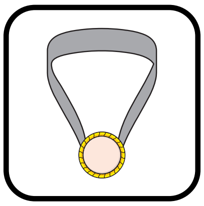
A matematika tagozattól a Wolf-díjig



A hazai matematikai élet szenzációja, hogy *Elias Steinnel* megosztva, *Lovász László* akadémikusnak, az ELTE és a Yale University oktatójának ítélték oda az 1999. évi matematikai Wolf-díjat. Közismert, hogy matematikai Nobel-díj nincs, így a szakma a négyévenként kiosztott Fields-érmet, illetve a Wolf-díjat tekinti legmagasabb elismerésének. Az előbbivel szemben sokak kifogása a negyvenéves felső korhatár (ami a négyéves szünetek miatt általában tovább szűkül) és a tendencia, hogy csak a matematika fontosabbnak tekintett ágainak művelőit díjazzák. Ezeket a hiányosságokat látszik orvosolni a Wolf-díj. *Ricardo Wolf* (1887–1981) vegyész, több évtizedes kísérletezés után megoldotta a vasolvasztás egyik problémáját. A német származású, Kubába emigráló, végül Izraelben letelepedett milliomos feleségével (a húszas évek híres teniszbajnokával) díjakat alapított a mezőgazdaság, a kémia, a matematika, az orvostudomány, a fizika és a művészetek terén kiemelkedő alkotók számára. A díj összege szakterületenként 100 000 dollár, amit több díjazott esetén egyenlően osztanak meg. A díjat minden év májusában, Izrael fennállásának évfordulóján (idén május 2-án) a Kneszetben adja át Izrael elnöke. A díjat általában híres, tekintélyes életművel rendelkező, idősebb tudósok kapják, így például az örökké vándorló *Erdős Pál* (1913–1996) 1984-ben. Magyar származású kitüntetett *Lax Péter* (New York), a fizikus *Telegdi Bálint* vagy a zeneszerző *Ligeti György*. Lovász életművének elismerését bizonyítja, hogy ő majdnem minden díjazottnál fiatalabban nyerte el a kitüntetést. Egy korábbi „fiatal” díjazott a Fermat-sejtést megoldó *Andrew Wiles* volt, aki – kora miatt – már lemaradt a Fileds-éremről.

Lovász László 1962–66 között a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium legendás matematika tagozatos osztályába járt, ahol osztálytársai között számos igen tehetséges és kiváló akadt: *Pósa Lajos,* osztálytársainak és az azóta következő nemzedékek kiváló tanára, a szenvedélyes tehetséggondozó; *Laczkovich Miklós,* ma már akadémikus, a valós függvénytan egyik legnagyobb szakértője, aki a „kör modern négyszögesítése” megoldásával világhírt szerzett. De sorolhatnám a többieket is, akik sikeres versenyzőkből kiváló pedagógusokká, elismert matematikusokká váltak: a feledhetetlen *Baranyai Zsolt, Berkes István, Major Péter, Lippner György, Loparits (Szeredi) Éva, Pelikán József, Vesztergombi Katalin.* A tehetséges diákokkal kitűnő tanárok, köztük *Rábai Imre* matematikatanár és *Komlós Gyula* osztályfőnök foglalkoztak.

Lovász páratlan képességei már itt megnyilvánultak: elképesztő gyorsasággal oldotta meg az „olimpiai szakkör” legnehezebb feladatait is, nem csoda, hogy – *Reiman István* kiváló felkészítése után – végig kitűnően szerepelt a nemzetközi Matematikai Diákolimpiákon és valamennyi más matematikai versenyen is. Ezek közül az 1966-os TV-vetélkedőn, a „Ki Miben Tudós” matematikaversenyen elért első helye volt a leglátványosabb: egy ország ismerte meg a Fazekas Gimnázium 18 éves diákját. Azt nem tudták, hogy ekkor már alkotó matematikus volt.

Mondanom sem kell, a KöMaL-nak is sikeres megoldója volt. De a lap másként is mély hatást tett rá: ő maga írja le a KöMaL 1993/10. jubileumi számában, milyen döbbenetes, varázslatos élmény volt számára Erdős[1] egy cikkének elolvasása – talán ez volt az a pillanat, amikor a matematika végleg rabul ejtette. Ugyancsak meghatározó olvasmánya volt *Erdős Pál* és *Surányi János:* „Válogatott fejezetek a számelméletből” című könyve; a szerzőkkel és a magyar matematikai élet jeles képviselőivel: *Gallai Tiborral, Péter Rózsával, Hajnal Andrással* az osztály is hamarosan megismerkedett.

Lovász érdeklődési területe, stílusa hamar kialakult. Tanárai, barátai hatására az akkor robbanásszerűen kifejlődő és akkor is, azóta is magyarok által erősen művelt kombinatorikát választotta kutatása fő területének. Tehetsége univerzális: az igen nehéz, egyetemi Schweitzer-versenyen évről évre bebizonyította, hogy a matematika minden ágában elegánsan tud mély és nehéz problémákat megoldani. Ez a tudása, képessége később nagyban segítette, hogy a matematika számos ágát (valószínűségszámítás, lineáris algebra, geometria, algebrai topológia stb.) alkalmazza kombinatorikai problémák megoldásában. Így tudott hozzányúlni sok nehéz kérdéshez, s a Wolf-díj éppen azt ismeri el, hogy ily módon forradalmasította e területet.

Az ELTE-n eltöltött egyetemi diákévek (1966–71) után Lovász az ELTE, a JATE, majd ismét az ELTE oktatója lett. Érdeklődése ekkorra már újabb területek: a számítógépek fejlődése nyomán kialakult algoritmuselmélet, a számítógéptudomány felé fordult. Lovásznak nagy szerepe van abban, hogy e diszciplína a matematika mély eszközeit használó tudománnyá vált, közvetlen és közvetett tanítványai ma a világ sok egyetemén megbecsült oktatók. Elsősorban még mindig a kombinatorika érdekli, de most már algoritmikus szemléletmóddal, ami a véges struktúrák tulajdonságain túl azt is vizsgálja, hogyan lehet megismerni azokat.

[1] Erdős Pál: Néhány elemi geometriai problémáról, KöMaL, 1962/5. 193–201. o.

A kiváló tudós nagyszerű pedagógus is: szívesen mutatja meg fogásait és páratlan képességgel tudja elmondani egy-két mondatban egy megoldás „trükkjét”. Mindig szívesen dolgozta fel a friss eredményeket, számos könyvet írt. Ezek közül talán a legsikeresebb a közelmúltban magyarul is megjelent kombinatorikai feladatgyűjtemény[2], amiből az 1979-es angol nyelvű kiadása óta nemzedékek tanulnak. Ez a könyv majdnem teljesen összefoglalta a kombinatorika akkori állását, tankönyvként pedig rendkívüli hatást gyakorolt a további fejlődésre.

Lovász, mint a legtöbb kiváló magyar matematikus, sokat utazott, többször töltött fél-egy évet külföldön, 1987-től a Princeton Egyetemen részidős munkát vállalt, jelenleg pedig a Yale Egyetem professzora. Ha kötöttségei engedik, igyekszik hazalátogatni, s ha csak néhány hétre tud jönni, koncentrált „minikurzusokon” ismerteti a tudomány újabb nehéz módszereit, amelyek az ő kezében valahogy mindig egyszerűnek, természetesnek tűnnek.

A kombinatorika megújítóját, számtalan probléma sikeres megoldóját nem kerülte el az elismerés. Negyedéves egyetemi hallgatóként kandidátus, 31 évesen már az MTA levelező, majd 36 évesen rendes tagja. 1985-ben Állami díjat, 1998-ban a Magyar Köztársaság Érdemrend középkeresztjét kapta. Számos külföldi kitüntetése is van, jónéhány egyetemen díszdoktor, két ciklusban a Nemzetközi Matematikai Unió (IMU) Végrehajtó Bizottságának választott tagja. Méltán koronázza meg eddigi életpályáját a Wolf-díj, amelyhez mi is gratulálunk.

Komjáth Péter

Számítógépek, algoritmus, matematika[3]

A fiataloknak ma több lehetőségük van arra, hogy a számítógépekkel megismerkedjenek, mint nekünk volt annak idején. Ezért elképzelhető, hogy sok olyan dolgot mondok el, amely számukra már nem ismeretlen, vagy amelyet nyilvánvalónak tartanak. Így belekapaszkodtam a cím „matematika” szavába, és arra szeretnék példákat mutatni, hogy a számítógépek fejlődése a matematikában milyen új kérdéseket vet fel, illetve hogy bizonyos nagyon is régi kérdéseket mennyire új megvilágításba helyez. Sok elintézettnek tekintett problémáról derül ki napjainkban, éppen a számítógépek kapcsán, hogy mennyire nem ismerjük a lényegét.

A tudomány és technika fejlődése, a társadalmi és gazdasági élet bonyolultabbá válása egy nagyon régi matematikai problémát hozott előtérbe: a véges és végtelen problémáját, ill. a folytonos és a „nem folytonos” vagy – matematikailag szólva – a diszkrét kérdését. A görögök ösztönösen idegenkedtek a végtelentől, s ez részben kerékkötője is volt a fejlődésnek, pl. a valós szám fogalmát nem tudták kellő egyszerűséggel bevezetni.

[2] Lovász László: Kombinatorikai problémák és feladatok, TypoTeX Kiadó, 1999.

[3] A szerzőnek az Ifjúsági Matematikai Kör 1981. decemberi téli ankétján elhangzott előadása alapján.

Természetesnek érezték az egész és a racionális szám fogalmát, s ezt kezelni is tudták, de amikor kiderült az a tény, hogy az egységnégyzet átlója, $\sqrt{2}$, nem írható fel két egész szám hányadosaként, ez már lényeges filozófiai nehézséget okozott. Mint tudjuk, ezt a lényegében pszichikai jellegű gátlást a 15–16. században átlépte a tudomány, bevezette a valós szám fogalmát, s kiderült, hogy ez nem is okoz problémát, azon a szinten jól lehetett vele számolni.

A valós szám fogalmát rögzítettnek tekintette a matematika a legújabb időkig. Amikor kiderült, hogy azt pl. nagyon könnyű felírni, hogy π, de ha most ezzel számolni kell, egy számítógépnek kell megadni, hogy tudjuk ezt megtenni? A szokásos zsebszámológépen 8 vagy 12 jegyig be van írva a π a memóriába. A gép tehát π-n ezt a racionális számot érti. Elképzelhető persze olyan számítás, amelynél nagyobb pontosságra van szükség.

Természetesen meg lehet adni a π-t másféleképpen is, be lehet a gépbe programozni valamit, ami a jegyeit megadja. Végül is ez a π valós szám nem más, mint egy program, amely π-t tetszőleges pontossággal ki tudja számítani. Ez csak egy példa arra, hogy a valós szám fogalma nem is annyira nyilvánvaló, ha arra gondolunk, hogy ezekkel a számokkal mi nagy pontossággal számolni akarunk.

A matematika egész nyelvezetével kapcsolatban felvetődik hasonló probléma. Mindenki találkozott olyan megfogalmazással, hogy adott egy pont, adott egy szám, adott egy függvény stb. Amint ezeket a számítógépnek meg akarjuk fogalmazni, akkor át kell gondolni, hogy hogyan is vannak adva ezek a dolgok. Pl. egy függvény adva lehet képlettel, táblázattal, grafikonnal. Ezek nem mindegyikét tudja a számítógép értelmezni. Pl. a grafikont nem tudja. Előtérbe kerülnek tehát a matematikában azok a problémák, amelyek a számítógépeknek megtanítható eljárásokon, algoritmuson alapulnak. Egy *algoritmus* olyan eljárás, amely formalizálva van, olyan precízen meg van határozva, hogy számítógépnek is megtanítható. Az algoritmus tehát olyan eljárás, amely számítógépre programozható. Ugyanígy előtérbe kerülnek az olyan definíciók, amelyek számításokkal követhetők. Így elválik egymástól a táblázattal vagy kiszámítási utasítással megadott függvény és az egyéb „nem konstruktív” módon megadott függvény fogalma.

Azért fontosak a véges módszerek, mert végtelen halmazokkal a számítógép nem sokat tud kezdeni, mert a memóriája is véges. Mi persze úgy képzeljük, hogy egy függvény végtelen sok pontban van értelmezve, de amikor számítógéppel dolgozunk, akkor csak 10 tizedes jegyre van megadva a függvény értéke is, meg a helye is. Igazából tehát egy véges halmazon értelmezett és véges számú értéket felvevő függvénnyel dolgozunk.

Egy másik dolog, amit a számítógépek használata hangsúlyozott ki, a következő. Hajlamosak vagyunk arra, hogy ami véges, arra azt mondjuk, hogy nyilvánvaló, hiszen azt „végig lehet nézni”. Egy geometriai feladatnál például, ha sikerült véges sok esetre visszavezetni a diszkussziót, akkor azt mondjuk, hogy meg van oldva, már csak véges sok esetet kell megvizsgálni. Ugyanígy általában az egyenletrendszert is megoldottnak tekintjük, ha megoldását visszavezettük véges sok eset vizsgálatára. A matematika, de főleg a számelmélet, tele van olyan tételekkel, amelyeknek az érvényessége valami iszonyú nagy számmal kezdődik (mint pl. $10^{10^{10}}$). „Véges sok szám kivételével” igaz, amit „végig lehet nézni”. Mégis felmerülhet a kérdés, mennyi értelme van egy ilyen tételnek, hiszen soha nem vonatkozik olyan számokra, amikre alkalmazni szeretnénk. Kezd kialakulni ezért egy olyan szemlélet, amely különbséget tesz az ilyen reménytelenül nagy, véges sok lépést igénylő és a ténylegesen véges sok lépést felhasználó eljárások között. Sok vita van akörül, hogy mi az a lépésszám, ami még elfogadható. Teljesen kialakult konvenció nincs, de elég általánosan elfogadott, hogy az m^{const} lépésszám még „kicsi", de annál nagyobb már „nagy". Mit jelent ez? Az m jelenti a bemenő adatok hosszát, ha azokat 2-es számrendszerben írtuk fel. Azt vizsgáljuk tehát, hogy az eljárás a bemenő adatok függvényében legfeljebb milyen sokáig tart, és azt mondjuk, hogy *hatékony*, ha megadhatók olyan K_1 és K_2 pozitív valós számok úgy, hogy m hosszúságú bemenő adat esetén $K_1 m^{K_2}$ lépésben mindig véget ér.

Így most már matematikailag is pontos fogalmát kapjuk egy algoritmus hatékonyságának (persze, még az algoritmus fogalmát is előbb pontosan meg kellene alkotni, de erre ebben a cikkben nem vállalkozhatunk). Ezt a fogalmat felhasználva, új logikai fogalmakhoz juthatunk el. Hogy kicsit világosabbá tegyük a problémát, a következő két mesét hallgassuk meg.

Párosítási probléma

Artúr király udvarában élt 150 lovag és 150 udvarhölgy, továbbá néha az udvarban tartózkodott Merlin, a gonosz varázsló. Artúr király elhatározta, hogy összeházasítja a 150 lovagot a 150 udvarhölggyel. Ez sehogyan sem sikerült, mert a lovagok és udvarhölgyek között többen nagyon nem szívlelték egymást, s nem akartak összeházasodni. Végül is Artúr király megunta a próbálkozást, és ráparancsolt Merlinre, a varázslóra, hogy találjon egy házasítást az udvarhölgyek és a lovagok között.

Merlin – mivel természetfölötti képességekkel rendelkezett –, rögtön látta, hogy ez nem lehetséges. (Persze, ezt nem olyan könnyű átlátni, hiszen az összes lehetséges párosítások száma 150!, ami egy rettenetesen nagy szám.) Ezt jelentette is Artúr királynak. De mivel Merlin nagyon sötét lelkű volt, a király nem tudhatta, hogy igazat mond-e vagy sem; ezért nem hitt neki, bezáratta egy toronyba, amíg csak ki nem talál egy megoldást a problémára. Mit csináljon most? – töprengett Merlin, mivel nem tudta bebizonyítani igazát Artúr királynak. Végül is felfedezett egy tételt, amelyet később *Frobenius* német és *Kőnig* magyar matematikusok is felfedeztek.

A tétel megfogalmazásához gondoljuk el a következő ábrát. A 150 udvarhölgy mindegyikét ábrázoljuk egy-egy ponttal, legyen ez az alsó sor, hasonlóan a lovagokat is, ez lesz a felső sor. Azokat, akik hajlandók összeházasodni, kössük össze egy-egy vonallal.

A vonalakat *éleknek* nevezzük. Az egész, pontokból és élekből álló alakzatot *gráfnak*.

Olyan éleket kellene kiválasztanunk, hogy minden pontból pontosan egy él induljon ki, és ha az összes pontot összekötöttük, ezt teljes párosításnak nevezzük.

