Lovrencsics Lilla* 12. o.t., *Piros Judit* 11. o.t., *Sapszon János* 11. o.t. 37 pont; **131–135.** *Fiedler Ágnes* 11. o.t., *Pádár Gergely* 12. o.t., *Szabó 415 Ágnes* 11. o.t., *Török Tímea* 11. o.t., *Vincze Tímea* 12. o.t. 36 pont; **136–143.** *Kőhalmi Lívia* 11. o.t., *Kungl István* 11. o.t., *Lakatos Veronika* 12. o.t., *Mihics Henrik* 11. o.t., *Osztényi József* 12. o.t., *Tóth Éva* 12. o.t., *Yu Da* 12. o.t., *Zsédely Eszter* 11. o.t. 35 pont; **144–146.** *Lénárt Marcell* 11. o.t., *Monyók Ákos* 12. o.t., *Stoll Péter* 12. o.t. 33 pont; **147–148.** *Kiss 123 József* 11. o.t., *Molnári 918 Angéla* 12. o.t. 32 pont; **149–155.** *Balog Krisztián* 12. o.t., *Biczó András* 11. o.t., *Gyenes Dávid* 11. o.t., *Horváth Lajos* 11. o.t., *Horváth Péter* 11. o.t., *Kitlei Róbert* 12. o.t., *László Zoltán* 11. o.t. 31 pont; **156–163.** *Bendzsel Tamás*

11. o.t., *Gondos Gabriella* 12. o.t., *Lászka Éva* 12. o.t., *Linka Judit* 11. o.t., *Márkus Viktória* 11. o.t., *Papp Gyula* 11. o.t., *Pupp Péter* 11. o.t., *Várady Gábor* 11. o.t. 30 pont; **164–166.** *Berényi Gergely* 12. o.t., *Pásztor Krisztina* 12. o.t., *Somodi Zoltán* 11. o.t. 29 pont; **167–169.** *Burján Krisztina* 12. o.t., *Firnigel Zoltán* 12. o.t., *Gubán Zoltán* 11. o.t. 28 pont; **170–175.** *Bálint Hajnalka* 12. o.t., *Balogh Renáta* 12. o.t., *Berkes 555 Judit* 11. o.t., *Fekete Ada* 11. o.t., *Horváth 727 István* 11. o.t., *Keszte Dóra* 12. o.t. 27 pont; **176–179.** *Nagy 777 Zoltán* 11. o.t., *Sallay Réka* 12. o.t., *Vajnai 111 Viktória* 12. o.t., *Vitális Gábor* 12. o.t. 26 pont; **180.** *Tüske Rita (Gabriella)* 11. o.t. 25 pont; **181–185.** *Fassang Noémi* 12. o.t., *Horváth 313 Dániel* 11. o.t., *Mészáros Miklós* 12. o.t., *Nagy Annamária* 11. o.t., *Ráth Krisztián* 12. o.t. 24 pont; **186–196.** *Drozdy Győző* 11. o.t., *Fábián Gergely Bence* 12. o.t., *Horváth 820 Mariann* 11. o.t., *Hraniszláv Ljubica* 11. o.t., *Ivánszki Szilvia* 11. o.t., *Káldy Nóra* 11. o.t., *Ledniczki Petra* 11. o.t., *Madarász Éva* 11. o.t., *Solymossy Endre* 11. o.t., *Somodi Katalin* 11. o.t., *Tabányi Attila* 11. o.t. 22 pont; **197–200.** *Kántor Éva* 11. o.t., *Lendvai Péter* 11. o.t., *Németh 123 Boglárka* 11. o.t., *Szerencse Balázs* 12. o.t. 21 pont; **201–214.** *Bajnai Blanka* 11. o.t., *Bella Ildikó* 12. o.t., *Csábi Tibor* 11. o.t., *Czirkos Zoltán* 11. o.t., *Ekler Bálint* 11. o.t., *Götz Tibor* 12. o.t., *Kisvári 981 Zsuzsanna* 11. o.t., *Köteles Hédi* 11. o.t., *Makó Attila* 11. o.t., *Manrique Dávid* 11. o.t., *Nagy Emőke* 11. o.t., *Nagy Klaudia* 11. o.t., *Pintér Balázs* 11. o.t., *Véhmann Ferenc* 11. o.t. 20 pont. Kevesebb pontja van 269 versenyzőnek.

Az 1999. évi magyar–izraeli matematikaverseny

Ebben az évben március 27-én és 28-án, immár tizedik alkalommal került sor az izraeli–magyar matematikaversenyre, ezúttal Magyarországon. A két versenynapon olimpiai mintára három-három feladat megoldásában mérte össze tudását a két ország 4-4 versenyzője. A versenyen minden egyes feladat 7 pontot ért. A magyar versenyzők betűrendben (zárójelben a versenyen elért pontszám):

Gyenes Zoltán, 11. o. Apáczai Csere János Gimnázium, Budapest (38 pont);

Kiss Gergely, 11. o. Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimnázium, Budapest (30 pont) ;

Terpai Tamás 12. o. Fazekas Miháy Főv. Gyak. Gimnázium, Budapest (39 pont);

Zábrádi Gergely 11. o. Révai Miklós Gimnázium, Győr (38 pont).

Az izraeli csapat legjobb pontszerzője, *Mark Braverman* 31 pontot ért el a versenyen. A további versenyzők: *Ran Tesler* (23 pont), *Oran Lang* (23 pont), *Amitai Yuval* (12 pont) . A feladatok megoldását a versenyzők tollából őszi számaink valamelyikében közöljük.

Első nap

1. Az $f(x)$ legalább másodfokú polinom. Készítsük el a $g_i(x)$ polinomsorozatot a következőképpen:

$$g_1(x)=f(x), \qquad g_{n+1}(x)=f(g_n(x)).$$

Jelölje r_n a g_n gyökeinek az átlagát.

Mekkora r_{99} értéke, ha tudjuk, hogy $r_{19}=99$?

2. Adott a síkon $2n+1$ különböző egyenes, úgy, hogy közülük bármely három olyan háromszöget határoz meg, amelyben nincsen derékszög. Legfeljebb hány hegyesszögű lehet az egyenesek által meghatározott háromszögek között?

3. Határozzuk meg azokat az $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}$ függvényeket, amelyekre teljesül, hogy bármely két x, y racionális számra

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)-f(x\cdot y)+1.$$

Második nap

4. Az $a_1, a_2, \ldots$ sorozatban $a_1=c$ pozitív egész szám, továbbá

$$a_{n+1}=c\cdot a_n+\sqrt{(c^2-1)\cdot(a_n^2-1)}.$$

Bizonyítsuk be, hogy a sorozat elemei pozitív egész számok.

5. Legyen $f(x,y,z)=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}$ minden olyan x, y, z-re, amelyre $x+y+z\neq 0$. Keressünk olyan $P(x_0,y_0,z_0)$ pontot, amelyre

$$0<x_0^2+y_0^2+z_0^2<\frac{1}{1999} \qquad \text{és} \qquad 1{,}999<f(x_0,y_0,z_0)<2.$$

6. Egy feleletválasztós tesztvizsga 4 kérdésből állt. Minden kérdésre háromféle válasz volt adható. A vizsgán résztvevő diákokról kiderült, hogy bármely hármójukhoz volt olyan kérdés, amelyre mindhárman másképpen válaszoltak. Legfeljebb hány diák vehetett részt a vizsgán?

Református Iskolák VII. Országos Matematika Versenye

A Református Iskolák VII. Országos Matematika Versenyén 1999. február 27–28-án Debrecenben 17 városból 86 diák mérte össze tudását. A zsűri elnöke *Gaál Botond* professzor, tagjai *Dr. Lajkó Károly* egyetemi tanár és *Szvetits Zoltán* tanár voltak.

A versenyfeladatokat a KLTE Matematika Intézet oktatói állították össze.

Győry Kálmán professzor „Számelméleti problémák a középiskolában” című előadása tette tartalmasabbá a tanárok számára rendezett szakmai napot.

Helyezések:

7. osztályosok

I. hely: *Sándor Ágnes,* Pápa;

II. hely: *Rovó Petra,* Nagykőrös;

III. hely: *Pósa Csenge,* Debrecen;

dicséret: *Kertész Orsolya,* Budapest, Lónyai Gimn. *Könnyű János,* Sárospatak; *Harmath Péter,* Kecskemét.

8. osztályosok

I. hely: *Horváth Katalin,* Kecskemét;

II. hely: *Mihály Krisztián,* Miskolc;

III. hely: *Máté Adrienn,* Kiskunhalas.

9. osztályosok

I. hely: *Sipos Szabó Eszter,* Kecskemét;

II. hely: *Sára Péter,* Csurgó;

III. hely: *Bodnár Péter,* Sárospatak.

10. osztályosok

I. hely: *Komáromi András,* Gödöllő;

II. hely: *Börzsönyi Ádám,* Hódmezővásárhely;

III. hely: *Mátyási Nóra,* Kiskunhalas;

dicséret: *Sajtos Erika*, Debrecen; *Paholis Gábor,* Sárospatak.

11. osztályosok

I. hely: *Ozogány Katalin,* Pápa;

II. hely: *Kegyes Tamás,* Budapest, Baár-Madas Gimn.;

III. hely: *Dömös Csaba,* Hódmezővásárhely.

12. osztályosok

I. hely: *Mag Kornélia,* Kunszentmiklós;

I. hely: *Udvari Zsolt,* Hódmezővásárhely;

II. hely: *Sindely Dániel,* Kiskunhalas;

dicséret: *Bakó Csaba,* Gödöllő;

különdíj: *Blaskó Katalin,* Karcag.

A fődíjat *Ozogány Katalin,* a Pápai Református Gimnázium 11. osztályos tanulója nyerte el.

dr. Bajza Istvánné

A Református Iskolák VII. Országos Matematika Versenyének feladatai

11. osztály

1. Oldjuk meg az alábbi másodfokú egyenletet:

$$(x-1)^2+(x-2)^2+\ldots+(x-1998)^2+(x-1999)^2=1999x^2.$$

2. Egy 7 egység oldalú négyzetben 99 pont helyezkedik el úgy, hogy közülük semelyik három sincs egy egyenesen. Igazoljuk, hogy ezek közül kiválasztható három olyan, hogy az általuk kifeszített háromszög területe nem nagyobb $\frac{1}{2}$ területegységnél.

3. Legyen egy háromszög súlyvonalainak hossza s_a, s_b, s_c. Igazoljuk, hogy

$$s_a^2+s_b^2+s_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

4. Egy n oldalú (síkbeli) sokszög csúcsai A_1, A_2, $\ldots$, A_n. Tudjuk, hogy a sík bármely P pontját az A_1, A_2, $\ldots$, A_n csúcsokra egymás után (n-szer) tükrözve, visszakapjuk a kiindulási P pontot. Igazoljuk, hogy ekkor n páros, és hogy a sokszög páratlan, illetve páros indexű csúcsaiból készített sokszögek súlypontjai azonosak.

5. Igazoljuk, hogy ha x, y, z pozitív számok, akkor

$$x^5y^3z+y^5z^3x+z^5x^3y\leqslant x^9+y^9+z^9.$$

12. osztály

1. Az $x^2+y^2-6x-4y-156=0$ egyenletű körvonalra illeszkednek az $ABCD$ négyzet csúcspontjai. Határozzuk meg a négyzet B, C és D csúcspontjainak koordinátáit, ha $A(8;-10)$.

2. Adott egy szabályos négyoldalú gúla. A gúla alaplapja és átlós metszete (a gúla alaplapjának átlóján átmenő és a gúla csúcspontjára illesztett síknak a gúlával alkotott metszete) területének összege megegyezik a gúla palástjának a felszínével. Határozzuk meg a gúlát határoló háromszögek szögeit.

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

$$1>\log_{\sin x}(\sin x+\cos 2x)>0.$$

4. Adjuk meg az

$$S_n=\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)},\qquad n\in\mathbf{N}$$

összeget zárt alakban. Mennyi lesz $[S_{1999}]$ ($[a]$ az a egész részét jelöli.)

5. Helyezzünk el 1 és 58 között minimális számú egész számot úgy, hogy azok az eredetiekkel együtt egy számtani sorozat szomszédos tagjai legyenek, ha tudjuk, hogy a számuk között szerepel a 10 is. Hányadik elem a 10?

Beszámoló a Tanárképző Főiskolák Matematikaversenyéről

A tanárképző főiskolák *Péter Rózsa* versenyét ebben az évben 1999. március 31. és április 2. között a pécsi Janus Pannonius Tudományegyetem Tanárképző Főiskolai kara rendezte. A vendégek március 31-én érkeztek Pécsre. Április 1-jén 9^{30}-tól 13^{30}-ig zajlott maga a verseny, délután a hallgatók városnéző programokon vettek részt, a kísérő tanárok eközben a dolgozatokat javították. Az eredményeket másnap, április 2-án 10 órakor hirdették ki.

A versenyen az ország 6 tanárképző főiskolája vett részt: Budapest, Eger, Nyíregyháza, Pécs, Szeged és Szombathely csapata mérte össze tudását. Elvileg minden főiskoláról 5 versenyző indulhatott, de sajnos volt olyan város, ahonnan kevesebb diák jött el.

