Az 1998–99-es tanévi matematika pontverseny állása a szeptember–októberi feladatok feldolgozása után

Gyakorlatok

Az eddig feldolgozott feladatok: a szeptemberi és az októberi szám feladatai, valamint Gy. 3230., Gy. 3231., Gy. 3233.

Feladatonként egy helyes megoldással elérhető: 95 pont.

Legfeljebb 8. osztályosok

1. *Kunszenti-Kovács Dávid* 8. o.t. 85 pont; **2.** *Birkner Tamás* 6. o.t. 59 pont; **3.** *Nagy 444 Zoltán* 8. o.t. 49 pont; **4.** *Csóka Endre* 8. o.t. 46 pont; **5.** *Rácz Judit* 8. o.t. 41 pont; **6.** *Hablicsek Márton* 7. o.t. 34 pont; **7.** *Rácz Éva* 8. o.t. 31 pont; **8–10.** *Jelitai Kálmán* 8. o.t., *Szekeres Balázs* 8. o.t., *Tábor Áron* 8. o.t. 30 pont; **11.** *Backhausz Ágnes* 8. o.t. 29 pont; **12.** *Pach Péter Pál* 7. o.t. 25 pont; **13.** *Buti Tamás* 8. o.t. 22 pont; **14.** *Lang Péter* 8. o.t. 21 pont; **15.** *Tamás Krisztina* 8. o.t. 20 pont; **16.** *Kiss Zsuzsanna* 8. o.t. 18 pont; **17.** *Lakatos Szilvia* 8. o.t. 15 pont; **18–22.** *Antal 627 Áron* 8. o.t., *Bartha Ferenc Ágoston* 8. o.t., *Juhász Máté L.* 7. o.t., *Lakatos Kristóf* 8. o.t., *Sparing Dániel* 8. o.t. 14 pont; **23–24.** *Molnár Kolos* 8. o.t., *Nagy 625 Tibor* 8. o.t. 12 pont; **25.** *Pótsa Mátyás* 8. o.t. 11 pont. Kevesebb pontja van 32 versenyzőnek.

9. osztályosok

1. *Harangi Viktor* 100 pont; **2.** *Tran Thanh Long* 84 pont; **3.** *Somogyi Dávid* 83 pont; **4–5.** *Gerencsér Balázs*, *Tóth 370 Ágnes* 78 pont; **6.** *Erdei Zsuzsa* 77 pont; **7.** *Vajk Tamás* 74 pont; **8.** *Csikvári Péter* 70 pont; **9.** *Siska Ádám* 69 pont; **10.** *Kovács Erika Renáta* 68 pont; **11.** *Hamar Gergő* 67 pont; **12–14.** *Farkas Ágnes*, *Ta Vinh Thong*, *Zséger Ádám* 66 pont; **15.** *Csordás Hunor* 62 pont; **16–18.** *Béky Bence*, *Kőrösi Attila*, *Szalay Zsófia* 60 pont; **19.** *Szirtes Péter* 57 pont; **20–21.** *Nagy 725 János*, *Tankovics Gábor* 56 pont; **22–23.** *Csernenszky András*, *Számadó István* 55 pont; **24.** *Tóth Rudolf* 53 pont; **25.** *Pallos Péter* 52 pont; **26–27.** *Horváth Illés*, *Szente Dávid* 51 pont; **28–29.** *Devecsery Ágnes*, *Gábris Gergely* 50 pont; **30–31.** *Bertus-Barcza Tímea*, *Gyulasi Tamás* 49 pont; **32–33.** *Boros Vazul*, *Kerékfy Péter* 48 pont; **34.** *Szabó 406 Tamás* 46 pont; **35–36.** *Balog Gergely*, *Walfisch Dávid* 44 pont; **37.** *Keszthelyi Vilmos* 42 pont; **38–39.** *Kucsera Dénes*, *Pongrácz Júlia* 40 pont; **40.** *Farkas 327 Dóra* 39 pont; **41–42.** *Potzauf Krisztina*, *Szebenyi Zoltán* 38 pont; **43.** *Hauser Edit* 37 pont; **44–46.** *Asztalos Gyula*, *Komlós Gábor*, *Porcs-Makkay Ákos* 35 pont; **47.** *Szilágyi Örs* 34 pont; **48.** *Nagy 039 Péter* 33 pont; **49–50.** *Kozma Tamás*, *Kőrizs András* 32 pont; **51–52.** *Morvai Krisztina*, *Váradi Vajk* 30 pont; **53–55.** *Fehérvári Bence*, *Máté Gergő*, *Zavarkó Gábor* 29 pont; **56–58.** *Kurtz Orsolya*, *Pogány Ádám*, *Török Andrea* 28 pont; **59–61.** *Bán Zoltán*, *Izsák Andrea*, *Marjai Gábor* 27 pont; **62–64.** *Kádas Attila*, *Tolvaj Nóra*, *Turchányi Márton* 26 pont; **65–69.** *Bíró Ádám*, *Flaskár Anett*, *Galambos Anikó*, *Jankovics András*, *Jesch*

Dávid 25 pont; **70–73.** *Majtényi Gergő*, *Molnár 475 Viktor*, *Tiszai Attila*, *Zsbán Ambrus* 24 pont; **74–77.** *Bedekovich Dániel*, *Kiss Gergely Péter*, *Sára Péter*, *Víg Róbert* 23 pont; **78–86.** *Baur Eszter*, *Béres Mária*, *Domonkos Lívia*, *Iván Szilárd*, *Major Gergely*, *Nagy 701 Mária*, *Szebelédi Csaba*, *Varga Gábor*, *Várnai Csilla* 22 pont; **87–89.** *Gémes Norbert*, *Lestyán Gyula*, *Papp 249 Diána* 21 pont; **90–92.** *Dumitrasc Alina Lavinia*, *Németh 999 Antal*, *Spanczér Ilona* 20 pont; **93–94.** *Bartha 321 Ágnes*, *Dömötör Csilla* 19 pont; **95–97.** *Holicska Ádám*, *Rischák Rózsa*, *Virág Vera* 18 pont; **98–102.** *Kéri Sophia*, *Kovács 625 Erika*, *Nagy 666 Beáta*, *Orosz Anna*, *Takács Gábor* 17 pont; **103–105.** *Sikló Bernadett*, *Tordai Zsolt*, *Vámi Petra* 16 pont; **106–109.** *Molnár 354 Tamás*, *Takáts Marcella*, *Tisch Dániel*, *Tombor Júlia* 15 pont; **110–114.** *Bús Katalin*, *Rehák Győző*, *Sebők Judit*, *Springer Éva*, *Sztrinyi Eszter* 14 pont; **115–119.** *Csonka Melinda*, *Iberpaker Péter*, *Péterfalvi Nóra*, *Raikovich Tamás*, *Skublics Benedek* 13 pont; **120–126.** *Bognár Attila*, *Csötönyi Nóra*, *Kovács 666 Gergely*, *Pajna Gabriella*, *Surányi Gergő*, *Várnai Tímea*, *Végh Zoltán* 12 pont; **127–132.** *Aczél Márton*, *Apáthy Molnár Sándor*, *Babos Tamás*, *Kőber Péter*, *Mult Attila*, *Poór Gergő Gábor* 11 pont; **133–150.** *Asztalos Márk*, *Bence 396 Krisztián*, *Csányi Gergő*, *Fischer Noémi*, *Forrás Zsuzsanna*, *Gottlasz Valér*, *Horváth 119 Beáta*, *Kovács 721 Péter*, *Molnár Noémi*, *Nagy 124 Ágnes*, *Nagy 206 István*, *Pernek Ákos*, *Radochay Imre*, *Simon András*, *Szabó 984 Attila*, *Szabó 184 László*, *Terjéki László Dénes*, *Veréb Rita* 10 pont. Kevesebb pontja van 206 versenyzőnek.

10. osztályosok

1. *Pogátsa Attila* 85 pont; **2.** *Leipold Diána* 83 pont; **3.** *Ambrus Gergely* 82 pont; **4.** *Varjú Péter* 80 pont; **5–6.** *Babos Attila*, *Bálint Gergely* 74 pont; **7.** *Lovrics Anna* 71 pont; **8.** *Fodor 133 Gyula* 70 pont; **9.** *Mátyási Péter* 69 pont; **10–11.** *Andrássy Zoltán*, *Dőrr Zsuzsanna* 68 pont; **12.** *Deli Lajos* 66 pont; **13.** *Zalán Péter* 63 pont; **14.** *Árvay Eszter* 62 pont; **15–16.** *Siklósi Dávid*, *Soós 740 Károly* 61 pont; **17–18.** *Nagy Tamás*, *Vígh Viktor* 60 pont; **19.** *Horváth Szilárd* 59 pont; **20–22.** *Breuer János*, *Horváth Dénes*, *Toka László* 58 pont; **23.** *Szűcs Zsófia* 57 pont; **24–25.** *Darabos József*, *Lovrics Klára* 56 pont; **26–28.** *Kisfügedi Viktória*, *Reviczky Ádám János*, *Simon Győző* 54 pont; **29–30.** *Paál Csaba*, *Schlanger Judit* 53 pont; **31.** *Nagy 139 Gergely* 52 pont; **32.** *Hegyi Márta* 51 pont; **33–34.** *Szilágyi Tamás*, *Tokodi Tünde* 50 pont; **35.** *Horváth Balázs* 49 pont; **36–39.** *Bohák András*, *Csereklei Gábor*, *Czímer Balázs*, *Kazinczi Csaba* 46 pont; **40–41.** *Legány Csaba*, *Wéber Zoltán* 45 pont; **42–43.** *Durai Pál*, *Moldvai Levente* 44 pont; **44–45.** *Eördegh Péter*, *Szintai Balázs* 43 pont; **46–47.** *Nagy 777 Péter*, *Pesti Gábor* 42 pont; **48.** *Gyurcsek András* 41 pont; **49–50.** *Pozsonyi Tamás*, *Vajda Péter* 39 pont; **51–55.** *Fehér 007 István*, *Hosszú Balázs*, *Karáth Krisztián*, *Kurcz Éva*, *Rábel Henrietta* 38 pont; **56–58.** *Fenyvesi Zsuzsanna*, *Ignácz Melinda*, *Tormási Imre György* 37 pont; **59.** *Bakó Dániel* 36 pont; **60.** *Gál 959 Balázs* 35 pont; **61–62.** *Arany Sándor*, *Koch Dénes* 34 pont; **63–65.** *Horváth 724 Zoltán*, *Kántor Attila*, *Somogyi György* 33 pont; **66–72.** *Csurgó Krisztina*, *Garai Zsolt*, *Germán Tibor*, *Manóczki Csilla*, *Porkoláb Dániel*, *Varga Veronika*, *Wéner Balázs* 32 pont; **73–74.** *Balogh Róbert*, *Neheli Katalin* 31 pont; **75–84.** *Bartha Erika*, *Bicskei László*, *Csete Mónika*, *Czímer Gergő*, *Czupi Márton*, *Görföl Tamás*, *Nagy 820 Balázs* , *Nagy 729 Dávid*, *Poór Veronika*, *Roszol László* 30 pont; **85–89.** *Dávid 159 Róbert*, *Fekete Árpád*, *Kiss 414 Norbert*, *Novák Zoltán*, *Stépán József* 29 pont; **90–93.** *Földényi Tamás*, *Győző Miklós*, *Polgár 624 Orsolya*, *Tigyi Árpád* 28 pont; **94–99.** *Enyedi Gábor*, *Erdős János*, *Fazekas 533 Éva*, *Fiers Márton*, *Kerekes*

Attila, *Kurucz Réka* 27 pont; **100–102.** *Jankó Erika*, *Kádár 181 Csaba*, *Molnár 947 Zoltán* 26 pont; **103–106.** *Bernáth Andrea*, *Bóta Gergő*, *Erki Szabolcs*, *Hülber Árpád* 25 pont; **107–108.** *Bartha Tamás (Árpád)*, *Fellegi Zoltán* 24 pont; **109–112.** *Bánky Szilvia*, *Bartucz Dorottya*, *Imrefi József*, *Kiss Tímea* 23 pont; **113–117.** *Börcsök József*, *Dénes Ágnes*, *Dunai Gábor*, *Fehér Gergely*, *Kőszegi Katalin* 22 pont; **118–121.** *Dombai Péter*, *Kis Zsófia*, *Kolozsváry Georgina*, *Linczmajer Éva* 21 pont; **122–125.** *Almási Angelika*, *Hizsák Gábor*, *Magyari Róbert*, *Peresztegi Márton* 20 pont; **126–130.** *Fehér Miklós*, *Hosszú Gergő*, *Ivancsó Borbála*, *Szabó Réka*, *Zsidó Csilla Laura* 19 pont; **131–135.** *Arató Orsolya*, *Benedek 013 Éva*, *Csabina Csilla*, *Gál Katalin*, *Kalmár Levente* 18 pont; **136–140.** *Czigány Balázs*, *Gerencsér Norbert*, *Harcz Ádám*, *Horváth 004 Tamás*, *Karácsonyi József Sándor* 17 pont; **141–148.** *Braun Melinda*, *Felber Péter*, *Kramer Zsófia*, *Németh 829 Balázs*, *Németh 917 Julianna*, *Reiczigel Zsófia*, *Tamás Gábor Zoltán*, *Vona Gábor* 16 pont; **149–155.** *Ballók István*, *Csaszny Tamás*, *Erdei Miklós*, *Lángh 222 Dániel*, *Ritter Ádám*, *Somlai Henrietta*, *Somogyi 555 Tamás* 15 pont; **156–159.** *Ádám Zoltán*, *Hegedűs 913 Vera*, *Szamosújvári Ilona*, *Tóth 101 Katalin* 14 pont; **160–168.** *Baka Nóra*, *Bóna Péter*, *Csapár Tímea*, *Cseri István*, *Laczay Zsolt*, *Markó István*, *Medgyesi László*, *Molnár Gábor*, *Páll Laura* 13 pont; **169–177.** *Antal Ágnes*, *Antal László Balázs*, *Bozsik Balázs*, *Krenedits Sándor*, *Lepcsényi Lilla*, *Schmidt 414 András*, *Sebestyén Gábor*, *Vértényi Péter*, *Vizy Sándor* 12 pont; **178–181.** *Bernhardt János*, *Dénes Péter*, *Jauernik Judit*, *Sepsei Ivett* 11 pont; **182–192.** *Czibik Ágnes*, *Dóra Gábor*, *Hegedűs Vera*, *Király Ferenc*, *Kolber Adél*, *Letenyei Gábor*, *Mészáros Gergely*, *Pap Tünde*, *Pintér Csaba*, *Talabos Éva*, *Virág Dorottya* 10 pont. Kevesebb pontja van 113 versenyzőnek.

Feladatok

Az eddig feldolgozott feladatok: a szeptemberi és az októberi szám feladatai, valamint F. 3251., F. 3253., F. 3254., F. 3255.

Feladatonként egy helyes megoldással elérhető: 80 pont.

Legfeljebb 8. osztályosok

1. *Kunszenti-Kovács Dávid* 8. o.t. 64 pont; **2.** *Birkner Tamás* 6. o.t. 52 pont; **3.** *Csóka Endre* 8. o.t. 30 pont; **4.** *Nagy 625 Tibor* 8. o.t. 11 pont; **5.** *Nagy 444 Zoltán* 8. o.t. 9 pont; **6–7.** *Buti Tamás* 8. o.t., *Lang Péter* 8. o.t. 7 pont; **8.** *Rácz Balázs* 8. o.t. 5 pont. Kevesebb pontja van 10 versenyzőnek.

9. osztályosok

1. *Harangi Viktor* 75 pont; **2.** *Gerencsér Balázs* 59 pont; **3.** *Tran Thanh Long* 58 pont; **4–5.** *Csikvári Péter*, *Tóth 370 Ágnes* 38 pont; **6.** *Erdei Zsuzsa* 19 pont; **7.** *Horváth Illés* 16 pont; **8.** *Kovács Erika Renáta* 15 pont; **9.** *Ta Vinh Thong* 13 pont; **10–11.** *Devecsery Ágnes*, *Sára Péter* 12 pont; **12.** *Somogyi Dávid* 11 pont; **13.** *Kőrösi Attila* 8 pont; **14.** *Bartha 321 Ágnes* 7 pont; **15–16.** *Csernenszky András*, *Szabó 184 László* 5 pont. Kevesebb pontja van 35 versenyzőnek.

10. osztályosok

1. *Gelencsér Gábor* 67 pont; **2.** *Csirmaz Előd* 62 pont; **3.** *Horváth 713 György* 47 pont; **4.** *Szilasi Zoltán* 45 pont; **5.** *Boros M. Mátyás* 38 pont; **6.** *Babos Attila* 31 pont; **7.** *Nagy Tamás* 27 pont; **8.** *Andrássy Zoltán* 26 pont; **9.** *Toka László* 25 pont; **10.** *Legány Csaba* 23 pont; **11.** *Tóth 612 Márton* 19 pont; **12.** *Koch Dénes* 18 pont; **13.** *Kiss 414 Norbert* 16 pont; **14–15.** *Lovrics Anna*, *Somlai Henrietta* 15 pont; **16.** *Schmidt 414 András* 14 pont; **17.** *Zalán Péter* 13 pont; **18–20.** *Breuer János*, *Debrődi István*, *Fellegi Zoltán* 9 pont; **21–22.** *Benecz Judit*, *Székelyhidi Tamás* 7 pont; **23.** *Pesti Gábor* 6 pont; **24–27.** *Lovrics Klára*, *Nagy 314 Ádám*, *Róna Szilárd*, *Szamosújvári Ilona* 5 pont. Kevesebb pontja van 25 versenyzőnek.

11. osztályosok

Feladatonként egy helyes megoldással elérhető: 105 pont.

1. *Kiss 345 Gergely* 103 pont; **2–3.** *Máthé András*, *Zábrádi Gergely* 92 pont; **4.** *Papp Dávid* 90 pont; **5.** *Dénes Attila* 89 pont; **6.** *Győri Nikolett* 83 pont; **7.** *Keszegh Balázs* 81 pont; **8.** *Venter György* 78 pont; **9–10.** *Baharev Ali*, *Pálvölgyi Dömötör* 74 pont; **11–12.** *Gáspár Merse Előd*, *Lábó Eszter* 71 pont; **13.** *Csiszár Gábor* 70 pont; **14.** *Lábó Melinda* 69 pont; **15.** *Taraza Busra* 67 pont; **16.** *Horváth 413 László* 59 pont; **17.** *Sidó Péter* 58 pont; **18.** *Vértesi Vera* 57 pont; **19.** *Torda Péter* 55 pont; **20–21.** *Bárány Zsófia Luca*, *Gajári Dávid* 51 pont; **22–23.** *Pozsár Balázs*, *Vitéz Ildikó* 47 pont; **24.** *Gömöri Péter* 44 pont; **25.** *Lengyel 821 Zoltán* 43 pont; **26.** *Zempléni Márton* 42 pont; **27–28.** *Bákor Krisztina*, *Münz Márton* 41 pont; **29.** *Kovács Benedek* 37 pont; **30–31.** *Madarász Ádám*, *Varga Balázs* 36 pont; **32–36.** *Herczegh Géza*, *Iván Szabolcs*, *Jungbauer Alexandra*, *Pozsonyi Gergő*, *Robotka Zsolt* 35 pont; **37.** *Veres Tímea* 34 pont; **38.** *Wilfing András* 33 pont; **39.** *Móczó Péter* 30 pont; **40–41.** *Bódai Zoltán*, *Molnár László Milán* 29 pont; **42.** *Micskei Zoltán* 28 pont; **43–44.** *Bíró Annamária Mása*, *Hudomiet Péter* 27 pont; **45.** *Koczka Gergely* 26 pont; **46–48.** *Bíró Márton*, *Sinka Bálint*, *Sipos Ádám* 25 pont; **49–54.** *Antal István*, *Gáspár Katalin*, *Gáspár Krisztina*, *Gyürki István*, *Matin Tamás*, *Schlotter Ildikó* 24 pont; **55–57.** *Fodor Erzsébet*, *Szélig Nikoletta*, *Vizer Máté* 23 pont; **58.** *Bankó Krisztián* 22 pont; **59–60.** *Lemmich Attila*, *Mansur Boase* 21 pont; **61–63.** *Kiss Norbert*, *Simon Zoltán*, *Takács 272 Zsuzsanna* 20 pont; **64–67.** *Bicsák Mátyás*, *Horváth Hedvig*, *Tillinkó Zsanett*, *Tóth 013 Zoltán* 18 pont; **68–70.** *Botos Péter*, *Kiss 360 Sándor*, *Újvári Gergely* 17 pont; **71–73.** *Csathó Csaba*, *Kasztner Tamás*, *Kun Márton* 16 pont; **74.** *Fehér Katalin* 15 pont; **75.** *Urr Beáta* 14 pont; **76–77.** *Király Péter*, *Kovács 751 Róbert* 13 pont; **78–81.** *Deme 007 Gábor*, *Rajna Ákos*, *Simay Csaba*, *Soós István* 12 pont; **82–89.** *Csányi Tamás*, *Dombi József Dániel*, *Drén Judit*, *Juhász 113 Ágnes*, *Jung János*, *Lódi Edit*, *Mauthner András*, *Ringer Norbert* 11 pont; **90–97.** *Bokros Krisztián*, *Csornai Gyula*, *Friedl Zita*, *Németh Lajos*, *Powell Pál*, *Tóth 587 Viktória*, *Törőcsik Andrea*, *Zambó Gábor* 10 pont; **98–104.** *Balogh Tamás*, *Benke Noémi*, *Dankai György*, *Edőcs Eszter*, *Tóth Balázs*, *Varga Szilvia*, *Zelenák Amarilla* 9 pont; **105–115.** *Baranyai Gábor*, *Gyenes Dávid*, *Kurucz Keve*, *Molnár 666 Ildikó*, *Nagy László*, *Pesti 421 Péter*, *Sors Erika*, *Szabó 131 Katalin*, *Szabó 777 Pál*, *Szombatfalvi Zsolt*, *Tóth Endre* 8 pont; **116–120.** *Dóczy Pál*, *Estók Előd*, *Madarász Éva*, *Szerbin Iván*, *Takáts Gergely* 7 pont; **121–126.** *Agócs Judit*, *Bence Virág*, *Csigi Szilvia*, *Nagy 201 Zoltán*, *Várady Gábor*, *Vitos Botond* 6 pont. Kevesebb pontja van 63 versenyzőnek.