Frobenius–Kőnig tétele azt mondja ki, hogy: *egy gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha bármely k alsó pontnak legalább k felső szomszédja van.*

Ez azt jelenti, hogy ha lent kiválasztok pl. 50 udvarhölgyet, akkor ezek szomszédjainak száma, vagyis azoknak száma, amelyekkel valamelyikük össze van kötve, legalább 50 (lehet több is). Ez a feltétel nyilván szükséges ahhoz, hogy legyen párosítás.

Nehezebb annak belátása, hogy elégséges is, vagyis ha ez a feltétel teljesül, akkor van teljes párosítás.

Mikor erre Merlin rájött, homlokára csapott, és felhívatta az összes udvarhölgyet és lovagot, felállította őket két sorba. Majd kijelölt kb. mondjuk 50 lovagot, és felszólította az udvarhölgyeket, hogy tartsa fel a kezét az, aki hajlandó ezen 50 lovag valamelyikéhez feleségül menni. S mivel csak 48 kéz emelkedett a levegőbe, ezzel már be is bizonyította a királynak, hogy a házasítás nem oldható meg.

Ültetési probléma

Artúr király udvarában a vacsorát közösen, egy nagy kerek asztalnál költötte el mind a 150 lovag. A problémát csak az jelentette, hogy a lovagok között voltak olyanok, akiket nem lehetett egymás mellé ültetni, mert egy idő után összeverekedtek. Bárhogyan próbálkozott is a király olyan ültetéssel, hogy ilyen párok ne kerüljenek egymás mellé, az sohasem sikerült. Egy idő után megunta a próbálkozást, és ismét magához hívatta Merlint, hogy készítsen ilyen ülésrendet. Tudjuk, hogy az összes ültetések száma 149!. Merlin ismét azonnal látta, hogy nincs megfelelő ülésrend, de a király nem hitte el, és bezáratta a toronyba. De sajnos ezúttal Merlinnek nem jutott eszébe semmilyen egyszerű fogás, amellyel bizonyíthatta volna az igazát Artúr királynak. Ezért szegény azóta is ott ül.

❄

Két hasonló feladattal találkoztunk: a párosítással és a körbeültetéssel. Ezek úgynevezett *kereső feladatok*: ha sikerül a problémára egy megoldást megtalálnunk, nincs tovább mit bizonyítani. Ez hasonló ahhoz, mint amikor valaki a kesztyűjét keresi. Ha megtalálta, akkor már nincs mit tennie.

A kereső feladat pontosan megfogalmazva azt jelenti, hogy adva van a 0, 1 számok egy sorozata (amely jelentheti pl. egy gráfnak a pontjait). Az eredmény, amit keresünk, ugyancsak egy, a 0 és 1 számokból álló sorozat (pl. a párosítás). Feltesszük még, hogy azt, hogy a második sorozat valóban megoldása az elsőnek, „könnyen” ellenőrizni tudjuk (ami azt jelenti, hogy az ellenőrzéshez szükséges lépések száma a bemenő adatok hosszának valamilyen hatványánál nem nagyobb).

A párosítási probléma esetén adott egy gráf, és ebben párosítást keresünk. Az ültetési probléma esetén ugyancsak egy gráffal írhatók le a bemenő adatok (a pontok a lovagokat ábrázolják, és két lovagot egy éllel kötünk össze, ha képesek verekedés nélkül végigenni a vacsorát egymás mellett). Vegyük észre, hogy amikor Merlin rájött, hogy a párosítási problémának nincs megoldása, és hogy a Frobenius–Kőnig tételt tudja alkalmazni, akkor egy másik keresési feladattal találta magát szemközt: keresnie kellett valamilyen k-ra k lovagot úgy, hogy k-nál kevesebb udvarhölgy legyen hajlandó ezek valamelyikéhez feleségül menni. Nevezzük a lovagok ilyen halmazát *majomszigetnek*.

A párosítási és az ültetési feladat sok szempontból hasonló, de van amiben különbözik: az első feladathoz (a párosításhoz) találtunk egy másik kereső feladatot (a majomsziget feladatot) úgy, hogy ha az elsőnek van megoldása, akkor a másiknak nincs, és fordítva. Vagyis az egyiknek akkor és csak akkor van megoldása, ha a másiknak nincs. Ezeket *komplementáris kereső feladatoknak* nevezzük. Az ültetési feladathoz azonban ilyet eddig még nem találtak, s nagyon valószínű, hogy nincs is. Nem csak azért, mert eddig senki sem talált, hanem az alábbiak miatt is.

A keresési feladatok nagyon gyakran egymásra visszavezethetők, pl. a teljes párosítás visszavezethető a körbeültetésre. (Ez nem nyilvánvaló, érdemes rajta gondolkozni!)

Vannak olyan kereső feladatok, amelyekre minden más kereső feladat visszavezethető. Ezt a meglepő tényt 12 évvel ezelőtt Cook amerikai matematikus bizonyította.

Később mások (*Karp* amerikai és *Levin* szovjet matematikus) azt is kimutatták, hogy a gyakorlatban fellépő kereső feladatok többsége ilyen. Így pl. minden más kereső feladat visszavezethető a körbeültetési feladatra. Ez azt jelenti, hogy minden kereső feladathoz meg lehet konstruálni egy gráfot, méghozzá hatékonyan, úgy, hogy ebben a gráfban akkor és csak akkor lehet egy minden pontot felfűző zárt poligont találni, ha az eredeti feladatnak van megoldása. S ennek a poligonnak az ismeretében az eredeti feladat megoldását is meg lehet határozni. Ez azt támasztja alá, hogy azokat a kereső feladatokat; amelyekre minden más kereső feladat visszavezethető, nem lehet hatékonyan megoldani. Ez ugyanis azt jelentené, hogy ha ezek egyikét megoldanánk; akkor ezzel az összeset megoldanánk, s ez olyan széles, mind elméleti, mind gyakorlati szempontból fontos körét jelentené a feladatoknak, hogy ez már túl szép volna. Más jelenségek is vannak, melyek ezt alátámasztják. (Általánosan elfogadott hipotézis, hogy ezeket nem lehet megoldani.)

Ha valaki nem is tudja a 150! lehetőséget átlátni, de tudja, hogy van jó párosítás, kérdés, hogy hogyan tudja ezt megtalálni. Olyan algoritmust kellene találni, ami hatékony és minden gráfhoz vagy talál egy teljes párosítást – és ezt megadja –, vagy a komplementer feladatot oldja meg, s ezzel bebizonyítja, hogy nincs megoldás. Ilyen algoritmus is létezik. Ezt *Kőnig Dénes* és *Egerváry Jenő* magyar matematikusok alkották meg, és magyar módszernek nevezik. Ez az algoritmus n^3 számú lépést igényel, ahol n a gráf pontjainak száma.

A pontos matematikai fogalmak birtokában könnyen bizonyítható, hogy ha egy kereső feladat megoldható hatékony algoritmussal, akkor van komplementáris feladata. Nem ismeretes azonban, hogy ez az állítás megfordítható-e. A konkrét esetekben az a tapasztalat, hogy egy-egy kereső feladathoz könnyebb komplementáris feladatot találni, mint hatékony megoldási algoritmust; ez a komplementáris feladat azonban előbb-utóbb (néha 10–20 év múlva) a hatékony megoldó algoritmus kulcsa lesz.

A fenti fogalmak nemcsak a kombinatorikában alkalmazhatók sikerrel, hanem a matematika más ágaiban is, még a legidősebb, legrangosabb ágakban is, mint pl. a számelméletben. Egészen elemi kérdések, amelyeket hosszú idő óta megoldottnak tekintettek, kerülnek új megvilágításba.

Tekintsük az m természetes számot, amelyről azt akarjuk eldönteni, hogy prímszám-e vagy sem. Másképpen azt is mondhatjuk, hogy keressük meg ennek a számnak a prímtényezős felbontását, azaz írjuk fel

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

alakban, ahol p_1, p_2, $\dots$, p_k különböző prímszámok, és α_1, α_2, $\dots$, α_k természetes számok.

Euklidész bebizonyította, hogy minden egész számnak egyértelmű a prímfelbontása. De hogyan lehet ezt megtalálni? Ha valaki ezt a problémát hallja, azt úgy oldja meg, hogy veszi az egész számokat 2-től $\sqrt{m}$-ig és megnézi, hogy osztója-e valamelyik a számnak. Ha egyikkel sem volt osztható, akkor a szám prím. Ez elég sok számolást jelent, pl. egy 100 jegyű számnál 10^{50}-ig kell kipróbálni a számokat. Sokáig az volt a vélemény, hogy a számelmélet a legtisztább matematika, olyan tiszta, hogy már semmire sem használható. Mégis a prímtényezős felbontás kérdése egy teljesen gyakorlati probléma, egy titkosírás kapcsán merült fel, amely szerencsére nemcsak katonai célokra használható. (A Természet Világa 1981. júniusi számában *Babai Lászlótól* jelent meg egy cikk erről az alkalmazásról.)

Ennek ötlete a következő. Rögzítsünk egy p prímet (mondjuk 100 jegyűt). Legyen x egy természetes szám, amelyre $1 \leqslant x \leqslant p$. Ez az x az üzenet. Tekintsünk egy e természetes számot, amelyre $1 \leqslant e \leqslant p-1$ és $(e,p-1)=1$, azaz e és $p-1$ relatív prímek. Ez az e szám az üzenet küldőjének *kulcsa*.

Tekintsük az x^e üzenet p-vel való osztási maradékát, jelöljük ezt $\overline{x^e}$-sal.

Valahogy ezt kiszámítjuk (hogy hogyan, arra később térünk ki), és küldjük el ezt a számot mint sifrírozott üzenetet. Akkor ebből a címzett az x-et vissza tudja kapni. A címzett kulcsa ugyanis egy olyan d szám lesz, amelyre $p-1 \mid de-1$.

Legyen $de=(p-1)k+1$, valamilyen k-val, akkor $\overline{\left(\overline{x^e}\right)^d} = x$.

Ez miért igaz? Nem nehéz belátni, hogy egy osztási maradék r-edik hatványa ugyanaz, mint az egész szám r-edik hatványának osztási maradéka. Ezért

$$\overline{(x^e)^d} = \overline{x^{(p-1)k+1}} = \overline{x(x^{(p-1)k}-1)+x}.$$

Bármely x számra $p|(x^{p-1}-1)$ (ez a „kis Fermat-tétel"), ezt felhasználva $p \mid x^{(p-1)k}-1$. Ezt tehát, mivel osztható p-vel, el is hagyhatjuk, így marad $\overline{x}$. Ezzel tehát valóban meg lehet fejteni az üzenetet. Ahhoz azonban, hogy az eljárás működjön, azt kell tudni, hogy hogyan számíthatjuk ki x^e-t.

Ezt nem lehet úgy kiszámolni, hogy x-et e-szer összeszorzom! Ha p kb. 100 jegyű, akkor x is kb. 100 jegyű, az e maga is kb. 100 jegyű, akkor ez azt jelentené egyrészt, hogy nagyon sokszor kell szorozni; másrészt hogy iszonyúan hosszú számot kapnánk. A számok hosszúságán könnyű segíteni. Mivel a végén úgyis csak a p-vel való osztási maradékot tekintjük, azt megtehetjük, hogy minden egyes szorzás után osztunk p-vel, és csak az osztási maradékkal dolgozunk tovább. A szorzások számát a következő ötlettel lehet csökkenteni. Ha a 32-edik hatványt kell venni, akkor először négyzetre emelek, majd újra négyzetre emelek és így tovább 5-ször. (Közben minden négyzetre emelés után veszem a p-vel való osztási maradékot, és azzal számolok tovább.) Ugyanazt az eljárást használva megtehetem, hogy az e-t 2-es alapú számrendszerben írom fel:

$$e = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \ldots + 2^{a_r}, \quad \text{ahol} \quad a_1 > a_2 > \ldots > a_r,$$

ekkor legfeljebb 100 tagot kapok, s mindegyik tag legfeljebb 2^{100}. Másrészt

$$x^{2^{a_1}} \cdot x^{2^{a_2}} \ldots = x^e,$$

a tényezőket könnyen ki tudom számolni, az elsőt a_1-szeres, a másodikat a_2-szörös négyzetre emeléssel, s azokat összeszorzom. Ez összesen legfeljebb 100×100 művelet, amelyet egy számítógép kényelmesen el tud végezni.

Ahhoz, hogy az eljárás működjön, szükségünk van még arra is, hogy p prímszám legyen. Ezért vetődött fel az a kérdés, hogyan lehet eldönteni egy p számról, hogy prím-e. Ezt máig sem tudjuk elég hatékonyan eldönteni, de vannak olyan algoritmusok, amelyek gyakorlati szempontból hatékonyak.

Ez a titkosírás jó, mert valaki csak akkor tudja megfejteni, ha ismeri hozzá a kulcsot, a d-t. Egy másik kulcs is van hozzá, ami a küldőé, ez az e. Nem lehet-e kihasználni azt, hogy két kulcs van? Például úgy, hogy ne lehessen megfejteni csak a küldő kulcs ismeretében a titkosírást?

Vannak ennek a titkosírásnak olyan változatai, hogy nem lehet az e birtokában az üzenetet megfejteni, a d birtokában pedig nem lehet „hamisítani”. Ezek a módosítások azon múlnak, hogy az m szám prímtényezős felbontására jelenleg nem ismerünk hatékony módszert. (Pontosabban: nincs nyilvánosságra hozva ilyen módszer.)

Bár eddig a titkosírásoknak elsősorban katonai alkalmazásai voltak, újabban hasonló kérdések a polgári életben is felvetődnek. Az utóbbi időben foglalkoznak az elektromos posta kérdésével, hogyan lehetne a levelezést papír nélkül, „dróton” továbbítani. Ez egy alapvető problémát vet fel: az aláírást és pecsétet nem lehet elektromos úton hitelesíteni, s ez visszaélésekre adhat alkalmat. Ezt úgy próbálják kiküszöbölni, hogy ravasz kódolási eljárásokat használnak. Abból, hogy egy üzenet egy adott kulccsal megfejthető, már következik, hogy csak az küldhette, akinek a neve alá van írva.

Ennek a módszernek az alapgondolatát szemléltetjük egy sokkal egyszerűbb eljáráson keresztül. Ennek kulcsa, mondjuk, egy százjegyű szám. Ha ezt beadom a számítógépbe, megnyílik a széf. A probléma az, hogy a számítógép személyzete hozzáférhet ehhez az információhoz, s ez visszaélésekre ad lehetőséget. Hogyan lehet ezt megakadályozni?

Ahelyett, hogy a számítógépbe beprogramoznám a kulcsot, a következőt csinálom: felrajzolok 150 pontot, és felfűzöm valamilyen sorrendben egy zárt poligonra, azután hozzáveszek még éleket, így egy gráfot kapok. Ezután megjegyzem az eredeti poligont, a gráfot pedig berakom a számítógép memóriájába. A gép csak erre fog emlékezni, a poligonra nem. A széf kinyitását a következő, program szabályozza: akkor nyisd ki az ajtót, ha valaki ennek a gráfnak minden pontját felfűző poligonját adja meg.

Ha a gép kezelője ki akarná nyitni a széfet, akkor a gép memóriájából könnyen ki tudja olvasni a gráfot. Ahhoz azonban, hogy a széf kinyíljon, még egy minden pontot felfűző poligont (ún. Hamilton-kört) is kell találnia, és ez – mint Merlin már szerencsétlenségére tapasztalta – emberi idő alatt nem oldható meg. Hiába áll minden információ rendelkezésére, a számítási bonyolultság jobban védi a széfet, mint akármilyen hosszú, bonyolult jelszó vagy kulcs.

Lovász László akadémikus
Szeged, 1982

Könyvismertetés

Matematikai mozaik

Több, mint 30 évvel ezelőtt a Tudományos Ismeretterjesztő Társulat a József Attila Szabadegyetemen „Matematika mindenkinek” címmel előadássorozatot hirdetett meg. A sorozat egyes előadásai a matematika egy-egy régi vagy vadonatúj, a nagyközönség számára is érdekes és könnyen érthető problémájáról szóltak, és előadói vagy már akkor is közismert vagy azóta híressé lett matematikusok voltak. A sorozatnak nagy sikere volt, meg kellett ismételni.

1969-ben a Gondolat Kiadó a 16 legsikeresebb előadás szövegét kötetbe gyűjtötte, és *Matematikai érdekességek* címmel megjelentette. Néhány dolgozat címe (csak azóta már elhunyt szerzők tollából): *Varga Tamás:* Találja ki, melyik számra gondoltam! 1 milliméter = 1 kilométer. (Hamis bizonyítások.) *Gallai Tibor:* A kőnigsbergi hidak, a kilenc ösvény és más gráfelméleti problémák. *Rényi Alfréd:* A szerencsejátékok és a valószínűségszámítás. A Barkochba játék és az információelmélet. *Molnár Ferenc:* Pók és légy. *Bakos Tibor:* Bűvös négyzetek. A gyűjtemény szerkesztője *Hódi Endre* volt.