A versenybizottság elnöke idén is *Urbán János* volt. A verseny feladatait a főiskolák oktatóinak javaslataiból állították össze, amit a bizottság (személy szerint Urbán János) további egy feladattal egészített ki. Így állt össze az alábbi feladatsor:

1. Számítsuk ki a $[0;1]$ intervallum olyan részintervallumainak hosszának összegét, amelyekbe tartozó számok tizedestört alakjában van 1-es számjegy.

2. Az ABC hegyes szögű háromszög A, B és C csúcsaiból induló súlyvonalegyenesek a háromszög köré írt kört másodszor az A_1, B_1 és C_1 pontokban metszik. Ezeket sorra tükrözve a hozzájuk tartozó oldalak felezőpontjára az A_0, B_0 és C_0 pontokat kapjuk. Igazoljuk, hogy A_0, B_0, C_0 és az ABC háromszög S súlypontja húrnégyszöget alkot.

3. Igazoljuk, hogy ha n pozitív egész, akkor

$$1+\frac{1}{\sqrt[n]{2}}+\frac{1}{\sqrt[n]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\geqslant\sqrt[n]{\frac{2n^n}{n+1}}.$$

4. Ernő teniszkarrierje érdekében apja díjat ajánlott fel. A díjat akkor nyeri el, ha megnyer két egymást követő meccset egy hármas sorozatból, amelyet felváltva játszik az apjával és a klub bajnokával (aki jobban játszik az apjánál). Ernő választhat, hogy bajnok–apa–bajnok vagy apa–bajnok–apa sorozatot játszik. Melyiket válassza?

5. Legyen $a_0=5$ és $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$. Bizonyítsuk be, hogy $45<a_{1000}<45{,}1$.

6. A $p(x)$ másodfokú valós együtthatós polinomról tudjuk, hogy $|p(x)|\leqslant 1$, ha $x\in[0{,}1]$. Melyik az a legkisebb K valós szám, amelyre teljesül, hogy $|p'(0)|\leqslant K$?

7. Adott a síkon n pont, amelyek között nincs három egy egyenesre illeszkedő, és nincs négy egy körön fekvő pont. Minden ponthármasra kört illesztünk. Mutassuk meg, hogy a körök között az egységsugarúak száma nem nagyobb, mint $\dfrac{n(n-1)}{3}$.

Fried Katalin

VII. Székely Mikó Matematika Verseny

Erdély legrangosabb matematikaversenyének döntő fordulóját Sepsiszentgyörgyön, 1999. február 20-án tartották meg. A kitűzött példák megoldására 3 óra állt rendelkezésre.*

IX. osztály

1. a) Határozd meg az összes olyan $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}^*$ függvényt, amelyre

$$(x+1)f(x)-xf(x+1)=1, \qquad \forall x\in\mathbf{N}.$$

Ezek közül melyek szürjektívek?

b) Van-e olyan $f:\mathbf{R}_+{}^*\to\mathbf{R}$ függvény, amely teljesíti a következő feltételeket:

$$(x+1)f(x)-xf(x+1)=1, \qquad \forall x\in\mathbf{R}_+{}^*,$$

és f végtelen sok értékre 1-nél szigorúan nagyobb, végtelen sok értékre pedig 1-nél szigorúan kisebb értéket vesz fel?

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

2. Az ABC háromszög (BC), (CA), (AB) oldalain rendre felvesszük az M, N, P pontokat úgy, hogy $\dfrac{BM}{CM}=\dfrac{CN}{AN}=\dfrac{AP}{BP}=k>0$. A háromszögön kívül megszerkesztjük az (AN)-nel párhuzamos és kongruens (MQ) szakaszt. Bizonyítsd be, hogy:

a) $QC \parallel AB$ b) PQ felezi a (BC) szakaszt.

Szöllősy György, Máramarossziget

3. Igazold, hogy bármely $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$-re érvényes az alábbi egyenlőtlenség:

$$\cos(x_1-x_2)\cdot\cos(x_2-x_3)\cdot\ldots\cdot\cos(x_n-x_1)\geqslant \sin 2x_1\cdot\sin 2x_2\cdot\ldots\cdot\sin 2x_n.$$

Bencze Mihály, Brassó

4. Legfeljebb hány tagja lehet annak a parlamenti bizottságnak, amelyben bármely két tag barát vagy ellenség, senkinek sincs tíznél több ellensége, és bármely hármas csoportban legalább két tag egymás ellensége?

Bege Antal, Kolozsvár

X. osztály

1. Bizonyítsd be, hogy ha $a, b, c \in (0,1)$, akkor:

$$\log_a \frac{3bc}{bc+a(b+c)}+\log_b \frac{3ca}{ca+b(c+a)}+\log_c \frac{3ab}{ab+c(a+b)}\geqslant 0,$$

Mikor áll fenn az egyenlőség?

Kovács Béla, Szatmárnémeti

---

* A feladatok eredeti szövegét közöljük. A használt jelölések, kifejezések és egyes témakörök néhány esetben nem szerepelnek a hazai tananyagban. Ezért az Olvasóktól elnézést kérünk. A szerk.

2. Bizonyítsd be, hogy ha a, b, $c \in \mathbf{C}^*$, $|a| = |b| = |c|$ és $az^2 + bz + c = 0$, akkor

$$|z| \in \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right].$$

Bencze Mihály, Brassó

3. a) Bizonyítsuk be, hogy a

$$\frac{1-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)} + \frac{1-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)} + \frac{\sqrt{2}\cdot\cos(2\alpha)-1}{\sqrt{2}\cdot\cos(2\alpha)+1}$$

kifejezés értéke állandó, ha α befutja a $\left[0, \frac{\pi}{8}\right]$ intervallumot.

b) Adott az $ABCD$ négyzet. Egy d egyenes az AB, AD és AC szakaszokat a P, Q, illetve R pontokban metszi. Bizonyítsd be, hogy ha d metszi a négyzetbe írt kört, akkor:

$$\frac{AP}{PB} + \frac{AQ}{QD} + \frac{AR}{RC} \geqslant 1.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

Bege Antal, Kolozsvár

4. Igazold, hogy az 1, 2, ..., 1999 természetes számok közül kiválasztható $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ úgy, hogy az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{11} \in \{-1, 1\}$ minden lehetséges megválasztása esetén az

$$\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_{11} a_{11}$$

összeg más-más értéket vegyen fel.

Dáné Károly, Marosvásárhely

XI. osztály

1. Adott az $A \in M_2(Q)$ mátrix. Bizonyítsd be, hogy

$$\det(2A^2 - 90A + 13I_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2A^2 - 90A + 13I_2 = O_2.$$

Igaz marad-e a fenti állítás, ha $A \in M_2(R)$?

Bencze Mihály, Brassó

2. Számítsd ki az

$$x_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{\ln(2k-1)}{\ln 2k} \qquad (n \geqslant 2)$$

általános tagú sorozat határértékét!

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

3. Az (a_n), $n \in \mathbf{N}$ természetes számsorozatot az

$$a_n = 2 \cdot a_{\left[\frac{n}{2}\right]} + 1, \qquad a_1 = 1$$

összefüggésekkel értelmeztük. ($[x]$ az x valós szám egész részét jelöli.)

a) A sorozat hány tagja egyenlő 31-gyel?

b) Határozd meg az általános tag képletét!

c) Bizonyítsd be, hogy bármely páratlan p prímszám esetén létezik olyan n természetes szám, hogy a_n osztható p-vel!

Bege Antal és András Szilárd, Kolozsvár

4. Egy 22 tagú parlamenti bizottság bármely két tagja barát, vagy ellenség, de egyiküknek sincs 10-nél több ellensége, és bármely hármas csoportban legalább két bizottsági tag egymás ellensége.

Hány olyan négytagú csoport választható ki, amelynek legalább három tagja kölcsönösen egymás ellensége?

Bege Antal, Kolozsvár

XII. osztály

1. A $(G,\cdot)$ csoportban

$$(xy)^4=y^4x^4,\quad (xy)^7=y^7x^7 \quad \text{és} \quad (xy)^{10}=y^{10}x^{10}$$

bármely x, $y\in G$ esetén. Bizonyítsd be, hogy $(G,\cdot)$ kommutatív csoport!

András Szilárd, Kolozsvár

2. Adott a következő sorozat: $a_0\in\mathbf{R}$, $a_{n+1}=4a_n-a_n^2$. Igazoljuk, hogy bármely pozitív egész n esetén létezik olyan a_0, hogy a sorozatnak pontosan n különböző értéke van.

Dáné Károly, Marosvásárhely

3. Jelöljük H-val a szabályos hatszög összes lehetséges színezését 2-színnel (a csúcsok számozva vannak és minden csúcs lehet fehér vagy fekete). Az sz_1 és sz_2 színezésekhez hozzárendeljük az sz_3 színezést a következő szabályok szerint:

1) Ha sz_1 és sz_2 két megfelelő csúcsa különböző színű, akkor sz_3 megfelelő csúcsa fekete lesz.

2) Ha sz_1 és sz_2 két megfelelő csúcsa azonos színű, akkor sz_3 megfelelő csúcsa fehér lesz.

a) Igazold, hogy az előbbi megfeleltetés művelet H-n és H ezzel a művelettel kommutatív csoport.

b) Bizonyítsuk be, hogy az a) pontban szereplő csoport izomorf a $(\mathcal{P}(A),\Delta)$ csoporttal, ahol $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ és

$$X\Delta Y=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)$$

a szimmetrikus különbség.

Bege Antal és András Szilárd, Kolozsvár

4. Jelölje F az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ egy primitív függvényét. Határozd meg f-et, ha

$$f(x-1)\cdot F(3-x)=-x^2+4x-3,\qquad \forall x\in\mathbf{R}\quad \text{és}\quad f(1)=1.$$

Bencze Mihály, Brassó

Megoldásvázlatok, eredmények az V. mérőlap (1999/4. sz.) feladataihoz

1. Tudjuk, hogy $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=0$. Ezért $a=0$, mert párosíthatjuk a tagokat, az elsőt az utolsóval, a másodikat az ötödikkel, a harmadikat pedig a negyedikkel.

$$b=\sin^{\cos 60^\circ}+\cos^{\sin 60^\circ}30^\circ=\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^{\frac12}+\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^{\frac12}=2\sqrt{\frac{\sqrt3}{2}}=\sqrt{2\sqrt3}.$$

$$c_1=3,\quad c_2=2\cdot\sqrt3,\quad c_3=2\sqrt{2\sqrt3}=2b.$$

Vagyis $n=3$ esetén lesz az a, b és c_3 egy számtani sorozat három egymást követő tagja.

2. Az egyenlet diszkriminánsa: $D=36(a+b)^2-20(a+b)^2=16(a+b)^2$. Látható, hogy minden esetben van gyök, ezek a megoldóképlet segítségével: $x_{1,2}=\dfrac{6(a+b)\pm 4(a+b)}{10}$, amiből $x_1=a+b$, $x_2=\dfrac{a+b}{5}$. Mivel a feladat szövege szerint $1<a+b<5$, ezért $1<x_1$, $0{,}2<x_2<1$, az egyenlet egyik gyöke valóban 0-nál nagyobb, de 1-nél kisebb, a másik gyöke pedig 1-nél nagyobb.

A feladat állításának megfordítása:

Az $5x^2-6(a+b)x+a^2+b^2+2ab=0$ másodfokú egyenletben az a és a b valós paraméterek, amelyekre az egyenlet egyik gyöke 0-nál nagyobb, de 1-nél kisebb, a másik pedig 1-nél nagyobb. Mutassuk meg, hogy $1<a+b<5$.

A szöveg alapján az egyenletnek van két különböző, pozitív gyöke: $x_1=a+b$, $x_2=\dfrac{a+b}{5}$. Ezért $x_2<x_1$, vagyis $0<\dfrac{a+b}{5}<1$, $1<a+b$. Ez azt jelenti, hogy valóban $1<a+b<5$.

3. Nézzük az $N=n^5-5n^3+4n$ kifejezést. Mivel

$$n^5-5n^3+4n=n(n^4-5n^2+4)=n(n^2-1)(n^2-4)=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2),$$

azért N minden n egész esetén osztható 5-tel.

Az m értéke negatív nem lehet, mert ekkor A értéke nem egész.

Ha $m=0$, akkor $A=N$, vagyis ekkor minden n egész szám megfelelő.

Vizsgáljuk végül az $m>0$ esetet.

A 2 pozitív egész kitevőjű hatványairól tudjuk, hogy az utolsó jegyük periodikusan ismétlődik: 2, 4, 8, 6, 2, ... Az

$$A=n^5-5n^3+4n-2^m+1=(n^5-5n^3+4n)-(2^m-1)$$

átalakítása után látjuk, hogy 2^m-1 is osztható kell legyen 5-tel. Így 2^m utolsó jegye csak 6 lehet, vagyis m 4-gyel osztható pozitív egész.