12. osztályosok

Feladatonként egy helyes megoldással elérhető: 80 pont.

1. *Terpai Tamás* 83 pont; **2–3.** *Györey Bernadett*, *Naszódi Gergely* 80 pont; **4.** *Szabadka Zoltán* 78 pont; **5.** *Pataki Péter* 76 pont; **6.** *Dancsó Zsuzsanna* 73 pont; **7.** *Székelyhidi Gábor* 71 pont; **8.** *Horváth 202 Gábor* 68 pont; **9.** *Gueth Krisztián* 65 pont; **10.** *Szakács László* 59 pont; **11.** *Balogh Attila* 58 pont; **12–13.** *Horváth 472 András*, *Szabó 997 Péter* 57 pont; **14.** *Fehér Lajos Károly* 56 pont; **15–16.** *Barát Anna*, *Huszár Péter* 53 pont; **17.** *Pszota Anikó* 48 pont; **18.** *Ábrány Miklós* 47 pont; **19–23.** *Lovas Róbert*, *Pap Júlia*, *Szécsi Vajk*, *Szép László*, *Yu Da* 44 pont; **24–25.** *Benedek Csaba*, *Vágvölgyi Péter* 43 pont; **26–27.** *Mihajlik Gábor*, *Poronyi Gábor* 40 pont; **28.** *Devecsery András* 37 pont; **29.** *Vaik István* 35 pont; **30.** *Mecz Balázs* 32 pont; **31.** *Zalán Eszter* 30 pont; **32.** *Pilászy István* 27 pont; **33–34.** *Balogh 666 Péter*, *Nagy 333 Kálmán* 25 pont; **35–36.** *Hegyi Péter*, *Takács Gábor* 22 pont; **37.** *Bakos Gábor* 21 pont; **38–39.** *Kis-Tóth Ágnes*, *Rácz Balázs* 20 pont; **40.** *Csikvári Gábor* 19 pont; **41.** *Sztranyák Zsolt* 16 pont; **42–43.** *Horváth 948 Márk*, *Simon Zoltán* 15 pont; **44–45.** *Bujdosó Attila*, *Németh 729 András* 14 pont; **46–48.** *Bosznay Tamás*, *Hegedűs 396 Péter*, *Kitlei Róbert* 13 pont; **49.** *Bánfi Barnabás* 12 pont; **50.** *Kiss 540 Balázs* 10 pont; **51–52.** *Cserkúti Péter*, *Nagy 512 Marianna* 9 pont; **53–56.** *Bozsó Dávid*, *Kovács Róbert*, *Tóth Bálint*, *Zeke András* 8 pont; **57–61.** *Lovrencsics Lilla*, *Nehoda Péter*, *Röst János*, *Simon Tamás*, *Udvardy Gergely* 7 pont; **62–63.** *Antal Csaba*, *Mészáros András* 6 pont. Kevesebb pontja van 16 versenyzőnek.

Nehezebb feladatok

Az eddig feldolgozott feladatok: a szeptembertől decemberig megjelentek.

Feladatonként egy helyes megoldással elérhető: 80 pont.

1. *Juhász András* 12. o.t. 61 pont; **2.** *Terpai Tamás* 12. o.t. 59 pont; **3.** *Végh A. László* 12. o.t. 54 pont; **4.** *Lukács László* 12. o.t. 45 pont; **5.** *Gerbicz Róbert* 12. o.t. 36 pont; **6.** *Gyenes Zoltán* 11. o.t. 35 pont; **7.** *Pálvölgyi Dömötör* 11. o.t. 26 pont; **8–10.** *Harangi Viktor* 9. o.t., *Horváth 202 Gábor* 12. o.t., *Máthé András* 11. o.t. 22 pont; **11.** *Zábrádi Gergely* 11. o.t. 20 pont; **12.** *Székelyhidi Gábor* 12. o.t. 19 pont; **13–14.** *Gueth Krisztián* 12. o.t., *Mecz Balázs* 12. o.t. 17 pont; **15.** *Naszódi Gergely* 12. o.t. 15 pont; **16–17.** *Dancsó Zsuzsanna* 12. o.t., *Pozsár Balázs* 11. o.t. 13 pont; **18.** *Papp Dávid* 11. o.t. 11 pont; **19–24.** *Baharev Ali* 11. o.t., *Dezső Balázs* 11. o.t., *Kiss 345 Gergely* 11. o.t., *Pataki Péter* 12. o.t., *Tran Thanh Long* 9. o.t., *Yu Da* 12. o.t. 10 pont; **25–27.** *Devecsery András* 12. o.t., *Kiss 360 Sándor* 11. o.t., *Szabó 997 Péter* 12. o.t. 8 pont; **28.** *Pap Júlia* 12. o.t. 7 pont; **29–40.** *Bujdosó Attila* 12. o.t., *Csirmaz Előd* 10. o.t., *Csóka Endre* 8. o.t., *Gelencsér Gábor* 10. o.t., *Gerencsér Balázs* 9. o.t., *Keszegh Balázs* 11. o.t., *Kunszenti-Kovács Dávid* 8. o.t., *Mansur Boase* 11. o.t., *Mészáros András* 12. o.t., *Pálvölgyi Dénes* 8. o.t., *Sidó Péter* 11. o.t., *Ta Vinh Thong* 9. o.t. 5 pont. Kevesebb pontja van 18 versenyzőnek.

C jelű gyakorlatok

Az eddig feldolgozott feladatok: a szeptemberi és októberi szám feladatai, valamint C. 517., C. 520.

Feladatonként egy helyes megoldással elérhető: 50 pont.

Legfeljebb 10. osztályosok

1. *Birkner Tamás* 6. o.t. 54 pont; **2.** *Dömötör Csilla* 9. o.t. 49 pont; **3.** *Szalay Zsófia* 9. o.t. 48 pont; **4.** *Koch Dénes* 10. o.t. 47 pont; **5–7.** *Csató György* 10. o.t., *Fehér Gergely* 10. o.t., *Zalán Péter* 10. o.t. 46 pont; **8–10.** *Bohák András* 10. o.t., *Nagy 729 Dávid* 10. o.t., *Sparing Dániel* 8. o.t. 45 pont; **11.** *Medgyesi László* 10. o.t. 44 pont; **12–13.** *Babos Attila* 10. o.t., *Szűcs 816 Júlia* 10. o.t. 43 pont; **14–15.** *Békási Sándor* 10. o.t., *Lajtha Balázs* 10. o.t. 42 pont; **16–19.** *Kádas Attila* 9. o.t., *Lang Péter* 8. o.t., *Molnár András* 9. o.t., *Nagy 213 Gergely* 9. o.t. 41 pont; **20.** *Kovács 954 Szabolcs* 9. o.t. 40 pont; **21–23.** *Buthi Irma* 9. o.t., *Kmellár Béla* 10. o.t., *Székelyhidi Tamás* 10. o.t. 39 pont; **24–28.** *Abonyi Gergely* 10. o.t., *Börcsök József* 10. o.t., *Jesch Dávid* 9. o.t., *Pozsonyi Tamás* 10. o.t., *Várnai Csilla* 9. o.t. 38 pont; **29–32.** *Alvarez Olga* 9. o.t., *Farkas Melinda* 9. o.t., *Medve Kinga Sára* 10. o.t., *Tímár Gábor* 9. o.t. 37 pont; **33–35.** *Legány Csaba* 10. o.t., *Terjéki László Dénes* 9. o.t., *Tóth 777 Balázs* 10. o.t. 36 pont; **36–43.** *Borosán Péter* 9. o.t., *Bozsik Balázs* 10. o.t., *Fejes Tamás* 9. o.t., *Kolláth Endre* 10. o.t., *Kós Viktória* 10. o.t., *Lakatos Kristóf* 8. o.t., *Regula Gergely* 9. o.t., *Vígh Attila* 10. o.t. 35 pont; **44–50.** *Antal Ágnes* 10. o.t., *Baur Eszter* 9. o.t., *Horváth 303 Bálint* 10. o.t., *Kovács 494 Andrea* 9. o.t., *Nagy 281 Dávid* 10. o.t., *Németh 917 Julianna* 10. o.t., *Szabó 314 Zsolt* 9. o.t. 34 pont; **51–54.** *Börzsönyi Ádám* 10. o.t., *Nagy 625 Tibor* 8. o.t., *Németh 829 Balázs* 10. o.t., *Somlai Henrietta* 10. o.t. 33 pont; **55–58.** *Csete Mónika* 10. o.t., *Dőry Magdolna* 8. o.t., *Kiss 189 Csaba* 10. o.t., *Pajna Gabriella* 9. o.t. 32 pont; **59–67.** *Aczél Márton* 9. o.t., *Földes Péter* 9. o.t., *Hablicsek Márton* 7. o.t., *Molnár 984 Adrienn* 9. o.t., *Pájer Boróka* 10. o.t., *Reiss Attila* 9. o.t., *Siroki László* 9. o.t., *Vanya Ádám* 10. o.t., *Virág Dorottya* 10. o.t. 31 pont; **68–72.** *Bécsy Ádám* 9. o.t., *Lakatos Szilvia* 8. o.t., *Merazga Oktávia* 10. o.t., *Palotás Bálint* 9. o.t., *Szabó 213 Adrienn* 9. o.t. 30 pont; **73–85.** *Fazekas 533 Éva* 10. o.t., *Flores Diana* 9. o.t., *Kalcsú Áron* 8. o.t., *Kalmár Levente* 10. o.t., *Kármán Péter* 10. o.t., *Komlós Gábor* 9. o.t., *Kovács 721 Péter* 9. o.t., *Kőrizs András* 9. o.t., *Minárik Gábor* 10. o.t., *Péczeli Viktor* 9. o.t., *Vadai Zsolt* 9. o.t., *Vági Andrea* 8. o.t., *Víg Róbert* 9. o.t. 29 pont; **86–98.** *Barta Péter* 9. o.t., *Benczúr Zsolt* 9. o.t., *Farkas 327 Dóra* 9. o.t., *Juhász Andrea* 9. o.t., *Juhász Sándor* 10. o.t., *Markó Péter* 10. o.t., *Németh 278 Andrea* 9. o.t., *Nyul Balázs* 8. o.t., *Spanczér Ilona* 9. o.t., *Varga 123 Áron* 9. o.t., *Várnai Anikó* 9. o.t., *Végh Anita* 10. o.t., *Vicsek Miklós* 10. o.t. 28 pont; **99–106.** *Bartha Ferenc Ágoston* 8. o.t., *Herpai Csaba* 10. o.t., *Kotnyek Barbara* 9. o.t., *Maróti László* 8. o.t., *Pintér Csaba* 10. o.t., *Pintér Miklós* 9. o.t., *Tisch Dániel* 9. o.t., *Veréb Tamás* 9. o.t. 27 pont; **107–111.** *Bartha 321 Ágnes* 9. o.t., *Dányádi Zsolt* 7. o.t., *Filep Gergely* 9. o.t., *Novits László* 10. o.t., *Zámbó Virág* 9. o.t. 26 pont; **112–120.** *Bödők Donát* 9. o.t., *Csikós Gábor* 10. o.t., *Király Attila* 10. o.t., *Kiss 727 Barnabás* 9. o.t., *Nagy 701 Mária* 9. o.t., *Osztrovszky Györgyi* 9. o.t., *Szalai Attila* 8. o.t., *Tábor Áron* 8. o.t., *Wacha András* 8. o.t. 25 pont; **121–135.** *Baross Gergely* 10. o.t., *Bozsik Judit* 9. o.t., *Darabos Andrea* 10. o.t., *Drozdy Árpád* 9. o.t., *Hangya Miklós* 7. o.t., *Heé Éva* 9. o.t., *Illés Zoltán* 9. o.t., *Makk Péter* 9. o.t., *Nárai Csilla* 9. o.t., *Papp Gábor Richárd* 9. o.t., *Patzkó Ágnes* 9. o.t., *Sörös Csaba* 10. o.t., *Szekeres Balázs* 8.

o.t., *Tamás Krisztina* 8. o.t., *Vona Gábor* 10. o.t. 24 pont; **136–145.** *Buti Tamás* 8. o.t., *Czirják Emese* 9. o.t., *Geresdi Attila* 9. o.t., *Hegyi Márta* 10. o.t., *Kéri Sophia* 9. o.t., *Mult Attila* 9. o.t., *Papp 932 Katalin* 9. o.t., *Sajtos Erika* 10. o.t., *Szalontay Luca* 10. o.t., *Tallián Miklós* 10. o.t. 23 pont; **146–161.** *Bakonyi Ákos* 8. o.t., *Bodor András József* 10. o.t., *Enyingi Katalin* 10. o.t., *Erdélyi Dániel* 9. o.t., *Gottlasz Valér* 9. o.t., *Havasi András* 10. o.t., *Imre Tamás* 9. o.t., *Kiss 183 Árpád* 10. o.t., *Kiss 111 Péter* 10. o.t., *Kovács 666 Gergely* 9. o.t., *Németh Zsófia* 10. o.t., *Pótó Júlia* 10. o.t., *Tősér Kinga* 10. o.t., *Varga Lajos* 9. o.t., *Varga 846 Petra* 9. o.t., *Veres 618 Dániel* 10. o.t. 22 pont; **162–171.** *Antal 100 Péter* 8. o.t., *Farkas Ákos* 10. o.t., *Frigyesi Zoltán* 10. o.t., *Gyökeres Ágnes* 9. o.t., *Jenei Viktor* 10. o.t., *Koncz Vera Zsuzsa* 9. o.t., *Lánczi Levente* 9. o.t., *Pásztor Péter* 10. o.t., *Szekeres 761 András* 10. o.t., *Török Andrea* 9. o.t. 21 pont; **172–189.** *Barta 679 Zsolt* 9. o.t., *Danyi Barbara* 10. o.t., *Dávid 159 Róbert* 10. o.t., *Dorogházi Edina* 9. o.t., *Farkas Tamás* 8. o.t., *Fehér Miklós* 10. o.t., *Halmos Zsófia* 9. o.t., *Horváth Illés* 9. o.t., *Mándy Péter* 8. o.t., *Molnár 475 Viktor* 9. o.t., *Morvai Krisztina* 9. o.t., *Pernek Ákos* 9. o.t., *Pszota Zsolt* 9. o.t., *Raikovich Tamás* 9. o.t., *Sebestyén Zita* 10. o.t., *Sofró Csaba* 10. o.t., *Tóth 666 János* 9. o.t., *Tóth 345 Mihály* 9. o.t. 20 pont; **190–203.** *Barbócz Judit* 9. o.t., *Bognár Krisztina* 10. o.t., *Borda Máté* 10. o.t., *Csabina Csilla* 10. o.t., *Csáky Attila* 9. o.t., *Fülöp Nóra* 10. o.t., *Hajdu Eszter* 10. o.t., *Kada Katalin* 10. o.t., *Kolozs Balázs* 9. o.t., *Lajkó Péter* 9. o.t., *Pankaczi Zsófia* 9. o.t., *Róna Szilárd* 10. o.t., *Soproni Péter* 9. o.t., *Tóth Adorján* 9. o.t. 19 pont; **204–211.** *Bán Zoltán* 9. o.t., *Kovács 123 Áron* 8. o.t., *Kovács Dávid* 9. o.t., *Lajkó Miklós* 8. o.t., *Nagy Gábor* 9. o.t., *Pach Péter Pál* 7. o.t., *Plézer Nóra* 9. o.t., *Vígh Ilona* 9. o.t. 18 pont; **212–219.** *Boros Csaba* 10. o.t., *Csala Anikó* 10. o.t., *Gálosfai Krisztina* 8. o.t., *Gyócsi Péter* 9. o.t., *Juhász Sándor* 9. o.t., *Lengyel Dániel* 10. o.t., *Németh 513 Róbert* 10. o.t., *Völgyi Csaba* 9. o.t. 17 pont; **220–232.** *Bálint Zsuzsanna* 10. o.t., *Csuka Zsuzsanna* 9. o.t., *Czakó Péter* 9. o.t., *Feró Dalma* 10. o.t., *Fülöp István* 8. o.t., *Fűrész Gábor* 9. o.t., *Koreck Ferenc* 9. o.t., *Kronavatter Péter* 9. o.t., *Nagy 206 István* 9. o.t., *Rischák Rózsa* 9. o.t., *Somlai Ágnes* 9. o.t., *Szentirmai Dávid* 10. o.t., *Zajdó Csaba* 10. o.t. 16 pont. Kevesebb pontja van 497 versenyzőnek.