A kötet rövid idő alatt nemzetközi siker lett. Lefordították és kiadták pl. német, bolgár, román nyelven, csak éppen magyar nyelven nem volt kapható.

1999-ben a TypoTEX Kiadó a Művelődési és Közoktatási Minisztérium pályázatán nyert támogatással ismét megjelentette a kötetet *Matematikai mozaik* címmel. A kötetbe új cikkek is kerültek, amelyek közül *Rónyai Lajos:* Egy igazán csudálatos bizonyítás és *Laczkovich Miklós:* Prímképletek című dolgozatára hívnám fel a figyelmet. Az előbbi a 350 éves Fermat-sejtés (most már tétel) történetéről és bizonyításáról (A. Wiles, 1995) szól, az utóbbi pedig annak az ugyancsak régi kérdésnek az új fejleményeit járja körül, hogy van-e olyan $f(n)$ kifejezés, amely az $n=0, 1, 2, \dots,$ számok halmazán pontosan a prímszámok halmazát állítja elő.

A kötetben szereplő dolgozatok külön-külön is érdekes, régi és korszerű témákat bemutató kellemes stílusú írások, együtt pedig alkalmasak az olvasó matematikai műveltségének a gyarapítására.

Hódi Endre (szerk): Matematikai mozaik, Budapest, 1999, TypoTEX Kiadó, 323 oldal, 1490 Ft.

Határon túli matematika-versenyek

A magyar származású matematikusok a nemzetközi értékelések szerint is kiemelkedő eredményeinek egyik oka a matematikai tehetség korai felismerése és gondozása. A matematikából tehetséges diákok bemutatkozására ma Magyarországon minden korosztály számára rendeznek versenyeket. A versenyeken kitűzött feladatokat (pl. a KöMaL-ban) nyilvánosságra hozzák, majd könyvekbe gyűjtik, hogy tanulás és gyakorlás céljából az ifjúság rendelkezésére álljanak.

A matematika-versenyeken kitűzött feladatok kötetei sorában most egy különleges gyűjtemény jelent meg, a „Határon túli matematika-versenyek” feladatainak gyűjteménye.

A Kárpát-medence különböző országaiban élő és magyar nyelven tanuló általános és középiskolai diákok számára saját országukban többféle versenyt rendeznek. Az ezeken kitűzött feladatokból sikerült *Oláh György* szerkesztőnek 198 feladatot összegyűjtenie és rendeznie.

A feladatok csoportosítása először is régiók (délvidéki, erdélyi, felvidéki, kárpátaljai versenyfeladatok) szerint, majd ezeken belül témakörök (egyenletek, egyenlőtlenségek, kombinatorika, kombinatorikus geometria, geometriai egyenlőtlenségek, síkgeometriai feladatok, térgeometriai feladatok, számelméleti feladatok) szerint történt. Az egyes feladatokat *Balázsi Borbála* (Beregszász), *Bíró Judit* (Sepsiszentgyörgy), *Oláh György* (Komárom), *Szabó Magda* (Szabadka) bocsátotta a szerkesztő rendelkezésére.

Összehasonlítva a közölt feladatokat a hasonló korosztályoknak magyarországi versenyeken kitűzött feladataival, a különböző tantervek miatt és a kötet szerkesztési elvei következtében is eltérések tapasztalhatóak. A geometriai (ill. kombinatorikus geometriai) feladatok például több olyan ismeretet teteleznek fel, ami nálunk a középiskolások előtt nem közismert; a könyvben alig van sorozatokkal, függvényekkel kapcsolatos feladat, de sok szép (és nehéz) feladat van, amely egyenlőtlenségekre vonatkozik. Külön érdemként lehet megemlíteni a számos „egyedi”, semmilyen kaptafára nem húzható feladatot, amelyek megoldása egyedi ötletet igényel.

A párját ritkító ismeretanyagot közreadó kötet értékét növelte volna, ha egy bevezetésben információkat kaphattunk volna magukról a versenyekről, netán még arról is, hogy melyik feladatot hol és mikor tűzték ki.

A kötet tanulónak és tanárnak, versenyzőnek és versenyre felkészítőnek egyaránt hasznos, érdeklődőnek érdekes, ezért valamennyiük szíves figyelmébe ajánlom.

Oláh György (szerk.): Határon túli matematika-versenyek, Budapest, 1999, TypoTEX, 134 oldal, 960 Ft.

Scharnitzky Viktor

FELVÉTELIZŐK FIGYELMÉBE!

Április második felében jelenik meg:

Scharnitzky Viktor: Egyetemi felvételi feladatok matematikából, 12. kötet, 1996–1998.

A kötet a Nemzeti Tankönyvkiadó márkaboltjaiban kapható (pl.: „Pedagógus”: Budapest, VIII. Múzeum krt. 3.; „Pedellus”: Budapest, XIV. Szobránc köz 2.)

Forgalomszabályozás az Interneten

Az 1998. októberi számunkban a Forgalomszabályozás az Interneten című írásban *Éltető Tamás,* az **Ericsson Traffic Lab** munkatársa a TCP protokoll működését vázolta fel. A cikk végén egy feladatot tűzött ki, amelyben azt kellett meghatározni, hogy a leírt modell szerint működő rendszerben

(a) mennyi idő alatt lehet 800 000 bit információt zavartalanul továbbítani;

(b) hosszú távon mekkora az átlagos átviteli sebesség.

A rendszer paraméterei – maximális sebesség: 26400 bit/sec – arányossági tényező a felderítési szakaszban: 0,6931 1/sec; az üzenetküldési szakaszban: 1200 bit/sec^2.

A pályázatra két dolgozat érkezett. *Máthé András* (Budapest, ELTE, Apáczai Csere J. Gyak. Gimn.) tömör megoldásában kiszámította az eredményt. *Szőllősi Loránd* (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn.) pedig megadta a helyes képleteket.

Mindketten egy-egy **Ericsson 128TA** ISDN modemet kaptak ajándékul az ERICSSON Távközlési Kft-től. Az Ericsson 128TA adapterrel 2×64 Kbit/s adatátviteli sebességgel lehet internetezni ISDN vonalon. Emellett hagyományos telefonkészülék is kapcsolható hozzá, és a számítógép soros kimenetéhez kötve modemként használható.

Most pedig nézzük a probléma megoldását.

A feladat szerint az adattovábbítás két fő szakaszból áll: a felderítési, és az üzenetküldési szakaszból. A felderítési szakaszban és az üzenetküldési szakasz elején egy rövid ideig exponenciálisan nő a sebesség. Az üzenetküldési szakasz további részében lineáris periódusok követik egymást, ahol a sebesség lineárisan nő $\dfrac{s_{\max}}{2}$-ről egészen $s_{\max}$-ig. Bevezetünk néhány jelölést:

$s_{1,2}(t)$ Az adattovábbítás sebessége a felderítési szakaszban, illetve az adatküldési szakasz elején, illetve az üzenetküldési szakaszban.

s^* A kezdősebesség a felderítési szalasz elején.

a Az arányossági tényező a felderítési szakaszban.

b Az arányossági tényező az üzenetküldési szakaszban.

$s_{\max}$ A csatornán elérhető maximális sebesség.

$t_{\max 1,2}$ A felderítési szakasz időtartama, illetve az üzenetküldési szakasz egy periódusának (lineáris sebességnövekedés) időtartama.

t_{koz} Az üzenetküldési szakasz elején, az exponenciális sebességnövekedés időtartama.

Δt Az üzenetküldés végén fennmaradt csonka periódus időtartama.

$D_{1,2,3}$ Az elküldött adat mennyisége a felderítési szakaszban, az üzenetküldési szakasz elején, és az üzenetküldési szakasz egy periódusában.

$\mathbf{D_{\Delta t}}$ Az elküldött adat mennyisége az üzenetküldési szakasz végén a csonka periódusban.

T Az üzenet elküldésének teljes ideje.

Először írjuk fel a sebességet a felderítési szakaszban! $s_1'(t) = as_1(t)$, $\quad s_1(0) = s^*$-ből kiindulva, a differenciálegyenletet megoldva:

$$s_1(t) = s^* \cdot e^{at}.$$

Most írjuk fel a sebességet az üzenetküldési szakasz egy periódusában.

$$s_2(t) = bt + d, \quad s_2(0) = \frac{s_{\max}}{2} = d,$$
$$s_2(t) = bt + \frac{s_{\max}}{2}.$$

A két sebesség-függvény segítségével írjuk fel a különböző szakaszok időtartamát!

$t_{\max1}$:

$$s_1(t_{\max1}) = s^* \cdot e^{at_{\max1}} = s_{\max}, \quad \text{innen} \quad t_{\max1} = \frac{\ln \frac{s_{\max}}{s^*}}{a}.$$

t_{koz}:

$$s_1(t_{koz}) = \frac{s_{\max}}{2}, \quad \text{innen} \quad t_{koz} = \frac{\ln \frac{s_{\max}}{2s^*}}{a}.$$

$t_{\max2}$:

$$s_2(t_{\max2}) = bt_{\max2} + \frac{s_{\max}}{2} = s_{\max}, \quad \text{innen} \quad t_{\max2} = \frac{s_{\max}}{2b}.$$

Mivel felírtuk mind a sebességeket, mint az időtartamokat, ezekből fel lehet írni az átvitt adatmennyiségeket a különböző szakaszokban. Némi számolással

$$D_1 = \int_0^{t_{\max1}} s_1(u)du = \frac{s_{\max} - s^*}{a}, \quad D_2 = \int_0^{t_{koz}} s_1(u)du = \frac{s_{\max} - 2s^*}{2a},$$
$$D_3 = \int_0^{t_{\max2}} s_2(u)du = \frac{3s_{\max}^2}{8b}.$$
$$D_{\Delta t} = \int_0^{\Delta t} s_2(u)du = \frac{b}{2}(\Delta t)^2 + \frac{s_{\max}}{2}\Delta t, \quad D_{\Delta t} < D_3, \qquad \Delta t > 0.$$

Δt-t eddig nem tudtuk felírni, mert ismerni kell hozzá $D_{\Delta t}$-t, amit mindjárt meg is kapunk.

Az adatátvitel teljes ideje, és a teljes átvitt adatmennyiség egyszeűen kapható:

$$T = t_{\max1} + t_{koz} + kt_{\max2} + t_{\Delta t}, \quad D = D_1 + D_2 + kD_3 + D_{\Delta t},$$

ahol

$$k = \left[\frac{D - (D_1 + D_2)}{D_3}\right].$$

Így itt az üzenetküldési szakasz k darab egész periódusból áll. Ekkor $D_{\Delta t}$ nyilván:

$$D_{\Delta t} = D - (D_1 + D_2 + kD_3),$$

és Δt pedig

$$\frac{b}{2}(\Delta t)^2 + \frac{s_{\max}}{2}\Delta t - D_{\Delta t} = 0.$$

Ebből

$$\Delta t = \frac{\sqrt{s_{\max}^2 + 8bD_{\Delta t}} - s_{\max}}{2b}.$$

A feladatban nem volt megadva s^* értéke, ami nélkül pontosan nem lehet kiszámítani T értékét. Közelítőleg azonban kiszámíthatjuk, ha elhanyagoljuk D_1-et, és D_2-t (hosszabb adatátvitelnél ez a rész nem jelentős):

$$D_1 \approx 0, \quad D_2 \approx 0, \quad D \approx kD_3 + D_{\Delta t},$$

$$k \approx \left[\frac{D}{D_3}\right], \quad T \approx kt_{\max 2} + \Delta t.$$

Behelyettesítve az ismert értékeket:

$$t_{\max 2} = \frac{26400\,\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{s}}}{2\cdot 12000\,\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{s}^2}} = 1.1\ \mathrm{s}, \quad D_3 = \frac{3\cdot 26400^2\,\frac{\mathrm{bit}^2}{\mathrm{s}^2}}{8\cdot 12000\,\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{s}^2}} = 21780\ \mathrm{bit}.$$

$$k \approx \left[\frac{800000\ \mathrm{bit}}{21780\ \mathrm{bit}}\right] = 36, \quad D_{\Delta t} \approx 800000\ \mathrm{bit} - 36 * 21780\ \mathrm{bit} = 15920\ \mathrm{bit}.$$

$$\Delta t \approx \frac{\sqrt{26400^2\,\frac{\mathrm{bit}^2}{\mathrm{s}^2} + 8\cdot 12000\,\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{s}^2}\cdot 15920\ \mathrm{bit}} - 26400\,\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{s}}}{2\cdot 12000\,\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{s}^2}} = 0.9\ \mathrm{s}.$$

$$T \approx 36 * 1.1\ \mathrm{s} + 0.9\ \mathrm{s} = 39.6\ \mathrm{s} + 0.9\ \mathrm{s} = 40.5\ \mathrm{s}.$$

A hosszú távon vett átlagos átviteli sebességet viszont pontosan ki tudjuk számolni. Ahogy nő az adatmennyiség, és ezzel együtt az átviteli idő, úgy nő az üzenetküldési szakasz periódusainak aránya az összes adatmennyiségben. Ezért a hosszú távon vett átlagos átviteli sebesség körülbelül egyenlő az egy perióduson belül vett átlagos áviteli sebességgel:

$$\overline{s} = \frac{\frac{s_{\max}}{2} + s_{\max}}{2} = \frac{3s_{\max}}{4} = \frac{3\cdot 26400\,\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{s}}}{4} = 19800\,\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{s}}.$$

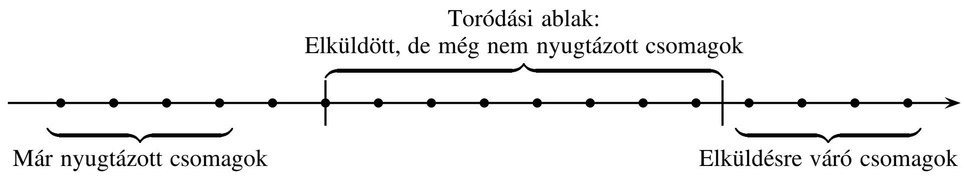
❄

Ez a feladat a TCP (Transmission Control Protocol) működésének lényegét modellezte, de az Internet meghatározó jellegétől – attól, hogy ez egy csomagkapcsolt hálózat – elvonatkoztatva. Most úgy közelítjük meg a TCP működését, hogy megnézzük, mi is történik csomagszinten. Ez a megközelítés igazából még most sem a valóságos helyzet.

Mint már említettük, a *feladó* az üzenetet csomagokra bontja, és azokat külön-külön küldi el a *vevőnek*. A *vevő* minden egyes csomagot nyugtáz, mégpedig úgy, hogy visszaküld a *feladónak* egy csomagot, amelyben jelzi, hogy az üzenet elejétől kezdve hány csomagot kapott meg eddig. (Azaz, hogy mi a sorszáma a legutolsó olyan csomagnak, ameddig még valamennyi csomag hiánytalanul megérkezett.)

Azzal az optimista egyszerűsítő feltétellel élünk, hogy két, egymás után küldött csomag nem vész el, sőt, a csomagvesztések között „aránylag hosszú" idő telik el. Előfordulhat viszont a csomagvesztésen kívül másfajta hiba is: két csomag felcserélődhet a hálózaton, és a *vevő* egy később feladott csomagot kap meg korábban. Ilyenkor mindaddig nem tudja nyugtázni a kapott csomag sorszámát, amíg meg nem érkezik a hálózatban bolyongó korábbi csomag. A protokoll szerint ezt a hibát a *vevő* úgy jelzi, hogy a legutolsó, rendben megkapott csomagról küldött nyugtázó üzenetet küldi el ismét. Az ilyen üzenetet *ismételt nyugtának* nevezik.

Mit tesz eközben a *feladó*? Mint várható, számon tartja azokat a csomagokat – pontosabban ezek sorszámát –, amelyeket már elküldött, de még nem érkezett rájuk nyugtázó üzenet. Ezeket egy *torlódási ablaknak* nevezett intervallumban tárolja. Ennek alsó végpontja az a legkisebb sorszám, amelyet a *vevő* még nem nyugtázott, a felső végpont pedig – amely, mint látni fogjuk, általában törtszám – a soron következő elküldendő csomagot jelöli ki. A *feladó* akkor küldi el a soron következő csomagot, ha a torlódási ablak felső végpontja átlépi a következő egész értéket és az ablakban még vannak el nem küldött csomagok.



A *feladónak* különböző állapotai vannak. Ezeket most sorravesszük, és megnézzük, hogyan változik a torlódási ablak.