A három lehetőség alapján a megoldás: n tetszőleges egész szám, m pedig tetszőleges 4-gyel osztható természetes szám.

4. A COB háromszögben $\dfrac{z}{y}=\dfrac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin 45^\circ}$, a BOA háromszögben pedig $\dfrac{x}{AB}=\dfrac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin 135^\circ}$. Így $\dfrac{z}{y}=\dfrac{x}{AB}$, ami $\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{AB^2}{x^2y^2}$ alakban is írható. A BOA háromszögben $AB^2=x^2+y^2-$ $-2xy\cdot\cos 135^\circ$, és így

$$\left(\frac{1}{z}\right)^2=\frac{x^2+y^2-2xy\cdot\cos 135^\circ}{x^2y^2}.$$

Ezt szorozzuk meg $x^2y^2z^2$-tel: $(xy)^2=(xz)^2+(yz)^2-2(xz)(yz)\cdot\cos 135^\circ$.

Ez éppen a koszinusztétel az xy, xz és yz oldalhosszúságú háromszögben. Látható, hogy az xy oldallal szemben van a 135°-os szög.

5. A három kör középpontja $A(-2;5)$, $B(4;-3)$, $C(1;6)$, ezek a pontok egy derékszögű háromszög csúcsai, hiszen $AB=10$, $BC=3\sqrt{10}$, $CA=\sqrt{10}$ és $AB^2=BC^2+CA^2$. Az ABC

háromszög köréírt körének sugara 5, a kör középpontja pedig az AB átfogó felezőpontja, $F(1;1)$. Mivel a feladatban megadott körök mindegyikének 1 a sugara, azért a keresett kör középpontja az F pont, a sugara pedig 1 egységgel nagyobb, mint az ABC háromszög köréírt körének sugara. A keresett egyenlet: $(x-1)^2+(y-1)^2=36$.

6. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát abc-vel:

$$bc^2-b^2c+a^2c-ac^2+ab^2-a^2b=0.$$

A kapott egyenlőség bal oldala szorzattá alakítható:

$$(ca^2-ba^2)+(c^2b-b^2c)-(c^2a-b^2a)=(c-b)[a^2+bc-(c+b)a]=$$
$$=(c-b)[(a^2-ac)-(ba-bc)]=(c-b)(a-c)(a-b)=0.$$

Tudjuk, hogy egy szorzat pontosan akkor 0, ha legalább az egyik tényezője 0, ezért a számtani sorozatnak van két egyenlő tagja. Ekkor azonban minden tagja egyenlő. Vagyis $S_n=nx$, ahol x az első tag.

7. Végezzük el a következő átalakításokat:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x=$$
$$=1-\frac{\sin^2 2x}{2}=1-\frac{1-\cos 4x}{4}=\frac{3}{4}+\frac{\cos 4x}{4}.$$

A $\dfrac{\cos 4x}{4}$ képe a $\cos x$ képéből középpontos hasonlósággal kapható. Ennek középpontja az origó, aránya pedig $\dfrac{1}{4}$.

8. A második egyenletet felhasználva: $(x-72)+(y+1998)=1999+1926$.

Legyen $a=\sqrt[3]{x-72}$, $b=\sqrt[3]{y+1998}$, ekkor az egyenletrendszerünk ilyen alakot vesz fel:

$$a+b=25,$$
$$a^3+b^3=3925.$$

Az első egyenletből kifejezzük b-t, ezt beírjuk a másodikba: $a^3+(25-a)^3=3925$. Rendezzük az egyenletet:

$$a^3+15\,625-1875a+75a^2-a^3=3925,$$
$$75a^2-1875a+11\,700=0,$$
$$a^2-25a+156=0,$$

amiből $a_1=12$, $a_2=13$. A megfelelő b értékek: $b_1=13$, $b_2=12$.

Az eredeti ismeretlenek, x és y: $x_1=1800$, $y_1=199$, valamint $x_2=2269$, $y_2=-270$.

Számadó László

C gyakorlatok megoldásai

C. 505. *Egy naptári hetet nevezzünk párosnak vagy páratlannak aszerint, hogy a benne szereplő napok hónapon belüli sorszámainak összege páros, illetve páratlan. Az első januári hétfőtől kezdődő* 52 *egymás utáni hét közül hány lehet páros?*

Megoldás. Vegyünk a kezünkbe egy naptárat. Kis vizsgálódás után láthatjuk, hogy egy hónapon belül a páros és a páratlan hetek felváltva követik egymást. Páratlan számmal kezdődő 7 egymás utáni szám között ugyanis mindig 4 páratlan van (az elsőt és az utolsót is hozzászámítva), így az összegük páros. Ha viszont páros szám az első, akkor a hét során 3 páratlan szám fordul elő, vagyis az összegük páratlan.

Ha ez a szabályosság így folytatódna, akkor könnyű lenne összeszámolni a páratlan és páros heteket: az 52 egymásutáni hétből 26 páros lenne és 26 páratlan.

Ez azonban nincs egészen így. Amikor egy hónap 31 napból áll, akkor az utolsó nap hetében 31 után nem páros szám következik, hanem ismét páratlan: az 1.

Ha például január 1. hétfői napra esik, akkor az első 4 hét: *páros, páratlan, páros, páratlan.* Az 5. hét: 29, 30, 31, 1, 2, 3, 4 *páros*, a 6. hét 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ismét *páros.*

Most tehát két páros hét következik egymás után, azaz a páros hetek száma 1-gyel nőtt.

Még 5 esetben van 31 napos hónapunk: március, május, július, augusztus, október, feltéve, hogy december 31. már az 53. hétre esik.

Jelöljük meg a naptárban a páros heteket p-vel, a páratlanokat t-vel. A sorozat szabályosan indul, majd belép két páros hét, azután megint szabályosan folytatódik a legközelebbi 31 napos hónapig.

Írjuk fel a sorozatot:

1. sor:	p,	t,	p,	t,	p,	p,	t,	p,	t,	p,	t,	p,	p,	t,	p, ...
2. sor:						t,	p,	t,	p,	t,	p,	t,	p,	p,	t, ...

Ha az első sorban a két szomszédos p közül az egyiket elhagyjuk, a sort pedig 1-gyel balra toljuk (2. sor), azaz úgy folytatjuk, mintha szabályos volna, akkor helyreáll a rend, vagyis a második rendhagyó időszak (31 napos hónap) nem növelte a páros hetek számát. A 6 darab 31 napos hónap közül pedig csak 3 növeli a páros hetek számát 1–1-gyel, azaz összesen $26+3=29$ páros és 23 páratlan hetünk lesz.

Ha január elseje nem hétfőre, hanem mondjuk szombatra esik, akkor az 52 héttel későbbi $52\cdot7=364$-edik nap december 31. átlépését is jelenti. Szökőévben pedig február 29. miatt ismét felborul a szabályosság. Ez összesen 8 alkalom, ami 4-gyel növelheti a páros hetek számát. Egy évben tehát legfeljebb 30 páros hét lehetséges.

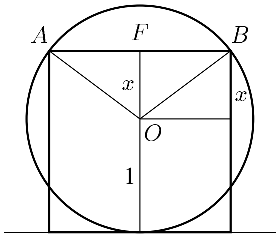
1996 például szökőév volt, január 1. hétfőre esett, és 29 páros hét volt.

Kormos Márton (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 12. o.t.)

62 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Ábrány Miklós, Bérces Márton, Farkas Ágnes, Fehér Gergely, Friedl Zita, Gajdos Béla, Héger Nóra, Kormos Márton, Kovács 333 Adrienn, Lengyel Zoltán, Lovas Róbert, Sarlós Ferenc, Szabó Gyöngyi és Tősér Kinga. 4 pontos 10, 3 pontos 10, 2 pontos 8, 1 pontos 5, 0 pontos 15 dolgozat.

C. 519. *Egység sugarú körhöz szerkesszünk olyan négyzetet, amelynek két szomszédos csúcsa a körön van, a másik két csúcsot összekötő oldal pedig érinti a kört. Számítsuk ki a négyzet oldalait!*

I. megoldás. A kör és a négyzet tengelyes szimmetriája miatt az érintési pontban az érintőre állított merőleges egyenes mindkét idomnak szimmetriatengelye (*1. ábra*). A kör O középpontja rajta van a szimmetriatengelyen. A négyzet AB oldala a körnek húrja. Legyen $AB=2d$, az AB oldal távolsága a kör középpontjától x. Az OFB derékszögű háromszögből: $d=\sqrt{1-x^2}$, $AB==BC$ miatt $2d=1+x$.



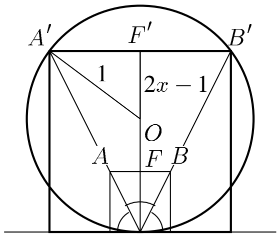
1. ábra

Innen $5x^2+2x-3=0$ és $x=\dfrac{3}{5}$ (csak a pozitív gyököt kell figyelembe vennünk). A négyzet oldala pedig $\dfrac{8}{5}$ egység. A feladatnak egyetlen megoldása van, amit könnyen meg tudunk szerkeszteni.

Kovács Péter (Tatabánya, Árpád Gimn., 9. o.t.)

II. megoldás. A keresett négyzet megszerkeszthető számolás nélkül is. Vegyünk fel a körön egy tetszőleges E pontot, és szerkesszünk az E pontban érintőt a körhöz.

A kör O középpontján és az E érintési ponton át húzunk egy egyenest (*2. ábra*). Rajzoljunk ezután egy olyan négyzetet, amelynek az EO egyenes szimmetriatengelye és két szomszédos csúcsa az érintőn van: legyen ez az $ABCD$. Ezt a négyzetet nagyítsuk (vagy kicsinyítsük) az E középpontból úgy, hogy az A és B csúcs a körre kerüljön. Az A' pont az EA egyenes és a kör metszéspontja, a B' pont pedig az EB egyenes és a kör metszéspontja. $A'B'$ lesz a keresett négyzet oldala. Az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ idomok hasonlóságából következik, hogy $A'B'C'D'$ is négyzet, és eleget tesz a feltételnek. A feladatnak csak egy megoldása van (egy egyenes legfeljebb 2 pontban metszheti a kört, az egyik az E, a másik az A', illetve B').



2. ábra

Meg kell még határoznunk a négyzet oldalának hosszát. Jelölje x a négyzet oldalának felét, pl. $A'F'=x$. Ekkor $OF'=2x-1$, mert $OE=1$. $A'O=1$, mert sugár. Így az $A'F'O$ háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt, azt kapjuk, hogy $1=x^2+(2x-1)^2$, ez pedig $5x^2-4x=0$ alakra hozható. Ebből $x=\dfrac{4}{5}$, ami a négyzet oldalának a fele, tehát a négyzet oldalának hossza $\dfrac{8}{5}$.

Csató György (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., 10. o.t.) megoldása alapján

Megjegyzés. Használjuk az *1. ábra* jelöléseit. A feladat szerkesztési része úgy is megoldható, hogy a négyzetből indulunk ki, és ehhez szerkesztünk olyan kört, amely átmegy az A, a B, valamint az E pontokon (alapszerkesztés). A kész ábrát akkorára kicsinyítjük vagy nagyítjuk, hogy a kör sugara egységnyi hosszúságú legyen. A négyzet oldalát ezután a második megoldás módszerét használva számíthatjuk ki.

Fried Katalin

391 dolgozat érkezett. 5 pontos 94, 4 pontos 61, 3 pontos 162, 2 pontos 44, 1 pontos 7, 0 pontos 17. Nem vesenyszerű 6 dolgozat.

Matematika gyakorlatok megoldásai

Gy. 3222. *Legyenek A és B 9-jegyű számok. Tegyük fel, hogy A bármelyik számjegyét B-nek megfelelő (ugyanolyan helyiértéken álló) számjegyével helyettesítve 7-tel osztható számot kapunk. Mutassuk meg, hogy akkor ez megfordítva is teljesül, azaz B egy tetszőleges számjegyét A megfelelő jegyével helyettesítve, ugyancsak 7-tel osztható számot kapunk.*

Megoldás. Legyenek az A és a B számjegyei sorban: $a_8, a_7, a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0$, illetve $b_8, b_7, \ldots, b_1, b_0$.

$$A = \overline{a_8a_7\ldots a_1a_0}; \qquad B = \overline{b_8b_7\ldots b_1b_0}.$$

Ha A első, második stb. számjegyét kicseréljük a B megfelelő helyiértékén álló jegyével, 9 számot kapunk:

$$A_8 = \overline{b_8a_7\ldots a_1a_0}; \qquad 7 \mid A_8$$

$$A_7 = \overline{a_8b_7\ldots a_1a_0}; \qquad 7 \mid A_7$$

$$\vdots$$

$$A_1 = \overline{a_8a_7\ldots b_1a_0}; \qquad 7 \mid A_1$$

$$A_0 = \overline{a_8a_7\ldots a_1b_0}; \qquad 7 \mid A_0$$

Adjuk össze ezeket a számokat:

$$7 \mid A_8 + A_7 + \ldots + A_1 + A_0 = 8A + B.$$

Mivel $7 \mid 7A$, így $7 \mid (8A+B) - 7A = A + B$. Ekkor azonban $7 \mid A + B + A_i$ ($i = 0, 1, \ldots,$

8) is fennáll.

$$A + B - A_8 = B_8 = \overline{a_8 b_7 \ldots b_1 b_0};$$
$$A + B - A_7 = B_7 = \overline{b_8 a_7 \ldots b_1 b_0};$$
$$\vdots$$
$$A + B - A_1 = B_1 = \overline{b_8 b_7 \ldots a_1 b_0};$$
$$A + B - A_8 = B_0 = \overline{b_8 b_7 \ldots b_1 a_0}.$$

B_0, B_1, …, B_7, B_8 éppen azok a számok, amelyeket akkor kapunk, ha B megfelelő jegyét kicseréljük A-éra. Ezek a számok pedig a fentiek szerint valóban oszthatók 7-tel.