11–12. osztályosok

1–2. *Farkas Milán* 12. o.t., *Gajdos Béla* 11. o.t. 51 pont; **3.** *Ábrány Miklós* 12. o.t. 50 pont; **4–5.** *Buruzs Ádám* 11. o.t., *Zombori Zsolt* 11. o.t. 49 pont; **6–7.** *Bérces Márton* 12. o.t., *Gueth Krisztián* 12. o.t. 48 pont; **8–9.** *Bankó Krisztián* 11. o.t., *Robotka Zsolt* 11. o.t. 47 pont; **10–12.** *Bicsák Mátyás* 11. o.t., *Kardos Péter* 11. o.t., *Lovas Róbert* 12. o.t. 46 pont; **13–15.** *Károly Zoltán* 12. o.t., *Menyhárt Sándor* 11. o.t., *Szászi Zsuzsanna* 11. o.t. 45 pont; **16–18.** *Fall Zoltán* 12. o.t., *Orbán Viktor* 12. o.t., *Schmeiszer Kornél* 11. o.t. 44 pont; **19–23.** *Havran Dániel* 11. o.t., *Mezei Irén* 12. o.t., *Nagy 512 Marianna* 12. o.t., *Szekeres Nóra* 11. o.t., *Szőllősi Loránd* 12. o.t. 43 pont; **24–28.** *Fazekas Gábor* 11. o.t., *Révai Balázs* 11. o.t., *Szép László* 12. o.t., *Szontágh Zsuzsanna* 12. o.t., *Újhelyi Bernadett* 12. o.t. 42 pont; **29–30.** *Friedl Zita* 11. o.t., *Klausz Ferenc* 11. o.t. 41 pont; **31–33.** *Agócs Judit* 11. o.t., *Führer Lívia* 12. o.t., *Kegyes Tamás* 11. o.t. 40 pont; **34–38.** *Kovács 899 Péter* 12. o.t., *Németh Péter* 12. o.t., *Patay Gergely* 11. o.t., *Schmeiszer Krisztián* 11. o.t., *Várallyai György* 12. o.t. 39 pont; **39.** *Keresztély Éva* 12. o.t. 38 pont; **40–42.** *Czeglédi Erika* 11. o.t., *Davidovics Gábor* 12. o.t., *Tóth 111 Gábor* 12. o.t. 37 pont; **43–52.** *Darányi Adrienn* 11. o.t., *Inzelt György* 11. o.t., *Juhász 113 Ágnes* 11. o.t., *Karika Róbert* 11. o.t., *Koczka Gergely* 11. o.t., *Kulcsár Péter* 12. o.t., *Mezőfi Lajos* 12. o.t., *Münz Márton* 11. o.t., *Portschy Szabolcs* 12. o.t., *Vincze Tímea* 12. o.t. 36 pont; **53–58.** *Berta Andrea* 11. o.t., *Fehér 666 Ágnes* 12. o.t., *Kocsis 444 Gábor* 12. o.t., *Strobl Apolka* 11. o.t., *Szegedi Máté* 12. o.t., *Yu Da* 12. o.t. 35 pont; **59–66.** *Bakó Péter* 11. o.t., *Csurdi Abigél* 11. o.t., *Gyérmán János* 11. o.t., *Harangi Norbert* 11. o.t., *Kallus Edit* 12. o.t., *Pintér Zsuzsanna* 11. o.t., *Sallai 123 Enikő* 11. o.t., *Szekeres Lilla* 11. o.t. 34 pont; **67–72.** *Brulich Ákos* 12. o.t., *Molnár László Milán* 11. o.t., *Monyók Ákos* 12. o.t., *Soós István* 11. o.t., *Stoll Péter* 12. o.t., *Takács Nóra* 11. o.t. 33 pont; **73–81.** *Aranyossy Márta* 12. o.t., *Beregszászi Krisztián* 11. o.t., *Besenyei Ádám* 11. o.t., *Jombik Péter* 12. o.t., *Makó Veronika* 12. o.t., *Sipos Tünde* 12. o.t., *Szépe Bálint* 11. o.t., *Taraza Busra* 11. o.t., *Wilfing András* 11. o.t. 32 pont; **82–85.** *Horváth 413 László* 11. o.t., *Kósa Gabriella* 11. o.t., *Mehrl Nándor* 11. o.t., *Samu Axel* 12. o.t. 31 pont; **86–90.** *Bécsi Kristóf* 11. o.t., *Gondos Gabriella* 12. o.t., *Kovács 999 Zsolt* 11. o.t., *Kriston Vízi Gábor* 11. o.t., *Schwarz Attila* 12. o.t. 30 pont; **91–96.** *Bíró Márton* 11. o.t., *Csornai Gyula* 11. o.t., *Fehérvári Sándor* 11. o.t., *Kanyó Katalin* 11. o.t., *Kiss Marietta* 12. o.t., *Oláh Tibor Benjámin* 11. o.t. 29 pont; **97–101.** *Kitlei Róbert* 12. o.t., *Matécsa 999 Márta* 11. o.t., *Menyhárt Ferenc* 11. o.t., *Osztényi József* 12. o.t., *Túri Bálint* 11. o.t. 28 pont; **102–110.** *Antal István* 11. o.t., *Bagyal Adrienn* 11. o.t., *Kardos Zsófia* 12. o.t., *Keszte Dóra* 12. o.t., *Kozma Gergely* 12. o.t., *Lakatos Veronika* 12. o.t., *Nyisztor Noémi* 11. o.t., *Pári Csaba* 12. o.t., *Piros Judit* 11. o.t. 27 pont; **111–112.** *Fiedler Ágnes* 11. o.t., *Lévai István* 11. o.t. 26 pont; **113–118.** *Horváth Péter* 11. o.t., *Kungl István* 11. o.t., *Lődör Zoltán* 11. o.t., *Tolvaj Vera* 11. o.t., *Tüske Rita (Gabriella)* 11. o.t., *Varga Dániel* 11. o.t. 25 pont; **119–125.** *Döme Botond* 11. o.t., *Fassang Noémi* 12. o.t., *Hegyi Péter* 12. o.t., *Kovács Szabolcs* 12. o.t., *László Zoltán* 11. o.t., *Lénárt Marcell* 11. o.t., *Mészáros Miklós* 12. o.t. 24 pont; **126–131.** *Balog Krisztián* 12. o.t., *Kiss 360 Sándor* 11. o.t., *Márkus Viktória* 11. o.t., *Molnár Csaba* 12. o.t., *Varga 951 Attila* 11. o.t., *Zsédely Eszter* 11. o.t. 23 pont; **132–136.** *Dávid Anita* 11. o.t., *Oláh Szabolcs* 11. o.t., *Solymossy Endre* 11. o.t., *Tóth Éva* 12. o.t., *Török Tímea* 11. o.t. 22 pont; **137–142.** *Fekete Ada* 11. o.t., *Kőhalmi Lívia* 11. o.t., *Rozovits Zoltán* 11. o.t., *Simon Zoltán* 11. o.t., *Szabó 415 Ágnes* 11. o.t., *Togobickij Vera* 11. o.t. 21 pont. Kevesebb pontja van 337 versenyzőnek.

Tisztelt Tanár Kollégák és Versenyzők!

Felhívjuk figyelmüket, hogy néhány iskolából túlzottan hasonló (a veresenykiírás értelmében nem versenyszerűnek minősített) dolgozatok érkeztek a következő gyakorlatokra:

C. 511.:	Oroszlány, Lengyel J. Gimn.,	(7 db, 19 db)
C. 514.:	Eger, Gárdonyi G. Gimn.	(8 db)
	Budapest, Jedlik Ányos Gimn.	(11 db)
	Oroszlány, Lengyel J. Gimn.	(7 db)
	Tamási, Béri Balogh Á. Gimn.	(10 db)
Gy. 3215.:	Zalaegerszeg, Zrínyi M. Ginm.	(8 db)
Gy. 3218.:	Győr, Czuczor G. Bencés Gimn.,	(6 db)
Gy. 3219.:	Veszprém, Lovassy L. Gimn.	(17 db)

Pontversenyünk egyéni verseny, és egyik célja az önálló tanulás. Csoportmunka esetén ez elmarad, és lehetetlen az egyéni értékelés is.

A Szerkesztőség

Szőkefalvi-Nagy Béla
1913–1998

1998. december 21-én, életének 86. évében elhunyt Szőkefalvi-Nagy Béla kétszeres Kossuth-díjas akadémikus, a Bolyai János Matematikai Társulat tiszteletbeli elnöke, a József Attila Tudományegyetem nyugalmazott tanszékvezető egyetemi tanára, Szeged város díszpolgára.

Szőkefalvi-Nagy Béla 1913. július 29-én született Kolozsváron. Családjával 1929-ben költözött Szegedre, a gimnázium utolsó két évét és az egyetemet már itt végezte el. Itt szerezte meg 1936-ban matematika–fizika szakos középiskolai tanári oklevelét és tette le „summa cum laude” eredménnyel doktori szigorlatát. 1937-ben kitüntetéssel avatták doktorrá.

Középiskolában minden érdekelte, kitűnő tanuló volt. Egyetemi tanulmányai alatt egyformán foglalkozott matematikával és fizikával. Bay Zoltán előadásai, valamint Neumann János és Wigner Jenő kvantummechanikai témájú könyvei igen nagy hatással voltak rá. Saját bevallása szerint ezek az élmények terelték érdeklődését a matematika egy akkor még új ága, a funkcionálanalízis felé. 1939-ben a Tanárképző Főiskola matematika professzorává nevezik ki (édesapját, Szőkefalvi-Nagy Gyulát váltotta a katedrán, aki ekkor került a Tudományegyetemre). 1940-ben lett az egyetem magántanára, majd 1948-ban rendes tanára. Kezdetben az Ábrázoló Geometria, majd később az Analízis tanszéket vezette egészen 1983-ban bekövetkezett nyugalomba vonulásáig.

Tudományos tevékenysége számos matematikai területre terjedt ki. Jelentős eredményeket ért el az approximációelméletben, a Fourier-analízisben, az ortogonális függvények elméletében, a konvex geometriában és a funkcionálanalízisben. Ez utóbbi terület egyik legjelentősebb egyéniségeként tartják számon világszerte. Több, mint 150 tudományos dolgozatot publikált és több alapvető monográfia és könyv fűződik a nevéhez. Talán leghíresebb ezek közül a Riesz Frigyessel együtt írt, először 1952-ben franciául megjelent *Leçons d'Analyse Fonctionelle* című, amelyet számos nyelvre lefordítottak, és amely a funkcionálanalízis alapvető kézikönyvévé vált. *Valós függvények és függvénysorok* című egyetemi tankönyve is igen sok kiadást megért, angol nyelvre is lefordították. Számos nívós szakmai folyóirat szerkesztőbizottságának volt tagja vagy éppen elnöke.

Szőkefalvi-Nagy Béla nemcsak kiváló tudós, de kiváló pedagógus is volt. Előadásai mind szakmai, mind didaktikai szempontból kitűnőek voltak. Mindig pontosan fogalmazott és nagyon jól magyarázott. Kemény, szigorú, de igazságos vizsgáztató volt. A jegyeinek súlya volt. Az volt a véleménye, hogy ha valaki valamit nem tud jól elmondani, akkor azt nem is érti igazán. Az ötvenes évek elején általa indított nemzetközi hírű funkcionálanalízis szeminárium harminc éven át a szegedi Bolyai Intézet tevékenységének nagyon fontos része volt. Ezen a szemináriumon előadást tartani mindenki számára nagyon komoly feladatot jelentett.

Igen aktívan és felelősségteljesen látta el közéleti feladatait is. 1953-tól 1980-ig a MTA Matematikai Bizottságának, 1970-től 1985-ig a Szegedi Akadémiai Bizottságnak az elnöke volt. A Bolyai János Matematikai Társulat Csongrád Megyei Tagozatának elnökeként a helyi szakmai közélet szervezéséből is hosszú éveken keresztül jelentősen kivette részét.

Tudományos és pedagógiai tevékenységéért igen sok díjban és elismerésben részesült. A Magyar Tudományos Akadémiának 1945-ben lett levelező, 1956-ban rendes tagja. Kossuth-díjjal 1950-ben és 1953-ban, Állami Díjjal 1978-ban jutalmazták. A Szovjet (ma Orosz) Tudományos Akadémiának 1971-től, az Ír királyi Akadémiának 1973-tól, a Finn Tudományos Akadémiának 1976-tól tiszteletbeli külföldi tagja. Számos egyetemnek tiszteletbeli díszdoktora. 1979-ben a ma már Orosz Tudományos Akadémia neki ítélte legmagasabb természettudományos kitüntetését, a Lomonoszov-aranyérmet. 1994-ben megkapta a Magyar Köztársaság Érdemrend Középkeresztje kitüntetést.

Nagyon ismerte és szerette Szegedet. Sokat sétált egyedül a városban, minden változásra figyelt. Egyetemi előadásain sokszor előfordult, hogy az éppen aktuális tétel bizonyítása után Szegedről kezdett mesélni. Szinte mindent tudott a város történetéről, építészetéről, művészeti és tudományos életéről, igazi szegedi polgár volt. 1991-ben lett Szeged Díszpolgára. Nagyon szerette Szeged környékét is, szenvedélyesen védte az erdőket. Ha egy figyelmetlen autós például behajtott az ásotthalmi erdőbe, és Szőkefalvi-Nagy Béla ezt meglátta, akkor habozás nélkül, keményen (és nagyon kemény tudott lenni) kiparancsolta onnan. (A saját autója természetesen az országút mellett vagy kijelölt parkolóban állt.)

Szeretett a szegedi Bolyai Intézetben dolgozni. Mindig őszintén érdekelte, hogy kollégái, tanítványai hogy érzik magukat, éppen mivel foglalkoznak. Az intézeti könyvtár jelenlegi gazdagságának jó részét neki köszönheti. Ezzel, és Riesz Frigyessel kapcsolatban mesélte egyszer, hogy Riesz már Pesten lakott, de a Bolyai Intézet több folyóirata nála volt. Ő rendszeresen meglátogatta Rieszt, és ha megkérdezte, hogy kell-e még valamelyik folyóirat, mindig azt a választ kapta, hogy valamit még meg akar nézni, még kell. A későbbi látogatások alkalmával egy-két aztán folyóiratot, mikor Riesz nem látta, szó nélkül a táskájába tett, és hazahozta a könyvtárba. Riesz soha nem vette észre a folyóiratok számának csökkenését.

Szerette a zenét, örömet, kikapcsolódást jelentett számára. Nagyon fontos volt számára a családja. Hat gyermeket nevelt fel. Egyszer egy interjúban a riporter kérdésére, hogy hogyan kell gyerekeket nevelni, azt válaszolta: „A példánkkal.” Gyermekei saját szakmájuk kimagasló egyéniségei lettek.*

Nagyon nehéz róla múlt időben írni.

Kosztolányi József
Pintér Lajos

Az 1998. évi William Lowell Putnam Emlékverseny feladatai

A1. Egy egyenes körkúp alapkörének sugara 1, a kúp magassága pedig 3. A kúpba egy kockát írunk oly módon, hogy az alapkör tartalmazza a kocka egy lapját. Mekkora a kocka éle?

A2. Az egységnyi sugarú kör s íve teljes egészében az első síknegyedben fekszik. Az ív és az x-tengely közti tartomány területe A, az ív és az y-tengely közti tartomány

* Egyik lánya, Szőkefalvi-Nagy Ágnes lapunk Fizika Rovatának szerkesztője volt 1975-től 1982-ig.

területe pedig B. Bizonyítsuk be, hogy $A+B$ csak az s ív hosszától függ, annak helyzetétől nem.

A3. Legyen az f olyan függvény, amelynek a harmadik deriváltja folytonos. Bizonyítsuk be, hogy van olyan a szám, amelyre

$$f(a)\cdot f'(a)\cdot f''(a)\cdot f'''(a)\geqslant 0.$$

A4. Legyen $A_1=0$ és $A_2=1$. Ha $n>2$, akkor A_n-et az A_{n-1} és az A_{n-2} számok tízes számrendszerbeli alakjának a felírás szerinti összefűzésével kapjuk. Például $A_3=A_2A_1=10$, $A_4=A_3A_2=101$, $A_5=A_4A_3=10110$ és így tovább. Az n milyen értékeire lesz A_n osztható 11-gyel?

A5. Az $\mathcal{F}$ olyan nyílt körlemezek egy véges rendszere a síkban, amelyek egyesítése lefedi a sík egy E részhalmazát. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{F}$-nek létezik olyan páronként diszjunkt $D_1,\ldots,D_n$ körlemezekből álló részrendszere, hogy

$$\bigcup_{j=1}^{n}3D_j\supseteq E.$$

A fenti jelölésben, ha D az r sugarú P középpontú kör, akkor $3D$ a $3r$ sugarú P középpontú kör.

A6. Legyenek A, B és C a sík különböző, egész koordinátájú pontjai. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$(|AB|+|BC|)^2<8\cdot[ABC]+1,$$

akkor A, B és C egy négyzet három csúcsa. A fentiekben $|XY|$ az XY szakasz hosszát, $[ABC]$ pedig az ABC háromszög területét jelöli.

B1. Mekkora az $\dfrac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6-\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)-2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}$ tört minimuma, ha $x>0$?

B2. Adott (a,b) koordinátájú pontra, ahol $0<b<a$ keressük meg azon háromszögek kerületének a minimumát, amelyek egyik csúcsa az (a,b) pont, a másik az x-tengelyen, a harmadik pedig az $y=x$ egyenesen van. Bizonyítás nélkül föltehető, hogy a szóban forgó minimum létezik.

B3. Legyen H az egységnyi sugarú félgömb, $\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=1,z\geqslant 0\}$, C az egység sugarú kör $\{(x,y,0):x^2+y^2=1\}$, P pedig a C-be írt szabályos ötszög. Mekkora a H azon részének a felszíne, amelyik a síkbeli P tartomány „fölött” van? A választ írjuk $A\sin\alpha+B\cos\beta$ alakban, ahol A, B, α és β valós számok.

B4. Mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az n és m pozitív egészekre fennálljon a

$$\sum_{i=0}^{mn-1}(-1)^{\left\lfloor\frac{i}{m}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{i}{n}\right\rfloor}=0$$

egyenlőség?

B5. Az N pozitív egész szám, amelynek tízes számrendszerbeli alakja 1998 darab egyesből áll: $N=\underbrace{111\dots11}_{1998\ \text{jegy}}$. Mi $\sqrt{N}$ ezredik tizedesjegye?

B6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c egész számokhoz létezik olyan pozitív egész n, amelyre $\sqrt{n^3+an^2+bn+c}$ nem egész.

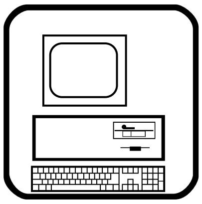
Matematikai önképzőkörök az országban

A miskolci Földes Ferenc Gimnáziumban 1998 márciusában alakítottunk meg egy matematikai önképzőkört, a Földesista Matematikusok Alkotó Körét. Az ötlet: diákok által és diákok részére szervezett önképzőkört létrehozni, a debreceni Fazekas Mihály Gimnáziumból származik. Debrecenben már több éve rendeznek iskolai önképzőkört, eleinte Pap Gyula, később Pap Júlia, Végh A. László és Horváth Gábor szervezésében. Hasonló szakkör indult 1998 őszén a szegedi Ságvári Endre Gimnáziumban is. Nálunk a szervezés főbb részét én vállaltam el, de sok segítséget kapok osztálytársamtól, Lukács Lászlótól, illetve matematika tanárainktól. Szakköreinket kéthetente tartjuk. Minden második alkalommal iskolánk egyik matematikában jártas diákja osztja meg velünk legkedvesebb témaköreinek alapjait, míg a közbülső előadásokat az ország különböző részeiből érkező középiskolai és egyetemi hallgatók tartják. Ezek a diákok többnyire OKTV helyezettek és KöMaL díjasok, sokan közülük Nemzetközi Matematikai Diákolimpián is részt vettek. A szakkörhöz szükséges szakkönyveket, folyóiratokat megpróbáljuk beszerezni, és ezzel bővítjük iskolánk könyvtárát.

A működéshez szükséges anyagi támogatást a Magyar Soros Alapítványtól, a város önkormányzatától és iskolánktól kapjuk. Az 1998 első felében megtartott előadások írásos anyagából egy kiadvány is készült.

Örömmel értesülnénk ilyen kezdeményezésről az ország többi gimnáziumában is.

Pataki Péter 12. o.t.
Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium



TI 83 grafikus kalkulátor

A hetvenes évekre készültek el az első programozható kalkulátorok: ezek, kicsiny méretük ellenére, szinte már igazi számítógépek voltak. Kalkulátor – számítógép; ma sem tisztázott, hogy hol a határ. A számítógépek egyre kompaktabbak, a kalkulátorok egyre felkészültebbek.

A Texas Instruments egyik legújabb programozható grafikus kalkulátora a 83-as. Természetesen minden alapvető matematikai funkciót ismer, statisztikai számításokat végez, ezen már meg sem lepődtünk. Bár a TI 83 pontos megnevezésében nem szerepel a „programozható” szó, mi mégis hozzátettük, mert ez is fontos tulajdonsága.

Az is kellemesen érintett, hogy a kalkulátor képes mátrixokkal dolgozni. Persze, még ki sem tudtuk próbálni sok egyéb adottságát, mint például a pénzügyi függvényeket, mert leragadtunk a grafikánál.

A grafikus ábrázolást akár programon keresztül is el lehet érni, a program kikapcsolás után is megmarad a memóriában. A grafikák többféle koordináta-rendszerben, illetve ábrázolásmódban is elkészíthetők: így kerülhetett sor arra, hogy például spirálokat rajzoljunk. A grafikus kijelző 64×96 pontot tud megjeleníteni. Az ábrákat megnéztük a csatlakoztatható írásvetítő panelen keresztül is. Ez alapvetően arra szolgál, hogy kivetíthető legyen a kalkulátor képernyője. Természetesen nem vártunk csodát: a kis kapacitású kalkulátor függvényábrázolása esetenként pontatlan.

Igen jól használhatók a menüből választható beépített függvények: pillanatok alatt megkereshető a legnagyobb közös osztó, a legkisebb közös többszörös, megoldhatók a magasabb fokú egyenletek is. Mérési eredményeinkre grafikont illeszthetünk.

A TI 83 legtöbb nyomógombja három funkcióban használható, ez egy picit nehézkessé teszi a programozást. A használat során előfordult, hogy véletlenül a CLEAR gombot nyomtuk meg, ami mindent törölt, jó lett volna, ha egy hatást érvénytelenítő gomb (UNDO) visszahozta volra a kijelző tartalmát. Az is kicsit kényelmetlen a „valódi” számítógépekhez szokottaknak, hogy a menükben csak egy irányban lehet haladni (nem lehet visszalépni).

A Texas Instruments újabb gépein bizonyára megoldhatók lesznek például a számrendszer- vagy a mértékegység-átváltások.

A kalkulátor egyszerű nyelven ügyesen programozható, szinte „bármit” megcsinál, még egyszerű játékprogram is írható rá. Itt is apró kifogásaink voltak csak: a programból nem tudtunk a beépített változóknak értéket adni; kellemesebb lenne a programokat editálás (módosítás) után közvetlenül futtatni.