Kezdetben a *feladó* az úgynevezett *indulási állapotban* van, az alsó és a felső határ értéke 1, a torlódási ablak kijelöli az üzenet első csomagját, amelyet a *feladó* elküld. Amikor megkapja a nyugtát, 1-gyel növeli az ablak méretét a következő ármányos módon: az alsó határ 1-ről 2-re nő, a felső határ szintén, és a *feladó* elküldi a 2. csomagot. Most kerül sor az ablak méretének növelésére, a felső határ kitolódik, 3 lesz. Az ablak métere eggyel nőtt, a következő elküldendő csomag a 3.

Az indulási állapotban minden megkapott nyugta után így nő 1-gyel az ablak mérete. A *feladó* addig marad indulási állapotban, amíg csomagvesztést nem tapasztal. Mint már írtam, ha egy csomag elvész, akkor a *vevő* a beérkező további csomagokra a legutolsó, rendben megkapott csomag nyugtáját ismételgeti. A *feladó* a második ismételt nyugta után dönt úgy, hogy baj van, elveszett az utolsó, rendben nyugtázott küldeményt követő csomag. Ha ugyanis csak egy ismételt nyugtát kap, és ezután minden helyreáll, akkor csak annyi történt, hogy az utolsó két csomag fölcserélődött.

Amikor beérkezik a harmadik azonos – tehát a második ismételt – nyugta, akkor a *feladó* állapota megváltozik. Az új állapotot *csomagvesztés utáni felépülésnek* nevezik. Ebben az állapotban még egyszer újra elküldi a *vevőnek* az elveszett csomagot, azt, amelyik az ismételt nyugtában közölt sorszám után következik.

Amíg ez a csomag meg nem érkezik a *vevőhöz*, addig az minden újabb csomag érkezésekor – amelyeket félretesz – csökönyösen ismételgeti a nyugtát. Amikor megkapja a hiányzó csomagot, összerakja az üzenet félretett csomagjait, beilleszti az addig hiányzót és nyugtázza a rendben megkapott csomagok közül a legnagyobb sorszámút. A *feladó* eközben azt feltételezi, hogy csak egy csomag veszett el és az ismételt nyugták a későbbi csomagok megérkezését jelzik. Így az ismétlődő nyugtákra is 1-gyel növeli a torlódási ablak méretét. Erre azért van szükség, mert az ismételt nyugták nem növelik automatikusan az ablak felső határát, így pedig a *feladó* nem küld új csomagot, és feleslegesen várna, amíg meg nem érkezik az elveszett csomag pótlását jelző nyugta.

Amikor helyreáll a rend és beérkezik az első, nem ismételt nyugta, akkor – értelemszerűen – a *feladó* ismét állapotot vált. Az új állapotot *torlódás-elkerülési állapotnak* nevezik.

A torlódás-elkerülési állapotba lépés után a *feladó* nem növeli az ablak felső határát, és addig nem küld újabb csomagot, amíg a torlódási ablak hossza a felére nem csökken. Ha nem veszett el újabb csomag, akkor ez azonnal megtörténik, mert az elveszett csomag megkerülését éppen a legnagyobb sorszámú csomagról szóló nyugta jelzi.

Miután a torlódási ablak a felére csökkent, újra elkezdi növelni az ablak felső határát és újabb csomagokat küld minden olyan esetben, amikor a felső határ átlép egy egész számot. Ettől kezdve viszont már nem egyesével nő tovább az ablak felső határa az újabb nyugták beérkezésekor, hanem lassabban. A *feladó* a következő formulát használja:

$$\text{új méret} = \text{régi méret} + \frac{1}{\text{régi méret}}.$$

Az októberben kitűzött feladat szellemében ezután a *feladó* egészen a következő csomagvesztés érzékeléséig marad torlódás-elkerülési állapotban. Ha ez bekövetkezik – és most föltesszük, hogy a torlódási ablak mérete ezúttal is pontosan akkora, mint az első csomagvesztéskor, mert csak mi használjuk a hálózatot –, akkor felépülési állapotba kerül, amiből újra torlódás-elkerülési állapotba jut.

Feltételezzük még, hogy a csomagok utazási ideje állandó, továbbá, hogy a *vevő* nyomban elküldi a beérkezett csomagok nyugtáját, azaz az épségben megérkező csomagok elküldése után a *feladó* mindig ugyanannyi idővel kapja meg a nyugtát.

A kérdés a következő: miért felel meg az októberi közleményben leírt modell a TCP most ismertetett működésének, azaz annak, ahogyan a *feladó* az adás sebességét változtatja?

A helyes választ beküldőket ezúttal is az ERICSSON Távközlési Kft jutalmazza.

Éltető Tamás
Ericsson Traffic Lab

Mérőlap felvételire készülőknek V.

1. Az n milyen értékére lesz az a, b, c_n egy számtani sorozat három egymást követő tagja, ha

$$a=\operatorname{tg}\left(\frac{0\cdot\pi}{5}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{1\cdot\pi}{5}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{2\cdot\pi}{5}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{3\cdot\pi}{5}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{4\cdot\pi}{5}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{5\cdot\pi}{5}\right),$$

$$b=\sin^{\cos 60^\circ}60^\circ+\cos^{\sin 30^\circ}30^\circ,$$

$$c_1=3,\quad c_n=2\cdot\sqrt{c_{n-1}}?$$

2. Az $5x^2-6(a+b)x+a^2+b^2+2ab=0$ másodfokú egyenletben az a és a b valós paraméterek, amelyekre $1<a+b<5$. Mutassuk meg, hogy az egyenlet egyik gyöke 0-nál nagyobb, de 1-nél kisebb, a másik pedig 1-nél nagyobb. Igaz-e a feladat állításának a megfordítása?

3. Határozzuk meg az n, m egész számokat olyan módon, hogy

$$A=n^5-5n^3+4n-2^m+1$$

osztható legyen 5-tel!

4. Egy derékszögű háromszög beírt körének középpontja a csúcsoktól x, y és z távolságra van (z a kör középpontjának távolsága a derékszögű csúcstól). Mutassuk meg, hogy az xy, xz és yz oldalhosszúságú háromszög egyik szöge 135°.

5. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelyet az $(x+2)^2+(y-5)^2=1$, az $(x-1)^2+(y-6)^2=1$ és az $(x-4)^2+(y+3)^2=1$ egyenletű körök belülről érintenek.

6. Egy pozitív számokból álló számtani sorozat nem feltétlenül egymást követő tagjai a, b és c. Tudjuk, hogy

$$\frac{c-b}{a}+\frac{a-c}{b}+\frac{b-a}{c}=0.$$

Adjuk meg a sorozat első n elemének összegét, ha ismerjük az első tagját.

7. Tekintsük a következő függvényeket: $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$, $g(x)=\cos x$. Adjunk meg olyan geometriai transzformációt, amely g képét f képébe viszi.

8. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\sqrt[3]{x-72}+\sqrt[3]{y+1998}=25,$$
$$x+y=1999.$$

Számadó László

Megoldásvázlatok, eredmények a IV. mérőlap (1999/3. sz.) feladataihoz

1. Húzzuk meg a trapéz két magasságát. Ekkor két derékszögű háromszöget kapunk. Az egyiknek az átfogója 14,3 egység, a másiké 16,5 egység. Mindkettőnek egyik befogója 13,2 egység. Az ismeretlen befogók *előjeles* szakaszok, hosszuk $|x|$, illetve $|y|$.

$$|x|^2 = 14{,}3^2 - 13{,}2^2 = 5{,}5^2, \qquad \text{illetve} \qquad |y|^2 = 16{,}5^2 - 13{,}2^2 = 9{,}9^2,$$

azaz $x_1 = 5{,}5$, $x_2 = -5{,}5$, illetve $y_1 = 9{,}9$, $y_2 = -9{,}9$.
(A szerkesztés vizsgálata is mutatja, hogy a feltételeknek négy trapéz felel meg.)

A trapézok másik párhuzamos oldalának hossza:

$$22 - 5{,}5 - 9{,}9 = 6{,}6 \text{ egység}, \qquad 22 + 5{,}5 - 9{,}9 = 17{,}6 \text{ egység},$$

$$22 + 9{,}9 - 5{,}5 = 26{,}4 \text{ egység}, \qquad 22 + 9{,}9 + 5{,}5 = 37{,}4 \text{ egység}.$$

A négy trapéz területe: $T_1 = 188{,}76$ területegység, $T_2 = 261{,}3$ területegység, $T_3 = 313{,}44$ területegység, $T_4 = 392{,}04$ területegység.

2. Mindkét kifejezés $n(n+1)(n+2)(n+3)$ alakba írható. A négy tényező közül kettő egymás után következő páros szám, így egyikük osztható 4-gyel, így szorzatuk 8-cal, a négy tényező közül legalább az egyik osztható 3-mal, tehát a négy tényező szorzata osztható $3 \cdot 8 = 24$-gyel.

3. A $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ és a $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ azonosságok alkalmazásával

$$\cos^2 x + \sin^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos^2 2x.$$

Mivel $0 \leqslant \cos^2 2x \leqslant 1$, ezért $\dfrac{3}{4} \leqslant \cos^2 x + \sin^4 x \leqslant 1$, így $1 \leqslant \dfrac{1}{\cos^2 x + \sin^4 x} \leqslant \dfrac{4}{3}$. Mivel a kifejezéssel megadott függvény folytonos, ezért az értékkészlet az $\left[1; \dfrac{4}{3}\right]$ intervallumba eső valós számok halmaza. A legkisebb értékét a függvény akkor veszi fel, ha $\cos^2 2x = 1$, tehát az $x = k \cdot \dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$ helyeken, a legnagyobb értékét $\cos^2 2x = 0$ esetén veszi fel, tehát az $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$ helyeken.

Megjegyzés. Az adott kifejezés a következő módon is felírható:

a) $\left(\cos^2 x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$; b) $\dfrac{7}{8} + \dfrac{1}{8}\cos 4x$.

4. Legyen az $\{a_n\}$ sorozat első négy eleme a, aq, aq^2, aq^3; a második sorozat első négy eleme ekkor a, $aq - 3$, $aq^2 - 6$, $aq^3 - 36$. A b_1, b_2, b_3, b_4 elemekre egyrészt $b_2^2 = b_1 b_3$, másrészt $b_1 b_4 = b_2 b_3$, tehát

$$(aq - 3)^2 = a(aq^2 - 6) \qquad \text{és} \qquad a(aq^3 - 36) = (aq - 3)(aq^2 - 6).$$

Rendezés után $2a(q-1) = 3$ és $a(q^2 + 2q - 12) = 6$. Mivel $a \neq 0$ és $q \neq 1$, ezért

$$\frac{q^2 + 2q - 12}{2(q-1)} = 2, \qquad q^2 - 2q - 8 = 0, \qquad q_1 = 4, \quad q_2 = -2.$$

Ha $q=4$, akkor $a=\frac{1}{2}$, ha $q=-2$, akkor $a=-\frac{1}{2}$, így a két sorozat első négy eleme:

$$\frac{1}{2},\ 2,\ 8,\ 32, \qquad\qquad -\frac{1}{2},\ 1,\ -2,\ 4$$

illetve vagy illetve

$$\frac{1}{2},\ -1,\ 2,\ -4, \qquad\qquad -\frac{1}{2},\ -2,\ -8,\ -32.$$

5. Nyilván $x>0$ kell, hogy legyen. Ha $\log_2 x=y$, akkor azonosságok alkalmazásával

$$\sqrt{y^2-5y+4}\leqslant\sqrt{2y^2-5y}. \tag{1}$$

A két gyökös kifejezésnek akkor van értelme, ha

$$y^2-5y+4\geqslant 0 \quad \text{és} \quad 2y^2-5y\geqslant 0,$$

azaz ha $y\leqslant 0$ vagy $y\geqslant 4$. Az (1) egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, ezért a négyzetre emelés ekvivalens egyenlőtlenségre vezet:

$$y^2-5y+4\leqslant 2y^2-5y, \qquad y^2\geqslant 4, \quad y\leqslant -2 \ \text{ vagy } \ y\geqslant 2.$$

Az (1) egyenlőtlenség megoldásai: $y\leqslant -2$ vagy $y\geqslant 4$. Az eredeti egyenlőtlenség akkor teljesül, ha

$$\log_2 x\leqslant -2 \quad \text{vagy} \quad \log_2 x\geqslant 4,$$

azaz ha

$$0<x\leqslant\frac{1}{2} \quad \text{vagy} \quad x\geqslant 16.$$

6. Mivel $4\cos^2 x-3=1-4\sin^2 x$, ezért

$$\left|\frac{4\sin^2 x-1}{\cos x}\right|=-\frac{4\sin^2 x-1}{\cos x},$$

ez pedig pontosan akkor teljesül, ha $\dfrac{4\sin^2 x-1}{\cos x}\leqslant 0$.

Ha $\cos x>0$, akkor $4\sin^2 x-1\leqslant 0$, $\sin^2 x\leqslant\frac{1}{4}$, $|\sin x|\leqslant\frac{1}{2}$.

Innen a $-\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ számok az egyenlet megoldásai.

Ha $\cos x<0$, akkor $4\sin^2 x-1\geqslant 0$, $\sin^2 x\geqslant\frac{1}{4}$, $|\sin x|\geqslant\frac{1}{2}$.

Innen a $\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ és a $\frac{7\pi}{6}+2n\pi\leqslant x<\frac{3\pi}{2}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$ számok a megoldások.

7. A vektorszerkesztés módszerével dolgozhatunk. A feltételeknek két trapéz felel meg. Az A_1B_1CD átlóinak metszéspontja legyen K, az A_2B_2CD átlóinak metszéspontja L, a DC szakasz felezőpontja F.

$F\left(\frac{9}{2};\frac{7}{2}\right)$. Így $\overrightarrow{DF}\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$. Az $\overrightarrow{FK}$, illetve $\overrightarrow{FL}$ vektorok a $\overrightarrow{DF}$ 90°-os elforgatottjai, tehát $\overrightarrow{FK}\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ és $\overrightarrow{FL}\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FK}=(1;2), \qquad \overrightarrow{CK}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FK}=(-2;1),$$

$$\overrightarrow{CL}=-\overrightarrow{DK}=(-1;-2), \qquad \overrightarrow{DL}=-\overrightarrow{CK}=(2;-1).$$

Mivel

$$\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OC}+4\overrightarrow{CK}=(6;4)+4\cdot(-2;1)=(-2;8),$$
$$\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OD}+4\overrightarrow{DK}=(3;3)+4\cdot(1;2)=(7;11),$$
$$\overrightarrow{OA_2}=\overrightarrow{OC}+4\overrightarrow{CL}=(6;4)+4\cdot(-1;-2)=(2;-4),$$
$$\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OD}+4\cdot\overrightarrow{DL}=(3;3)+4(2;-1)=(11;-1),$$

ezért $A_1(-2;8)$, $B_1(7;11)$, $A_2(2;-4)$, $B_2(11;-1)$.

Érdemes megjegyezni, hogy

$$\overrightarrow{OA_2}=2\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OB_1}=(9;7)-(7;11)=(2;-4) \qquad \text{és}$$
$$\overrightarrow{OB_2}=2\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA_1}=(9;7)-(-2;8)=(11;-1).$$

8. Mivel $4x-x^2-5=-1-(x-2)^2<0$ minden valós x-re, ezért az $(a+2)x^2-(a-1)x+ +a-1\geqslant 0$ *legfeljebb* másodfokú egyenlőtlenségre kell a válaszokat megadni.

Ha $a+2=0$, $a=-2$, akkor a $3x-3\geqslant 0$ egyenlőtlenségnek végtelen sok megoldása van.

a) Ha $a+2\neq 0$, úgy pontosan akkor van egy megoldása az egyenlőtlenségnek, ha $a+2<0$ és a polinom diszkriminánsa, $D=0$.

$$D=(1-a)^2-4(a-1)(a+2)=-3(a+3)(a-1)=0,$$

ha $a=-3$ vagy $a=1$, így $a<-2$ miatt akkor van egyetlen megoldás, ha $a=-3$.

b) Az egyenlőtlenségnek nincs megoldása, ha $a+2<0$ és $D<0$, azaz ha $a<-3$. Végtelen sok megoldás akkor van, ha $a+2>0$ vagy ($a+2<0$ és $D>0$) vagy $a=-2$, azaz ha $a>-3$.

Rábai Imre

Ifjúsági Matematikai Konferencia '99 és Tehetséggondozó Matematika Tábor Miskolc, 1999. augusztus 15–22.

A Miskolci Ifjúsági Matematikai Egyesület és a Bolyai János Matematikai Társulat Borsod Megyei Tagozata 1999. augusztus 15. és 22. között *Matematika Tábort és Ifjúsági Matematikai Konferenciát* rendez középiskolás korú diákok számára, együttműködve a Miskolci Egyetem Matematikai Intézetével, a Herman Ottó Gimnáziummal és a Földes Ferenc Gimnáziummal.