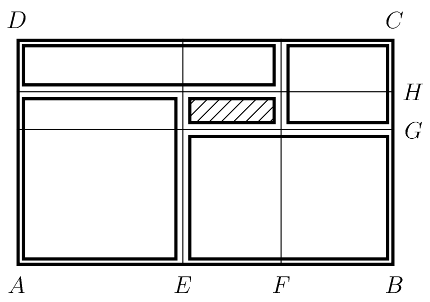
Megjegyzés. A feladat állítása akkor is igaz, ha n-jegyű számokra és $(n-2)$-vel való oszthatóságra mondjuk ki. A bizonyítás teljesen hasonló.

Somogyi 555 Tamás (Budapest, Szent István Gimn., 10. o.t.) és
Szilágyi Tamás (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 10. o.t.) dolgozatai alapján

186 dolgozat érkezett. 6 pontos Tran Thanh Long megoldása. 5 pontos 88, 4 pontos 54, 3 pontos 12, 2 pontos 15, 1 pontos 9, 0 pontos 7 dolgozat.

Gy. 3234. *Vágjunk fel egy téglalapot* 9 *téglalapra úgy, hogy semelyik két téglalapot se lehessen összetenni egy újabb téglalappá.*

Megoldás. Először bemutatunk egy olyan eljárást, amellyel egy tetszőleges téglalapot fel tudunk osztani 5 olyan téglalapra, amelyek közül semelyik kettőnek sincs egyenlő hosszúságú oldala, és egyikük mindkét oldala kisebb az összes többi oldalnál. Egy ilyen felosztást mutat az ábra.



Az $ABCD$ téglalap AB és BC oldalán vegyük fel az E, F, G, H pontokat úgy, hogy AE, EF, FB, AF, EB, BG, GH, GC, BH és GC szakaszok között ne legyenek egyenlő hosszúak. A felsorolt véges sok feltétel nyilván teljesíthető.

Válasszuk ki közülük a két legrövedebb szakaszt, legyenek ezek EF és HG. Húzzunk ezután párhuzamost az E és F pontokon át AD-vel, a G-n és a H-n át pedig AB-vel. A vastag vonallal kihúzott 5 téglalap megfelel az első bekezdésben kitűzött célnak.

Eljárásunkat ezután az ábra „belső” satírozott téglalapjára alkalmazva az $ABCD$ téglalapot az előírt módon 9 téglalapra vághatjuk fel.

Varjú Péter (Szeged, Radnóti M. Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzés. Sokan félreértették a feladatot: ahelyett, hogy *tetszőleges* téglalap megfelelő felbonthatóságát igazolták volna, egy konkrét téglalapot osztottak fel, és a felosztást ábrázoló rajzot nyújtották be bizonyítás helyett. Ugyanúgy az sem megoldás, ha kijelentjük, hogy a kis téglalapok oldalainak mind különböző hosszúságúaknak kell lenniük, és nem mutatjuk meg, hogy ilyen felosztás létezik. A kirívóan magas számú 0 és 1 pontos dolgozatok szerzői jórészt e két hiba valamelyikét követték el.

258 dolgozat érkezett. 6 pontos Harangi Viktor és Kunszenti-Kovács Dávid megoldása. 5 pontot kapott Ambrus Gergely, Andrássy Zoltán, Bálint Gergely, Boros Vazul, Csernenszky András, Gerencsér Balázs, Hangai Attila, Reviczky Ádám János, Somogyi Dávid, Stépán József, Tran Thanh Long és Varjú Péter. 4 pontos 5, 3 pontos 5, 2 pontos 11, 1 pontos 89, 0 pontos 134 dolgozat.

Gy. 3236. *Az ABC hegyesszögű háromszögben az A csúcsból húzott magasság talppontja T_a. Hasonlóan értelmezzük a T_b és T_c talppontokat. Bizonyítsuk be, hogy a $T_aC+T_bA+T_cB$ szakaszok összege legalább akkora, mint a $T_aT_bT_c$ háromszög kerülete.* (**H**)

Árokszállási Tibor (Paks) javaslata alapján

Megoldás. A $T_aT_bT_c$ háromszöget *talpponti háromszögnek* nevezzük. Ennek kerülete

(1) $$a\cdot\cos\alpha+b\cdot\cos\beta+c\cdot\cos\gamma,$$

aminek igazolása megtalálható például *Reiman István:* A geometria és határterületei c. könyve 241. oldalán. Az *ábra* derékszögű háromszögeiből $T_aC=b.\cos\gamma$, $T_bA=c\cdot\cos\alpha$ és $T_cB=a\cdot\cos\beta$. A feladatban említett szakaszok összege tehát

(2) $$a\cdot cos\beta+b\cdot\cos\gamma+c\cdot\cos\alpha.$$

Az (1) és (2) összehasonlításához felhasználjuk az úgynevezett *rendezési tételt.* Legyenek a, b, c és x, y, z valós számok, és nézzük az

(3) $$a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z$$

összeget. Ha ebben az összegben az x, y, z számokat más sorrendben írjuk, az összeg megváltozik. Legyen pl. $a\leqslant b\leqslant c$ és $x\geqslant y\geqslant z$. Ekkor azt mondjuk, hogy a, b, c és x, y, z *ellentétesen rendezettek.* A rendezési tétel azt mondja ki, hogy (3) akkor a legkisebb, ha a két számhármas ellentétesen rendezett, és akkor a legnagyobb, ha a két számhármas rendezése azonos.

Visszatérve az eredeti feladathoz, megtehetjük, hogy az oldalak jelölését úgy választjuk meg, hogy $a\leqslant b\leqslant c$ legyen. A háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, nagyobb hegyesszög koszinusza pedig kisebb, mint a kisebb szögeké. Ezért a, b, c és $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ellentétesen rendezettek, tehát az (1) összeg nem nagyobb, mint a (2)-ben lévő.

Ezzel a feladat állítását igazoltuk. Egyenlőség pontosan akkor áll, ha $a=b=c$.

Ambrus Gergely (Szeged, Radnóti M. Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzések. 1. Vegyünk fel egy hegyesszögű háromszög mindegyik oldalán egy belső pontot. A 3 pont egy beírt háromszöget határoz meg. Ismert szélsőérték-feladat, hogy ezek közül a háromszögek közül a talpponti háromszög a legkisebb kerületű. Ennek a ténynek és sok érdekes következményének a bizonyítása megtalálható a korábban idézett mű 240–242. oldalán.

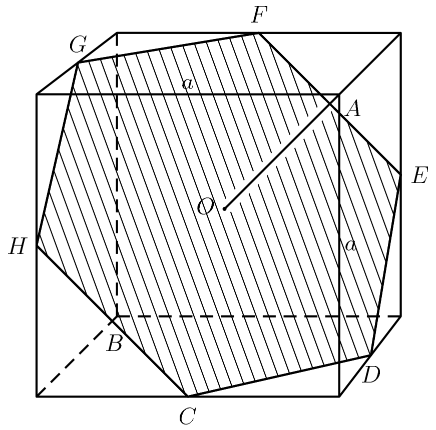
2. A rendezési tétel egy általánosabb megfogalmazását és igazolását megtalálhatjuk *Reiman István:* Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959–1994 c. könyve 552. oldalán.

65 dolgozat érkezett. 5 pontos 39, 4 pontos 3, 3 pontos 1, 2 pontos 3, 1 pontos 9, 0 pontos 7, nem versenyszerű 3.

Gy. 3237. *Lehet-e egy kocka síkmetszete* a) *szabályos ötszög* b) *szabályos hatszög?*

Megoldás. a) Egy sík akkor metszi a kockát ötszögben, ha pontosan 5 lapot metsz. A metszett lapok között biztosan van két párhuzamos, ezért a metszetnek is lesz két párhuzamos oldala. Szabályos ötszög metszet emiatt nem lehetséges.

b) Az *ábrán* A és B a kocka két átellenes csúcsa, a C, D, E, F, G, H pedig az A-ra és B-re nem illeszkedő élek felezőpontjai. Ezek a felezőpontok egy síkban vannak, mert A-tól és B-től való távolságuk egyaránt $\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}$. Az AB szakasz felező merőleges síkja tehát a kockát hatszögben metszi. A hatszög egyenlő oldalú, mert minden oldala egy lapátló fele. Tekintve, hogy pl. FC átmegy a kocka O középpontján, és az $FO=OC$ távolságok ugyancsak fél lapátló nagyságúak, a hatszög köré kör írható. Ebből következik, hogy a hatszög szögei egyenlők, így a hatszög szabályos.



A b) kérdésre igenlő választ adhatunk.

Farkas Dóra (Veszprém, Lovassy L. Gimn., 9. o.t.)
Izsák Andrea (Szekszárd, Garay J. Gimn., 9. o.t.)

183 dolgozat érkezett. 5 pontos Ambrus Gergely, Andrássy Zoltán, Csóka Endre, Deli Lajos, Dőrr Zsuzsanna, Farkas 327 Dóra, Harangi Viktor, Horváth Dénes, Izsák Andrea, Kerekes Attila, Leipold Diána, Rácz Judit, Siklósi Dávid és Szabó 184 László megoldása. 4 pontos 31, 3 pontos 29, 2 pontos 47, 1 pontos 46, 0 pontos 14, nem versenyszerű 2 dolgozat.

Gy. 3238. *Hány dobókocka esetén a legnagyobb annak a valószínűsége, hogy a kockákat egyszerre feldobva pontosan egy hatos lesz a kapott számok között?*

Megoldás. Egy dobókockával hatféle számot dobhatunk, n dobókocka esetén ez 6^n lehetőség. Ezek közül $n\cdot 5^{n-1}$ esetben lesz pontosan egy hatos dobás, ugyanis ez az n kocka bármelyikén lehet, a többi $n-1$ kockán pedig egymástól függetlenül 5 másik szám fordulhat elő. A pontosan egy hatos dobásának a valószínűsége tehát

$$V_n=\frac{n\cdot 5^{n-1}}{6^n}.$$

Az a kérdés, hogy ez milyen n-re lesz a legnagyobb. Látható, hogy $V_1=\frac{1}{6}$, $V_2=\frac{10}{36}$, $V_3=\frac{3\cdot 25}{6\cdot 36}=\frac{25}{72}$, azaz $V_1<V_2<V_3$.

Nézzük meg, igaz-e általában, hogy $V_n < V_{n+1}$.

$$\frac{n \cdot 5^{n-1}}{6^n} \overset{?}{<} \frac{(n+1) \cdot 5^n}{6^{n+1}}.$$

$\dfrac{5^{n-1}}{6^n}$-nel egyszerűsítve és rendezve

$$6^n \overset{?}{<} 5n+5,$$

azaz

$$n \overset{?}{<} 5.$$

Tehát $V_n < V_{n+1}$ csak $n < 5$ esetén igaz.

Ha $n = 5$, akkor $V_n = V_{n+1}$, vagyis $V_5 = V_6$, ha pedig $n > 5$, akkor $V_n > V_{n+1}$. (Ezután a V_n valószínűség csökken). Ezért a vizsgált valószínűség 5 és 6 dobókocka esetén lesz egyformán a legnagyobb, mégpedig $\left(\dfrac{5}{6}\right)^5 \approx 0{,}4$ (ami tulajdonképpen meglepően nagy).

Ambrus Gergely (Szeged, Radnóti M. Kísérl. Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján

281 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Erdei Zsuzsa, Harangi Viktor és Nagy 444 Zoltán. 5 pontos 121, 4 pontos 34, 3 pontos 39, 2 pontos 9, 1 pontos 23, 0 pontos 51 dolgozat. Nem versenyszerű 1.

Gy. 3240. *Egy 9×9-es sakktábla minden mezőjébe $+1$-et vagy -1-et írtunk. Első lépésként minden mezőbe beírjuk az élszomszédos mezőkben levő számok szorzatát. Ezt a lépést akárhányszor megismételhetjük. Igaz-e, hogy véges sok lépés után visszajutunk a kiindulási állapothoz?*

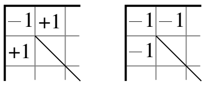
Kínai versenyfeladat

−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1

1. ábra

Megoldás. Nem lehet minden kiindulási állapothoz véges sok lépésben visszajutni. A megoldók több különböző ellenpéldát találtak, egy ilyet mutat az *1. ábra.* Ebben a táblázatban a sarkokban álló (-1)-esek két-két élszomszédja $+1$; az oldalak mentén mindegyik elemre igaz, hogy vagy mind a három élszomszédja $+1$, vagy közülük pontosan kettő (-1); végül a belső, négy élszomszéddal rendelkező mezők vagy csupa $(+1)$-gyel, vagy két (-1) és két $(+1)$-gyel szomszédosak.