A TI speciális kábellel, a Graph Linkkel összekapcsolható megszokott személyi számítógépeinkkel is. A mellékelt CD-ROM több, mint 700, a Texas kalkulátorain használható programot és játékot tartalmaz. A kalkulátoron megírt program, grafikon átküldhető a PC-re. Jó lenne, ha a későbbi fejlesztések során a PC-ről nemcsak az ott megírt program, hanem egyéb állományok is szerkeszthetők, visszatölthetők lennének.

A gépekhez magyar nyelvű, igen részletes kézikönyv tartozik, amelyből a példákon keresztül kiválóan megtanulható a használata. Néhány a rengeteg lehetőségből: matematikai és szögfüggvény műveletek, polárkoordináták, komplex aritmetika, matematikai statisztika és különféle alkalmazások: nemlineáris egyenletrendszerek, Sierpienski-háromszög ábrázolása, differenciál- és integrálszámítás szemléltetése.

Mindez a TI 83 kivetítési és PC-kapcsolatának lehetőségeivel együtt nagy segítséget nyújthat a matematika, sőt egyéb tantárgyak tanításában és tanulásában.

A TI 83-at Magyarországon az Euro-Profil Rt forgalmazza.

Címük: 1173 Budapest, Határhalom u. 4., telefonszámuk 253–1937,
e-mail címük: texas@elender.hu.

Fried Katalin
Oláh Vera

Mérőlap felvételire készülőknek IV.

1. Egy trapéz egyik párhuzamos oldalának hossza 22 egység, a két szárának hossza 14,3, illetve 16,5 egység, a trapéz magassága 13,2 egység. Számítsa ki a trapéz területét.

2. Igazolja, hogy ha n pozitív egész szám, akkor a következő kifejezések oszthatók 24-gyel.

a) $(n^2+3n+1)^2-1$; b) $n^4+6n^3+11n^2+6n$.

3. Határozza meg az $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x+\sin^4 x}$ függvény ($x \in \mathbf{R}$) szélsőérték helyeit és értékkészletét.

4. Az a_1, a_2, a_3, a_4 és b_1, b_2, b_3, b_4 két mértani sorozat első négy eleme. $a_1=b_1$, $a_2-b_2=3$, $a_3-b_3=6$ és $a_4-b_4=36$. Írja fel a sorozatok első négy elemét.

5. Oldja meg a valós számok halmazán a követlező egyenlőtlenséget!

$$\sqrt{\log_2 16-\log_2 x^5+(\log_2 x)^2} \leqslant \sqrt{2(\log_2 x)^2-5\log_2 x}.$$

6. Oldja meg a

$$\left|\frac{4\sin^2 x-1}{\cos x}\right|=\frac{4\cos^2 x-3}{\cos x}$$

egyenletet a valós számok halmazán!

7. Az $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai AB és CD, $AB=3\cdot CD$, $BC=AD$ és az AC átló merőleges a BD átlóra. Számítsa ki az A és B csúcsok koordinátáit, ha $C(6;4)$ és $D(3;3)$.

8. Tekintsük az

$$((a+2)x^2+(1-a)x+a-1)(4x-x^2-5) \leqslant 0$$

egyenlőtlenséget, ahol $a \in \mathbf{R}$ paraméter.

a) Határozza meg az a paraméter értékét úgy, hogy az egyenlőtlenségnek pontosan egy megoldása legyen!

b) Milyen a esetén van az egyenlőtlenségnek végtelen sok megoldása, és milyen a esetén nincs egyetlen megoldása sem?

Rábai Imre

Megoldásvázlatok, eredmények a III. mérőlap (1999/2. sz.) feladataihoz

1. a) Az egyenlet $2^x+2\cdot 2^{\frac{x}{2}}\cdot 5^{\frac{x}{2}}-3\cdot 5^x=0$ alakban írható. Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát 5^x-nel ($5^x>0$). Ekkor

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x+2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{x}{2}}-3=0,$$

ahonnan $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{x}{2}}=1$ (hiszen $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{x}{2}}>0$), és így $x=0$.

b) Legyen $x^2-3x+4=y$. Ekkor $y\geqslant\frac{7}{4}$ és

$$\frac{1}{y-1}+\frac{2}{y}=\frac{6}{y+1},$$

ahonnan $y=2$ vagy $y=\frac{1}{3}$. Ha $y=2$, akkor $x^2-3x+4=2$, $x_1=1$, $x_2=2$, és ezek az adott egyenletnek is megoldásai, ha $y=\frac{1}{3}$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.

c) Azonos átalakítások után szorzattá alakíthatunk:

$$4\sin x\cos x+2\sin x-(2\cos x+1)=0,$$
$$(2\cos x+1)(2\sin x-1)=0,$$

$\cos x=-\frac{1}{2}$ vagy $\sin x=\frac{1}{2}$, $x_{1,n}=\frac{2\pi}{3}+2n\pi$, $x_{2,m}=-\frac{2\pi}{3}+2m\pi$, $x_{3,k}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $x_{4,l}=\frac{5\pi}{6}+2l\pi$, $n,\ m,\ k,\ l\in\mathbf{Z}$.

2. a) Ha $x\geqslant 0$, akkor $x^2-1\leqslant-\frac{1}{2}$, $x^2\leqslant\frac{1}{2}$, tehát $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$ a megoldás;

ha $x<0$, akkor $(x+1)(-x-1)\leqslant-\frac{1}{2}$, azaz $(x+1)^2\geqslant\frac{1}{2}$,

$|x+1|\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$, tehát $x+1\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x\geqslant-1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ vagy pedig $x+1\leqslant-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x\leqslant-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$, így ebben az esetben $x\leqslant-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ vagy $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant x<0$ a megoldások.

b) Az egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha $\operatorname{tg} x=-1$, $x_n=-\frac{\pi}{4}+n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$, vagy ha $\operatorname{tg} x>0$, $k\pi<x<\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

c) Az $x\mapsto\log_2 x$ függvény szigorú monoton növekedése miatt $4^x-5\cdot 2^x+8>2^2$, azaz $(2^x-1)(2^x-4)>0$, tehát $2^x<1$ vagy $2^x>4$. Az egyenlőtlenség megoldásai: $x<0$ vagy $x>2$.

3. Az E pont ordinátája: $y_0=4$. Az e egyenes egy normálvektora $\mathbf{n}(4;-3)$ és $|\mathbf{n}|=5$.

A feltételeknek két kör felel meg. A körök középpontja legyen K_1 és K_2. Ekkor

$$\overrightarrow{EK}_1=2\mathbf{n}=(8;-6)\qquad\text{és}\qquad\overrightarrow{EK}_2=-\overrightarrow{EK}_1=(-8;6).$$

Így

$$\overrightarrow{OK}_1=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EK}_1=(-2;4)+(8;-6)=(6;-2)\qquad\text{és}$$
$$\overrightarrow{OK}_2=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EK}_2=(-2;4)+(-8;6)=(-10;10),\qquad\text{azaz}$$

$K_1=(6;-2)$ és $K_2=(-10;10)$.

A körök egyenlete: $(x-6)^2+(y+2)^2=100$, illetve $(x+10)^2+(y-10)^2=100$.

4. Ha a gyökök aránya $3:2$, akkor $x_1=3t$, $x_2=2t$, $t\in\mathbf{R}$, így $5t=-\frac{b}{a}$ és $6t^2=\frac{c}{a}$, tehát

$$6\cdot\left(-\frac{b}{5a}\right)^2=\frac{c}{a},$$

ahonnan $6b^2=25ac$.

Ha $6b^2=25ac$, akkor $4ac=\frac{24}{25}b^2$, az egyenlet diszkriminánsa

$$D=b^2-\frac{24}{25}b^2=\left(\frac{b}{5}\right)^2,$$

így $x=\frac{-b\pm\frac{b}{5}}{2a}$, $x_1=-\frac{3}{4}\cdot\frac{b}{a}$, $x_2=-\frac{2}{5}\frac{b}{a}$, azaz valóban $x_1:x_2=3:2$.

5. Legyen $AB=3a$ és $BC=2a$. Vegyük fel az *elemzőábrán* a P pontot az AB szakaszon belül. Legyen $BP=x$ ($x\in\mathbf{R}$), ekkor $AP=3a-x$; $PC=4\sqrt{5}$, $PD=8\sqrt{2}$. A PBC, illetve a PAD derékszögű háromszögekben $x^2+4a^2=80$, illetve $(3a-x)^2+4a^2=128$. A második egyenletből kivonva az elsőt $9a^2-6ax=48$, ahonnan $x=\frac{3a^2-16}{2a}$. Visszahelyettesítve az első egyenletbe, majd rendezve az egyenletet

$$25a^4-416a^2+256=0.$$

Innen $a^2=16$ vagy $a^2=\frac{16}{25}$, azaz $a=4$ vagy $a=\frac{4}{5}$. A téglalap területe $6a^2$, tehát $T=96$ vagy $T=\frac{96}{25}$ területegység. Ha $a=4$, akkor $x=4$, a P pont valóban A és B közé esik. Ha $a=\frac{4}{5}$, akkor $x=-\frac{44}{5}$, a P pont az AB szakaszon kívül, a B-ből induló, A-t nem tartalmazó félegyenesen van és $BP=\frac{44}{5}$. (A BP előjeles szakasz!)

6. Ha $\alpha=90^\circ$, akkor $\cos\alpha=0$, $\beta+\gamma=90^\circ$, $\sin\gamma=\cos\beta$; ha $\beta=90^\circ$, akkor $\cos\beta=0$, $\alpha+\gamma=90^\circ$, $\sin\gamma=\cos\alpha$. Tehát ha a háromszög derékszögű, akkor valóban

$$\sin\gamma=\cos\alpha+\cos\beta.$$

Ha $\sin\gamma=\cos\alpha+\cos\beta$, akkor azonosságok alkalmazásával

$$(1)\qquad 2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Mivel $\frac{\alpha+\beta}{2}=90^\circ-\frac{\gamma}{2}$, azért $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{\gamma}{2}$, tehát (1)-ből következik ($\sin\frac{\gamma}{2}>0$), hogy

$$(2)\qquad \cos\frac{\gamma}{2}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

A (2) pontosan akkor teljesül, ha

$$\gamma=\alpha-\beta\qquad\text{vagy}\qquad\gamma=\beta-\alpha,$$

azaz $\gamma+\beta=\alpha$ vagy $\gamma+\alpha=\beta$ tehát, $\alpha=90^\circ$ vagy $\beta=90^\circ$, tehát a háromszög derékszögű.

7. Ha $a > 1$, akkor az a alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton növekedése miatt

$$(1+\log_a x)\log_a x > 2+\log_a x, \qquad \text{ahol} \quad x>0.$$

Innen

$$(\log_a x)^2 > 2, \qquad \text{azaz} \qquad |\log_a x| > \sqrt{2},$$
$$\log_a x > \sqrt{2} \qquad \text{vagy} \qquad \log_a x < -\sqrt{2};$$

a megoldások ebben az esetben

$$x > a^{\sqrt{2}} \qquad \text{vagy} \qquad 0 < x < a^{-\sqrt{2}}.$$

Ha $0 < a < 1$, akkor az a alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton csökkenése miatt

$$(\log_a x)^2 < 2, \qquad \text{azaz} \qquad |\log_a x| < \sqrt{2},$$
$$-\sqrt{2} < \log_a x < \sqrt{2};$$

a megoldások ebben az esetben

$$a^{\sqrt{2}} < x < a^{-\sqrt{2}}.$$

8. Alkalmazzuk az $A>0$, $B>0$ esetben fennálló

$$A+B \geqslant 2\sqrt{AB}$$

azonos egyenlőtlenséget, ahol az egyenlőség pontosan $A=B$ esetén teljesül. Ezek szerint

$$x^4+4y^4 \geqslant 2\sqrt{4x^4y^4} = 4x^2y^2 \qquad \text{és}$$
$$4x^2y^2+\frac{1}{x^2y^2} \geqslant 2\sqrt{4x^2y^2\cdot\frac{1}{x^2y^2}} = 4.$$
$$x^4+4y^4+\frac{1}{x^2y^2} \geqslant 4x^2y^2+\frac{1}{x^2y^2} \geqslant 4.$$

A legkisebb helyettesítési érték tehát a 4, amit akkor vesz fel a kifejezés, ha $x^4=4y^4$ és $4x^2y^2 = \frac{1}{x^2y^2}$. Ez pontosan akkor teljesül, ha $x=1$ és $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ vagy $x=-1$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ vagy $x=1$, $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ vagy $x=-1$, $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Megjegyzés. A megoldás a következőkből is adódik:

$$x^4+4y^4+\frac{1}{x^2y^2} = (x^2-2y^2)^2+4x^2y^2+\frac{1}{x^2y^2} \geqslant$$
$$\geqslant (x^2-2y^2)^2+2\sqrt{4x^2y^2\cdot\frac{1}{x^2y^2}} = (x^2-2y^2)^2+4 \geqslant 4.$$

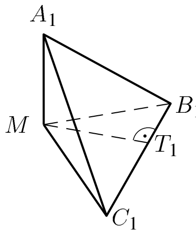
Az egyenlőség akkor teljesül, ha $x^2=2y^2$ és $4x^2y^2=\frac{1}{x^2y^2}$, azaz ha $y^2=\frac{1}{2}$ és $x^2=1$.

Rábai Imre

Matematika gyakorlatok megoldásai

Gy. 3205. *Az ABC hegyesszögű háromszög oldalaira kifelé félköröket szerkesztünk. Az A, B, C csúcsokból húzott magasságvonalak a félköröket rendre az E, F, G pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy az $AGBECF$ hatszögből egy ABC alapú gúla modellje készíthető el.* (**H**)

Szlovák versenyfeladat



1. ábra

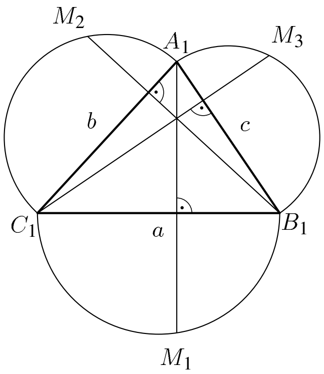
Megoldás. Legyenek az ABC háromszög oldalai a, b és c. Tekintsünk egy olyan gúlát (*1. ábra*), amelynek M csúcsából kiinduló élei páronként merőlegesek, és az élek hossza rendre

$$MC_1 = \sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}, \quad MB_1 = \sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}},$$
$$MA_1 = \sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}.$$

Ilyen gúla nyilván létezik, hiszen az ABC háromszög hegyesszögű. Azt fogjuk bizonyítani, hogy ennek a gúlának a hálózata egybevágó a feladatbeli hatszöggel.

Számítsuk ki először az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalait. A Pithagorasz-tétel szerint

$$B_1C_1 = \sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2}} = \sqrt{a^2} = a.$$



2. ábra

Hasonlóan kapjuk, hogy a másik két oldal b, illetve c. Az $A_1B_1C_1$ háromszög tehát egybevágó az ABC háromszöggel.

Húzzunk most merőlegest M-ből a B_1C_1-re, legyen ennek talppontja T_1. Mivel MA_1 merőleges MB_1 és MC_1-re, merőleges az MB_1C_1 háromszög síkjára, tehát B_1C_1-re is. Így B_1C_1 merőleges lesz az A_1MT_1 háromszög síkjára, amiből következik, hogy $A_1T_1 \perp B_1C_1$. Ezért, ha az MB_1C_1 lapot az a oldal körül az $A_1B_1C_1$ háromszög síkjába forgatjuk, M képe – ami a *2. ábrán* M_1 – éppen az $A_1B_1C_1$ háromszög A_1-ből húzott magasságvonalának és és a B_1C_1 oldal Thalesz-körének (egyik) metszéspontja lesz. Hasonló igaz az M_2 és M_3 pontokra.

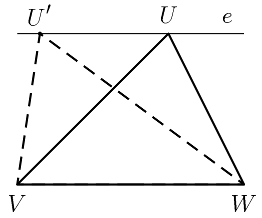
A leírtakból következik, hogy a *2. ábrán* $A_1M_3B_1M_1C_1M_2$ az első ábra gúlájának hálózata.

Gyenes Zoltán (Budapest, Apáczai Cs. J. Gimn., 10. o.t.)

108 dolgozat érkezett. 7 pontot kapott Kunszenti-Kovács Dávid, 6 pontot Legány Csaba és Papp Dávid. 5 pontos 32, 4 pontos 8, 3 pontos 58, 2 pontos 6, 0 pontos 1 dolgozat.

Gy. 3213. *Adott egy konvex ötszög kerületén egy P pont. Szerkesszünk olyan P-n átmenő egyenest, amely felezi az ötszög területét.* (**H**)

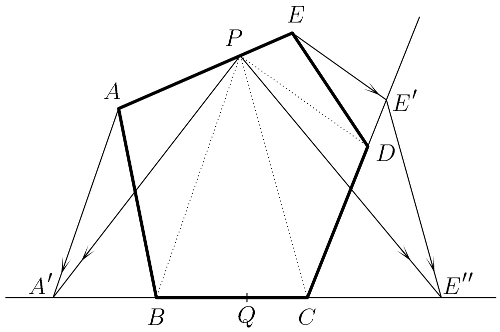
Megoldás. Az *1. ábrán* az e egyenes párhuzamos a VW oldallal. Ezért az e egyenes tetszőleges U' pontjára az UVW és az $U'VW$ háromszögek területe egyenlő. Ezt a módszert használva ötszögünket több lépésben egy vele egyenlő területű háromszöggé alakítjuk, amelynek egyik csúcsa a P pont. Azt pedig tudjuk, hogy egy háromszög területét a P-n átmenő egyenesek közül a P-ből induló súlyvonal felezi.



1. ábra

Tekintsük most a *2. ábrát.* Mivel az ötszög konvex, a P-n át szerkesztendő területfelező két pontban metszi az ötszög határvonalát. Tegyük fel egyelőre, hogy a másik metszéspont – legyen ez Q – a BC oldalra illeszkedik.

Húzzunk párhuzamost az A ponton át a BP átlóval, messe ez a BC egyenesét az A' pontban. Hasonlóan kapjuk a CD egyenesen az E' pontot. Az *1. ábrán* látottak szerint ekkor a $PA'CE'$ négyszög területe egyenlő az ötszög területével.



2. ábra

Ezután az E' ponton át húzzunk a PC átlóval párhuzamost; ez kimetszi BC-ből az E'' pontot. Az előbbiekhez hasonlóan kapjuk, hogy a $PA'E''$ háromszög területe egyenlő az ötszög területével. A keresett területfelező ennek a háromszögnek a PQ súlyvonala.

A PQ súlyvonal akkor felezi a háromszög területével együtt az ötszögét is, ha a P-ből induló súlyvonal a BC belső pontjában felezi $A'E''$-t. Ha nem ez a helyzet, a Q pont a BC szakaszon kívül van, akkor a BC szerepét az AB, egyéb esetekben a CD vagy pedig a DE oldal veszi át. Hasonló, de egy lépéssel rövidebb a megoldás, ha P az ötszög egyik csúcsa.

Jelölje T az $ABCDE$ ötszög területét.

A megoldás során az $ABCDE$ ötszöget először egy olyan ötszöggé alakítjuk, amelynek P a csúcsa ($A'PEDC$), majd ezt az ötszöget egy P csúcsú négyszöggé ($A'PE'C$), ezt pedig egy P csúcsú háromszöggé ($A'PE''$) úgy, hogy a lépések során minden alakzat változatlan, T területű.

Megjegyzés. Érkezett néhány hibás dolgozat. A hiba forrása: a megoldó úgy gondolta, hogy a területfelező egyenes mindig átmegy a súlyponton. Ez nem igaz, még háromszög esetén sem, pl. a háromszög egyik oldalával párhuzamos területfelező egyenes nem megy át a súlyponton.

63 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 36, 4 pontot 12, 3 pontot 7, 1 pontot 3, 0 pontot 5 beküldő.

Gy. 3214. *Egy társaságban valakit „félénk”-nek hívunk, ha legfeljebb* 3 *ismerőse van. Bizonyítsuk be, hogy ha mindenkinek van legalább* 3 *félénk ismerőse, akkor mindenki félénk. Hányan lehetnek ekkor a társaságban?*

I. megoldás. Minden félénknek a definíció szerint legfeljebb, a feltételezés szerint pedig legalább 3 ismerőse van. Ez azt jelenti, hogy minden félénknek pontosan 3 ismerőse van. A feltevés szerint ezek az ismerősök félénkek, tehát félénk embernek nincs nem félénk ismerőse. Mivel a feltevés szerint mindenkinek van félénk ismerőse, és az ismeretség kölcsönös, ezért mindenki félénk. Ezzel az első állítást beláttuk.