Az *Ifjúsági Matematikai Kongresszus-96 Miskolc* (a II. Európai Matematikai Kongresszus hivatalos kísérőrendezvénye) szervezői szeretnék rendszeressé tenni a középiskolás korú diákok, tanáraik és más érdeklődők nyári szakmai találkozóját. Az Európai Matematikai Társulat 1998-ban Potsdamban szervezett ifjúsági matematikai kongresszust, majd ezt követően 2000-ben, a „Matematika évében" Barcelonába várják Európa fiatal matematikusait. A kétévenként sorra kerülő rendezvényeket tábor és konferencia sorozattal szeretnénk kiegészíteni minden páratlan évben. Így először 1997-ben rendeztünk Ifjúsági Matematikai Konferenciát és Tábort, ezt másodszor 1999-ben kívánjuk megrendezni.

A rendezvény helyszíne Miskolc, *Herman Ottó Gimnázium.* A szállás központi helyen, a gimnáziumtól 10 perces sétára, a *Tóth Pál Kollégiumban* lesz.

Tervezett program:

Nap	Délelőtt	Délután	Este
Vasárnap, augusztus 15.	Az érkezők fogadása, elszállásolás	Városnézés	Szabad program
Hétfő, augusztus 16.	Megnyitó, előadások	Gyakorlatmegoldó szemináriumok, kiselőadások	Ismerkedési est, közös vacsora
Kedd, augusztus 17.	Előadások	Gyakorlatmegoldó szemináriumok, kiselőadások	Kulturális program
Szerda, augusztus 18.	Előadások	Kirándulások	Szabad program
Csütörtök, augusztus 19.	Előadások	Erdős Pál megemlékezés	Táncház
Péntek, augusztus 20.	Előadások	Augusztus 20. megünneplése	Szabad program
Szombat, augusztus 21.	Előadások, táborzárás	Elutazás, illetve fakultatív kirándulás	
Vasárnap, augusztus 22.	Fakultatív kirándulás	Visszaérkezés Miskolcra 18 óra körül	

A meghívott előadók – neves külföldi és hazai szakemberek – a konferencia két hivatalos nyelvén, angolul és magyarul tartanak előadásokat. Lehetőségek szerint minden angol nyelvű előadást magyarra fordítunk. Az előadók a kb. 1 órás előadás után az adott témakörben az érdeklődők számára feladatmegoldó foglalkozást is tartanak. Ezeken kívül más, feladat-központú foglalkozásokat is tervezünk a délutánokra.

Minden résztvevő lehetőséget kap saját munkájának – kiselőadás, számítógépes program, poszter, játék stb. – bemutatására. Ehhez előzetesen rövid kivonatot kell beküldeni.

A **résztvevők** előadásaira, számítógépes programok és poszterek bemutatására hétfőn, kedden, csütörtökön és pénteken kerül sor.

A rendezvény részvételi díja 14000 Ft/fő. Ez az összeg magában foglalja:

– a szállásköltséget (6 éjszaka: vasárnap éjszakával kezdődően a következő hét péntek éjszakájával bezárólag) középiskolai vagy egyetemi kollégiumban 3–5 ágyas szobákban;

– a napi három étkezést (hétfőn reggelivel kezdve a következő szombaton ebéddel zárva);

– a kirándulási költségeket (kivéve a hét végi, fakultatív kirándulást, lásd a következő oldalon);

– a kiadványok, belépők, a városi közlekedés költségeit és a szervezési kiadásokat.

Azoknak, akik szállást, reggelit és vacsorát nem kérnek, a részvételi díj **8500 Ft/fő** (ebben benne van az ebéd, a hétfő esti közös vacsora és minden egyéb közös program).

Elegendő jelentkező esetén a tábor végén fakultatív kirándulást szervezünk 1999. augusztus 21–22-én (szombat–vasárnap) a Zempléni várak és a Tokaj-Hegyalja megtekintésére. Ennek várható költsége további **4000 Ft/fő**.

A jelentkezés módja és határideje: A jelentkezéshez levélben igényelhető a rendezvény részletes leírása az alábbi címen.

A végleges jelentkezési lapot kérjük pontosan kitölteni. Átutalással (a Miskolci Ifjúsági Matematika Egyesület Postabank és Takarékpénztár Rt.-nél vezetett Budapest, József Nádor tér 1. 11994002–02409254-00000000 számú számlájára) vagy a levélben igényelt csekk felhasználásával kérjük a részvételi díjat befizetni, és a befizetésről szóló feladatló igazolás másolatát a végleges jelentkezési lappal együtt **1999. június 30-ig** visszaküldeni a következő címre:

Dr. Körtesi Péter
Ifjúsági Matematikai Egyesület,
3515 Miskolc-Egyetemváros, Pf. 10.,
e-mail: `matjun@gold.uni-miskolc.hu`.

Helyesbítés

Az 1998/9. szám 519. oldalán található **C. 508.** gyakorlat végeredménye hibás, amint erre *Lakatos Kristóf* (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 8. o.t.) tanuló felhívta figyelmünket.

Az elírás onnan származik, hogy az ábrán és a számolásban más jelölést használtunk. Az x-re kapott 903,48 érték akkor helyes, ha $BP=x$ és $AP=x+100$. Ezzel tovább folytatva a számolást, $t=25{,}71$ mp a helyes végeredmény.

C gyakorlatok megoldásai

C. 513. *Egy* 25 *méter hosszú feltekercselt vezetéket* 2 *és* 3 *méteres darabokra vágunk fel. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha a különböző méretű darabok sorrendje is számít?*

Megoldás. A 2 méteres darabok száma legyen x, a 3 métereseké y. Ekkor először a

$$2x+3y=25,$$

úgynevezett *diofantikus egyenletet* kell megoldanunk. Az egyenletből

$$x = \frac{25 - 3y}{2}.$$

Mivel egész megoldásokat keresünk, $25 - 3y$ páros. Ez azt jelenti, hogy $3y$ és így y is páratlan. Továbbá, mivel $x > 0$, $3y < 25$. Az y ezért a 8-nál kisebb pozitív páratlan szám; lehetséges értékei: 1, 3, 5, 7.

Az x megfelelő értékei: 11, 8, 5, 2.

Az első esetben összesen 12 vezetékdarabunk van (1 darab 3 méteres és 11 darab 2 méteres), lehetséges sorrendjeik száma $\frac{12!}{1! \cdot 11!} = 12$.

A többi esetben hasonlóan: $\frac{11!}{3! \cdot 8!} = 165$, $\frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252$, illetve $\frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$-féleképpen rendezhetjük sorba a vezetékdarabokat.

Így az összes lehetséges esetek száma: $165 + 252 + 36 + 12 = 465$.

Balog Krisztián (Miskolc, Földes F. Gimn., 12. o.t.)

640 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Bérces Márton, Birkner Tamás, Szalay Zsófia, Szép László és Szűcs 816 Júlia. 5 pontos 478, 4 pontos 40, 3 pontos 18, 2 pontos 14, 1 pontos 62, 0 pontos 23 dolgozat.

C. 514. *Jelölje S_n a $(2^n, 2^{n+1})$ intervallumba eső egész számok összegét. Bizonyítsuk be, hogy S_n minden pozitív egész n szám esetén osztható 3-mal. Milyen pozitív egész n-ekre osztható S_n 9-cel?*

Megoldás. A jelölt intervallumba eső számok a $2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1$, olyan számtani sorozatot alkotnak, amelyben $a_1 = 2^n + 1$, $a_m = 2^{n+1} - 1$, a tagok száma pedig: $m = 2^n - 1$. A számok összege így

$$S_n = (2^n - 1)\frac{2^n + 1 + 2^{n+1} - 1}{2} = (2^n - 1)3 \cdot 2^{n-1},$$

ami valóban osztható 3-mal.

S_n akkor osztható 9-cel is, ha $2^n - 1$ is osztható 3-mal. (2^{n-1} biztos, hogy nem lehet 3-mal osztható.)

Legyen n páros: $n = 2k$. Ekkor $2^n - 1 = 2^{2k} - 1 = 4^k - 1^k$, s ez a különbség mindig osztható az alapok különbségével, 3-mal.

Ha n páratlan, $n = 2k + 1$, akkor

$$2^n - 1 = 2^{2k+1} - 1 = 2 \cdot 2^{2k} - 1 = 2 \cdot 2^{2k} - 2 + 1 = 2(2^{2k} - 1) + 1.$$

Az előbbiek szerint az első tag osztható 3-mal, ezért az összeg 3-mal osztva 1-et ad maradékul.

Ekkor tehát S_n nem osztható 9-cel.

Az S_n ezért pontosan akkor osztható 9-cel, ha n páros.

Kovács 494 Andrea (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.)

Megjegyzés. Medve Kinga (Eger, Dobó István Gimn.) megjegyezte, hogy számára a feladat szövegéből nem derült ki, hogy nyílt vagy zárt intervallumról van-e szó, ezért megoldotta a feladatot zárt intervallumra is.

Ekkor

$$S_n = \frac{2^n + 2^{n+1}}{2}(2^n + 1) = 3 \cdot 2^{n-1}(2^n + 1).$$

Ez pedig akkor osztható 9-cel, ha n páratlan, mert a 2 páratlan egész hatványai 3-mal osztva 2 maradékot adnak.

481 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Besenyei Ádám és Medve Kinga Sára. 5 pontos 57, 4 pontos 99, 3 pontos 110, 2 pontos 98, 1 pontos 30, 0 pontos 42 dolgozat. Nem versenyszerű 43.

C. 516. *Igazoljuk, hogy minden tetraédernek van olyan magassága, amely legalább akkora, mint a tetraéderbe írható gömb átmérőjének kétszerese.*

Megoldás. A tetraéder csúcsait jelölje A, B, C és D, a csúcsokkal szemközti lapok területét rendre T_A, T_B, T_C és T_D, a hozzájuk tartozó magasságokat pedig m_A, m_B, m_C és m_D.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

$$T_A \leqslant T_B \leqslant T_C \leqslant T_D. \tag{1}$$

A tetraéder térfogata: $V = \dfrac{\text{alapterület} \cdot \text{magasság}}{3}$.

Mivel bármelyik lapot tekinthetjük alapnak, azért

$$T_A \cdot m_A = T_B \cdot m_B = T_C \cdot m_C = T_D \cdot m_D;$$

ebből az (1) feltevés miatt következik, hogy

$$m_A \geqslant m_B \geqslant m_C \geqslant m_D.$$

Mivel a tetraéderbe írt gömb a négy lap mindegyikét érinti, középpontja minden laptól sugárnyi, azaz R távolságra van.

Írjuk most fel a tetraéder térfogatát azon gúlák térfogatának összegeként, amelyeknek alapja a tetraéder egy-egy lapja, magassága pedig R. Ekkor

$$V = \frac{T_A \cdot m_A}{3} = \frac{T_A \cdot R}{3} + \frac{T_B \cdot R}{3} + \frac{T_C \cdot R}{3} + \frac{T_D \cdot R}{3},$$

ahonnan

$$m_A = R\frac{T_A + T_B + T_C + T_D}{T_A} = R\left(1 + \frac{T_B}{T_A} + \frac{T_C}{T_A} + \frac{T_D}{T_A}\right). \tag{2}$$

Mivel az (1) feltevés szerint T_B, T_C és T_D egyike sem kisebb T_A-nál, $\dfrac{T_B}{T_A} \geqslant 1$, $\dfrac{T_C}{T_A} \geqslant 1$, $\dfrac{T_D}{T_A} \geqslant 1$, így (2) jobb oldalát tovább csökkentve azt kapjuk, hogy

$$m_A \geqslant 4R = 2d.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $T_A = T_B = T_C = T_D$, vagyis ha a tetraéder lapjainak területe egyenlő. Meglepő, de ebből még nem következik, hogy a tetraéder szabályos.

Birkner Tamás (Budapest, Deutsche Schule, 6. o.t.)

Megjegyzés. Sokan csak szabályos tetraéderre igazolták az állítást. (Ők 1 pontot kaptak.) A szabályos tatraéder minden magassága egyenlő: $m_i = 4r$. Érdekes azonban, hogy $\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{m_i} = \frac{1}{r}$ miatt $m_i = 4r$ minden i-re pontosan akkor áll fenn, ha $T_1 = T_2 = T_3 = T_4$ (T_i az i-edik lap területe). Szinte minden beküldő úgy gondolta, hogy ebből következik a tetraéder szabályos volta. Ez nem igaz, a feltétel az úgynevezett *egyenlő oldalú* tetraéderre is teljesül. *Birkner Tamás* ezért az észrevételéért kapott 6 pontot. (Az egyenlő oldalú tetraéderről bővebben olvashatunk *Reiman István:* A geometria és határterületei c. könyvének (Gondolat, 1986) 84. oldalán.)

208 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Birkner Tamás. 5 pontos 82, 4 pontos 39, 3 pontos 4, 2 pontos 6, 1 pontos 56, 0 pontos 16, nem versenyszerű 4 dolgozat.

C. 517. *Átlagosan hányszor kell egy szabályos dobókockával dobni ahhoz, hogy a kapott számok összege legalább* 3 *legyen?*

Megoldás. Legfeljebb 3 dobás után a számok összege legalább 3, ezért elegendő az első 2 dobás eredményét nézni. Az első dobás 6-féle lehet, a második ettől függetlenül ugyancsak 6-féle. Ez összesen $6 \cdot 6 = 36$ lehetőség.

Nézzük meg most, hogy hány olyan eset van, amikor ahhoz, hogy összesen legalább 3-at dobjunk, pontosan 2 dobás szükséges.

Ha az első kockán 1-es áll, akkor a második kockán legalább 2-nek kell állnia, azaz a jó dobások: $(1,2)$; $(1,3)$; $(1,4)$; $(1,5)$; $(1,6)$: ez összesen 5 lehetőség.

Ha az első kockán 2-es áll, akkor bármit dobunk a második kockán, az összeg legalább 3 lesz. Ez 6 lehetőség.

Egyetlen dobás akkor elegendő, ha a pontszám legalább 3, ez 4 esetben teljesül. A második dobás ekkor bármi lehet.

Ez összesen $4 \cdot 6 = 24$ lehetőség.

Végül 3 dobásra egyetlen esetben van szükség, amikor az első két dobás értéke 1-es.

A dobások összmennyisége tehát: $1 \cdot 3 + 11 \cdot 2 + 24 \cdot 1 = 49$. Ennek a 36 dobásra vett átlaga (vagyis az átlagos dobáshossz): $\frac{49}{36} \approx 1{,}36$.

316 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 125, 4 pontot 8, 3 pontot 25, 2 pontot 75, 1 pontot 25, 0 pontot 48 beküldő, nem versenyszű 10 dolgozat.

C. 518. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:*

(1) $$x^2 + yz = 0,$$

(2) $$v^2 + yz = 0,$$

(3) $$(x+v)y = 2,$$

(4) $$(x+v)z = -2.$$

Megoldás. Vonjuk ki a (2) egyenletet az (1)-ből; kapjuk, hogy

$$x^2 - v^2 = (x+v)(x-v) = 0.$$

Egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. Az $x+v=0$ feltevés ellentmondáshoz vezet, ekkor ugyanis pl. a (3) egyenletben $0=2$ állna. Marad, hogy $x-v=0$, azaz $x=v$. Így x, y és z egyike sem lehet nulla.

A (3) és (4) egyenletből $x=v$ helyettesítés és rendezés után kapjuk, hogy

$$xy = 1, \quad \text{azaz} \quad y = \frac{1}{x} \tag{5}$$

és

$$xz = -1, \quad \text{azaz} \quad z = -\frac{1}{x}. \tag{6}$$

Ezeket helyettesítve (1)-be

$$x^2 - \frac{1}{x^2} = 0, \qquad \text{ahonnan} \qquad x = \pm 1.$$

Ha $x=1$, akkor $y=1$, $z=-1$ és $v=1$; ha $x=-1$, akkor $y=-1$, $z=1$ és $v=-1$.

Helyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy a kapott értékek valóban kielégítik az egyenletrendszert.

Gueth Krisztián (Szombathely, Kanizsai D. Gimn., 12. o.t.)

529 dolgozat érkezett. 5 pontos 139, 4 pontos 211, 3 pontos 43, 2 pontos 60, 1 pontos 46, 0 pontos 10. Nem versenyszerű 20 dolgozat.