Az első lépés után tehát a táblázat összes eleme $(+1)$ lesz, ezután pedig a táblázat nem változik.



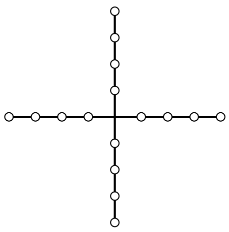
2. ábra

Nemcsak 9×9-es, de más méretek (legalább 2×2-es tábla) esetén sem igaz az állítás. Mindig van ugyanis olyan kiindulás, amely nem állhat vissza: legyen például a bal felső elem (-1), és a táblázat legyen a főátlóra szimmetrikus (*2. ábra*). Ekkor az első lépés után a bal felső elem $(+1)$-re változik, és a további lépések után is az marad, hiszen két szomszédja a szimmetria miatt egyszerre változik. Így ebben a mezőben soha nem lesz újra -1, a táblázat tehát soha nem lesz azonos a kezdetivel.

Tóth 370 Ágnes (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., 9. o.t.) dolgozata alapján

116 dolgozat érkezett. 6 pontos Csóka Endre, Horváth Illés, Lovrics Klára, Pogátsa Attila, Pozsonyi Tamás, Somogyi Dávid, Tóth 370 Ágnes és Varjú Péter megoldása. 5 pontot kapott 83, 4 pontot 2, 3 pontot 2, 2 pontot 1, 1 pontot 1, 0 pontot 19 beküldő.

Matematika feladatok megoldásai



F. 3226. *Az* ábra *köreit hány különböző módon színezhetjük ki úgy, hogy mindegyik ágon* 2 *sárga és* 2 *kék legyen? Különbözőnek csak azokat az ábrákat tekintjük, amelyek forgatással vagy tükrözéssel nem hozhatók fedésbe.*

Javasolta: *Bakonyi Gábor,* Budapest

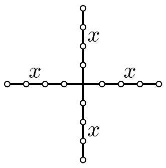
Megoldás. Az ábra ágain a körök színei a következők lehetnek (s: sárga, k: kék) belülről kifelé haladva:

$$\{\mathrm{s}, \ s, \ k, \ k\}; \quad \{s, \ k, \ s, \ k\}; \quad \{s, \ k, \ k, \ s\};$$
$$\{k, \ k, \ s, \ s\}; \quad \{k, \ s, \ k, \ s\}; \quad \{k, \ s, \ s, \ k\}.$$

Egy-egy ágnak tehát hatféle színezése lehet.

I. eset: minden ágat ugyanolyan módon színezünk.

Ezt hatféleképpen tehetjük meg.



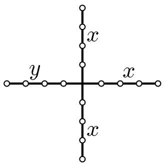
II. eset: a négy ágban kétféle színezésű ág van. Ezt háromféleképpen tehetjük meg.

i) Mivel x és y különböző színezések, azért ebben a részesetben $6 \cdot 5 = 30$ különféle színezés van.

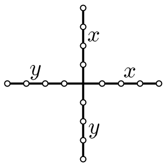
ii) x-t és y-t a 6 különböző színezésből $\binom{6}{2}$-féleképpen választhatjuk ki. Így a lehetőségek száma 15.

iii) Akárcsak az előbb, most is 15 különböző eset van.

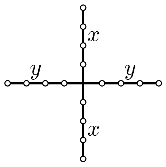
i)



ii)



iii)



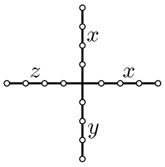
III. eset: a négy ágban háromféle színezésű ág van.

Ez kétféleképpen lehetséges:

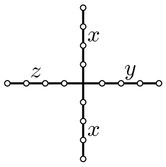
i) Itt x 6-féle lehet, y és z pedig ezek után $\binom{5}{2}$-féle. Ilyenkor $6 \cdot \binom{5}{2} = 60$ különböző színezés van.

ii) Az előzőhöz hasonlóan kaphatjuk, hogy most is 60-féle színezés van.

i)

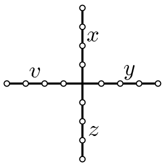


ii)

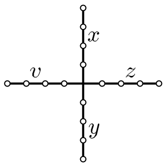


IV. eset: a négy ág mindegyike különböző színezésű. Adott négy ágszínezési minta, $\{a, b, c, d\}$ esetén ez háromféleképpen lehetséges.

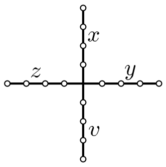
i)



ii)



iii)



Mindegyik részben $\binom{6}{4} = 15$ különböző ágminta-négyes van. Összesen tehát 45 lehetőséget kapunk.

Összefoglalva: $6 + 30 + 15 + 15 + 60 + 60 + 45 = 231$ a feltételek szerinti értelemben különböző színezések száma.

Pap Júlia (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 11. o.t.)

69 dolgozat érkezett. 5 pontos Bárány Kristóf, Csornai Gyula, Dancsó Zsuzsanna, Devecsery Ágnes, Devecsery András, Fehér Lajos Károly, Gáspár Merse Előd, Győri Nikolett, Hangya Balázs, Harangi Viktor, Horváth 713 György, Juhász András, Keszegh Balázs, Kiss 007 Norbert, Kutalik Péter, Lovas Róbert, Máthé András, Pap Júlia, Pogány Ádám, Rácz Balázs, Robotka Zsolt, Samu Alex, Szabadka Zoltán, Székelyhidi Gábor, Terpai Tamás, Tisch Dávid, Tóth 370 Ágnes, Vágvölgyi Péter, Végh A. László és Zombori Tamás megoldása. 4 pontot kapott 9, 3 pontot 5, 2 pontot 8, 0 pontot 15 beküldő. Nem versenyszerű 2 dolgozat.

F. 3244. *Határozzuk meg az összes pozitív x számot, amely megoldása valamely*

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots+\cfrac{1}{x}}}=x$$

alakú egyenletnek.

Megoldás. Legyen f_n a Fibonacci számok sorozata ($f_0=1,\ f_1=1,\ f_n=f_{n-1}+$ $+f_{n-2}$). Teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy ha a bal oldalon legalább két törtjel van, akkor

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{x}}}}=\frac{f_n+f_{n+1}x}{f_{n+1}+f_{n+2}x},$$

ahol n kettővel kevesebb a törtjelek számánál.

Ha $n=0$, akkor az állítás igaz. Az indukciós lépéshez azt kell bebizonyítanunk, hogy

$$\frac{1}{1+\dfrac{f_n+f_{n+1}x}{f_{n+1}+f_{n+2}x}}=\frac{f_{n+1}+f_{n+2}x}{f_{n+2}+f_{n+3}x},$$

azaz, hogy

$$\frac{f_{n+1}+f_{n+2}x}{f_n+f_{n+1}+(f_{n+1}+f_{n+2})x}=\frac{f_{n+1}+f_{n+2}x}{f_{n+2}+f_{n+3}x}.$$

Ez viszont következik a Fibonacci számok rekurziójából. A megoldandó egyenlet tehát

$$\frac{f_n+f_{n+1}x}{f_{n+1}f_{n+2}x}=x,$$

amiből $x=\sqrt{\dfrac{f_n}{f_{n+2}}}$.

Ha $n>0$, akkor $x>0$, a lánctörtben nem osztunk nullával, tehát jó megoldásokat kapunk. Ha $n=0$, akkor $x=0$, és ebben az esetben a lánctörtnek nincs értelme.

Végül, ha csak egy törtjel van a lánctörtben, akkor az egyenlet $\dfrac{1}{x}=x$, aminek a pozitív megoldása $x=1$.

Összefoglalva, a megfelelő x-ek a $\sqrt{\dfrac{f_n}{f_{n+2}}}$ alakú számok, ahol $n>0$ egész, és az $x=1$.

154 dolgozat érkezett. 5 pontos 62, 4 pontos 29, 3 pontos 31, 2 pontos 11, 0 pontos 21 dolgozat.

F. 3245. *Egy mókus mogyorót gyűjtött télire. Első nap megevett* 1 *szemet és a maradék* $\frac{1}{100}$*-ad részét, a másodikon* 2 *szemet és a maradék* $\frac{1}{100}$*-ad részét, és így tovább. Végül az utolsó,* n*-edik napon megette a megmaradt* n *mogyorót. Hány szem mogyorót gyűjtött a mókus?*

Megoldás. Jelölje a k-adik napon evés előtt még meglévő mogyorók számát $e(k)$, amiből k mogyoró elfogyasztása után $u(k)$ marad; így

$$e(k) = u(k) + k \qquad (k \leqslant n). \tag{1}$$

Ezután a mókus még megeszik $\frac{u(k)}{100}$ darab mogyorót, tehát $u(k) = \frac{u(k)}{100} = e(k+1)$, azaz

$$u(k) = \frac{100}{99}e(k+1) \qquad (k \leqslant n-1). \tag{2}$$

Tudjuk, hogy $e(n) = n$, így $u(n-1) = \frac{100}{99}n$. Ennek, valamint (1)-nek és (2)-nek az alapján a mókus eredeti mogyorókészlete:

$$\begin{aligned}
S &= e(1) = 1 + u(1) = 1 + \frac{100}{99}e(2) = 1 + \frac{100}{99}(u(2)+2) = \\
&= 1 + \frac{100}{99}\left(2 + \frac{100}{99}e(3)\right) = 1 + \frac{100}{99}\left(2 + \frac{100}{99}(u(3)+3)\right) = \\
&= \ldots = 1 + \frac{100}{99}\left(2 + \frac{199}{99}\left(3 + \frac{100}{99}\left(4 + \frac{100}{99}\left(\ldots + n - 1 + \frac{100}{99}n\right)\ldots\right)\right)\right) = \\
&= n\left(\frac{100}{99}\right)^{n-1} + (n-1)\left(\frac{100}{99}\right)^{n-2} + \ldots + 2\cdot\frac{100}{99} + 1 = \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{100}{99}\right)^j + \sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{100}{99}\right)^j + \ldots = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{100}{99}\right)^k \frac{\left(\frac{100}{99}\right)^{n-k} - 1}{\frac{100}{99} - 1} = 99\left(n\left(\frac{100}{99}\right)^n - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{100}{99}\right)^k\right) = \\
&= 99n\left(\frac{100}{99}\right)^n - 99^2\left(\left(\frac{100}{99}\right)^n - 1\right) = 99^2 + \frac{100^n(n-99)}{99^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Mivel az S egész, azért $100^n(n-99)$ osztható 99^{n-1}-nel. Ez két extrém esetben biztosan teljesül: ha $n = 1$ (és akkor $S = 1$) vagy ha $n = 99$ (és akkor $S = 99^2 = 9801$). Könnyen látható, hogy ez a két eset valóban megoldása a feladatnak; megmutatjuk viszont, hogy több megoldás nincs, ugyanis $2 \leqslant n \neq 99$ esetén az oszthatóság nem áll fenn.

Mivel 99 és 100 egymáshoz relatív prímek, azért az oszthatóság (akkor és) csak akkor teljesül, ha $n-99$ is osztható 99^{n-1}-nel. Az $1 < n$-re való indukcióval azonban belátjuk, hogy $|n-99| < 99^{n-1}$, ezért a mondott eseteken kívül nem állhat fenn az oszthatóság.

Nyilván ($n=2$-re és 100-ra) $97<99$ és $1<99^{99}$; tegyük fel, hogy valamilyen $(k-1)$-re $|(k-1)-99|<99^{k-2}$ teljesül, és $k\neq 100$.

Ekkor

$$99^{k-1}=99\cdot 99^{k-2}>99\cdot|(k-1)-99|\geqslant 1+|(k-1)-99|\geqslant|k-99|,$$

tehát az egyenlőtlenség k-ra is fennáll, így minden n-re teljesül.

Szép László (Miskolc, Földes F. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

133 dolgozat érkezett. 7 pontot kapott Máthé András, 6 pontot Naszódi Gergely, Szép László és Torda Péter. 5 pontos 59, 4 pontos 19, 3 pontos 19, 2 pontos 5, 1 pontos 21, 0 pontos 6 dolgozat.

F. 3246. *Legyen x_1 pozitív, 1-nél kisebb szám. Ebből kiindulva képezzük az $x_{k+1}=x_k-x_k^2$ előírással meghatározott sorozatot. Mutassuk meg, hogy n bármekkora, $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2<1$.*

Megoldás. Átrendezve az $x_{k+1}=x_k-x_k^2$ egyenletet, azt kapjuk, hogy

$$x_k^2=x_k-x_{k+1}.$$

Ezt $k=1, 2, \ldots, n$-re felírva és az egyenlőségeket összeadva:

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=x_1-x_{n+1}.$$

Így elég azt belátni, hogy minden m-re $x_m>0$. Ez teljes indukcióval történhet; $0<x_1<1$ a feladat feltétele alapján. Ha $0<x_m<1$, akkor $0<x_{m+1}<1$ is teljesül, mert $x_{m+1}=x_m-x_m^2=x_m(1-x_m)$.