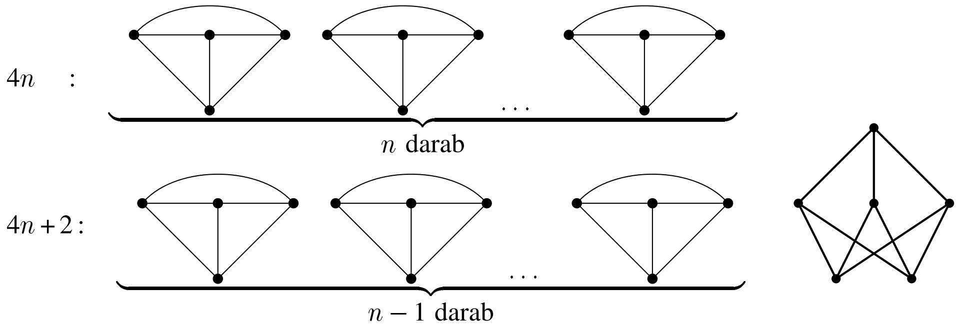
Egy ilyen n tagú társaságban az ismeretségek száma $\frac{3n}{2}$. Mivel ez egész szám, n csak páros lehet. A társaságban legalább négyen vannak, különben nem lehetne egy embernek 3 ismerőse. Megmutatjuk, hogy minden $n \geqslant 4$ páros szám megfelelő. Állítsuk ehhez az embereket egy szabályos n szög csúcsaiba. Mindenki ismerje a két szomszédos csúcsban lévő embert, és a vele szemközti csúcsban levőt, a többieket pedig ne. Ez a társaság nyilván megfelel a feladat feltételeinek. Ezzel beláttuk, hogy a társaság tagjainak a száma páros és legalább 4.

Takács Marcella (Székesfehérvár, József A. Gimn., 9. o.t.)

II. megoldás. a) Legyen a társaság n tagú. Tagonként számlálva a félénk ismerősöket, az n tag összesen legalább $3n$ félénket ismer. Mivel egy félénket legfeljebb 3 tag ismerhet, félénk tagokat legfeljebb 3-szor számoltunk meg. Így legalább $\frac{3n}{3} = n$ félénk van, ami azt jelenti, hogy mindenki félénk.

b) Mindenki 3 tagot ismer, így az egyikük ismerőseivel együtt legalább 4-en vannak. Ezért $n \geqslant 4$. Mivel mindenki pontosan 3 tagot ismer, és az ismeretség kölcsönös, az ismeretségek száma: $\frac{3n}{2}$, tehát az n értéke páros.

Megadunk egy konstrukciót olyan n-re, amelyre $2 \mid n$ és $n \geqslant 4$. Az ábrán látható gráfokban a csúcsok a tagokat, az élek pedig az ismeretségeket jelképezik:



Varjú Péter (Szeged, Radnóti M. Gimn., 10. o.t.)

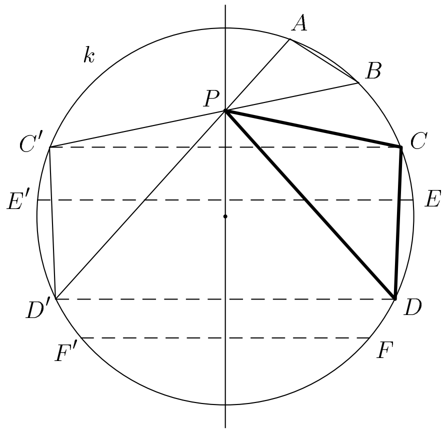
Megjegyzés. Harangi Viktor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.) a félénkség definíciójában szereplő értéket 3-ról m-re általánosítva is megoldotta a feladatot. Az I. megoldáshoz hasonló módon igazolva, hogy az adott feltételek esetén mindenki félénk, megmutatta, hogy ha az m páros szám, akkor minden $n \geqslant m+1$ számra létezik a megfelelő n-tagú társaság, ha pedig az m páratlan – mint a feladatban – akkor ezen kívül még az is szükséges, hogy az n páros legyen.

460 dolgozat érkezett. 6 pontos Harangi Viktor megoldása. 5 pontos 114, 4 pontos 106, 3 pontos 77, 2 pontos 19, 1 pontos 44, 0 pontos 97, nem versenyszerű 2 dolgozat.

Gy. 3218. *Az O középpontú kör két pontja A és B, egy O-tól különböző belső pontja P. Szerkesszünk a körön egy C és egy D pontot úgy, hogy a PAB és a PCD háromszög egyező körüljárású és hasonló legyen.*

Bohner Géza (Cegléd) javaslata alapján

Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. Az AP és BP másik metszéspontja a k körrel rendre D' és C'. A PAB és $PC'D'$ háromszögek hasonlóak, mert $PAB\sphericalangle$ és $PC'D'\sphericalangle$ egyazon íven nyugvó kerületi szögek, másrészt a P-nél lévő csúcsszögek is egyenlők. A szögek elrendezése miatt pedig a PAB és a $PC'D'$ háromszögek körüljárása ellentétes. Tükrözzük ezért a $PC'D'$ háromszöget a PO egyenesre. C' és D' tükörképe legyen C, illetve D. A PCD háromszög hasonló a PAB háromszöghöz, és a körüljárásuk most már megegyező. A feladat mindig megoldható, ha P nem illeszkedik AB-re.



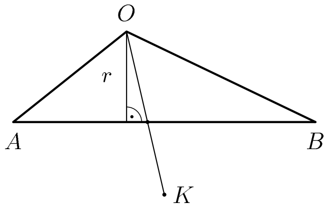
Szekeres Balázs (Szolnok, Kodály Z. Ált. Isk., 8. o.t.)

Megjegyzés. A PCD háromszög az egyetlen megoldás. Tegyük fel ugyanis, hogy létezik egy másik olyan PEF háromszög, amely megfelel a feladat feltételeinek. Tükrözzük ezt a háromszöget PO-ra, és például E tükörképe legyen E'. Tekintsük a P középpontú $\frac{PE'}{PC'}$ arányú $C'PE'$ szögű forgatva nyújtást. Ez a transzformáció a $PC'D'$ háromszöget a $PE'F'$ háromszögbe viszi át, de a k kört is elforgatja, hiszen O és P különbözőek. Ezért az F' pont nem lehet a k körön. Ez az ellentmondás azt mutatja, hogy nincs másik megoldás.

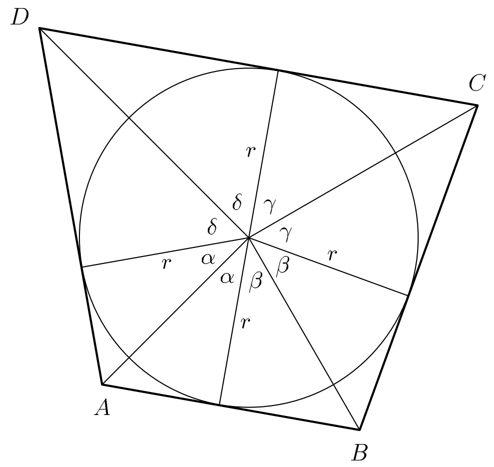
248 dolgozat érkezett. 6 pontos Harangi Viktor megoldása. 5 pontot kapott Ambrus Gergely, Árvay Eszter, Béky Bence, Bertus-Barcza Tímea, Bíró Ádám, Dumitrasc Alina Lavinia, Erdei Zsuzsa, Fehér 007 István, Gál 959 Balázs, Galambos Anikó, Germán Tibor, Hauser Edit, Ignácz Melinda, Kisfügedi Viktória, Kunszenti-Kovács Dávid, Kurcz Éva, Moldvai Levente, Nagy 039 Péter, Nagy Tamás, Nagy 444 Zoltán, Papp 249 Diána, Somogyi Dávid, Soós 740 Károly, Szebenyi Zoltán, Szekeres Balázs, Szente Dávid, Szilágyi Tamás, Szintai Balázs, Szűcs Zsófia, Tamás Krisztina, Toka László, Vajk Tamás és Víg Róbert megoldása. 4 pontos 62, 3 pontos 57, 2 pontos 22, 1 pontos 33, 0 pontos 30 dolgozat. Nem versenyszerű 10.

Gy. 3219. *Az $ABCD$ konvex érintőnégyszögbe írt r sugarú kör középpontját jelölje O. Bizonyítsuk be, hogy az OAB és OCD háromszögek köré írt körök közül valamelyiknek a sugara legalább r.*

Megoldás. Elegendő azt bizonyítani, hogy nem lehet mindkét háromszög O-nál lévő szöge hegyesszög. Ha ugyanis pl. az $AOB\sphericalangle$ tompaszög (vagy derékszög) (*1. ábra*), akkor a körülírt kör K középpontja a háromszögön kívül (vagy a határán) lesz, mégpedig az AB egyenes által határolt félsíkok közül abban, amelyik az O-t nem tartalmazza. Így ekkor $OK \geqslant r$.



1. ábra



2. ábra

Ezután megmutatjuk, hogy az $AOB\sphericalangle$ vagy $COD\sphericalangle$ egyike legalább derékszög. A *2. ábra* alapján könnyen látható, hogy a beírt kör négy sugara négy deltoidra bontja a konvex négyszöget, és a deltoidok egyik átlója szögfelező. Ezért $2\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta=360^\circ$, amiből $\alpha+\beta+\gamma+\delta=180^\circ$. Így $AOB\sphericalangle+COD\sphericalangle=180^\circ$, tehát a két szög valamelyike legalábbb 90°.

Rácz Judit (Szekszárd, Dienes Valéria Ált. Isk., 8. o.t.)

257 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 74, 4 pontot 65, 3 pontot 28, 2 pontot 15, 1 pontot 26, 0 pontot 30 beküldő. Nem versenyszerű 19 dolgozat.

Gy. 3220. *Egy húrtrapéz két párhuzamos oldala a és b ($a<b$). A hosszabbik alap egyik végpontjából a rövidebb alap 45°-os szögben látszik. Mekkora lehet a trapéz területe?*

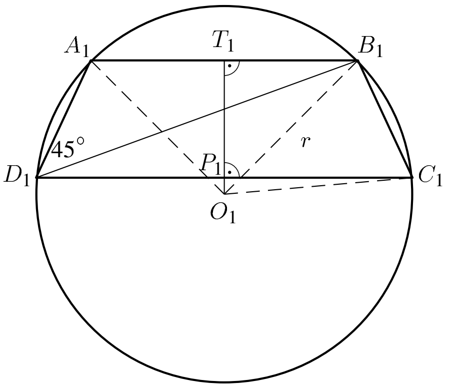
Megoldás. Használjuk az *ábrák* jelöléseit. Feltesszük, hogy a húrtrapéz konvex. A feltételeknek két különböző típusú trapéz is megfelelhet, ha b nem átmérő (lásd *1.* és *2. ábra*). A feladat kérdésére úgy adunk választ, hogy kifejezzük a trapéz területét a-val és b-vel.

A 45°-os kerületi szög révén az $A_1O_1B_1\sphericalangle=A_2O_2B_2\sphericalangle=90^\circ$. Ezért $O_1T_1=O_2T_2=\frac{a}{2}$, a kör sugara pedig $r=\frac{a}{\sqrt{2}}$. A Pitagorasz-tétel alapján

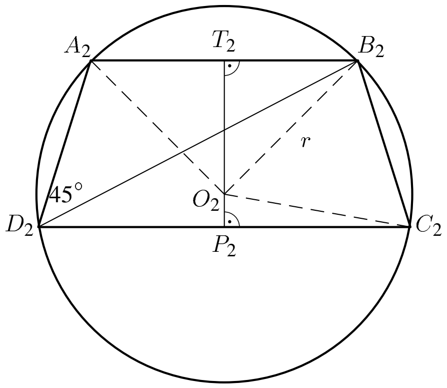
$$O_1P_1=\sqrt{\frac{a^2}{2}-\frac{b^2}{4}}=\frac{\sqrt{2a^2-b^2}}{2},$$

és így például az *1. ábra* trapézának magassága:

$$T_1P_1=\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{2a^2-b^2}}{2}=\frac{a-\sqrt{2a^2-b^2}}{2}.$$



1. ábra



2. ábra

Hasonlóan kapjuk, hogy $T_2P_2=\dfrac{a+\sqrt{2a^2-b^2}}{2}$. A trapéz területe

$$t_1=\frac{(a+b)\left(a-\sqrt{2a^2-b^2}\right)}{4}\quad\text{vagy}\quad t_2=\frac{(a+b)\left(a+\sqrt{2a^2-b^2}\right)}{4}.$$

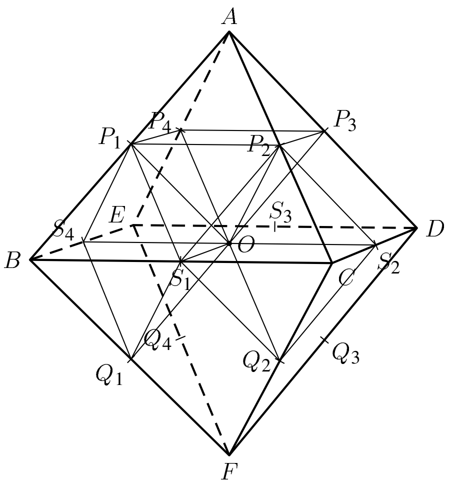
Ha b a kör átmérője, akkor $b=\dfrac{2a}{\sqrt{2}}$, azaz $\sqrt{2a^2-b^2}=0$. Ilyenkor $t_1=t_2=\dfrac{a(a+b)}{4}$.

Erdei Zsuzsa (Hajdúszoboszló, Hőgyes. E. Gimn., 9. o.t.)

250 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Harangi Viktor. 5 pontos 100, 4 pontos 38, 3 pontos 4, 2 pontos 14, 1 pontos 43, 0 pontos 50 dolgozat.

Gy. 3221. *Bizonyítsuk be, hogy hat egybevágó szabályos oktaéderből és nyolc velük egyező élű szabályos tetraéderből össze lehet rakni egy kétszer akkora élű szabályos oktaédert.* (**H**)

Megoldás. Legyenek egy szabályos oktaéder csúcsai A, B, C, D, E, F, az élek felezőpontjai P_1, P_2, P_3, P_4, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, S_1, S_2, S_3, S_4 és az oktaéder középpontja O, az *ábra* szerint. Kössük össze a P_i, Q_i, S_i ($i=1$, 2, 3, 4) pontokat O-val. Így a szabályos oktaédert 14 darab poliéderre daraboltuk föl. Ezek közül hat alakzat szabályos oktaéder. Nézzük ugyanis az $AP_1P_2P_3P_4O$ testet. Ez az eredeti szabályos oktaéder A pontból történő $\dfrac{1}{2}$ arányú kicsinyítése, ezért feleakkora élű, és szintén szabályos oktaéder. Ugyanígy tartozik az eredeti alakzat minden csúcsához egy feleakkora élű szabályos oktaéder.



Az A, B, C, csúcsokhoz tartozó „kis” oktaéderek közötti $P_1P_2S_1O$ csúcsokkal meghatározott test egy szabályos tetraéder, mert élei egyenlők, feleakkorák, mint az eredeti oktaéderé. Ez a tetraéder pontosan kitölti az említett három „kis" oktaéder közötti rést, mert három lapja a három oktaéder egy-egy lapja, a negyedik lapja pedig az ABC háromszög középvonalai alkotta háromszög. Ugyanígy láthatjuk be, hogy az eredeti oktaéder minden lapjához tartozik egy feleakkor élű szabályos tetraéder.

Nyilván a 6 „kis" oktaéder egybevágó, a 8 „kis" tetraéder szintén, és a leírtak alapján összerakható belőlük az eredeti szabályos oktaéder, ami éppen a feladat állítása.

Ambrus Gergely (Szeged, Radnóti M. Kísérl. Gimn., 10. o.t.)
Bálint Gergely (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 10. o.t.) és
Zábrádi Gergely (Győr, Révai M. Gimn., 11. o.t.)

222 dolgozat érkezett. 6 pontos Bákor Krisztina megoldása. 5 pontos 55, 4 pontos 35, 3 pontos 51, 2 pontos 30, 1 pontos 31, 0 pontos 19 dolgozat.

Gy. 3224. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a pozitív egészek körében:*

$$n+k=(n,k)^2$$
$$k+m=(k,m)^2$$
$$m+n=(m,n)^2,$$

ahol (a,b) *az* a *és* b *legnagyobb közös osztóját jelöli.* (**H**)

Megoldás. Vezessük be az $a=(n,k)$, $b=(k,m)$ és $c=(m,n)$ jelöléseket. Ekkor nyilván $(a,b)=(b,c)=(c,a)=(a,b,c)=(n,k,m)$. Jelöljük ezt a számot A-val. Először megmutatjuk, hogy most az A értéke 1, vagy 2.

Az A osztja a-t, b-t és c-t, ezért osztja e számok négyzetét, így az ezekkel a feltétel szerint egyenlő $n+k$, $k+m$ és $m+n$ összegeket is. Így osztója az ezekből az összegekből készített $(n+k+k+m-(m+n))=2k$, és ugyanígy a $2n$ és a $2m$ mennyiségeknek. Osztója tehát ezek legnagyobb közös osztójának, $(2k,2n,2m)=2(k,n,m)=2A$-nak is. Ha viszont $A^2\mid 2A$, akkor innen $A\mid 2$, azaz valóban $A=1$ vagy $A=2$ következik.

Mivel n osztható a-val és c-vel, osztható legkisebb közös többszörösükkel is és így természetesen legalább akkora, mint az

$$n\geqslant[a,c]=\frac{ac}{(a,c)}=\frac{ac}{A}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy $k\geqslant\dfrac{ab}{A}$ és $m\geqslant\dfrac{bc}{A}$. Az első két egyenlőtlenséget összeadva $a^2=n+k\geqslant\dfrac{ac+ab}{A}$, azaz

(1) $$A\cdot a\geqslant b+c.$$

Rendre ugyanígy kapjuk a

(2) $$A\cdot b\geqslant c+a$$

és a

(3) $$A\cdot a\geqslant b+c$$

egyenlőtlenségeket, végül ezek összegeként, hogy

$$A\cdot(a+b+c)\geqslant 2\cdot(a+b+c).$$

Így $A\geqslant 2$, vagyis a már igazolt $A\mid 2$-vel egybevetve csak $A=2$ lehetséges. Ekkor persze az $A\cdot(a+b+c)\geqslant 2\cdot(a+b+c)$ egyenlőtlenségben egyenlőség áll. Ez pedig azt jelenti, hogy az (1), (2), (3) egyenlőtlenségekben is egyenlőség van, azaz $2a=b+c$, $2b=a+c$ és $2c=a+b$. Innen pedig $a=b=c$ következik, és $A=(a,b,c)=2$ miatt a közös értékük 2.

Végül pedig $n+k=k+m=m+n=A^2=4$, tehát az egyenletrendszer egyetlen megoldása $k=n=m=2$.

Harangi Viktor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9 o.t.) és
Kunszenti-Kovács-Dávid (Oslo, Lycée Francais René Cassin) dolgozatai alapján

Megjegyzések. 1. Felhasználva az $A\leqslant 2$ eredményt, *Kiss 345 Gergely* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) ötlete alapján érdekes geometriai bizonyítás adható az $a=b=c$ egyenlőségre.

Az a, b, c számok közül bármely kettő négyzetösszege nagyobb a harmadik négyzeténél: például

$$a^2+b^2=n+k+k+m>n+m=c^2.$$

Így, mivel $(a+b)^2>a^2+b^2$, bármely kettő összege is nagyobb, mint a harmadik. Ez azt jelenti, hogy az a, b, c hosszúságú szakaszokból háromszög szerkeszthető és ez az oldalak négyzeteire teljesülő egyenlőtlenségek miatt hegyesszögű.

Írjuk fel erre a háromszögre a koszinusztételt:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma,$$

azaz

$$n+m=n+k+k+m-2ab\cos\gamma,$$

tehát

$$ab\cos\gamma=k.$$

Mivel a k többszöröse az a-nak és a b-nek, azért a legkisebb közös többszörösükkel, $[a,b]$-vel is osztható. Másrészt

$$ab=[a,b]\cdot(a,b)=[a,b]\cdot A,\qquad \text{így}\qquad k=ab\cos\gamma=[a,b]\cdot A\cdot\cos\gamma,$$

tehát $A\cos\gamma$ pozitív egész szám. Láttuk, hogy $A=1$ vagy 2 és $0^\circ<\gamma<90^\circ$ miatt $0<\cos\gamma<1$, így csak $\cos\gamma=\dfrac{1}{2}$ lehetséges (és $A=2$). A γ szög tehát 60°. A szimmetria miatt ekkor az a, b, c oldalú háromszög minden szöge 60°, így $a=b=c$ valóban.