C. 520. *Térbeli derékszögű koordinátarendszerben egy origó középpontú gömb sugara* 3 *egység. Hány rácspont esik a gömb felületére?*

Megoldás. Vegyünk fel a gömb felszínén egy P pontot, koordinátái: x, y, z. Tudjuk, hogy a gömb sugara 3 egység, így a Pitagorasz-tétel felhasználásával felírhatjuk a következő egyenletet:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

Ennek keressük az egész megoldásait. Az egyenlőség teljesül, ha valamelyik koordináta +3 vagy -3 a másik kettő pedig 0, azaz

$$\begin{aligned} x &= \pm 3, \quad y = 0, \quad z = 0,\\ y &= \pm 3, \quad z = 0, \quad x = 0,\\ z &= \pm 3, \quad x = 0, \quad y = 0; \end{aligned}$$

ez összesen 6 lehetőség.

Ha a koordináták között nincsen 3, akkor kettő abszolút értéke 2 kell legyen, és ekkor a harmadik koordináta +1 vagy -1. A kettő darab 2-est 3-féleképpen választhatjuk meg. Ha pl. $x=y=\pm 2$ (ez 4 lehetőség) és $z=\pm 1$, akkor ez összesen 8 megoldást ad. Ugyanígy lehetséges $y=z=\pm 2$ és $x=\pm 1$ vagy $x=z=\pm 2$ és $y=\pm 1$, ami összesen 24 eset.

A gömb felületére így összesen 30 rácspont esik.

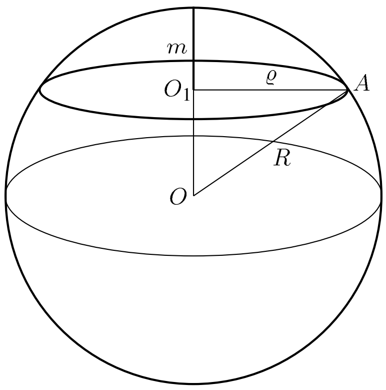
Mult Attila (Békéscsaba, Rózsa F. Gimn., 9. o.t.)

335 dolgozat érkezett. 5 pontos 251, 4 pontos 14, 3 pontos 9, 2 pontos 10, 1 pontos 8, 0 pontos 43 dolgozat.

C. 523. *Egy R sugarú gömbből levágott gömbszeletet határoló gömbsüveg felszíne a gömbszeletet határoló körlap területének c-szerese ($c>1$). Mekkora a gömbszelet magassága?*

Megoldás. Előrebocsátjuk, hogy a táblázatok, könyvek a gömbsüveg felszínét kétféleképpen határozzák meg. Egyesek a körlap területét is hozzászámítják a felszínhez, mások nem. Először nem tekintjük a felszín részének a körlap területét, és így számítjuk ki a magasságot.

Legyen a gömb sugara R, a gömbszelet sugara ϱ, a gömbsüveg magassága m. A gömbsüveg felszíne: $2\pi Rm$.



A feladat szövege szerint:

$$2\pi Rm = c\varrho^2\pi.$$

Innen

$$m = \frac{c\varrho^2}{2R}. \tag{1}$$

Az OO_1A derékszögű háromszögre felírhatjuk a Pitagorasz-tételt:

$$R^2 = \varrho^2 + (R-m)^2,$$

ahonnan $\varrho^2 = 2Rm - m^2$. Ezt helyettesítsük (1)-be, és végezzük el a kijelölt műveleteket; azt kapjuk, hogy

$$m = \frac{2R(c-1)}{c}.$$

A második esetben a gömbsüveg felszíne: $2\pi Rm + \varrho^2\pi$.

A feladat szövege szerint most

$$2\pi Rm + \varrho^2\pi = c\varrho^2\pi,$$

ahonnan $m = \dfrac{(c-1)\varrho^2}{2R}$.

Az előzőhöz hasonlóan ϱ^2 értékét helyettesítve kapjuk, hogy

$$m = \frac{2R(c-2)}{c-1}.$$

Horváth László (Csurgó, Nagyváthy Középiskola, 11. o.t.)

Megjegyzés. Mindkét értelmezést elfogadtuk a feladat teljes megoldásának, ha a számítás jó volt.

250 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Ábrány Miklós, Horváth 413 László, Nagy 206 István és Portschy Szabolcs. 5 pontos 200, 4 pontos 8, 3 pontos 14, 2 pontos 1, 1 pontos 21, 0 pontos 2.

Matematika gyakorlatok megoldásai

Gy. 3215. *Jelölje $\sigma(n)$ az n pozitív osztóinak összegét. (Például $\sigma(3)=1+3=4$, $\sigma(6)=1+2+3+6=12$.) Igaz-e, hogy ha $\sigma(n)>2n$, akkor n minden m többszörösére teljesül a $\sigma(m)>2m$ egyenlőtlenség?*

Megoldás. Legyenek az n pozitív osztói $d_1, d_2, \ldots, d_k$ ($k\geqslant 2$ egész). A feltétel szerint $\sigma(n)=d_1+d_2+\ldots+d_k>2n$.

Ha $m=r\cdot n$ ($r>1$ egész), akkor $r\cdot d_1+r\cdot d_2+\ldots+r\cdot d_k>2rn=2m$. Ha azonban d_i osztója n-nek, akkor $r\cdot d_i$ biztosan osztója m-nek ($i=1, \ldots, k$), tehát szerepel az m pozitív osztói között.

Így $\sigma(m)\geqslant rd_1+rd_2+\ldots+rd_k>2m$ mindig teljesül, a feladat kérdésére adott válasz igenlő.

Takáts Marcella (Székesfehérvár, József A. Gimn., 9. o.t.)

Megjegyzés. Sok hibás dolgozat érkezett a σ függvénynek tulajdonított, valójában hamis állítások felhasználásának következtében. Két jellemző példa: $\sigma(m)=\sigma(n)+\frac{m}{n}\sigma(n)$ (ez igaz, ha $\frac{m}{n}$ prím és nem osztója n-nek), ill. $\sigma(ab)=\sigma(a)\sigma(b)$ (ami csak akkor teljesül, ha a és b egymáshoz relatív prím).

241 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Ambrus Gergely, Harangi Viktor, Kunszenti-Kovács Dávid. 5 pontos 110, 4 pontos 19, 3 pontos 26, 2 pontos 7, 1 pontos 22, 0 pontos 45 dolgozat. Nem versenyszerű 1.

Gy. 3223. *Legyenek x, y, z pozitív valós számok. Igaz-e, hogy*

a) *ha $x+y+z\geqslant 3$, akkor $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqslant 3$?*

b) *ha $x+y+z\leqslant 3$, akkor $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant 3$?*

Angol versenyfeladat

Megoldás. A feladatot 3 pozitív valós szám helyett $n>2$ pozitív valós számra oldjuk meg.

a) Ha $x_1+x_2+\ldots+x_n\geqslant n$, akkor nem mindig igaz, hogy $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\leqslant n$, erre példa az $x_1=\frac{1}{n}$, $x_2=x_3=\ldots=x_n=2$ választás, amikor a számok és reciprokaik összege is nagyobb, mint n.

b) Belátjuk, hogy ha $x_1+x_2+\ldots+x_n \leqslant n$, akkor $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n} \geqslant n$.

Tegyük fel, hogy mégis vannak olyan $x_1, \ldots, x_n$ pozitív valós számok, amelyekre $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n} < n$. Ekkor

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right) < n^2$$

lenne. Az egyenlőtlenség bal oldalán az n^2 darab szorzást elvégezve:

$$\underbrace{\frac{x_1}{x_1}+\frac{x_2}{x_2}+\ldots+\frac{x_n}{x_n}}_{n \text{ darab}}+\underbrace{\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\right)+\left(\frac{x_1}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}\right)+\ldots+\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)}_{\frac{n^2-n}{2} \text{ darab}} \geqslant n+\frac{n^2-n}{2}\cdot 2 = n^2,$$

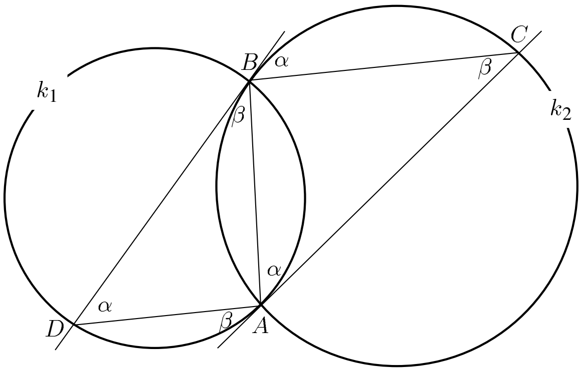
hiszen ismeretes, hogy ha a és b pozitív valós számok, akkor $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2$.

Ellentmondásra jutottunk, a *b)* rész állítása tehát igaz.

Harangi Viktor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.) és
Darabos József (Bonyhád, Petőfi S. Gimn., 10. o.t.) megoldásai alapján

336 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Bálint Gergely, Darabos József, Dörr Zsuzsanna, Fazekas 533 Éva, Fodor 133 Gyula, Harangi Viktor, Horváth Szilárd, Lovrics Anna, Molnár 947 Zoltán, Tokodi Tünde és Zséger Ádám. 5 pontos 185, 4 pontos 40, 3 pontos 6, 2 pontos 7, 1 pontos 52, 0 pontos 28 dolgozat. Nem versenyszerű 7.

Gy. 3226. *A k_1 és k_2 körök közös pontjai A és B. A k_1 kör A pontbeli érintője k_2-t a C pontban, a k_2 B pontbeli érintője a k_1 kört a D pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $BD^2 \cdot BC = AC^2 \cdot AD$.*



Megoldás. Legyen a k_1 kör A pontbeli érintője egyik félegyenesének az AB-vel bezárt szöge α (*ábra*). Itt most α-t úgy választjuk meg, hogy az AB egyenesnek a másik félsíkjában legyen, mint a D pont. Ekkor a kerületi szögek tétele szerint $ADB\sphericalangle = \alpha$, és a k_2 kör B pontbeli érintőjének B kezdőpontú, D-t nem tartalmazó félegyenese a BC-vel ugyancsak α szöget zár be. Hasonlóan kapjuk a β-val jelölt szögek egyenlőségét.

Az elmondottakból következik, hogy $ABC\triangle \sim DAB\triangle$.

A két háromszög hasonlóságából: $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{BC}{AC}$, amiből

(1) $$AB=\frac{BD\cdot BC}{AC}$$

Hasonlóan kapjuk, hogy $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AD}{BD}$, amiből

(2) $$AB=\frac{AC\cdot AD}{BD}.$$

Az (1) és (2) egyenletből:

$$\frac{BD\cdot BC}{AC}=\frac{AC\cdot AD}{BD}$$

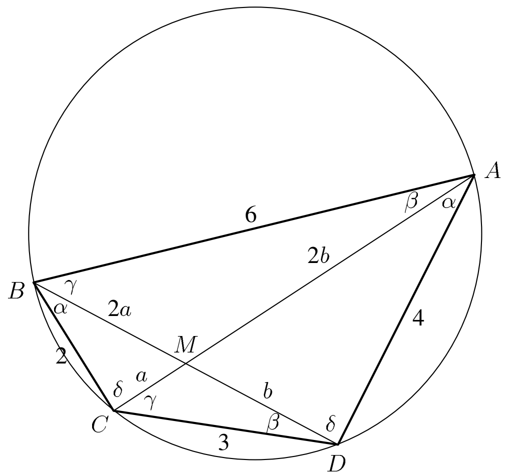
amiből $BD^2\cdot BC=AC^2\cdot AD$, valóban.

Szekeres Balázs (Szolnok, Kodály Z. Ált. Isk., 8. o.t.)

214 dolgozat érkezett. 5 pontos 117, 4 pontos 51, 3 pontos 24, 2 pontos 1, 1 pontos 4, 0 pontos 11, nem versenyszerű 6 dolgozat.

Gy. 3228. *Egy húrnégyszög oldalai rendre* 2, 3, 4, 6 *egységnyiek. Milyen arányban osztják egymást az átlók?*

Bodó Boglárka (Budapest) javaslata alapján



Megoldás. A négyszög csúcsai A, B, C, D, az átlók metszéspontja M. Az *ábrán* egyformán jelölt szögek egyenlők, mert ugyanazon az íven nyugvó kerületi szögek. Ezért fennáll a következő két hasonlóság:

(1) $DMC\triangle \sim AMB\triangle$ és

(2) $BMC\triangle \sim AMD\triangle$.

Az első esetben a hasonlóság aránya $\dfrac{6}{3}$, a másodikban $\dfrac{4}{2}$, mindkét esetben 2. Ezért (1) alapján, a $CM=a$ jelöléssel $BM=2a$, a $DM=b$ jelöléssel pedig $AM=2b$. (2) szerint $\dfrac{DM}{CM}=$ $=\dfrac{b}{a}=2$, ezért

(3) $$\frac{AM}{MC}=\frac{2b}{a}=2\cdot 2=4,$$

illetve

$$(4) \qquad \frac{DM}{MB} = \frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

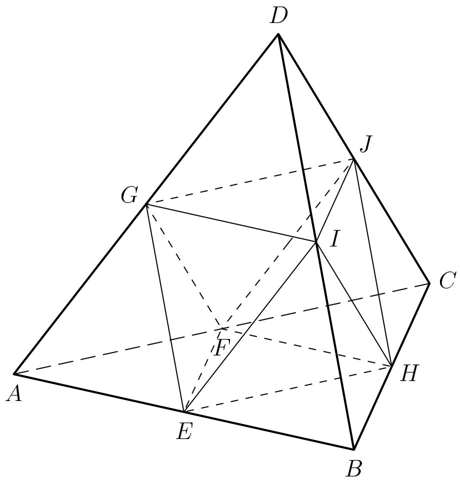
(3) azt jelenti, hogy a BD átló az AC-t $4:1$ arányban osztja, (4) pedig azt, hogy AC a BD-t $1:1$ arányban osztja, vagyis felezi.

Garai Zsolt (Dombóvár, Illyés Gy. Gimn., 10. o.t.)

275 dolgozat érkezett. 7 pontot kapott Garai Zsolt, 6 pontot Ambrus Gergely, Czímer Gergő és Nagy 139 Gergely. 5 pontos 221, 4 pontos 15, 3 pontos 11, 2 pontos 4, 1 pontos 5, 0 pontos 11 dolgozat. Nem versenyszerű 4.

Gy. 3229. *Bizonyítsuk be, hogy egybevágó szabályos tetraéderekkel, és velük egyező élű szabályos oktaéderekkel a tér hézag és átfedés nélkül kitölthető.* (**H**)

I. megoldás. Tekintsünk egy 2 egység élű $ABCD$ szabályos tetraédert. Legyen az élek felezőpontja E, F, G, H, I, J (*1. ábra*). Az $AEFG$ tetraéder például az $ABCD$-nek A pontból történő $1:2$ arányú kicsinyítése, ezért szabályos, és élei egységnyiek. Hasonlóan kaphatók a B, C és D csúcsú kicsinyített tetraéderek. Könnyen belátható, hogy $EFGHIJ$ egy egységnyi élű szabályos oktaéder. Élei ugyanis mind egységnyiek, mind a 8 lapja szabályos háromszög, tehát élszögei egyenlők és lapszögei is egyenlők, mert mindegyikük a szabályos tetraéder lapszögének kiegészítő szöge.



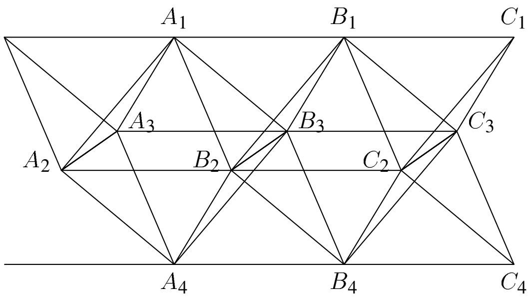
1. ábra

Így a 2 egység élű szabályos tetraédert 4 szabályos tetraéderre és egy szabályos oktaéderre daraboltuk fel. Megfordítva, az is igaz, hogy 4 egybevágó szabályos tetraéderből és egy velük egyező élű szabályos oktaéderből egy kétszer akkora élű szabályos tetraéder rakható össze.

A **Gy. 3221.** (KöMaL 1999/3. szám, 151. oldal) gyakorlatban bebizonyítottuk, hogy 6 egybevágó szabályos oktaéderből és 8 velük egyező élű szabályos tetraéderből össze lehet rakni egy kétszer akkora élű szabályos oktaédert.

Ezután a feladat állítását a következőképpen igazolhatjuk. Rakjunk össze szabályos tetraéderekből és oktaéderekből kétszer akkora élű tetraédereket és oktaédereket. Ezt folytatva négyszer, nyolcszor, ... akkora élű, tehát tetszőlegesen nagy élű szabályos oktaéder építhető.