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

152 dolgozat érkezett. 7 pontot kapott Pataki Péter, 6 pontot 3 Lovrics Anna, Szép László és Tran Thanh Long. 5 pontos 95, 4 pontos 29, 3 pontos 12, 2 pontos 5, 1 pontos 1, 0 pontos 6 dolgozat.

F. 3250. *Határozzuk meg azokat az $f:(0,1)\to\mathbf{R}$ függvényeket, amelyekre:*

$$f(x\cdot y)=x\cdot f(x)+y\cdot f(y).$$

Megoldás. A feltétel alapján $f(x^2)=2x\cdot f(x)$. Tehát

$$f\left(x^3\right)=f\left(x\cdot x^2\right)=x\cdot f(x)+x^2\cdot f\left(x^2\right)=x\cdot f(x)+2x^3\cdot f(x)=\left(2x^3+x\right)\cdot f(x).$$

Ebből

$$f\left(x^4\right)=f\left(x\cdot x^3\right)=x\cdot f(x)+x^3\cdot f\left(x^3\right)=x\cdot f(x)+\left(2x^6+x^4\right)f(x)=$$
$$=\left(2x^6+x^4+x\right)f(x),$$

ugyanakkor

$$f\left(x^4\right)=f\left(x^2\cdot x^2\right)=2x^2\cdot f\left(x^2\right)=4x^3\cdot f(x).$$

Tehát $4x^3\cdot f(x)=(2x^6+x^4+x)\cdot f(x)$ teljesül minden 0 és 1 közötti x-re.

Ez vagy úgy teljesül, ha $f(x)=0$, vagy ha $4x^3=2x^6+x^4+x$, aminek nyilván legfeljebb 6 megoldása lehet. Tehát véges sok kivétellel $f(x)=0$.

Megmutatjuk, hogy $f(x)$ egyáltalán nem vehet föl a 0-tól különböző értéket. Tegyük fel, hogy ez nem igaz, van olyan $x\in(0,1)$, amelyre $f(x)\neq 0$. Ekkor $x^2\in(0,1)$, $x^2<x$ és $f(x^2)=x\cdot f(x)$, tehát ha $f(x)$ nem 0, akkor $f(x^2)$ sem az.

Ezt folytatva kapjuk az $x_1=x>x_2=x_1^2>x_3=x_2^2>\ldots$ 0 és 1 közé eső számok végtelen sorozatát úgy, hogy minden i-re $f(x_i)\neq 0$.

Láttuk viszont, hogy legfeljebb 6 ilyen szám létezhet, így az $f(x)\neq 0$ feltételezés ellentmondásra vezet.

A feladat egyetlen megoldása tehát az azonosan 0 függvény.

Pap Júlia (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 12. o.t.)

85 dolgozat érkezett. 5 pontos Ábrány Miklós, Bárány Zsófia Luca, Csirmaz Előd, Csiszár Gábor, Csóka Endre, Dénes Attila, Fehér Lajos Károly, Gajári Dávid, Gáspár Merse Előd, Gelencsér Gábor, Gerencsér Balázs, Gömöri Péter, Győri Nikolett, Harangi Viktor, Herczegh Géza, Horváth 713 György, Keszegh Balázs, Kiss 345 Gergely, Kiss Norbert, Kovács Benedek, Kunszenti-Kovács Dávid, Lábó Eszter, Lábó Melinda, Máthé András, Molnár László Milán , Naszódi Gergely, Pálvölgyi Dömötör, Pap Júlia, Papp Dávid, Pataki Péter, Pozsár Balázs, Szabadka Zoltán, Szabó 997 Péter, Székelyhidi Gábor, Ta Vinh Thong, Terpai Tamás, Vágvölgyi Péter és Zábrádi Gergely megoldása. 4 pontot kapott 3, 3 pontot 2, 2 pontot 11, 1 pontot 1, 0 pontot 20 beküldő. Nem versenyszerű 10 dolgozat.

F. 3257. *A $[-1,1]$ szakaszon értelmezett $x\mapsto 2x^3-2x$ függvény grafikonjának melyik két pontja van egymástól a legtávolabb?*

Megoldás. Induljunk ki az x^2, $1-x^2$ számokra felírt számtani és mértani közepek között fennálló egyenlőtlenségből ($x^2\geqslant 0$, $1-x^2\geqslant 0$):

$$\frac{1}{2}=\frac{x^2+(1-x^2)}{2}\geqslant\sqrt{x^2(1-x^2)}=|x|\sqrt{1-x^2},$$

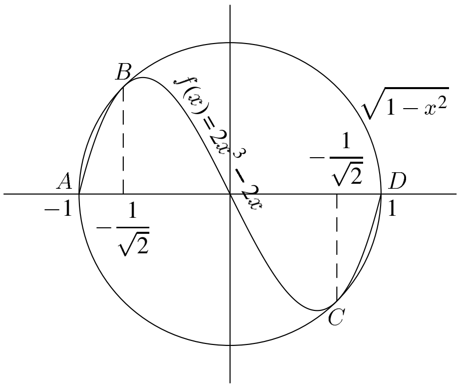
ezért

$$\sqrt{1-x^2}\geqslant 2|x|(1-x^2)=2|x(1-x^2)|=|f(x)|. \qquad (1)$$

(1) éppen azt jelenti, hogy a vizsgált $[-1,1]$ intervallumon $f(x)$ görbéjét tartalmazza az origó körüli 1 egység sugarú kör. Mivel egy zárt körlap két pontjának a távolsága legfeljebb annyi, mint a kör átmérője, ezért az f görbéjén lévő bármely két pont távolsága legfeljebb 2. Ez elérhető, például az $A=(-1;0)$ és $D=(1;0)$ pontok esetén.

Ahhoz, hogy ezt a határt valóban elérjük, mindkét pontnak a köríven kell lennie, mégpedig egymással átellenesen. Az előbb említettől különböző megoldást úgy kaphatunk, ha $x\neq\pm 1$ (és $\sqrt{1-x^2}\neq 0$).

(1)-ben viszont pontosan akkor áll egyenlőség, ha a számtani–mértani közép közötti egyenlőtlenségben is egyenlőség van, azaz $x^2=1-x^2$, tehát $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Ez két pontot ad: $B=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ és $C=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Ezek valóban a körön helyezkednek el egymással szemben és f görbéjén is rajta vannak. Így két megoldást kaptunk: az A, D és a B, C pontpárokat.



Szabó Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

122 dolgozat érkezett. 6 pontos Máthé András megoldása. 5 pontot kapott 81, 4 pontot 1, 3 pontot 6, 2 pontot 8, 1 pontot 3, 0 pontot 22 beküldő.

F. 3258. *Az (a_n) sorozat első eleme pozitív egész szám. A sorozat további elemeire*

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2}a_{n-1}, & \text{ha } a_{n-1} \text{ páros,}\\ 3a_{n-1}+1, & \text{ha } a_{n-1} \text{ páratlan.}\end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy a sorozat elemei között mindig található 4-gyel osztható szám.

Megoldás. A definícióból nyilvánvaló, hogy az a_n sorozat elemei egész számok. Az állítást indirekt úton fogjuk bizonyítani. Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozat elemei között nincs 4-gyel osztható. A rekurzióból látható, hogy ha a_{n-1} páros, akkor az indirekt feltevés szerint a_n páratlan. Ha a_n páratlan, akkor a_{n+1} mindenképpen páros. Feltehető, hogy a_1 páratlan (ha páros volna, akkor pedig tekintsük a $(b_n)=(a_{n+1})$ sorozatot, ahol b_1 páros). Ekkor minden $k\geqslant 1$-re a_{2k-1} páratlan és a_{2k} páros. Így:

$$a_{2k}=3a_{2k-1}+1=3\left(\frac{1}{2}a_{2k-2}\right)+1=\frac{3}{2}a_{2k-2}+1,$$

azaz a $c_k=a_{2k}$ helyettesítéssel

$$c_k=\frac{3}{2}c_{k-1}+1,$$

ahol nyilván a (c_n) sorozat is egész elemű. A rekurziót átrendezve:

$$(c_k+2)=\frac{3}{2}(c_{k-1}+2),$$

amiből

$$c_n+2=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}(c_1+2),\qquad c_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}(c_1+2)-2.$$

Ha c_1+2 prímtényezős felbontásában 2 az l-edik hatványon szerepel, akkor c_{l+2} már nem lehet egész szám. Ez ellentmondás, mivel láttuk, hogy a (c_n) sorozat elemei egészek. Ebből következik, hogy az (a_n) sorozatban van 4-gyel osztható elem.

Megjegyzés. Mindmáig bizonyítatlan az a *sejtés*, hogy az (a_n) sorozatban előbb-utóbb előfordul az 1 (és onnantól kezdve persze az 1, 4, 2 értékek periodikusan ismétlődnek).

112 dolgozat érkezett. 5 pontos 43, 4 pontos 13, 3 pontos 6, 2 pontos 4, 1 pontos 39, 0 pontos 5, nem versenyszerű 2 dolgozat.

Nehezebb matematika feladatok megoldása

N. 190. *Bizonyítsuk be, hogy ha a p polinom foka legfeljebb $n-10\sqrt{n}$, akkor*

$$|p(0)| \leqslant \frac{1}{10}\left(\binom{n}{1}|p(1)| + \binom{n}{2}|p(2)| + \ldots + \binom{n}{n}|p(n)|\right).$$

Megoldás. Az állításnak csak $n \geqslant 100$ esetén van értelme (ennél kisebb érték esetén $n-10\sqrt{n}$ negatív), ezért feltehetjük, hogy $n \geqslant 100$ és $\sqrt{n} \geqslant 10$.

Az áttekinthetőség kedvéért a megoldást több segédtétel kimondására és bizonyítására bontjuk szét.

I. segédtétel. *Ha az $f(x)$ polinom foka kisebb mint n, akkor*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f(x+k)=0. \tag{1}$$

Bizonyítás. A segédtételt f foka szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha f foka 0, azaz f konstans, értéke c, akkor tetszőleges pozitív egész n esetén

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f(x+k)=\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\right)c=(1-1)^n c=0.$$

Tegyük fel, hogy (1) igaz m-nél kisebb fokú polinomokra. Ebből bebizonyítjuk pontosan m-edfokú polinomokra is. Legyen f egy pontosan m-edfokú polinom. Írjuk fel az indukciós feltevést a $g(x)=f(x)-f(x+1)$ polinomra, n helyére $(n-1)$-et írva. Ezt megtehetjük, mert az $f(x)-f(x+1)$ felírásában az m-edfokú tag kiesik, ezért g legfeljebb $(n-1)$-edfokú.

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}g(x+k)=0.$$

Beírva g definícióját,

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}g(x+k)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\left(f(x+k)-f(x+k+1)\right)=$$

$$=\binom{n-1}{0}f(x)+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\left(\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right)f(x+k)-(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}f(x+n)=$$

$$=\binom{n}{0}f(x)+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}f(x+k)+(-1)^n\binom{n}{n}f(x+n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f(x+k).$$

Ezzel a segédtételt igazoltuk m-edfokú polinomokra is.

II. segédtétel. *Ha a p és q polinomok fokszámának összege kisebb, mint n, akkor*

$$|p(0)|\leqslant\frac{\max\left(|q(1)|,\ldots,|q(n)|\right)}{|q(0)|}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}|p(k)|. \tag{2}$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk az I. segédtételt az $f=pq$ polinomra és $x=0$-ra:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}p(k)q(k)=0.$$

Az első tagot felülről becsülve a többivel,

$$\left|\binom{n}{0}p(0)q(0)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}p(k)q(k)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}|p(k)q(k)|, \tag{3}$$

amiből

$$|p(0)|\leqslant\frac{1}{|q(0)|}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}|p(k)q(k)|\leqslant\frac{\max\left(|q(1)|,\ldots,|q(n)|\right)}{|q(0)|}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}|p(k)|.$$

III. segédtétel. *Létezik olyan q polinom, amelyre a következők egyszerre teljesülnek:*

1. *A q foka kisebb, mint $10\sqrt{n}$;*
2. *A $|q(1)|$, $|q(2)|$, …, $|q(n)|$ számok mindegyike legfeljebb 1;*
3. $q(0)>10$.

Bizonyítás. Legyen $m=\left[10\sqrt{n}\right]-1$, és legyen T_m az m-edik Csebisev-polinom. Ennek a polinomnak nagyon sok nevezetes tulajdonsága van, ezek közül a következőkre lesz szükségünk:

a) T_m foka pontosan m;

b) Tetszőleges u valós számra $T_m(\cos u)=\cos mu$ és $T_m(\operatorname{ch} u)=\operatorname{ch} mu$;

c) Ha $|x|\leqslant 1$, akkor $|T_m(x)|\leqslant 1$.