2. A feladat nehéz volt, csak 4 jó megoldást kaptunk. A hibák leggyakoribb oka a következő hibás állítás volt: ha $ab=cd$ és $(a,c)=1$, akkor $a=d$ és $b=c$. Ez így nyilván nem igaz, hiszen átrendezve $t=\dfrac{a}{c}=\dfrac{d}{b}$, a bal oldalon a t tört redukált alakja áll, a jobb oldalon pedig tetszőleges alak. Az $a=d$ és $b=c$ következtetés csak akkor jogos, ha $(a,c)=1$ mellett a másik két tényező is relatív prím.

57 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Csiszár Gábor, Harangi Viktor, Máthé András és Tóth 013 Zoltán. 4 pontos 1, 3 pontos 3, 2 pontos 4, 1 pontos 16, 0 pontos 25, nem versenyszerű 4 dolgozat.

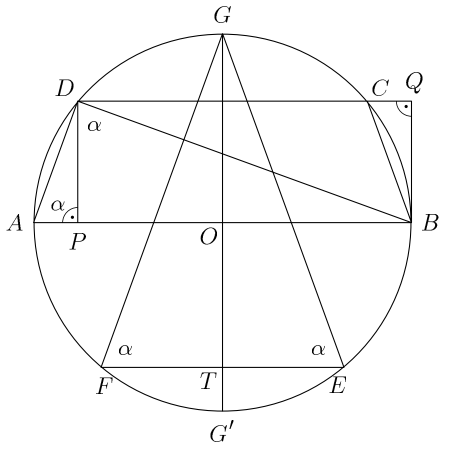
Gy. 3227. *Egy körbe két alakzatot írunk. Egy trapézt, amely a kör egyik átmérőjén nyugszik, és egy egyenlő szárú háromszöget, amelynek szárai párhuzamosak a trapéz száraival. Bizonyítsuk be, hogy a két alakzat területe egyenlő.*

Megoldás. Az $ABCD$ trapéz AB oldala átmérő. Rajzoljuk be az EFG egyenlő szárú háromszöget, amelyben $GF \parallel AB$ és $GE \parallel BC$ (*1. ábra*), D vetülete az átmérőn P. Tegyük fel először, hogy a G pont az AB átmérő „fölötti” nyitott íven van (az A és B pontokat nem számítjuk hozzá az ívhez). Mivel a háromszög egyenlő szárú, a GT szögfelező párhuzamos lesz DP-vel és átmegy a kör O középpontján, ezért GT a két alakzat közös szimmetriatengelye. Így EF párhuzamos lesz AB-vel, amiért az A, E és F csúcsoknál lévő α-val jelölt szögek egyenlők. Felhasználva, hogy $ADB\sphericalangle = 90^\circ$, a merőleges szárú szögekre vonatkozó tétel révén $BDP\sphericalangle = DAP\sphericalangle = \alpha$, és így $BDP\triangle \sim GET\triangle$.

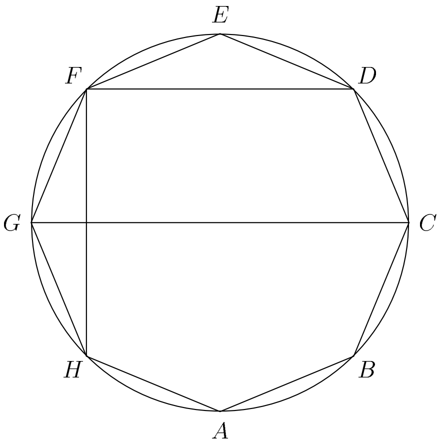
Megmutatjuk, hogy ez a két háromszög egybevágó. A GE húr az F pontból α szögben látszik, és ugyancsak α szögben látjuk a BD húrt A-ból. Ezért $GE = BD$, ami már elegendő az egybevágósághoz. A $DPBQ$ téglalap egyenlő területű a trapézzal, területe a BDP háromszög területének kétszerese, és ugyanez vonatkozik az EFG háromszögre. Tehát a két alakzat területe egyenlő.

Hasonló a megoldás, ha G az AB átmérő „alatti” nyitott AB íven van. Ekkor G szerepét az *1. ábrán* G'-vel jelölt pont veszi át. Végül megemlítjük, hogy a párhuzamosság fogalmát szigorúan véve (két egyenes párhuzamos, ha egy síkban vannak és nincs közös pontjuk), G nem eshet egybe A-val vagy B-vel, mert akkor nem teljesülne a háromszögszárak és a trapéz-szárak párhuzamossága (lásd még a megjegyzést).

Hablicsek Márton (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 7. o.t.)



1. ábra



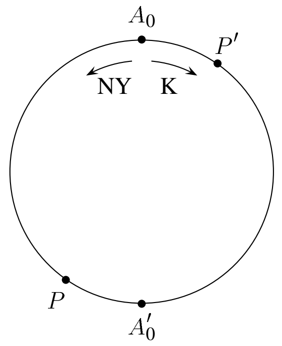
2. ábra

Megjegyzés. Győző Miklós (Budapest, Berzsenyi D. Gimn.) Megmutatta, hogy a feladat állítása a párhuzamosság vektoroknál szokásos tágabb értelmezése esetén nem teljesül. Legyen ugyanis $ABCDEFGH$ egy szabályos nyolcszög (*2. ábra*). Ennek szemközti oldalai párhuzamosak, tehát $GH \parallel DC$. Az $FDCG$ trapéz és a GHF egyenlő szárú háromszög megfelel a feltételeknek (ha az egy egyenesbe eső oldalakat is párhuzamosnak tekintjük), területük mégsem egyenlő.

238 dolgozat érkezett. 7 pontot kapott Győző Miklós, 6 pontot Deli Lajos, Eördegh Péter, Erdei Zsuzsa, Kucsera Dénes, Reiczigel Zsófia, Sára Péter, Somogyi Dávid, Szalay Zsófia és Tóth Ágnes. 5 pontos 180, 4 pontos 9, 3 pontos 5, 2 pontos 2, 1 pontos 7, 0 pontos 25 dolgozat.

Matematika feladatok megoldásai

F. 3214. *Aladdin bejárta az egyenlítő minden pontját, hol nyugatra, hol keletre mozogva az egyenlítő mentén, hol pedig átvarázsolva magát a Föld átellenes pontjára. Útja során legfeljebb* 19 000 km*-t ment nyugatra. Bizonyítsuk be, hogy volt olyan időpont, amikor a keletre és nyugatra megtett utak hosszának különbsége legalább az egyenlítő fele volt.*



Megoldás. Kövessük Aladdin mozgását a következőképpen. Őt magát jelöljük A-val, és vezessük be A'-t (A tükörképét) aki úgy mozog, hogy minden pillanatban a Föld A-val átellenes pontjában található. Így az A, A' pontpár mozgásán „nem látszik meg”, ha Aladdin a Föld átellenes pontjára ugrik (csupán A és A' cserél helyet). Ha tehát az A és A' pontokat menet közben nem különböztetjük meg, akkor az A, A' pontpár mozgása mindvégig „folytonos”. Jelölje Aladdin kezdetbeni tartózkodási helyét A_0, az A'-ét pedig A_0'. Legyen P az A_0-tól legnyugatabbra fekvő azon pont, ahová A a mozgása során eljutott.

Tételezzük fel, hogy a feladat állításával ellentétben az A által a keletre és nyugatra megtett utak különbsége mindig kisebb volt az egyenlítő felénél. Ekkor A sohasem járhatott a PA_0' ív egyetlen belső pontjában sem, mivel az A_0P ív hossza legfeljebb 19.000 km (azaz rövidebb az egyenlítő felénél). Így A' nem járhatott a $P'A_0$ ív egyetlen belső pontjában sem. Azonban A és A' *együtt* az egyenlítő minden pontján legalább kétszer áthaladt; ezért A a $P'A_0$ ív minden belső pontját legalább kétszer bejárta.

Mivel A nem mehetett az egyenlítőn körbe, ez csak úgy lehetséges, hogy A a $P'A_0$ ívet legalább egyszer nyugati irányban bejárta. Tehát nyugati irányban A az A_0P és a $P'A_0$ ívet is bejárta, ezek együttes hossza pedig éppen az egyenlítőnek a fele. Ez ellentmond feltevésünknek, tehát a feladat állítása igaz.

32 dolgozat érkezett. 5 pontos Juhász András, Lippner Gábor, Robotka Zsolt, Terpai Tamás és Végh A. László megoldása. 4 pontos 12, 3 pontos 5, 2 pontos 3, 1 pontos 4, 0 pontos 3 dolgozat.

F. 3238. *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c valós számok esetén igaz a következő egyenlőtlenség:*

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\geqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Megoldás. Írjuk fel a számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget az $|a|$, $|1-b|$; $|b|$, $|1-c|$; $|c|$, $|1-a|$ számpárokra:

$$\sqrt{\frac{a^2+(1-b)^2}{2}} \geqslant \frac{|a|+|1-b|}{2} \geqslant \frac{a+1-b}{2},$$
$$\sqrt{\frac{b^2+(1-c)^2}{2}} \geqslant \frac{|b|+|1-c|}{2} \geqslant \frac{b+1-c}{2},$$
$$\sqrt{\frac{c^2+(1-a)^2}{2}} \geqslant \frac{|c|+|1-a|}{2} \geqslant \frac{c+1-a}{2}.$$

E három egyenlőtlenség $\sqrt{2}$-szeresét összeadva éppen a kívánt állítást kapjuk.

Az egyenlőségnek az a feltétele, hogy külön-külön mindenütt egyenlőség álljon, azaz $|a|=|1-b|$, $|b|=|1-c|$, $|c|=|1-a|$ és a, b, $c \geqslant 0$ teljesüljön. Ez pontosan azt jelenti, hogy $a=b=c=\dfrac{1}{2}$.

Horváth 472 András (Szeged, JATE Ságvári E. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

244 dolgozat érkezett. 7 pontot kapott Horváth 472 András, Metz Balázs és Tóth 370 Ágnes. 6 pontos Mansur Boase, Máthé András és Szép László megoldása. 5 pontos 34, 4 pontos 77, 3 pontos 73, 2 pontos 18, 1 pontos 7 dolgozat. Hibás 21, nem versenyszerű 8.

F. 3239. *Mely x, y természetes számokra teljesül az*

$$x^2(x^2+y^2)=y^{100}$$

egyenlőség?

I. megoldás. A feladatbeli egyenlet x^2-re másodfokú, ezt (y-nal mint paraméterrel) megoldva:

$$x^2=\frac{-y^2 \pm \sqrt{y^4+4y^{100}}}{2}.$$

Ahhoz, hogy x^2 egész szám legyen, szükséges, hogy y^4+4y^{100} négyzetszám. Mivel $(2y^{50})^2 \leqslant y^4+4y^{100} < (2y^{50}+1)^2$ – ha y egész –, ezért $4y^{100}=y^4+4y^{100}$, azaz $y=0$ és akkor $x=0$, ami valóban megoldás.

Babos Attila (Budapest, Apáczai Cs. J. Ginm., 10. o.t.)

II. megoldás. Tegyük fel, hogy x és y 0-tól különböző. Ekkor

$$x^2y^2=y^{100}-x^4=(y^{50}-x^2)(y^{50}+x^2)=(y^{25}-x)(y^{25}+x)(y^{50}+x^2).$$

Itt, mivel $y^{25}+x$ és $y^{50}+x^2$, valamint x^2y^2 pozitív, $y^{25}-x \geqslant 1$. Másrészt $y^{25}+x>y^2$ és $y^{50}+x^2>x^2$, ezért

$$x^2y^2=(y^{25}-x)(y^{25}+x)(y^{50}+x^2)>1\cdot y^2\cdot x^2,$$

ami ellentmondás. Tehát x vagy y nulla, és így az egyetlen megoldás $x=y=0$.

Naszódi Gergely (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

III. megoldás. Az előző megoldáshoz hasonlóan ezúttal is az $xy \neq 0$ esettel foglalkozunk. Jelölje az x és y legnagyobb közös osztóját d; ekkor $x = da$, $y = db$, ahol a és b egymáshoz relatív prím pozitív egészek. Az egyenlet mindkét oldalát d^4-nel elosztva:

$$a^2(a^2+b^2) = d^{96}b^{100}.$$

Mivel a és b relatív prímek, ezért b^{100} az a^2-hez is és az (a^2+b^2)-hez is relatív prím. Az egyenlet szerint azonban b^{100} osztója $a^2(a^2+b^2)$-nek; ez csak úgy lehetséges, ha $b^{100} = 1$, azaz $b = 1$. Ekkor $a^2 + 1 = \dfrac{d^{96}}{a^2} = \left(\dfrac{d^{48}}{a}\right)^2$, ami lehetetlen, hiszen egy pozitív négyzetszám rákövetkezője nem lehet négyzetszám.

Devecsery András (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

186 dolgozat érkezett. 7 pontot kapott Pataki Péter, 6 pontot Bákor Krisztina, Birkner Tamás, Lábó Eszter, Lábó Melinda, Máthé András, Mecz Balázs, Pozsár Balázs és Terpai Tamás. 5 pontos 140, 4 pontos 5, 3 pontos 5, 2 pontos 3, 1 pontos 18, 0 pontos 6 dolgozat.

F. 3240. *Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan a, b pozitív egész számokból álló pár van, amelyre a osztója (b^2+b+1)-nek, és b osztója (a^2+a+1)-nek.*[1]

Megoldás. Ha $a \mid b^2+b+1$ és $b \mid a^2+a+1$, akkor a és b relatív prímek. Ha ugyanis a és b legnagyobb közös osztója d, akkor $d \mid a$, illetve $a \mid b^2+b+1$ miatt $d \mid 1$. Mivel $a^2+b^2+a+b+1$ osztható az egymáshoz relatív prím a-val és b-vel, osztható ab-vel is.

Megfordítva, ha $a^2+b^2+a+b+1$ osztható ab-vel, akkor nyilván teljesülnek a feladatban szereplő oszthatóságok is. Összefoglalva: $a \mid b^2+b+1$ és $b \mid a^2+a+1$ akkor és csak akkor teljesül, ha $ab \mid a^2+b^2+a+b+1$.

Legyen az n pozitív egész, és tekintsük az

$$x^2+y^2+x+y+1 = nxy \tag{1}$$

egyenletet. Azt állítjuk, hogy ha ennek van egy pozitív egészekből álló megoldása, akkor végtelen sok van. Tegyük fel, hogy (x_0, y_0) egy megoldása (1)-nek és $x_0 \leqslant y_0$. Ha (1)-et paraméteres másodfokú egyenletnek tekintjük, amelyben x az ismeretlen, akkor az egyenlet egyik gyöke x_0, a másik pedig a gyökök és együtthatók közti összefüggés alapján

$$x_1 = ny_0 - 1 - x_0 = \frac{y_0^2+y_0+1}{x_0}.$$

Az első formula alapján ez a gyök is egész, a második alapján pedig pozitív, sőt

$$x_1 = \frac{y_0^2+y_0+1}{x_0} > \frac{y_0^2}{y_0} = y_0.$$

Az (1) egyenletnek ezért az (x_1, y_0) számpár egy újabb, pozitív egészekből álló megoldása, amelyben a két szám összege nagyobb, mint az előzőben: $x_1 + y_0 > x_0 + y_0$. A megoldások között nincs tehát olyan, amelyben a két ismeretlen összege maximális.

[1] ld. még az **N. 182.** feladat megoldását ezen szám 164. oldalán.

Végül ha $n=5$, akkor (1)-nek van is megoldása, például $x=y=1$. Az előbbiek alapján ebből következik, hogy végtelen sok olyan (a,b) számpár van, amelyre $a^2+b^2+a+b+1=5ab$, amivel a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyzések. 1. A feladat rokonságot mutat a KöMaL N.67. feladattal, amelynek megoldása megtalálható az 1996/4. számban. Ott azt kellett igazolni, hogy végtelen sok pozitív (m,n) számpár létezik, amelyre $n \mid m^2+1$ és $m \mid n^2+1$. Az egyik megoldás ugyanúgy megy, mint ennél a feladatnál.

2. Tekintsük az $f_1=f_2=1$ kezdőelemekkel definiált $f_n=5f_{n-1}-f_{n-2}-1$ sorozatot. Nem nehéz igazolni (pl. teljes indukcióval), hogy tetszőleges k pozitív egész esetén

$$f_k^2+f_k+1=f_{k-1}\cdot f_{k+1}.$$

Ekkor viszont igaz, hogy $\dfrac{f_k^2+f_k+1}{f_{k+1}}=f_{k-1}\in \mathbf{Z}$ és $\dfrac{f_{k+1}^2+f_{k+1}+1}{f_k}=f_{k+2}\in \mathbf{Z}$, tehát a sorozat (f_k,f_{k+1}) számpárjai is megfelelőek, amiből szintén következik, hogy végtelen sok megfelelő számpár van. (Továbbá más n-re nincs megoldása, és ezek adják az összes megoldást.)

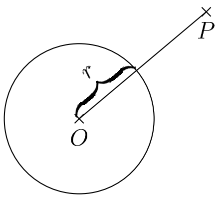
3. A feladatot általánosíthatjuk a következő módon: bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan a, b pozitív egész szám van, amelyre adott pozitív egész k esetén $a \mid b^2+kb+1$ és $b \mid a^2+ka+1$. $k=1$ esetén kapjuk az eredeti feladatot, $k=0$ esetén pedig az 1. megjegyzés feladatát. A fentiekhez hasonlóan lehet belátni ezt az állítást is.

Pataki Péter (Miskolc, Földes F. Gimn., 12. o.t.)

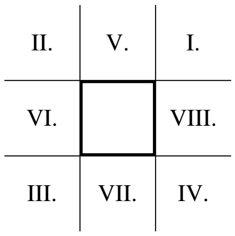
84 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Györey Bernadett, Horváth 472 András, Kiss 345 Gergely, Naszódi Gergely és Pataki Péter. 5 pontos 42, 4 pontos 22, 3 pontos 1, 2 pontos 4, 1 pontos 2, 0 pontos 8 dolgozat.

F. 3242. *Egy (zárt) K síkidom és egy P pont távolsága legyen a PQ távolságok minimuma, ahol $Q\in K$. Adott a síkon egy négyzet és egy rajta kívül elhelyezkedő olyan kör, amelynek középpontja a négyzet egyik oldalegyenesén van. Határozzuk meg a síkon azon pontok halmazát, amelyek egyenlő távolságra vannak a körtől és a négyzettől.*

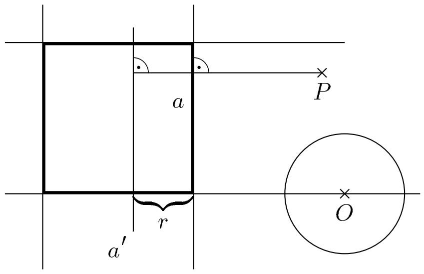
Megoldás. Jelöljük az adott kör középpontját O-val, sugarát pedig r-rel. Egy, a körön kívül elhelyezkedő P pontnak a körtől való távolsága a definícióból következően ekkor $PO-r$ (*1. ábra*). Egy P pontnak és az adott négyzetnek a távolságát bonyolultabb



1. ábra



2. ábra

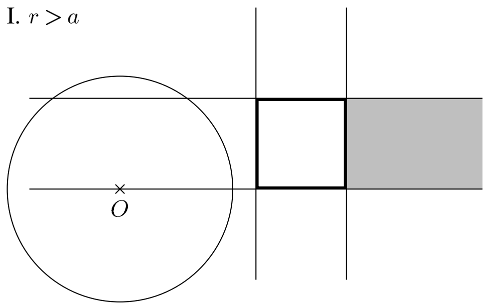


3. ábra

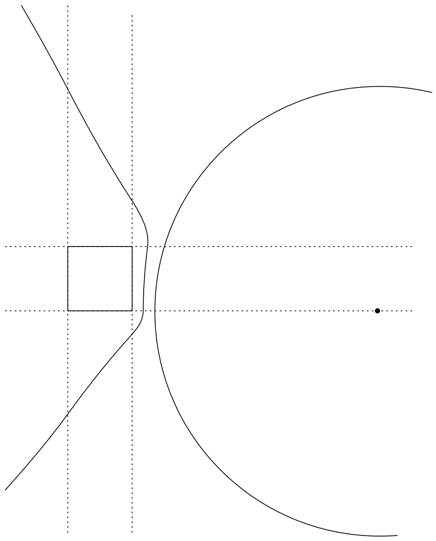
meghatározni. A négyzet oldalegyenesei a síkot 9 részre osztják. A négyzet belsején kívül 4 olyan síkrész van (a *2. ábrán* az I–IV. jelűek), amelyiknek a négyzettel csak egy közös pontja van, 4 síkrész pedig (az V–VIII. jelűek) egy-egy oldallal csatlakozik a négyzethez. Az első típusú síkrészekben lévő P esetén P-nek a megfelelő négyzetcsúcstól való távolsága a keresett távolság, a második típusú síkrészben pedig P-nek a megfelelő oldaltól való távolsága.