Horváth László (Csurgó, Nagyváthy Középiskola, 11. o.t.) és
Varjú Péter Szeged, Radnóti M. Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján



2. ábra

II. megoldás. Illesszünk össze két szabályos oktaédert úgy, hogy egyik élük közös, és a *2. ábrán* A_1-gyel, illetve B_1-gyel jelölt csúcsok távolsága éppen az élhossz legyen. Az elhelyezés révén $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel C_1C_2$, ezért az $A_1A_2B_2$ háromszög és a $B_1B_2C_2$ háromszög egy síkban van. Ugyanebben a síkban van az $A_1B_1B_2$ háromszög is. Hasonló mondható az $A_1B_1B_3$ háromszögről, ez az $A_1A_3B_3$ és a $B_1B_3C_3$ háromszögekkel van egy síkban. Ebből következik, hogy az $A_1B_1B_2B_3$ tetraéder szabályos, és illeszkedik két szabályos oktaéderhez.

Hasonlóan helyezkedik el a két oktaéder között az $A_4B_2B_3B_4$ szabályos tetraéder. Így az oktaéderek közötti „résekbe" szabályos tetraédereket illeszthetünk, amit vég nélkül folytatva egy végtelen hasáb jön létre. A hasábot egy, az A_1B_1-re merőleges sík rombuszban metszi. Mivel a metsző sík hézag és átfedés nélkül lefedhető ilyen rombuszokkal, a tér is kitölthető hézag és átfedés nélkül a szóban forgó végtelen hasábokkal.

Ambrus Gergely (Szeged, Radnóti M. Gimn., 10. o.t.) és
Venter György (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

155 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Deli Lajos, 5 pontot Ambrus Gergely, Andrássy Zoltán, Baharev Ali, Bárány Zsófia Luca, Erdei Zsuzsa, Fazekas 533 Éva, Fekete Árpád, Gerencsér Balázs, Germán Tibor, Horváth Balázs, Horváth 413 László, Kiss 345 Gergely, Kunszenti-Kovács Dávid, Lábó Eszter, Leipold Diána, Pallos Péter, Pesti Gábor, Pogátsa Attila, Szalay Zsófia, Szebenyi Zoltán, Tóth 370 Ágnes, Varjú Péter, Venter György, Zábrádi Gergely és Zsidó Csilla Laura. 4 pontos 28, 3 pontos 62, 2 pontos 14, 1 pontos 14, 0 pontos 10 dolgozat. Nem versenyszerű 1.

Gy. 3231. *Vannak-e olyan a, b, c egész számok, amelyekre az*

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \text{és az} \qquad (a+1)x^2+(b+1)x+(c+1)=0$$

egyenletnek két-két egész gyöke van?

Orosz versenyfeladat

Megoldás. Megmutatjuk, hogy a feladat kérdésére a válasz tagadó. Tegyük fel, hogy vannak olyan egész a, b, c számok, hogy mindkét egyenletnek két-két egész gyöke van: az első egyenlet egész gyökei $x_1 \neq x_2$, a másodiké $y_1 \neq y_2$. A gyökök és együtthatók összefüggése szerint

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}; \qquad x_1x_2=\frac{c}{a} \quad \text{és} \quad y_1+y_2=-\frac{b+1}{a+1}; \qquad y_1y_2=\frac{c+1}{a+1}.$$

Mivel az összegek és szorzatok is egész számok, így, ha a páros, akkor b és c is páros kell legyen, ha viszont a páratlan, akkor $(a+1)$ páros, tehát $(b+1)$ és $(c+1)$ is páros, azaz b és c is páratlan. Így két eset lehetséges:

a) a, b, c mind párosak.

Ekkor a második egyenlet y_1 (egész) gyökére teljesül, hogy

$$(a+1)y_1^2+(b+1)y_1=-(c+1).$$

A jobb oldalon páratlan szám áll. A bal oldal viszont az y_1 paritásától függetlenül mindig páros, ez pedig ellentmondás.

b) a, b, c mind páratlanok.

Ekkor az első egyenlet x_1 (egész) gyökére

$$ax_1^2+bx_1=-c.$$

A jobb oldal most is páratlan, míg a bal mindig páros. Tehát a *b)* eset sem lehetséges.

Hablicsek Márton (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 7. o.t.)
Varjú Péter (Szeged, Radnóti M. Kísérl. Gimn., 10. o.t.)

105 dolgozat érkezett. 5 pontos Ambrus Gergely, Babos Attila, Farkas Ágnes, Fodor 133 Gyula, Gerencsér Balázs, Hablicsek Márton, Harangi Viktor, Horváth Illés, Kőrizs András, Kunszenti-Kovács Dávid, Laipold Diána, Nagy 725 János, Pogátsa Attila, Somogyi Dávid, Tokodi Tünde, Tran Thanh Long, Vajk Tamás, Varjú Péter és Vígh Viktor megoldása. 4 pontos 4, 3 pontos 5, 2 pontos 6, 1 pontos 20, 0 pontos 51 dolgozat.

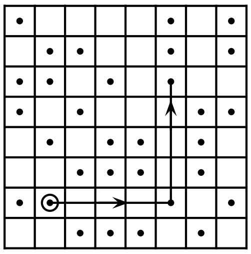
Matematika feladatok megoldásai

F. 3197. *Egy* 8×8*-as sakktábla mezőin bábukat helyeztünk el úgy, hogy minden egyes sorban és oszlopban pontosan* 4 *bábu van. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható* 8 *bábu úgy, hogy közülük semelyik kettő nincs egy oszlopban vagy egy sorban.*

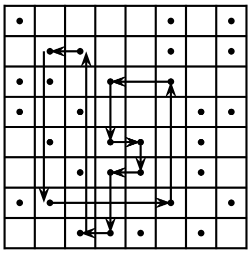
Megoldás. Induljunk el egy olyan mezőről, amelyiken áll bábu. Haladjunk vízszintesen az ugyanazon sorban lévő második bábuig, innen folytassuk utunkat függőleges irányban addig, amíg bábuhoz nem érünk.

Ezután forduljunk a most elért sorban lévő másik bábu felé, ha pedig ezt is elértük, az ezzel egy oszlopban álló bábu felé induljunk, és így tovább. Vándoroljunk addig, amíg el nem érkezünk a kiindulási mező oszlopához. Mivel minden sorban és oszlopban ugyanannyi bábu áll, erre előbb-utóbb sor kerül.

Ekkor térjünk vissza a kiindulási ponthoz.



⊙ kiindulási mező



Nevezzünk egy ilyen utat körútnak. Két körutat diszjunktnak mondunk, ha nincs olyan bábu, amely mindkét útban szerepel.

Vegyük most diszjunkt körutak egy maximális rendszerét. Ezek együttesen az összes bábut lefedik. Ellenkező esetben ugyanis a körutakból kimaradó bábuk száma minden oszlopban és sorban páros, mert mindegyik körút minden oszlopból és sorból csak páros számú bábut tartalmazhat. Ez viszont azt jelenti, hogy ha csak a körutakból kimaradó bábukat tekintjük, akkor még mindig találhatunk a sakktáblán körutat. Ez a körút pedig nyilván diszjunkt az eddigiektől, a kiválasztott körútrendszer tehát nem lehetett maximális.

Tekintsünk tehát egy maximális körútrendszert. Színezzünk mindegyik körútban minden második bábut kékre, a többit pedig pirosra. Mint már említettük, egy körút minden oszlopból és sorból csak páros számú bábut tartalmazhat, ezért minden oszlopban és sorban pontosan annyi piros bábu van, mint kék.

Hagyjuk el ezután a sakktábláról a piros bábukat. Ekkor minden sorban és oszlopban pontosan 2 bábu marad.

Ezeket a bábukat körutakra fűzve és közülük ismét minden másodikat elhagyva valóban elérhetjük, hogy minden sorban és oszlopban pontosan egy bábu álljon. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Taraza Busra (Budapest, Apáczai Cs. J. Gyak. Gimn., 10. o.t.)

76 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Taraza Busra. 5 pontos Bíró Zsuzsanna, Csikvári András, Dályai Virág, Gajári Dávid, Gyenes Zoltán, Győri Nikolett, Hangya Balázs, Hesz Gábor, Hesz Zoltán, Juhász András, Keszegh Balázs, Kunszenti-Kovács Dávid, Lippner Gábor, Páles Csaba, Pogány Ádám, Sarlós Ferenc, Terpai Tamás, Végh A. László és Zábrádi Gergely megoldása. 4 pontot kapott 5, 3 pontot 1, 1 pontot 2, 0 pontot 47 beküldő. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

F. 3233. *Jelölje $b(n)$ a $k+\frac{n}{k}$ kifejezés minimumát, ahol k a pozitív egészeken fut végig. Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor $[b(n)]=\left[\sqrt{4n+1}\right]$.*

Megoldás. Az $f(x)=x+\frac{n}{x}$ függvényt vizsgáljuk a pozitív egész számok halmazán.

$$f(x)<f(x+1) \iff x+\frac{n}{x}<x+1+\frac{n}{x+1} \iff n\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)<1 \iff n<x(x+1).$$

Nyilvánvalóan mindig pontosan egy olyan p pozitív egész szám van, amelyre

$$p^2 \leqslant n < p^2+p \quad \text{vagy} \quad p^2+p \leqslant n < (p+1)^2.$$

Ekkor

$$p+\frac{n}{p} < p+1+\frac{n}{p+1}, \qquad \text{ha} \quad n < p^2+p$$

és

$$p+\frac{n}{p} \geqslant p+1+\frac{n}{p+1}, \qquad \text{ha} \quad n \geqslant p^2+p.$$

Azaz, ha $p^2 \leqslant n < p^2+p$, akkor

$$[b(n)] = \left[p+\frac{n}{p}\right] = p+\left[\frac{n}{p}\right].$$

Mivel $p \leqslant \frac{n}{p} < p+1$, azért ebben az esetben $\left[\frac{n}{p}\right] = p$, és így $[b(n)] = 2p$. Továbbá

$$2p < \sqrt{4p^2+1} \leqslant \sqrt{4n+1} < \sqrt{4p(p+1)+1} = 2p+1,$$

mint az feltevésünkből adódik, s innen $\left[\sqrt{4n+1}\right] = 2p = [b(n)]$ következik.

Ha pedig $p^2+p \leqslant n < (p+1)^2 < (p+1)(p+2)$, akkor

$$[b(n)] = \left[p+1+\frac{n}{p+1}\right] = p+1+\left[\frac{n}{p+1}\right],$$

s mivel $p \leqslant \frac{n}{p+1} < p+1$, azért $\left[\frac{n}{p+1}\right] = p$, és így $[b(n)] = 2p+1$. Továbbá

$$2p+1 \leqslant \sqrt{4n+1} \leqslant \sqrt{\left((p+1)^2-1\right)+1} < 2p+2,$$

ahonnan $\left[\sqrt{4n+1}\right] = 2p+1$ adódik.

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Baharev Ali (Budapest, Apáczai Cs. J. Gyak. Gimn., 10. o.t.)

42 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Baharev Ali, Harangi Viktor, Horváth 202 Gábor, Horváth 472 András, Juhász András, Kunszenti-Kovács Dávid, Léka Zoltán, Lippner Gábor, Páles Csaba, Pogány Ádám, Poronyi Gábor, Szabadka Zoltán, Szabó 997 Péter, Székelyhidi Gábor, Terpai Tamás, Végh A. László és Zombori Tamás. 4 pontos 7, 3 pontos 10, 2 pontos 2, 1 pontos 5, 0 pontos 1 dolgozat.

F. 3234. *Egy körmérkőzéses bajnokságon* 23 *csapat vett részt. Minden csapat az összes többivel pontosan egyszer játszott. Azt mondjuk, hogy* 3 *csapat körbeverte egymást, ha csak az egymás közötti játékot nézve, mindegyikük pontosan egyszer nyert. Legfeljebb hány körbeverés történhetett a bajnokság alatt?*

Amerikai vizsgafeladat

Megoldás. Oldjuk meg általánosabban a feladatot, 23 helyett n csapatra, ahol n páratlan szám. Jelöljünk minden csapatot egy-egy ponttal. Két csapat mérkőzése után mutasson nyíl a vesztes csapattól a győztesig. (Ekkor egy n szögpontú irányított teljes gráfot kapunk, mivel a feladat szempontjából feltehető, hogy sohasem született döntetlen eredmény.)

Ha az A, B és C csapatok körbeverték egymást, – ez kétféleképpen lehetséges –, akkor az ABC háromszöget irányítottnak nevezzük. Egyébként a háromszög nem irányított.

Adjunk becslést a nem irányított háromszögek számára.

Minden nem irányított háromszögben van pontosan egy csúcs úgy, hogy az ezzel ábrázolt csapat a másik kettőt megverte. A nem irányított háromszögeket eszerint a „győztes" csúcs szerint számoljuk össze.

Jelöljük a csapatokat az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontokkal, és jelölje az A_i győzelmeinek számát d_i. Mivel a körmérkőzés során összesen $\binom{n}{2}$ találkozó volt, $\sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{n(n-1)}{2}$.

Ekkor az A_i csúcshoz $\binom{d_i}{2}$ nem irányított háromszög tartozik, hiszen az általa legyőzött csapatokból kell kiválasztani kettőt.

Így az összes nem irányított háromszögek száma: $\sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2}$.

A számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenség szerint:

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{1}{2}n\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i \geqslant \frac{1}{2}n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i =$$

$$= \frac{1}{2}n\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^3-4n^2+3n}{8}.$$

Állhat-e itt egyenlőség? Igen, ha meg tudunk adni olyan irányított teljes gráfot, amelyre

$$d_1 = d_2 = \ldots = d_n = \frac{n-1}{2}.$$

Legyen $n = 2k+1$. Ekkor egy lehetséges konstrukció a következő:

ha $1 \leqslant i < j \leqslant 2k+1$ és $j-i$ nagyobb, mint k, akkor A_j győzte le A_i-t, különben pedig A_i győzte le A_j-t. Könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor valóban

$$d_1 = d_2 = \ldots = d_n = \frac{n-1}{2}.$$

Mivel összesen $\binom{n}{3}$ háromszög van, azért az irányított háromszögek száma esetünkben

$$\binom{n}{3} - \frac{n^3 - 4n^2 + 3n}{8} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{n^3 - 4n^2 + 3n}{8} = \frac{n^3 - n}{24}.$$

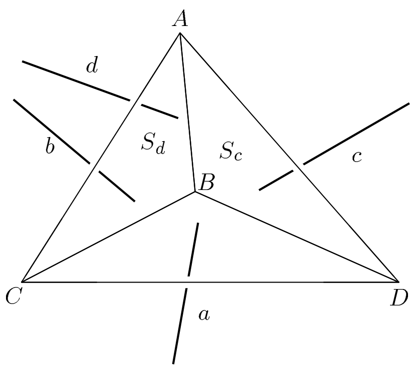
Az $n = 23$ esetén ez 506, tehát legfeljebb 506 körbeverés történhetett a bajnokság során.

Juhász András (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján

23 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Harangi Viktor, Juhász András, Poronyi Gábor, Székelyhidi Gábor és Végh A. László, 5 pontot kapott Horváth 202 Gábor, Lippner Gábor, Pogány Ádám, Terpai Tamás és Zombori Tamás. 4 pontos 3, 2 pontos 3, 1 pontos 2, 0 pontos 5 dolgozat.

F. 3243. *Mutassuk meg, hogy ha a tér a, b, c, d páronként kitérő egyeneseire igaz, hogy a és b, valamint c és d normáltranszverzálisai is, és a és c, valamint b és d normáltranszverzálisai is merőlegesek egymásra, akkor a és d, valamint b és c normáltranszverzálisai is merőlegesek egymásra.*

Megoldás. Állítsunk az a, b, c, d egyenesek mindegyikére egy-egy merőleges síkot; ekkor a négy sík, S_a, S_b, S_c és S_d egy T tetraédert határol. Legyen T-nek az S_a-val szemközti csúcsa A, az S_b-vel szemközti csúcsa B, az S_c-vel szemközti csúcsa C, az S_d-vel szemközti csúcsa pedig D.



Ekkor T élei párhuzamosak az eredeti négy egyenes páronkénti normáltranszverzálisaival, mert pl. AB benne van az S_c és az S_d síkokban is, ezért c-re is és d-re is merőleges. Feltételeink szerint ekkor T szemközti élpárjai közül CD merőleges AB-re és BD merőleges AC-re. Azt kell megmutatnunk, hogy ekkor BC is merőleges AD-re.

Legyen $\overrightarrow{DA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{DB} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{DC} = \mathbf{c}$. Tudjuk, hogy két vektor pontosan akkor merőleges, ha skaláris szorzatuk 0. Tehát $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ és $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, vagyis

$$\mathbf{c}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0 \qquad \text{és} \qquad \mathbf{b}(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0.$$

A két egyenletet egymásból kivonva kapjuk, hogy

$$\mathbf{ab} - \mathbf{ac} = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \mathbf{a}(\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0.$$

A BC és a DA élek tehát valóban merőlegesek.