Válasszuk a q polinomot a következőképpen:

$$q(x)=T_m\left(\frac{n+1-2x}{n-1}\right).$$

Mivel ez a polinom is pontosan m-edfokú, az 1. tulajdonság teljesül.

Az $x\mapsto\dfrac{n+1-2x}{n-1}$ függvény az $1, 2, \ldots, n$ számokat a $[-1,1]$ intervallumba képezi, ezért a c) tulajdonságból következik a 2. tulajdonság.

A $q(0)$ becsléséhez a 2. tulajdonságból tudjuk, hogy

$$q(0)=T_m\left(\frac{n+1}{n-1}\right)=\operatorname{ch}\left(m\cdot\operatorname{ar\,ch}\frac{n+1}{n-1}\right).$$

Mivel tetszőleges $0<u<\dfrac{1}{2}$ esetén

$$\operatorname{ch}u=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u^{2k}}{(2k)!}<1+u^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}^k=1+u^2,$$

$$\operatorname{ch}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)<1+\frac{1}{n}<\frac{n+1}{n-1},\quad\text{vagyis}\quad\operatorname{ar\,ch}\frac{n+1}{n-1}>\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Mivel $m>10\sqrt{n}-2>9\sqrt{n}$, ebből következik, hogy

$$q(0)>\operatorname{ch}\left(9\sqrt{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\operatorname{ch}9>10.$$

Ezzel a 3. tulajdonság teljesülését is igazoltuk.

Ha a III. segédtétel q polinomját írjuk be a II. segédtételbe, akkor éppen a feladat állítását kapjuk.

1 dolgozat érkezett. Szerzője 1 pontot kapott.

N. 193. *Bizonyítsuk be, hogy ha n kellően nagy pozitív egész, akkor létezik olyan p polinom, amelyre*

$$|p(0)|>\frac{1}{10}\left(\binom{n}{1}|p(1)|+\binom{n}{2}|p(2)|+\ldots+\binom{n}{n}|p(n)|\right),$$

és a foka legfeljebb $n-\dfrac{1}{10}\sqrt{n}$.

Megoldás. Felhasználjuk az **N. 190.** feladatban igazolt segédtételeket.

A megoldás azon múlik, hogy a (3) egyenlőtlenségben egyenlőség áll, ha a $p(1)q(1)$, $p(2)q(2)$, $\ldots$, $p(n)q(n)$ számok váltakozó előjelűek.

IV. segédtétel. *Tetszőleges $0<u,v<\pi$ számokra*

(4) $$|u-v|\leqslant\sqrt{5|\cos u-\cos v|}.$$

Bizonyítás. Legyen $w=|u-v|$, ekkor $\frac{w}{2}\leqslant\frac{u+v}{2}\leqslant\pi-\frac{w}{2}$, és

$$|\cos u-\cos v|=\left|2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{v-u}{2}\right|\geqslant 2\sin^2\frac{w}{2}\geqslant 2\left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{w}{2}\right)^2=\frac{2}{\pi^2}w^2\geqslant\frac{1}{5}w^2.$$

Ezt átrendezve éppen (4)-et kapjuk.

Legyen $n\geqslant 100$, $m=\left[\frac{1}{10}\sqrt{n}\right]+1$, és ismét

$$q(x)=T_m\left(\frac{n+1-2x}{n-1}\right).$$

Legyen továbbá $j=0,\ 1,\ \ldots,\ m$ esetén $a_j=\frac{n+1}{2}-\frac{n-1}{2}\cos\frac{\pi j}{m}$. A q polinom definíciója alapján

$$q(a_j)=q\left(\frac{n+1}{2}-\frac{n-1}{2}\cos\frac{\pi j}{m}\right)=T_m\left(\cos\frac{\pi j}{m}\right)=\cos(\pi j)=(-1)^j,$$

vagyis ezek azok a számok, ahol q értéke +1 vagy -1.

Jelöljük minden $j=0,\ 1,\ \ldots,\ m$ esetén az a_j-hez legközelebbi egész számot b_j-vel.

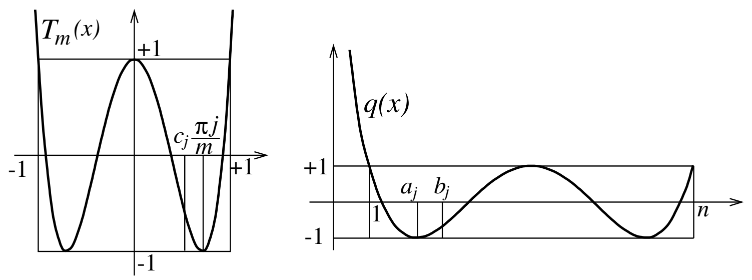
V. segédtétel. *A $b_0,\ b_1,\ \ldots,\ b_m$ számokra teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:*

1. $1=b_0<b_1<\ldots<b_m=n$;
2. $q(b_j)>\frac{1}{2}$ *ha j páros;*
3. $q(b_j)<-\frac{1}{2}$ *ha j páratlan.*

Bizonyítás. Az $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_m$ számok definíciójából látható, hogy $1=a_0<a_1<$ $<\ldots<a_m=n$; ebből következik, hogy

$$1=b_0\leqslant b_1\leqslant\ldots\leqslant b_m=n. \tag{5}$$

Tetszőleges $j=0,\ 1,\ \ldots,\ m$ esetén legyen $c_j\in[0,\pi]$ az a szám, amelyre $b_j=\frac{n+1}{2}-$ $-\frac{n-1}{2}\cos c_j$.



A IV. segédtétel alapján

$$\left|c_j - \frac{\pi j}{m}\right| \leqslant \sqrt{5\left|\cos c_j - \cos\frac{\pi j}{m}\right|} = \tag{6}$$

$$= \sqrt{5\left|\frac{2}{n-1}\left(\frac{n+1}{2} - b_j\right) - \frac{2}{n-1}\left(\frac{n+1}{2} - a_j\right)\right|} = \sqrt{\frac{10}{n-1}|a_j - b_j|} \leqslant \sqrt{\frac{5}{n-1}}.$$

Mivel

$$q(b_j) = \cos mc_j = \cos\left(\pi j + m\left(c_j - \frac{\pi j}{m}\right)\right) = (-1)^j \cos m\left(c_j - \frac{\pi j}{m}\right),$$

és (6) alapján

$$m\left(c_j - \frac{\pi j}{m}\right) < \left(\frac{1}{10}\sqrt{n} + 1\right)\sqrt{\frac{5}{n-1}} < \frac{\sqrt{n}}{5} \cdot \sqrt{\frac{5}{\frac{99}{100}n}} < \frac{\pi}{3},$$

a 2. és a 3. egyenlőtlenségek teljesülnek.

Mivel a $b_0, b_1, \ldots, b_m$ sorozat váltakozó előjelű, (5)-ben sehol sem állhat egyenlőség, vagyis az 1. egyenlőtlenséglánc is igaz.

VI. segédtétel. $0 < q(0) < 5$.

Bizonyítás. A III. segédtétel 3. pontjához hasonlóan felhasználjuk, hogy

$$q(0) = T_m\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \operatorname{ch}\left(m \cdot \operatorname{ar\,ch}\frac{n+1}{n-1}\right).$$

Ebből azonnal következik, hogy $q(0)$ pozitív.

Mivel tetszőleges $u > 0$ esetén

$$\operatorname{ch} u = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{u^{2k}}{(2k)!} > 1 + \frac{u^2}{2},$$

$$\operatorname{ch}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n-1}}\right) > 1 + \frac{2}{n-1} = \frac{n+1}{n-1}, \quad \text{vagyis} \quad \operatorname{ar\,ch}\frac{n+1}{n-1} < \frac{2}{\sqrt{n-1}}.$$

Mivel $m < \frac{1}{10}\sqrt{n} + 1 \leqslant \frac{1}{5}\sqrt{n} < \frac{1}{4}\sqrt{n-1}$, ebből következik, hogy

$$q(0) < \operatorname{ch}\left(\frac{1}{4}\sqrt{n-1} \cdot \frac{2}{\sqrt{n-1}}\right) = \operatorname{ch}\frac{1}{2} < 5.$$

Ezek után rátérhetünk a p polinom konstrukciójára. Legyenek $d_1 < d_2 < \ldots < d_{n-m-1}$ azok az 1 és n közötti egészek, amelyek nem szerepelnek a $b_1, b_2, \ldots, b_m$ számok között, és legyen

$$p(x) = (d_1 - x)(d_2 - x)\ldots(d_{n-m-1} - x). \tag{7}$$

Tetszőleges $0 \leqslant j < m$ esetén a p polinomnak a (b_j, b_{j+1}) intervallumban pontosan $b_{j+1} - b_j$ darab gyöke van, ezért $p(b_j)$ és $p(b_{j+1})$ azonos előjelű, ha b_j és b_{j+1} paritása ellentétes, és fordítva. Mivel pedig $q(b_j)$ és $q(b_{j+1})$ ellentétes előjelűek, $p(b_j)q(b_j)$ és $p(b_{j+1})q(b_{j+1})$ pontosan akkor azonos előjelű, ha b_j és b_{j+1} paritása megegyezik. Mivel $p(1)$ és $q(1)$ pozitívak, ebből egyszerűen következik, hogy páratlan $1 \leqslant k \leqslant n$ esetén $p(k)q(k)$ nemnegatív, páros k esetén pedig nempozitív.

Írjuk fel (1)-et a pq polinomra (ezt megtehetjük, mert pq foka $n-1$) az $x=0$ választással, és rendezzük át a következőképpen:

$$p(0)q(0) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} p(k)q(k). \tag{8}$$

A p és q polinomok definíciója alapján $p(0) > 0$ és $q(0) > 0$, az előbbi megfontolások szerint pedig a jobb oldalon valamennyi tag nemnegatív, ezért (8)-at a következő formában is írhatjuk:

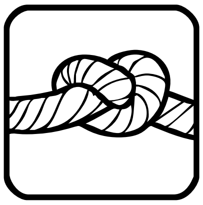
$$p(0) = \frac{1}{q(0)} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |p(k)q(k)|.$$

A jobb oldalon $|q(k)| > \frac{1}{2}$ minden olyan esetben, amikor $p(k) \neq 0$; ezt és a VI. segédtételt figyelembe véve

$$p(0) < \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{|p(k)|}{2} = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |p(k)|.$$

A feladatra egyedül Juhász András küldött be dolgozatot. 3 pontot kapott.

A pontversenyben kitűzött C gyakorlatok (541–544.)



C. 541. Egy hatoldalas házi dolgozatban négy ábrát kell elhelyeznünk. Az ábrák sorrendje meghatározott és egy oldalon legfeljebb két ábra lehet. Hányféleképpen tehető ez meg? (Az ábrák egy-egy oldalon belüli helyzetére nem vagyunk tekintettel.)

C. 542. Milyen pozitív egész n-ekre teljesül az

$$(n-2)\left(2+2^2+\ldots+2^n\right) < n \cdot 2^n$$

egyenlőtlenség?

C. 543. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy szöge és két magassága.

Általános iskolásoknak javasolt feladatok: **C. 541., C. 543., Gy. 3278., Gy. 3281.**

C. 544. „Szerkezetkész” egységkockánknak van alap- és fedőlapja, továbbá oldalélei. A fedőlapot az alaplaphoz képest α hegyesszöggel elcsavarjuk a két lap középpontját összekötő egyenes mint tengely körül. Mennyivel kerül közelebb a fedőlap az alaplaphoz, ha az oldalélek hossza nem változik és a csúcsok összeköttetése is megmarad?

❄

Beküldési határidő: 1999. június 15.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest, Pf. 47. 1255

❄

A pontversenyben kitűzött gyakorlatok (3278–3285.) és feladatok (3286–3291.)

Gy. 3278. Egy 3×3-as bűvös négyzet ábra szerinti három eleme, a, b és c adott. Határozzuk meg a hiányzó elemeket (minden sorban, minden oszlopban és a két átlóban a számok összege ugyanannyi).

Dr. Kiss Sándor (Nyíregyháza) ötlete alapján

	b	
a		c

Gy. 3279. Tíz gyerek „bogozódós” játékot játszik: körbe állnak, és csukott szemmel, kinyújtott kézzel elindulnak a kör közepe felé. Mindenki mindkét kezével megfogja valaki másnak a kezét. Ezután kinyitják a szemüket, és elkezdenek „kibogozódni”: átbújnak egymás keze alatt, átlépik egymás kezét stb. (mindenki kellően hajlékony) – de nem engedik el közben egymás kezét. Az összes eset hány százalékában igaz, hogy ha egy helyen két szomszédos gyerek elengedi egymás kezét, akkor a tíz gyerek egymás kezét fogva összefüggő láncot alkot? (**H**)

Gy. 3280. Legyenek p és q olyan pozitív valós számok, amelyek reciprokainak összege 1. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{q(q+1)} < \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{p(p-1)} + \frac{1}{q(q-1)} \geqslant 1.$$

Javasolta: *Róka Sándor,* Nyíregyháza

Gy. 3281. Egy téglatest egy csúcsba futó éleinek mérőszámai prímszámok, felszínének mérőszáma prímhatvány. Bizonyítsuk be, hogy az élei közül pontosan az egyik $2^k - 1$ alakú prímszám.