Ha az A négyzetcsúcshoz tartozó síkrészben lévő P pont egyenlő távol van a körtől és a négyzettől, akkor az eddigiekből következően $PO-r=PA$, vagyis $PO-PA=r$. Tehát P rajta van egy O és A fókuszú hiperbolának az A-hoz közelebbi ágán. Megfordítva, ennek a hiperbolaágnak mindegyik az A-hoz tartozó síkrészben lévő H pontjára teljesül, hogy $HA=HO-r$, vagyis H egyenlő távolságra van a körtől és a négyzettől.

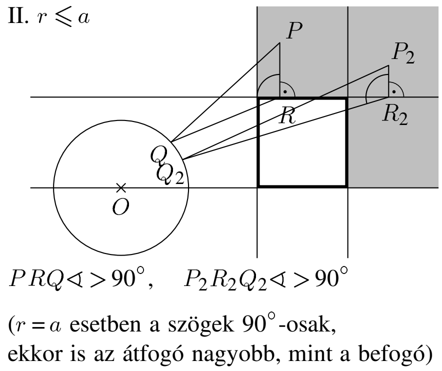
Ha a négyzet a oldalához tartozó síkrészben keressük a megfelelő P pontokat, akkor $PO-r=d(P,a)$, ahol $d(P,a)$ jelöli P és a távolságát. Legyen a' az az a-val párhuzamos, tőle r távolságra lévő egyenes, amit a elválaszt P-től (*3. ábra*). Ekkor $d(P,a')=$ $=d(P,a)=d(P,a)+r$, vagyis ha P megfelelő pont, akkor $PO=d(P,a')$, tehát P rajta van egy O fókuszú, a' vezéregyenesű parabolán. Megfordítva, ennek a parabolának minden olyan pontja, amelyik az a-hoz tartozó síkrészben van, nyilván egyenlő távolságra van a körtől és a négyzettől.



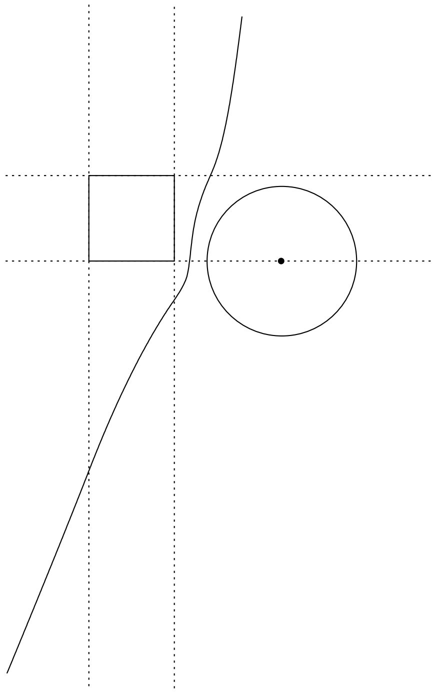
4. ábra


5. ábra

A keresett ponthalmaz tehát egy parabola- és hiperbolaívekből álló görbe. Ha r nagyobb, mint a négyzet oldala, akkor a 8 lehetséges síkrész közül csak egyben (a *4. ábrán* satírozott részben) nincs pont, minden itteni pont nyilván közelebb van a négyzethez, mint a körhöz. A keresett görbe az *5. ábrán* látható. Ha r nem nagyobb, mint a négyzet oldala, akkor a 8 síkrész közül háromban (a *6. ábrán* satírozott részekben) nincs pontja



6. ábra

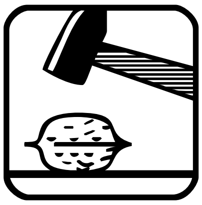


7. ábra

a görbének, mert az ábrán jelölt szögek tompaszögek, ezért a síkrészek minden pontja közelebb van a négyzethez, mint a körhöz. A keresett görbe a *7. ábrán* látható.

Papp Dávid (Budapest, Szent István Gimn., 11. o.t.) és
Venter György (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) dolgozatai alapján

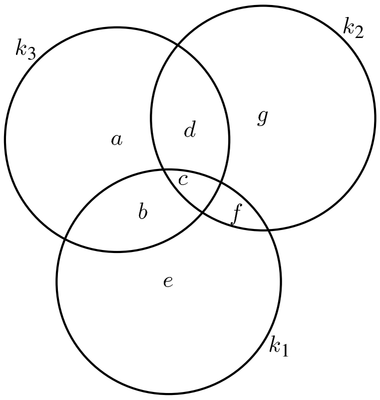
66 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Barát Anna, Benedek Csaba, Fehér Lajos Károly, Gajári Dávid, Györey Bernadett, Kiss 345 Gergely, Kunszenti-Kovács Dávid, Lábó Melinda, Lengyel 821 Zoltán, Papp Dávid, Terpai Tamás, Vágvölgyi Péter, Venter György és Vértesi Vera. 4 pontos 9, 3 pontos 19, 2 pontos 11, 1 pontos 7, 0 pontos 6 dolgozat.



Nehezebb matematika feladatok megoldása

N. 167. *Adott a síkon három egységnyi sugarú körlemez. Legyen t_1 és t_2 annak a két tartománynak a területe, amelyet a körök pontosan egyszer, illetve pontosan kétszer fednek le. Igazoljuk, hogy $t_1 \geqslant t_2$.*

Megoldás. Jelöljük a körök által háromszorosan lefedett területrészt t_3-mal, és használjuk az *1. ábra* jelöléseit (az a, b, c, d, e, f, g a megfelelő tartományokat és azok területét is jelölik).



1. ábra

A feladat állítása: $t_1 \geqslant t_2$, azaz $3\pi = t_1 + 2t_2 + 3t_3$ miatt $t_2 + t_3 \leqslant \pi$. Ez $b + c + d + f \leqslant \pi$, ami másképpen írva

$$b \leqslant \pi - c - d - f = g.$$

Most nézzük a *2. ábrát* ($A_1A_2A_3 \parallel B_1B_2B_3 \parallel O_1O_2 \parallel P'P''$).

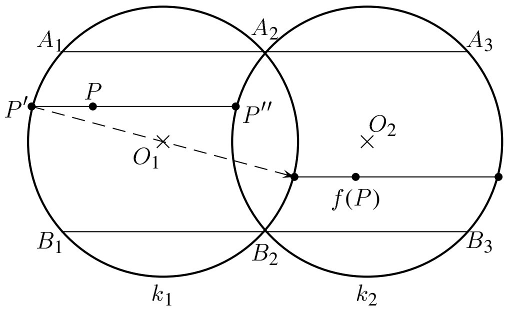
Megadunk egy

$$f : k_1 \setminus k_2 \to k_2 \setminus k_1$$

leképezést:

ha $P \in k_1 \setminus k_2$ és P az A_1A_2 és B_1B_2 között található, akkor $f(P)$-t úgy kapjuk, hogy P-t eltoljuk $2\overrightarrow{P'O_1}$-gyel;

ha pedig P például az A_1A_2 körszeletben van, akkor egy olyan csúsztatva tükrözéssel kapjuk belőle $f(P)$-t, amely az A_1A_2 szeletet a B_2B_3 körszeletbe viszi. (Hasonlóan f a B_1B_2 körszeletet az A_2A_3 szeletbe képezi.) Ezzel minden $P \in k_1 \setminus k_2$-re megadtuk $f(P)$-t.



2. ábra

A következő két állítás részletes bizonyítását az Olvasóra bízzuk:

a) f területtartó (Cavalieri-elv)

b) minden P-re $d(P, f(P))$ (azaz P és $f(P)$ távolsága) legalább 2.

Ezek szerint elég lenne belátnunk, hogy $f(b) \subset g$, mert akkor $b \leqslant g$ bizonyítást nyer. Tegyük fel, hogy ez nem igaz, azaz van egy $B \in b$, amelyre $f(B) \notin g$; azaz $f(B) \in d$. Ekkor B és $f(B)$ egyaránt benne vannak k_3-ban, és távolságuk legalább 2. Ez ellentmondás, hiszen nyugodtan feltehetjük, hogy nyílt körlapokkal van dolgunk.

Készen is lennénk, csak a bizonyítás során definiált f nem adható meg, ha a három kör között nincs két olyan, amely a *2. ábra* szerint helyezkedik el, azaz ha a körök közül kettő egybeesik, vagy ha semelyik két körnek nincs közös pontja. Ezek az esetek viszont triviálisak.

Csóka Endre (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 8. o.t.) megoldása alapján

Megjegyzés. Ez a megoldás működik akkor is, ha körök helyett egy szimmetrikus konvex síkidom három eltolt példányáról van szó, bár akkor egy-két rész nehezebben kezelhető.

16 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Bérczi Gergely és Csóka Endre. 4 pontot kapott Terpai Tamás és Végh A. László. 0 pontos 12 dolgozat.

N. 171. *Adottak a síkban az e_1, e_2, $\ldots$, e_n egyenesek és a P pont. A P pontot merőlegesen vetítjük az első egyenesre, a képét levetítjük a soron következő egyenesre stb. Az utolsó egyenesről ismét az elsőre vetítünk, és folytatjuk az eljárást. Bizonyítsuk be, hogy a P pont vetületei korlátos ponthalmazt alkotnak.*

Javasolta: *Dr. Pap Gyula,* Debrecen

Megoldás. Ha minden e_i párhuzamos, akkor az állítás triviális, ugyanis P képei véges sok pontot járnak be. Ezért feltehető, hogy az egyenesek nem mind párhuzamosak.

Jelöljük π_i-vel az e_i egyenesre való vetítést, P_j-vel pedig a P képét j darab vetítés után.

A $\varphi := \pi_1 \circ \pi_n \circ \ldots \circ \pi_3 \circ \pi_2$ transzformáció (vagyis a π_2, π_3, $\ldots$, π_n, π_1 leképezések egymásutánja) az e_1 egyenest önmagába képezi egy λ arányú nyújtással, ahol

$$|\lambda| = |\cos\sphericalangle(e_1, e_2)| \ldots |\cos\sphericalangle(e_n, e_1)|.$$

Itt nyilván $0 \leqslant |\lambda| < 1$, ugyanis kell lennie két szomszédos egymással nem párhuzamos egyenesnek. φ az e_1 egyenesen tehát egy kicsinyítés, ezért van egy $O \in e_1$ középpontja. Tetszőleges e_1-en fekvő Q pont O-ra vonatkozó tükörképét $-Q$-val jelölve ekkor $P_{nk+1} \in [-P_1, P_1]$ minden $k \in \mathbf{N}$-re, ezért

$$P_{nk+m} \in (\pi_{m+1} \circ \ldots \circ \pi_3 \circ \pi_2)([-P_1, P_1]) =: I_m,$$

minden $m \in \{1, \ldots, n\}$ esetén. Tehát P vetületei az I_1, I_2, $\ldots$, I_n szakaszok valamelyikén vannak. Véges sok szakasz egyesítése pedig korlátos halmaz.

10 dolgozat érkezett. 5 pontos Bérczi Gergely, Gerbicz Róbert, Gyenes Zoltán, Juhász András, Kun Gábor, Lukács László, Terpai Tamás és Végh A. Zoltán megoldása. 4 pontot kapott Lippner Gábor és Székelyhidi Gábor.

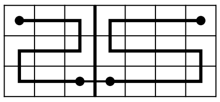
N. 176. *Egy $n \times n$-es táblázaton egy bábu fel, le, balra, jobbra tud egyet-egyet lépni. Elindul a bal felső sarokból, és bejár minden mezőt pontosan egyszer. Ezt a bábu t_n-féle útvonalon tudja megtenni. Bizonyítsuk be, hogy elég nagy n-re*

$$1{,}25 < \sqrt[n^2]{t_n} < 2.$$

Adható-e jobb felső becslés?

Megoldás. *Alsó becslés:* Először becsüljük meg, hogy egy $3 \times k$-as téglalapnak legalább hány bejárása van:

2^{k-1}-féleképpen lehet felosztani 3 magasságú téglalapokra a táblát. Minden ilyen felosztáshoz tartozik egy bejárás, amit úgy kapunk, hogy a 3 magasságú szeleteket „S”, illetve „Z” alakú úton járjuk be (*1. ábra*). Ezek mind különböző bejárások.



1. ábra

Vizsgáljuk most azt, hogy egy $3\times n$-es táblát hányféleképpen lehet úgy bejárni, hogy az átellenes sarok az utolsó mező. Vegyük az első $3\times(n-2)$-es részt. Ezt bejárjuk tetszőlegesen, az utolsó 3×2-es részben pedig úgy manőverezünk, hogy a megfelelő sarokba érkezzünk. Ez mindig lehetséges:

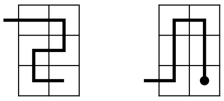
Az $n\times n$-es táblán elhelyezünk $\left[\frac{n}{3}\right]$ kicsi táblát, amelyek $3\times n$-esek. Ezeket sorban bejárjuk a fenti módon, majd az alul esetleg kimaradó 1–2 sort tetszőlegesen bejárjuk. Így $t_n \geqslant 2^{(n-3)\left[\frac{n}{3}\right]}$, és

$$\sqrt[n^2]{2^{(n-3)\left[\frac{n}{3}\right]}} \to \sqrt[3]{2} > 1{,}25.$$

Felső becslés: Tekintsünk egy adott bejárást. Két mezőt összekötünk, ha a bábu köztük lépett egyet a bejárás közben. Tegyük fel, hogy csak a párosadik oszlopokban levő mezőkről tudjuk, mely mezőkkel vannak összekötve. Azt állítjuk, hogy ezek már meghatározzák a bejárást, ha még azt is tudjuk, melyik mezőn ér véget az útvonal.

Bizonyítás: Minden mezőről tudjuk, hogy egy vagy két mezővel van-e összekötve a négy (vagy kevesebb) szomszédja közül. Ha egy rögzített mező szomszédairól egyet kivéve tudjuk, melyikkel van összekötve, melyikkel nem, akkor a hiányzóról kikövetkeztethetjük, vele össze van-e kötve a rögzített mező. Így a páratlanadik oszlopok fentről lefelé haladva egyértelműen „kitölthetők”.

Még azt számoljuk ki, hogy legfeljebb hányféleképpen lehet egy oszlopot úgy megrajzolni, hogy a *2. ábra* egy bejárásából származhasson.



2. ábra

A legfelső mező legfeljebb 3-féleképpen tölthető ki, mert 1 vagy 2 él megy belőle 2 vagy 3 szomszédba. Ha egy mező felett már kitöltöttük a többit, akkor legfeljebb 3 lehetőség marad erre a mezőre, a fentihez hasonlóan. A legalsó mezőnél már csak legfeljebb 2 eset lehetséges. Azaz egy oszlop szóba jövő kitöltéseinek száma $2\cdot 3^{n-1}$.

(A fenti gondolatmenet akkor is működik, ha a kezdő vagy utolsó mező, aminek egy kimenő éle van, ebbe az oszlopba esik.)

Mivel n^2-féle lehet az utolsó mező, azért

$$n^2\left(3^{\left[\frac{n}{2}\right]\cdot(n-1)}\cdot 2^{\left[\frac{n}{2}\right]}\right) \geqslant t_n,\quad \sqrt[n^2]{t_n} \leqslant \sqrt[n^2]{n^2\cdot 3^{\frac{n^2}{2}}},\quad \text{és}\quad \sqrt[n^2]{n^2\cdot 3^{\frac{n^2}{2}}} \to \sqrt{3} < 2.$$

Megjegyzés. A fenti bizonyítás a felső becslésére *Bérczi Gergely* ötlete alapján történt.

Az alsó becslést *Kun Gábor* ennél élesebbre is kihozta, a megoldásából

$$\sqrt[3]{2} < \sqrt[4]{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} < \liminf_n \sqrt[n^2]{t_n}.$$

3 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Bérczi Gergely, Kun Gábor. 2 pontos 1 dolgozat.

N. 178. *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pozitív egész n-re létezik olyan valós számokból álló, n elemű halmaz, amelynek bármely három különböző x, y és z elemére*

$$\text{vagy} \qquad |x-y| > \left(1+\frac{1}{n^{1,6}}\right)|x-z|, \qquad \text{vagy} \qquad |x-z| > \left(1+\frac{1}{n^{1,6}}\right)|x-y|$$

teljesül.

Megoldás. Jelölje $a_0 < \ldots < a_{n-1}$ az első n darab olyan nemnegatív egészet, amelynek a hármas számrendszerbeli alakja csupa 0-s és 1-es számjegyekből áll. Ezekre fogjuk belátni, hogy teljesítik a feladat követelményeit.

Bebizonyítjuk, hogy e számok között nincs 3 különböző tagból álló számtani sorozat. Tegyük fel indirekte, hogy $2a_i = a_j + a_k$. Az $a_j + a_k$ kiszámításánál a műveleteket helyiértékenként végezhetjük el, hiszen nincs „átvitel”. Az eredmény minden helyiértéknél 0 vagy 2 lesz, $2a_i$ jegyei ilyenek. De ez azt jelenti, hogy a_j-ben egy helyiértéken 1-es akkor és csak akkor állhat, ha a_k ugyanazon helyiértékén is 1-es áll. Ekkor $a_j = a_k = a_i$, ami ellentmondás.

Tegyük fel, hogy $|a_i - a_j| > |a_i - a_k|$ $(i \neq j \neq k \neq i)$, azaz $|a_i - a_j| \geqslant |a_i - a_k| + 1$. Ekkor

$$\frac{|a_i - a_j|}{|a_i - a_k|} \geqslant 1 + \frac{1}{|a_i - a_k|},$$

így elég lenne azt igazolni, hogy $|a_i - a_k| < n^{1,6}$; sőt, ehhez már az is elég, ha $a_{n-1} \leqslant (n-1)^{1,6}$ teljesül, ugyanis $|a_i - a_k| \leqslant a_{n-1}$.

Vegyük észre, hogy a_{n-1} megkapható úgy, hogy $(n-1)$-et felírjuk 2-es számrendszerben, és ezt 3-as számrendszerben olvassuk ki. Ebből adódik, hogy $a_{2^m} = 3^m$, és ha $0 \leqslant t < 2^m$, akkor $a_{2^m+t} = 3^m + a_t$.

Ezután $a_{n-1} \leqslant (n-1)^{1,6}$ egyenlőtlenséget teljes indukcióval bizonyítjuk.

Ha $n=1$ vagy 2, akkor az állítás igaz. Tegyük fel, hogy igaz minden, az n-nél kisebb egészre; ekkor legyen $n-1 = 2^m + t$, ahol $0 \leqslant t < 2^m$. Az indukciós feltevés szerint $a_t \leqslant t^{1,6}$; felhasználva, hogy $2^{1,6} > 3$ és $0 < x < 1$ esetén $1{,}6x > x^{1,6}$:

$$(n-1)^{1,6} = (2^m + t)^{1,6} = 2^{1,6m}\left(1+\frac{t}{2^m}\right)^{1,6} > 2^{1,6m}\left(1+1{,}6\cdot\frac{t}{2^m}\right) >$$
$$> 2^{1,6m}\cdot\left(1+\left(\frac{t}{2^m}\right)^{1,6}\right) = 2^{1,6m} + t^{1,6} > 3^m + a_t = a_{2^m+t} = a_{n-1}.$$

Több megoldás alapján

4 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Bérczi Gergely, Lukács László és Végh A. László. 0 pontos 1 dolgozat.

N. 182. *Határozzuk meg az összes olyan a, b pozitív egész számokból álló párt, amelyre a osztója (b^2+b+1)-nek és b osztója (a^2+a+1)-nek.*

Javasolta: *Fried Ervin, Budapest*

Megoldás. Az a és b egymáshoz relatív prímek, hiszen pl. az a osztója a b-hez relatív prím (b^2+b+1)-nek. Így az egyetlen olyan megoldás, amelyre $a=b$, az $a=b=1$. Tegyük fel ezután, hogy $a<b$, és $ab^+ = b^2+b+1$, $ba^- = a^2+a+1$.

Ekkor $bb^+ > ab^+ = b^2+b+1 > b(b+1)$ miatt $b^+ > b$, hasonlóan $(a+1)a^- \leqslant ba^- = a^2+a+1 < (a+1)(a+1)$ szerint $a^- \leqslant a$, és így – mivel a^- osztója az a-hoz relatív prím (a^2+a+1)-nek – $a^- < a$ vagy $a^- = a = 1$.