Gueth Krisztián (Szombathely, Kanizsai D. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

37 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Gueth Krisztián és Terpai Tamás, 5 pontot kapott Dancsó Zsuzsa, Gáspár Merse Előd, Györey Bernadett, Harangi Viktor, Keszegh Balázs, Mecz Balázs, Naszódi Gergely, Szabadka Zoltán és Szilasi Zoltán. 4 pontos 16, 3 pontos 2, 2 pontos 2, 0 pontos 6 dolgozat.

Nehezebb matematika feladatok megoldása

N. 189. *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges* $a_1, \ldots, a_n$ *pozitív egészekre*

$$a_1+\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}+\frac{3}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}}+\ldots+\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}<2(a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

Megoldás. Először is megjegyezzük, hogy a jobb oldalon a 2 helyett nem írható kisebb szám. Ha ugyanis $a_m=\frac{1}{m}$ tetszőleges m indexre, akkor

$$a_1=\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}+\ldots+\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{1+2+\ldots+k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k+1},$$

ezért

$$2\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_k}}=2\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k+1}=2-\frac{2}{n+1}<2.$$

Ugyanakkor, mint ismeretes, n növelésével a $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ összeg bármilyen nagy lehet.

Írjuk fel ezután a súlyozott harmonikus és számtani közepek közötti egyenlőséget az a_1, $2a_2$, $3a_3$, $\ldots$, ka_k számokra az 1, 2, $\ldots$, k súlyokkal:

$$\frac{1+2+\ldots+k}{1\cdot\frac{1}{a_1}+2\cdot\frac{1}{2a_2}+\ldots+k\cdot\frac{1}{ka_k}}=\frac{\frac{k(k+1)}{2}}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_k}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{a_1+2\cdot 2a_2+\ldots+k\cdot ka_k}{1+2+\ldots+k}=\frac{1^2\cdot a_1+2^2\cdot a_2+\ldots+k^2a_k}{\frac{k(k+1)}{2}},$$

vagyis

$$\frac{k}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}}\leqslant\frac{4}{k(k+1)^2}(1^2\cdot a_1+2^2\cdot a_2+\ldots+k^2\cdot a_k). \tag{1}$$

Ennek az egyenlőtlenségnek az a nagy előnye, hogy az $a_m=\frac{1}{m}$ választás esetén egyenlőség áll.

Összeadva (1)-et a $k=1, 2, \ldots, n$ értékekre, valamint felhasználva a beszorzással könnyen ellenőrizhető $\frac{4}{k(k+1)^2}<\frac{2}{k^2}-\frac{2}{(k+1)^2}$ egyenlőtlenséget,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k(k+1)^2}\sum_{m=1}^{k}m^2a_m=$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=m}^{n}\frac{4}{k(k+1)^2}\right)\cdot m^2a_m<\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=m}^{\infty}\left(\frac{2}{k^2}-\frac{2}{(k+1)^2}\right)\right)\cdot m^2a_m=$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\frac{2}{m^2}\cdot m^2a_m=2(a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

5 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Ta Vinh Thong. 1 pontos 1, 0 pontos 3 dolgozat.

N. 192. *A H halmaz elemei a pozitív egész számok halmazának bizonyos részhalmazai, közülük bármely két különbözőnek a metszete véges halmaz. Következik-e ebből, hogy H megszámlálható?*

Javasolta: *Szabó Jácint,* Győr

Megoldás. A válasz nemleges. Konstruálunk egy olyan halmazt, amely eleget tesz a feladat feltételeinek, ugyanakkor nem megszámlálható.

Tetszőleges $\overline{0{,}a_1a_2a_3\ldots}$ tizedestörthöz rendeljük hozzá a következő halmazt:

$$f(\overline{0{,}a_1a_2a_3\ldots})=\left\{\overline{1a_1},\ \overline{1a_1a_2},\ \overline{1a_1a_2a_3},\ \overline{1a_1a_2a_3a_4},\ \ldots\right\}.$$

Ezzel minden 0 és 1 közötti valós számhoz hozzárendeltünk egy pozitív egész számokból álló halmazt. A halmaz elemei egyértelműen meghatározzák a tizedestörtet, ezért különböző számokhoz különböző halmazt rendeltünk.

Ha $a=\overline{0{,}a_1a_2a_3\ldots}$ és $b=\overline{0{,}b_1b_2b_3\ldots}$ két különböző szám, amelyek tizedestört alakja először az n-edik tizedesjegyben különbözik, akkor az $f(a)$ és az $f(b)$ halmazoknak az $1a_1$, $1a_1a_2$, $1a_1a_2\ldots{,}a_{n-1}$ számok közös elemeik, a további elemek viszont különböznek az $(n+1)$-edik jegyükben. Ezért az $f(a)$ és $f(b)$ halmazoknak csak véges sok, egészen pontosan $n-1$ közös eleme van.

Álljon most H az összes olyan halmazból, amely előáll $f(x)$ alakban valamely $[0,1)$ intervallumbeli x valós számra. A fentiek szerint H bármely két elemének a metszete véges. Ugyanakkor az f függvény kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a nem megszámlálható $[0,1)$ intervallum és H között, ezért a H maga sem megszámlálható.

17 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Juhász András. 5 pontos Gyenes Zoltán, Lukács László, Pálvölgyi Dömötör, Pozsár Balázs, Szabó Péter, Terpai Tamás és Zábrádi Gergely. 4 pontot kapott Végh A. László. 0 pontos 8 dolgozat.

A pontversenyben kitűzött C gyakorlatok (537–540.)

C. 537. Dolgozatírás közben Sanyi az órájára pillantva megállapította, hogy a dolgozatírás idejéből ötször annyi telt el, mint amennyi még hátra van. M perc múlva ez az arány már 8. Mennyi az arány újabb M perc elteltével?

C. 538. Milyen p (nem feltétlenül pozitív) prímek esetén lesz a $2p+1$, $4p+1$, $6p+1$ kifejezések értéke is prím?

Javasolta: *Kovács Ádám,* Budapest

C. 539. Igazoljuk, hogy bármely hegyesszögű, egyenlő szárú háromszögben

$$AM = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha},$$

ahol szokásos módon a az alapot, A és α az alappal szemközti csúcsot, illetve szöget, M pedig a magasságpontot jelöli.

C. 540. Vízszintes síkból kiemelkedik (az autósok bosszantására) egy 10 cm sugarú félgömb. A síkon gurul egy henger, amely palástjával a félgömbnek ütközik. Jelölje α a két test érintési pontjára illeszkedő közös érintősíknak a vízszintessel bezárt szögét. Legalább mekkora a henger sugara, ha $\alpha \leqslant 30^\circ$?

❄

Beküldési határidő: 1999. május 15.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest, Pf. 47. 1255

❄

A pontversenyben kitűzött gyakorlatok (3270–3277.) és feladatok (3280–3285.)

Gy. 3270. Legyen $n>2$ páros szám. Igazoljuk, hogy $\underbrace{11\ldots1}_{n}$ semmilyen számrendszerben sem lehet prím.

Javasolta: *Kovács Ádám,* Budapest

Általános iskolásoknak javasolt feladatok: **C.537, C.538, Gy. 3271, Gy. 3275, Gy. 3276.**

Gy. 3271. Melyik tört a nagyobb,

$$\frac{1998^{2000}}{2000^{1998}} \quad \text{vagy} \quad \frac{1997^{1999}}{1999^{1997}}?$$

Javasolta: *Bíró József,* Budapest

Gy. 3272. Egy téglatest a, b, c élei egész számok, felszínének és térfogatának mérőszáma megegyezik. Mekkorák az élei, ha tudjuk, hogy $c=\frac{a\cdot b}{2}$?

Javasolta: *Kovács Ádám,* Budapest

Gy. 3273. Mutassuk meg, hogy $5^{12}+2^{10}$ összetett szám. (**H**)

Szentpétervári Matematikai Olimpia

Gy. 3274. Van három egybevágó, derékszögű háromszög alakú papírdarabunk. Ezek bármelyikét a magassága mentén kettévághatjuk. A kapott háromszögek közül valamelyiket ismét kettévághatjuk a magassága mentén, és így tovább. Mekkora lehet a befogók aránya, ha tudjuk, hogy az eljárás során mindig található két egybevágó háromszög?

Gy. 3275. Egy négyszög területét felezik az átlói. Igazoljuk, hogy együtt négy egyenlő területű részre bontják a négyszöget.

Gy. 3276. Az r sugarú k_1 kör kerületének egy O pontja a k_2 kör középpontja. A két kör metszéspontjai A és B, S pedig a k_1 belső pontja. A BS egyenes másik metszéspontja k_1-gyel T. Bizonyítsuk be, hogy ha az AOS háromszög szabályos, akkor $TS=r$. (**H**)

Gy. 3277. Adottak az a és b pozitív egész számok. Adjunk eljárást $\sqrt{b}$ megszerkesztésére, ha adott a $\sqrt{a}$ hosszúságú szakasz.

Javasolta: *Kovács Ádám,* Budapest

❄

Beküldési határidő: 1999. május 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

❄

F. 3280. Bizonyítsuk be, hogy ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitív számok, akkor

$$\frac{x_1}{x_2+x_3+\ldots+x_n}+\frac{x_2}{x_1+x_3+\ldots+x_n}+\ldots+\frac{x_n}{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}} \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

F. 3281. Egy szelet csokoládét több lépésben osztunk részekre. Minden lépésben a már meglevő részek közül a legnagyobb tömegűt (ha több ilyen van, azok egyikét) osztjuk tovább úgy, hogy a kapott új darabok egyike se legyen nagyobb tömegű, mint a most tovább osztott rész fele. Igazoljuk, hogy a k-adik lépés után kapott részek mindegyike kisebb, mint az eredeti csokoládé tömegének a $2/(k+1)$-edrésze.

Lovász László, Budapest

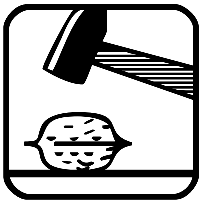
F. 3282. Milyen határok között változik x^2+2xy, ha $x^2+y^2=1$?

F. 3283. Adott 2000 darab szakasz, mindegyik hossza legalább 1 egység. Akárhogyan választunk ki közülük néhányat, azokból nem szerkeszthető sokszög. Mutassuk meg, hogy a szakaszok összhossza legalább 2^{1999}.

F. 3284. Az ABC háromszög belsejében levő P pontra $PAB\sphericalangle = PBC\sphericalangle = PCA\sphericalangle = \varphi$. Mutassuk meg, hogy ha a háromszög szögei α, β és γ, akkor

$$\frac{1}{\sin^2\varphi}=\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}.$$

F. 3285. Adott a síkon egy k körvonal és rajta kívül egy P pont. Hol helyezkednek el azon körök középpontjai, amelyek egy k-t tartalmazó gömb és egy P csúcsú egyenes körkúp érintési pontjaiként állnak elő?



A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (207–210.)

N. 207. Az $f:[0,1]\mapsto[0,1]$ folytonos függvényről tudjuk, hogy tetszőleges $x\in[0,1]$ valós számra az $f(x)$, $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$, $\dots$ sorozat tartalmazza a 0-t. Következik-e ebből, hogy elég nagy n esetén $\underbrace{f(f(\dots f_n(x)\dots))}$ azonosan 0?

N. 208. Bizonyítsuk be, hogy ha p 2-nél nagyobb prímszám, akkor létezik p-nél kisebb q prím, amelyre $q^{p-1}-1$ nem osztható p^2-tel.

N. 209. Adjunk meg a síkon 6 olyan pontot, amelyek közül bármelyik kettő távolsága egész, semelyik három nincs egy egyenesen, és semelyik négy nincs egy körön.

N. 210. Mutassuk meg, hogy bármely zárt térgörbének van négy olyan pontja, amelyek egy síkban vannak. Igaz-e ez az állítás öt pontra is?

Javasolta: *Róka Sándor,* Nyíregyháza

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS (Volume 49. No. 4. April 1999)

New exercises for practice (see page 232): **C. 537.** Working on his essay during class, Sam glanced at his watch and noticed that the time that had already passed was five times more than that still was left. After M minutes had passed the ratio was already 8. Find out what the ratio was after another M minutes had passed. **C. 538.** Find those (not necessarily positive) prime numbers p for which each of the following expressions is a prime: $2p+1$, $4p+1$ and $6p+1$. (Proposer: *Á. Kovács,* Budapest) **C. 539.** Prove that in any acute isosceles triangle $AM = a/\tan\alpha$ holds, where, conventionally, a denotes the base of the triangle, A and α, respectively, denote the vertex and the angle opposite to it, and M is the orthocentre. **C. 540.** A half ball of radius 10 cm emerges from level plane (for the great annoyance of the motorists). A cylinder rolls on the plane until its lateral surface hits the half ball. Let α denote the angle the common tangent plane of the two objects forms with the horizontal plane. Given that $\alpha \leqslant 30^\circ$, find the minimum possible radius of the cylinder.

New exercises: Gy. 3270. Let $n>2$ be an even number. Prove that $\underbrace{11\ldots1}_{n}$ is not a prime in any number system. (Proposer: *Á. Kovács,* Budapest) **Gy. 3271.** Which fraction is the larger: $\dfrac{1998^{2000}}{2000^{1998}}$ or $\dfrac{1997^{1999}}{1999^{1997}}$? (Proposer: *J. Bíró,* Budapest) **Gy. 3272.** The edges a, b, c of a certain cuboid are integers, moreover, its surface area and its volume measure the same. Given that $c = ab/2$, determine the edges of the cuboid. (Proposer: *Á. Kovács,* Budapest) **Gy. 3273.** Prove that $5^{12}+2^{10}$ is a composite number. (St. Petersburg, Mathematical Olimpiad) **Gy. 3274.** We have three congruent right-angled triangle shaped pieces of paper. We may cut any of these into two parts along its altitude. We may repeat this procedure for the new set of pieces, and so on. Provided that no matter how we choose the procedure there always will be two congruent triangles, determine the ratio between the legs of the triangles. **Gy. 3275.** In a certain quadrilateral, each diagonal halves the area of the quadrilateral. Prove that they together partition the quadrilateral into four parts of equal area. **Gy. 3276.** Centre O of a circle k_2 lies on the circumference of circle k_1, of radius r. The circles intersect at points A and B, moreover, a point S lies inside k_1. Line BS intersects k_1 at point T, different from B. Given that the triangle AOS is equilateral, prove that $TS = r$. **Gy. 3277.** Let a and b denote positive integers. Given a segment of length $\sqrt{a}$, describe how to construct an other segment of length $\sqrt{b}$. (Proposer: *Á Kovács,* Budapest)

New problems: F. 3280. Prove that, if $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are arbitrary positive numbers, then

$$\frac{x_1}{x_2+x_3+\ldots+x_n}+\frac{x_2}{x_1+x_3+\ldots+x_n}+\ldots+\frac{x_n}{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}} \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

F. 3281. A piece of chocolate is divided into smaller pieces. In each step the largest piece – or one of them if this piece is not unique – is broken into smaller parts in such a way that none of the new parts exceed the half of the piece just broken. Prove that after the kth step each piece is smaller than the $2/(k+1)$th part of the whole chocolate. (*Lovász László,* Budapest) **F. 3282.** Find the range of the expression x^2+2xy, provided that $x^2+y^2=1$. **F. 3283.** In a set of 2000 segments, each segment is at least 1 unit long. It is not possible, moreover, to construct a closed polygon from any subset of this set of segments. Prove that the total length of the segments is at least 2^{1999}. **F. 3284.** In a triangle ABC, a point P satisfies $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \varphi$. If the angles of the triangle are denoted by α, β and γ, prove that $\dfrac{1}{\sin^2\varphi} = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\beta}+\dfrac{1}{\sin^2\gamma}$. **F. 3285.** A circle k and a point P outside the circle are given in the plane. Determine the locus of the centre of a circle which is obtained as the intersection of a sphere that contains k and a right circular cone with apex P.

New advanced problems: N. 207. A continuous function $f:[0,1]\mapsto[0,1]$ has the following property: for any real number $x\in[0,1]$, the sequence $f(x)$, $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$, $\ldots$ contains 0. Does it follow that, for n large enough, $\underbrace{f(f(\ldots f_n(x)\ldots))}_{n}$ is identically 0? **N. 208.** Assume that p is a prime number greater than 2. Prove that there exists a prime $q<p$ such that $q^{p-1}-1$ is divisible by p^2. **N. 209.** Find 6 points in the plane such that any two of them are at an integer distance apart, no three of them are collinear, and no four lie on the same circle. **N. 210.** Prove that any closed space curve contains four coplanar points. Is it always true that it contains five coplanar points, too? (Proposer: *S. Róka,* Nyíregyháza)