Javasolta: *Kovács Ádám,* Budapest

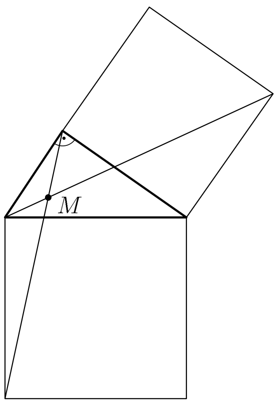
Gy. 3282. Egy háromszög három oldala a, b és c. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{3}{2} \leqslant \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leqslant 2.$$

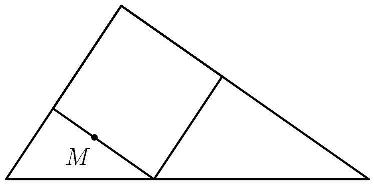
Lehetséges-e egyenlőség?

Gy. 3283. Egy derékszögű háromszög egyik befogójára és átfogójára négyzetet rajzoltunk kifelé, és megszerkesztettük az M pontot az *1. ábrának* megfelelően. Bizonyítsuk be, hogy M rajta van a háromszög beírt négyzetének kerületén (*2. ábra*).

Javasolta: *Herczeg János,* Budapest



1. ábra



2. ábra

Gy. 3284. Igazoljuk, hogy ha egy körív felezi egy k kör területét, akkor hossza nagyobb k átmérőjénél. (**H**)

Gy. 3285. Milyen rombuszhoz létezik két különböző paralelepipedon, amelyeknek a lapjai egybevágóak ezzel a rombusszal?

Javasolta: *Peták Kálmán,* Szolnok

❄

Beküldési határidő: 1999. június 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

❄

F. 3286. A t milyen értékeire asszociatív a pozitív számokon értelmezett kétváltozós $x*y=x+y+t\sqrt{xy}$ művelet?

F. 3287. Egy halmaz páronként diszjunkt halmazokra való felbontását a halmaz egy partíciójának nevezzük. Igazoljuk, hogy egy n elemű halmaznak legfeljebb $n!$ darab partíciója van.

Javasolta: *Róka Sándor,* Nyíregyháza

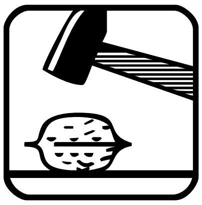
F. 3288. Legyenek n és k pozitív egészek és p prímszám úgy, hogy $p^k|n!$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $n!$ osztható $(p!)^k$-nal is.

F. 3289. Adott egy P pont és az a, b, c szakaszok. Szerkesszünk olyan szabályos háromszöget, amelynek a csúcsait P-vel összekötő szakaszok hossza éppen a, b és c.

F. 3290. Mutassuk meg, hogy az $A(1,0,2)$, $B(4,3,-1)$, $C(0,3,-1)$, $D(5,-2,4)$ koordinátájú pontok egy síkban vannak. Mekkora a négy pont által meghatározott konvex négyszög területe?

F. 3291. Bizonyítsuk be, hogy bármely egyenlő oldalú rácssokszög oldalszáma páros.

Javasolta: *Ruzsa Z. Imre,* Budapest



A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (211–214.)

N. 211. Hány olyan n-elemű, pozitív egész számokból álló sorozat van, amelyben tetszőleges $1 \leqslant i \leqslant n$ esetén az i-nél nagyobb elemek száma legfeljebb $n-i$?

N. 212. Melyek azok az a és n pozitív egész számok, amelyekre $a^{\varphi(n)}-1$ mindegyik prímosztója osztója n-nek is?

N. 213. Legyen $p_n(x)=a_{n,0}+a_{n,1}x+\ldots+a_{n,n}x^n$ az a legfeljebb n-edfokú polinom, amelynek értéke a 2^0, 2^1, $\ldots$, 2^n helyeken rendre 0, 1, $\ldots$, n. Határozzuk meg tetszőleges k pozitív egész esetén a $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n,k}$ határértéket.

N. 214. A sík egy P pontjából két érintőt húzunk az $y=x^2$ parabolához. A két érintési pontot jelöljük Q_P-vel és R_P-vel, a parabola Q_P és R_P közötti ívének hosszát pedig $l(Q_P,R_P)$-vel. Melyek azok a P pontok, amelyekre $PQ_P+PR_P-l(Q_P,R_P)$ állandó?

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS

(Volume 49. No. 4. April 1999)

New exercises for practice (see page 295): **C. 541.** Four figures are to be inserted into a six-page essay, in a given order. One page may contain at most two figures. How many different ways are there to assign page numbers to the figures under these restrictions? **C. 542.** Find those positive integers n for which the inequality

$$(n-2)\left(2+2^2+\ldots+2^n\right)<n\cdot 2^n$$

holds. **C. 543.** Construct a triangle, given one of its angles and two of its altitudes. **C. 544.** The ‘frame’ of a unit cube consists of two parallel faces and the edges that connect the two faces. We fix one of the faces and twist the other one about the axis that connects the midpoints of the faces through an acute angle α, while the length of the connecting edges remains the same. How does this deformation reduce the distance between the parallel faces?

New exercises: Gy. 3278. In a 3×3 magic square, 3 entries a, b and c are given according to the following diagram. Fill the rest of the diagram (so that the sum of the entries in each row, column, and diagonal are the same). (Proposer: *S. Kiss,* (Nyíregyháza)) **Gy. 3279.** Ten children play ‘undo-the-knot’ the following way. First, they form a circle, and with their eyes closed, arms extended, they start moving towards the centre of the circle. Next, with each hand they grab someone else’s hand. Finally, they open their eyes and start undoing the knot: they bend down and slip under and step over each other’s arm, and so on (each child is limber enough), but they never lose their grip. In what percent of all possible cases is it true that, when two children standing next to each other lose their grip, the ten children find themselves forming an unbroken chain? **Gy. 3280.** Let p and q be positive real numbers whose reciprocals add up to 1. Prove that

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{q(q+1)} < \frac{1}{2} \qquad \text{and} \qquad \frac{1}{p(p-1)} + \frac{1}{q(q-1)} \geqslant 1.$$

(Proposer: *S. Róka,* Nyíregyháza) **Gy. 3281.** In a rectangular box, the lengths of the three edges starting at the same vertex are prime numbers. It is also given that the surface area of the box is a power of a prime. Prove that exactly one of the edge-lengths is a prime number of the form 2^k-1. (Proposer: *Á. Kovács,* Budapest) **Gy. 3282.** Let a, b and c denote the sides of a triangle. Prove that

$$\frac{3}{2} \leqslant \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leqslant 2.$$

Is it possible that equality holds? **Gy. 3283.** On two sides of a right triangle, one of which is the hypotenuse, squares are built externally and a point M is constructed according to Figure 1 on page 297. Prove that M is incident to the perimeter of the square inscribed into the triangle (see Figure 2 on page 297). **Gy. 3284.** Assume that an arc of a circle halves the area of another circle k. Prove that the length of the arc is greater than the diameter of k. **Gy. 3285.** What kind of rhombus has the property that there can be found two different parallelepipeds whose faces are all congruent to this rhombus? (Proposer: *K. Peták,* Szolnok)

New problems: F. 3286. Find the values of t for which the binary operation, defined on positive numbers by $x*y=x+y+t\sqrt{xy}$ is associative. **F. 3287.** A *partition* of a set is obtained by any representation of the set as the union of pairwise disjoint subsets. Prove that a set of n elements has no more than $n!$ partitions. (Proposer: *S. Róka,* Nyíregyháza) **F. 3288.** We have $p^k|n!$ for some positive integers n, k and prime number p. Prove that $n!$ is divisible by $(p!)^k$, too. **F. 3289.** A point P and distances a, b and c are given. Construct an equilateral triangle such that the segments connecting P with the vertices of the triangle have length a, b and c, respectively. **F. 3290.** Prove that the points, given by their coordinates as $A(1,0,2)$, $B(4,3,-1)$, $C(0,3,-1)$, $D(5,-2,4)$, lie in the same plane. Find, moreover, the area of the convex quadrilateral determined by these four points. **F. 3291.** Prove that any equilateral lattice polygon has an even number of edges. (Proposer: *I. Z. Ruzsa,* Budapest)

New advanced problems: N. 211. Count those n-term sequences of positive integers in which the number of terms greater than i is at most $n-i$, for each $1 \leqslant i \leqslant n$. **N. 212.** Determine those pairs of positive integers a and n for which each prime divisor of $a^{\varphi(n)}-1$ also divides n. **N. 213.** Let $p_n(x)=a_{n,0}+a_{n,1}x+\ldots+a_{n,n}x^n$ denote the unique polynomial, of degree at most n, whose values at $2^0, 2^1, \ldots, 2^n$ are $0, 1, \ldots, n$, respectively. Find, for any positive integer k, the limit $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n,k}$. **N. 214.** Consider the parabola $y=x^2$. Suppose that two tangents are drawn to the parabola from a point P in the plane. Denote by Q_P and R_P, respectively, the points of contact, and by $l(Q_P,R_P)$ the length of the arc of the parabola connecting Q_P and R_P. Find the locus of points P for which $PQ_P+PR_P-l(Q_P,R_P)$ is constant.

METROPOLIS-DÍJ a KöMaL-ban 1999-től

Nicholas Metropolis, görög származású amerikai elméleti fizikus és matematikus alapítványt hozott létre a matematika iránt érdeklődő tehetséges fiatalok részére.

A Metropolis Alapítvány Kuratóriuma úgy döntött, hogy első külföldi országként Magyarországon hozza létre a *Metropolis-díjakat* középiskolások számára. A döntés hátterében az áll, hogy Metropolis közeli barátságban volt számos magyar származású kutatóval, Teller Edével, Neumann Jánossal, Wigner Jenővel, Kemény Jánossal és Balázs Nándorral.

A Metropolis Alapítvány Kuratóriuma két nagymúltú magyar folyóiratot, a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokat, valamint a Természet Világa folyóiratot választotta e cél megvalósítására. A két folyóirat évente 1000-1000 dollárt fordíthat a legjobb eredményt elérő középiskolások és felkészítőik díjazására.

A Metropolis-díjazottakat először 1999. decemberében az 1998–99-es tanévi pontverseny nyertesei közül választjuk ki.

Néhány szó Metropolisról

Nicholas Metropolis a számítógép-tudomány egyik úttörője. Elsőként használta *Neumannal* és másokkal együtt az ENIAC-ot, az első működő digitális számítógépet komplex fizikai problémák megoldására. Az ENIAC-ot hivatalosan 1946 februárjában avatták fel, de Metropolis *S. Frankellel* együtt akkor már hónapok óta „tesztelte” a gépet: óriási mennyiségű numerikus számítást végeztek el vele a termonukleáris láncreakcióra vonatkozó szupertitkos kutatáshoz.

Így került szoros kapcsolatba *Teller Edével* is, akivel 1953-ban közösen publikálták az azóta „Metropolis-algoritmus”-nak nevezett eljárást sokrészecske-rendszerek állapotegyenleteinek kiszámítására.

A Metropolis-algoritmus az akkoriban felfedezett – és ma is fejlődő –, a számítógéptudományban jól alkalmazható „Monte–Carlo-módszer” egyik alkalmazása. Az eljárást egymástól függetlenül fedezte fel több matematikus–fizikus a huszadik század közepén. *J. E. Mayer* a folyadékállapot statisztikus fizikai leírására alkalmazta, *S. Ulam* pedig egy optimalizálási modellben vezette be a Monte–Carlo-módszert. A módszert legegyszerűbb formájában *az utazó ügynök probléma* megoldására használták. A problémában N pontot összekötő, minimális hosszúságú utat kell megtalálnunk. Hogy ne kelljen $N!$ számú számítást elvégeznünk, és mégis eljussunk az ideálishoz közeli megoldáshoz, valószínűségszámítási módszereket lehet és kell bevezetnünk.* Az alkalmazott matematika legkülönbözőbb területein használják ma már a továbbfejlesztett Monte–Carlo-módszereket.

Az Egyesült Államokban már most is létezik a „Nicholas Metropolis Díj Kiváló Doktori Munkáért” a számítógépes fizika területén. A díjat az Amerikai Fizikai Társulat és a Journal of Computational Physics adja, az utóbbi szponzorálásában. Értéke 2000 dollár (ebből 500 utazásra), amelyet évente egyszer ünnepélyesen adnak át. Nevezni egy 18 hónapnál nem régebben elfogadott doktori disszertációval lehet, a világ bármely tájáról. A legutóbbi nyertes az argetin *Luis Lehner* volt, aki a pittsburgh-i egyetemen dolgozott négy évig egy olyan kutatócsoportban, ahol a mozgó fekete lyukak által kisugárzott gravitációs hullámok számítógépes szimulációját kutatták.

Nicholas Metropolis június 11-én tölti be 84-edik életévét.

Radnai Gyula

* Mintha egy dobókockával végzett kísérletet használnánk az $1/6$ értékének meghatározására.