Megmutatjuk, hogy a, b-hez hasonlóan az a^-, a és a b, b^+ párok is eleget tesznek a feladat feltételeinek. Nyilván $a^- \mid ba^- = a^2+a+1$ és $b^+ \mid ab^+ = b^2+b+1$. Mivel a és b egymáshoz relatív prímek, elég igazolni, hogy

$$a \mid b^2(a^-)^2+a^-+1) \qquad \text{és} \qquad b \mid a^2((b^+)^2+b^++1).$$

Az első oszthatóság igazolásához használjuk $ba^- = a^2+a+1$-et:

$$b^2((a^-)^2+a^-+1) = (a^2+a+1)^2+b(a^2+a+1)+b^2 = ax+(1+b+b^2),$$

és ez valóban osztható a-val; hasonlóan láthatjuk be a második oszthatóság teljesülését is.

Tehát az $a<b$ megoldásból „lefelé” és „felfelé” is tovább lépve megkaphatjuk az $a^- \leqslant a < b < b^+$ sorozatot, amelynek bármely két szomszédos eleme megoldás, és ezt ugyanígy folytathatjuk tovább, mindkét irányban. Észrevehetjük, hogy a sorozatot bármelyik két szomszédos eleme már meghatározza, hiszen $b^+ = \dfrac{b^2+b+1}{a}$-hoz hasonlóan például $b = \dfrac{a^2+a+1}{b^-}$.

Vizsgáljuk meg, hová jutunk, ha $a<b$-ből indulva a sorozatot „lefelé” folytatjuk, ameddig csak lehetséges. Legyen $a_{-1} = a^- = \dfrac{a^2+a+a}{b}$, $a_{-2} = \dfrac{a_{-1}^2+a_{-1}+1}{a}$ s.í.t. A sorozat ebben az irányban akkor ér véget, amikor $a_{-(n+1)} = a_{-n}$, azaz $a_{-(n+1)} = a_{-n} = 1$. Ekkor $a_{-(n-1)} = \dfrac{a_{-n}^2+a_{-n1}+1}{a_{-(n+1)}} = 3$, $a_{-(n-2)} = \dfrac{a_{-(n-1)}^2+a_{-(n-1)}+1}{a_{-n}} = 13$ stb.; az a, b pár tehát két szomszédos eleme annak az $x_1 < x_2 < \ldots$ sorozatnak, amelyet az $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_{i+1} = \dfrac{x_i^2+x_i+1}{x_{i-1}}$ rekurzió definiál. Ennek a sorozatnak bármely két szomszédos eleme valóban megoldást ad, hiszen az $(1,3)$ pár megoldás.

Megjegyzések. 1. A megoldás ötlete a következő gondolatból származik.

Ha az (a,b) számpár megoldás, akkor az $a^2+a+(b^2+b+1) = (a^2+a+1)+b^2+b$ szám osztható a-val és b-val. Mivel a és b relatív prímek, ab-vel is osztható, vagyis egy megfelelő K pozitív egésszel

$$a^2+b^2+a+b+1 = Kab. \tag{1}$$

Ennek a megfordítása is igaz, ha az a, b, K pozitív egészekre (1) teljesül, akkor a^2+a+1 osztható b-vel és b^2+b+1 osztható a-val.

Tekintsük most a

$$t^2-(Kb-1)t+(b^2+b+1) = 0$$

másodfokú egyenletet. Ennek egyik gyöke $t_1 = a$. A másik gyöke a Vièta-formulák alapján

$$t_2 = (Kb-1)-a = \frac{b^2+b+1}{a}.$$

Az első felírásból látszik, hogy t_2 egész szám, a másodikból pedig, hogy pozitív.

2. Az előbbi lépés többszöri megismétlésével az (1) egyenlet tetszőleges (a, b, K) megoldásából további megoldásokat állíthatunk elő. Könnyű meggondolni, hogy kellő számú lépést megtéve eljuthatunk az $(1, 1, K)$ megoldáshoz. Ebből következik, hogy csak $K=5$ lehetséges, és az (x_n) sorozatot az

(2) $$x_0=x_1=1, \quad x_{n+1}=5x_n-x_{n-1}-1$$

rekurzióval is definiálhatjuk.

3. A (2) a rekurzióból x_n explicit alakban is felírható:

$$x_n=\frac{1}{3}+\frac{7-\sqrt{21}}{21}\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^n+\frac{7+\sqrt{21}}{21}\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^n.$$

31 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Mansur Boase, Csirmaz Előd, Dancsó Zsuzsa, Dezső Balázs, Gelencsér Gábor, Gerbicz Róbert, Gyenes Zoltán, Harangi Viktor, Horváth 202 Gábor, Juhász András, Keszegh Balázs, Kiss 345 Gergely, Kunszenti-Kovács Dávid, Lukács László, Máthé András, Mecz Balázs, Naszódi Gergely, Pálvölgyi Dömötör, Pataki Péter, Terpai Tamás, Tran Thanh Long, Végh A. László és Zábrádi Gergely. Kissé hiányos (4 pont) Iván Szabolcs, Szakács László és Székelyhidi Gábor dolgozata. 3 pontot kapott 2, 2 pontot 2, 0 pontot 1 versenyző.

N. 185. *Adjunk meg olyan, az egész számokon értelmezett többváltozós, egész együtthatós polinomot, amelynek értékkészlete bizonyos negatív számokból és az* $\left\lceil\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right\rceil$ *($n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$) alakú számokból áll.*

Megoldás. Tetszőleges n nemnegatív egész számra legyen u_n és v_n az a két nemnegatív egész, amelyre $\left(2\pm\sqrt{3}\right)^n=u_n\pm v_n\sqrt{3}$. Mivel $\sqrt{3}$ irracionális, ez a felírás egyértelmű.

Mivel $0<(2-\sqrt{3})^n<2$ és

$$\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n}{2}<u_n=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2}<\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n}{2}+1,$$

az $\left\lceil\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right\rceil$ alakú számok éppen az $u_0,u_1,\ldots$ sorozat elemei. A feladat tehát olyan polinom felírása, amelynek pozitív értékei az $u_0,u_1,\ldots$ számok.

Megmutatjuk, hogy az

(1) $$x^2-3y^2=1$$

diofantikus egyenlet megoldásai a $(\pm u_n, \pm v_n)$ alakú számpárok.

Mivel $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1$, tetszőleges n-re

$$u_n^2-3v_n^2=\left(u_n+v_n\sqrt{3}\right)\left(u_n-v_n\sqrt{3}\right)=\left(2+\sqrt{3}\right)^n\left(2-\sqrt{3}\right)^n=1,$$

vagyis az (u_n,v_n) alakú számpárok valóban megoldásai (1)-nek.

A megfordításhoz elég igazolni, hogy ha x, y nemnegatív egészek és az (x, y) számpár megoldás, akkor $x+y\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^n$ valamilyen n nemnegatív egész számra.

Legyen n az a nemnegatív egész szám, amelyre

$$(2) \qquad \left(2+\sqrt{3}\right)^n \leqslant x+y\sqrt{3} < \left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1}.$$

Ilyen létezik, mert (1) miatt x és y nem lehet egyszerre 0, és ezért $x+y\sqrt{3} \geqslant 1$.

Osszuk el a (2) egyenlőtlenséget $\left(2+\sqrt{3}\right)^n$-nel:

$$(3) \qquad 1 \leqslant \frac{x+y\sqrt{3}}{\left(2+\sqrt{3}\right)^n} < 2+\sqrt{3},$$

ugyanakkor

$$(4) \qquad \frac{x+y\sqrt{3}}{\left(2+\sqrt{3}\right)^n} = \left(2-\sqrt{3}\right)^n \left(x+y\sqrt{3}\right) = \left(u_n - v_n\sqrt{3}\right)\left(x+y\sqrt{3}\right) =$$

$$= (u_n x - 3v_n y) + (u_n y - v_n x)\sqrt{3}.$$

Legyen $U = u_n x - 3v_n y$ és $V = u_n y - v_n y$. Ekkor (3) és (4) szerint

$$(5) \qquad 1 \leqslant U + V\sqrt{3} < 2+\sqrt{3}$$

és

$$(6) \quad U^2 - 3V^2 = (u_n x - 3v_n y)^2 - 3(u_n y - v_n x)^2 = (u_n^2 - 3v_n^2)(x^2 - 3y^2) = 1 \cdot 1 = 1.$$

(6)-ot elosztva (5)-tel

$$2-\sqrt{3} < U - V\sqrt{3} \leqslant 1.$$

Ezt (5)-höz hozzáadva és 2-vel osztva

$$\frac{3-\sqrt{3}}{2} < U < \frac{3+\sqrt{3}}{2},$$

vagyis $U=1$ vagy $U=2$. Az első esetben (6) alapján $V=0$, $U+V\sqrt{3}=1$ és $u+v\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)^n$. A második esetben (5) alapján $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant V < 0$, ami nem lehetséges.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy az (1) egyenlet megoldásai a $(\pm u_n, \pm v_n)$ alakú számpárok.

Tekintsük most a következő polinomot:

$$P(x,y) = x - \left(x^2+1\right)\left(x^2-3y^2-1\right)^2.$$

Megmutatjuk, hogy ennek nemnegatív értékei pontosan az $u_0, u_1, \ldots$ számok.

Tetszőleges n nemnegatív egészre, mivel $u_n^2 - 3v_n^2 - 1 = 0$, $P(u_n, v_n) = u_n$. A P polinom értékkészletében tehát szerepelnek az u_0, u_1, $\ldots$ számok.

Ha az x, y egész számokra $x^2-3y^2-1 \neq 0$, akkor

$$P(x,y) \leqslant x - \left(x^2+1\right) < 0.$$

Ha viszont $x^2-3y^2-1=0$, akkor a segédtétel miatt $x=u_n$ vagy $x=-u_n$ valamilyen n-re. Az első esetben $P(x,y)=u_n$, a második esetben $P(x,y)<0$.

A P polinom tehát megfelelő.

Juhász András (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn, 12. o.t.)
Terpai Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn, 12. o.t.) dolgozata alapján

A feladatra Juhász András és Terpai Tamás küldött be megoldást. Mindketten 5 pontot kaptak.

A pontversenyben kitűzött C gyakorlatok (533–536.)

C. 533. Hogyan változik két szakasz szorzata, ha az egységet kétszeresére növeljük?

C. 534. Az első 539 pozitív egész szám közül kiválasztunk néhányat úgy, hogy azok összege legalább egyharmada az eredeti számok összegének. Legalább hány számot kell ehhez kiválasztanunk?

C. 535. Hány olyan pozitív, egymáshoz relatív prím számokból álló (rendezetlen) számpár van, amelyben a számok összege 285?

C. 536. Egy R sugarú gömböt és egy R sugarú, $2R$ magasságú henger palástját egyforma vastagságú festékréteggel vonunk be. Melyikhez kell több festék?

❄

Beküldési határidő: 1999. április 15.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest, Pf. 47. 1255

❄

A pontversenyben kitűzött gyakorlatok (3262–3269.) és feladatok (3274–3279.)

Gy. 3262. Mutassuk meg, hogy bármely 3×3-as bűvös négyzet első sorában szereplő számok négyzetének összege egyenlő a harmadik sor számainak négyzetösszegével. (Bűvös négyzetnek nevezzük az olyan $n\times n$-es számtáblázatot, amelynek minden sorában, oszlopában és a két átlójában a számok összege ugyanannyi.)

Javasolta: *Kiss Sándor,* Nyíregyháza

Általános iskolásoknak javasolt feladatok: **C. 534, Gy. 3262, Gy. 3263, Gy. 3265, Gy. 3266.**

Gy. 3263. Tekintsük az 1222 és 1999 közötti egész számokat. Válasszunk ki közülük minden lehetséges módon két különbözőt és szorozzunk össze. Mennyi lesz a szorzatok összege?

Gy. 3264. Milyen k természetes számokra igaz, hogy $2^{2k+3}+3^{k+2}\cdot 7^k$ osztható 17-tel?

Gy. 3265. Van egy kétkarú mérlegünk és 12 egyforma nagyságú, különböző színű golyónk. Közülük egy más fajsúlyú anyagból készült, mint a többi. Megtudhatjuk-e három méréssel, hogy melyik ez a golyó? El tudjuk-e dönteni még azt is, hogy nehezebb, vagy könnyebb a többinél? (**H**)

Gy. 3266. Egy húrtrapéz szárainak hossza a, másik két oldala b és c, a két átlója d hosszúságú. Azt állítom, hogy $d^2-a^2=bc$. Igaz-e az állításom?

Gy. 3267. A k_1 és k_2 körök a P és Q pontokban metszik egymást. Az A a k_1, a B pedig a k_2 kör egy-egy pontja úgy, hogy az AB szakasz a belsejében tartalmazza $Q-t$. Legyen AB felezőpontja F. A PF egyenes két új metszéspontja a körökkel C, illetve D. Bizonyítsuk be, hogy F a CD szakaszt is felezi.

Gy. 3268. Ha az $y=\sin x$ és az $y=\sin^2 x$ függvények grafikonjait közös koordinátarendszerben ábrázoljuk, a kapott görbék nemcsak hasonlóak, hanem hasonló helyzetűek is. Mekkora a hasonlóság aránya, és hol lehet a nagyítás középpontja?

Gy. 3269. N város mindegyikéből egy-egy kém indul a hozzá legközelebbi egyik városba. Legfeljebb mekkora lehet N, ha csak két városba érkezik kém? (**H**)

❄

Beküldési határidő: 1999. április 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

❄

F. 3274. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$x+y+z=0$$
$$x^3+y^3+z^3=0$$
$$x^{1999}-y^{1999}+z^{1999}=2^{2000}.$$

Javasolta: *Nagy Tamás,* Zalaegerszeg

F. 3275. Keressük meg a $\left(\frac{47}{245},\frac{34}{177}\right)$ nyílt intervallumban a legkisebb nevezőjű törtet.

F. 3276. Jelöljük az ABC rácsháromszög területét T-vel. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$(AB+BC)^2<8\cdot T+1,$$

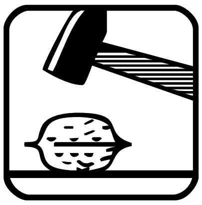
akkor A, B és C egy négyzet három csúcsa.

W. L. Putnam Emlékverseny, 1998

F. 3277. Egy szabályos ötszög csúcsaiba a középpontból a v_1, v_2, ..., v_5 vektorok mutatnak. Tegyük fel, hogy a k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 egészekre teljesül, hogy $k_1v_1+k_2v_2+$ $+\ldots+k_5v_5=0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $k_1=k_2=\ldots=k_5$.

F. 3278. Az $y=x^3$ egyenletű görbe pontjain egy $*$ műveletet értelmezünk a következőképpen. Ha A és B a görbe két pontja, akkor legyen $A*B$ az AB egyenes és a görbe harmadik metszéspontjának az origóra való tükörképe. (Ha a definícióban szereplő valamelyik két pont egybeesik, akkor összekötő egyenesük helyett vegyük a görbe adott pontbeli érintőjét). Mutassuk meg, hogy a $*$ művelet asszociatív.

F. 3279. Adott két, egymással 36°-os szöget bezáró egyenes. Egy szöcske ugrál ide-oda egyik egyenesről a másikra úgy, hogy minden ugrásának a hossza ugyanakkora. Mutassuk meg, hogy legfeljebb tíz különböző pontba juthat el.



A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (203–206.)

N. 203. Adott a síkon az $ABCD$ négyszög. A BCD és ACD körök az AC és BC egyeneseket az E, illetve F pontokban metszik. Igazoljuk, hogy

$$\frac{AD\cdot DE}{AE^2}=\frac{BD\cdot DF}{BF^2}.$$

N. 204. Egy szabályos dobókockát n-szer feldobunk. Milyen n esetén lesz pontosan $\frac{1}{4}$ annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege osztható 4-gyel?

N. 205. Melyek azok a pontok egy szabályos háromszög belsejében, amelyeken át legalább három, a háromszög területét felező egyenes húzható?

N. 206. Határozzuk meg azokat az $f:R\to R$ folytonos függvényeket, amelyekre tetszőleges x, y valós számok esetén

$$f(xy)=f(x)f(y)+f(-x)f(-y) \quad \text{és} \quad f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$$

teljesül, továbbá $f(1999)=1000$.

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS (Volume 49. No. 3. March 1999)

New exercises for practice (see page 166): **C. 533.** How does the length of the product of two segments change when the length of the unit segment is doubled? **C. 534.** Among the first 539 positive integers, some numbers are chosen so that their sum is not less than one-third the sum of the original numbers. At least how many numbers are chosen? **C. 535.** How many (unordered) pairs can be formed from positive integers such that, in each pair, the two numbers are coprime and add up to 285? **C. 536.** The whole surface of a sphere of radius R and the curved surface of a cylinder of radius R and height $2R$ are covered with a coat of paint of the same thickness. Which task requires more paint?

New exercises: Gy. 3262. Given any 3×3 magic square, prove that the sum of the squares of the numbers in the first row equals to the sum of the squares of the numbers in the third row. (A magic square is an $n \times n$ array of numbers where the sum of the numbers is the same in each row, each column, and both diagonals of the array.) (Proposer: *S. Kiss,* Nyíregyháza) **Gy. 3263.** Consider the whole numbers between 1222 and 1999. Choose, in every possible way, two of them, and take their product. Determine the total sum of these products. **Gy. 3264.** Determine those natural numbers k for which $2^{2k+3} + 3^{k+2} \cdot 7^k$ is divisible by 17. **Gy. 3265.** There are given a pair of scales and 12 balls of the same size but of different colours. All of them, apart one, are made of the same substance, the exceptional one having a different density. Is it possible to find the ball which is different from the others based on the result of three measurings? Is it possible to find out, in addition, if this ball is lighter or heavier than the others? **Gy. 3266.** In a cyclic trapezium, a, b, c and d denote the common length of the legs, the lengths of the two bases, and the common length of the diagonals, respectively. I claim that $d^2 - a^2 = bc$. Am I right? **Gy. 3267.** Circles k_1 and k_2 intersect at points P and Q. Points A and B lie on circles k_1 and k_2, respectively, such that point Q is inside segment AB. Let F denote the midpoint of AB. Let furthermore C and D denote the second intersection points of line PF with the two circles, respectively. Prove that F halves CD, too. **Gy. 3268.** In the cartesian system, consider the graphs of the functions $y = \sin x$ and $y = \sin^2 x$. These curves are not just similar, but also homothetic. Find the ratio of the similarity. Where can the centre of the enlargement be? **Gy. 3269.** From each one of N towns, a spy is sent to one of the nearest towns. How large can N be if all the spies arrive to only two towns?

New problems: F. 3274. Solve the following system of equations:

$$x + y + z = 0 \qquad x^3 + y^3 + z^3 = 0 \qquad x^{1999} - y^{1999} + z^{1999} = 2^{2000}.$$

(Proposer: *T. Nagy,* Zalaegerszeg) **F. 3275.** Find the fraction with the smallest denominator in the open interval $\left(\frac{47}{245}, \frac{34}{177}\right)$. **F. 3276.**Let A, B, C denote distinct points with integer coordinates in $\mathbf{R}^2$. Prove that if $(|AB| + |BC|)^2 < 8 \cdot [ABC] + 1$ then A, B, C are three vertices of a square. Here $|XY|$ is the length of segment XY and $[ABC]$ is the area of triangle ABC. (*W. L. Putnam Mathematical Competition, 1998*) **F. 3277.** In a regular pentagon, $v_1, v_2, \ldots, v_5$ denote the vectors from the centre to the vertices of the pentagon, respectively. Given that integers k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 satisfy $k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_5 v_5 = 0$, prove that $k_1 = k_2 = \ldots = k_5$. **F. 3278.** On the points of the curve with equation $y = x^3$, an operation $*$ is defined as follows. Let, for any two points A and B on the curve, $A * B$ denote the reflection of the third intersection point of line AB with the curve about the origin. (If some two points involved in the definition coincide, then the tangent to the curve at the given point is considered instead of the connecting line.) Prove that operation $*$ is associative. **F. 3279.** Two straight lines form an angle of 36° in the plane. A grasshopper is springing to and fro from one line to the other so that the lengths of its jumps are always the same. Prove that it can arrive to at most 10 different points.

New advanced problems: N. 203. A quadrilateral $ABCD$ is given in the plane. Circles BCD and ACD cut lines AC and BC at points E and F, respectively. Prove that

$$\frac{AD \cdot DE}{AE^2} = \frac{BD \cdot DF}{BF^2}.$$

N. 204. A fair die is thrown n times. Find those values of n for which the probability that the total score is divisible by 4 is exactly $1/4$. **N. 205.** Given an equilateral triangle, determine all those points inside the triangle through which at least 3 different lines, each halving the area of the triangle, can be drawn. **N. 206.** Determine those continuous functions $f : R \to R$ for which $f(1999) = 1000$ and which satisfy $f(xy) = f(x)f(y) + f(-x)f(-y)$ and $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$ for any real numbers x and y.