Bakos Tibor
1909–1998

Múlt év decemberében, életének 90-edik évében hunyt el lapunk nyugalmazott főszerkesztője, Bakos Tibor. Negyven éve került a laphoz, munkatársak nemzedéke tanult tőle.

1996. november, az Eötvös verseny eredményhirdetése. A díjat Bakos Tibor, a 70 évvel azelőtti nyertes adta át Tóth Gábor Zsoltnak.

1998. november: Bakos Tibor otthoni íróasztalánál a januári szám feladatait szerkeszti

Bakos Tibor 1909. június 8-án született Szegeden, 1926-ban, 17 évesen érettségizett Szombathelyen a reáliskolában. Érettségi után felvételt nyert a Pázmány Péter Tudományegyeteten matematika–fizika tanári szakra, majd a budapesti Eötvös Collegium tagja lett. Még ez év őszén első díjat nyert az Eötvös-versenyen matematikából és a Károly Ireneus versenyen fizikából.

Egyetemista korában már dolgozott a Faragó László által szerkesztett Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokban.

Az egyetem elvégzése után Sátoraljaújhelyen, Pécsett, Szombathelyen tanított, majd Szegedre került a Baross Gábor Gimnáziumba, miközben tanított a Pedagógiai Főiskolán is. 1942-ben a zombori gimnázium helyettes igazgatója lett. A II. Világháború alatt fogságba esett, de szerencsére hamarosan újra visszatért Szegedre, és ismét a Baross Gábor Gimnáziumban tanított. 1950-ben a szegedi Bolyai János intézetnek lett az adjunktusa. Ekkor Kalmár László professzor úrral dolgozott együtt. Később sokat mesélt ottani tanítási élményeiről.

Szegedről hívta el a Bolyai János Matematikai Társulat nevében Surányi János az általa 1947-ben újra elindított Középiskolai Matematikai Lapok felelős szerkesztőjének. 1958-tól 1974-ig, nyugdíjaztatásáig volt a lap felelős szerkesztője. Ez azonban nem jelentette azt, hogy ekkor megszakadt kapcsolata a lappal. Élete végéig aktív tagja volt a matematika szerkesztőbizottságnak.

Bakos Tibornak a szerkesztőség nem munkahelye, hanem otthona, tevékenységeinek középpontja, élettere volt. A lapszerkesztés pedig nem munkát, hanem örömöt, gyönyörűséget jelentett számára. Nagy gondot fordított a lap külső megjelenítésére, a szép ábrákra, de számára a tartalom volt az igazi. A matematikai feladatokat ízlelgette, pátyolgatta. Kereste a feladatok szépségét, a témák összefüggéseit. Ilyen irányú meditációiból mindig született egy cikk: Megjegyzés a ... számú feladathoz; vagy egy új feladat a pontverseny számára. Különösen ügyelt a feladatszövegek megfogalmazására, a magyar nyelv szabatos, igényes használatára. Állandóan lépést tartott a helyesírási szabályok változásával. Kedvelte a rádió anyanyelvi műsorait, Lőrincze Lajos, Grétsy László sorozatait, s az ott hallottakat alkalmazta a feladatok szövegének megfogalmazásakor is.

Igazi polihisztor volt. Tudta a földrajzot, történelmet, de kedvence a kristálytan és a csillagászat volt. Örült, ha sikerült egy-egy ilyen témájú feladatot kitűznie.

Sokan ismerték, szerették és becsülték. Nemcsak azért, mert élete során sok helyen megfordult, de azért is, mert szerkesztői munkája mellett számos versenybizottságnak volt tagja, köztük az Arany Dániel, OKTV, Kürschák József versenyeknek. Soha nem hiányzott a megbeszélésekről, és mindig vitt oda is feladatjavaslatot. Aktív tagja volt a Bolyai János Matematikai Társulat választmányának. Mindig ott volt a versenyeredmények ismertetésénél, a díjak kiosztásánál, hogy személyesen is találkozzon a diákokkal. A szerkesztőségbe belátogatókkal szívesen beszélgetett, rámutatva a hibákra, amelyeket egy-egy feladatmegoldás során követtek el.

Amikor 1974-ben nyugdíjba ment, én vettem át tőle a lap szerkesztését. Szerencsére nyugdíjbavonulása nem jelentett számára visszavonulást, még 17 évig dolgoztunk együtt. Szerkesztőként mindent tőle tanultam: a technikai részeteket, hogy hány centiméter anyag fér be egy lapba, hogyan kell elhelyezni az ábrákat, milyen betűtípust kell használni, mi az ami széppé teszi a lap külső megjelenését, de természetesen továbbra is a tartalom volt számára a fontosabb. Most sem maradtak el a feladatokhoz fűzött megjegyzései. Amikor nem volt ott a szerkesztőségben, akkor is sokszor „hallottam” kicsit indulatos, de mindig jószándékú megjegyzéseit (böstörködéseit – ahogy Ő mondta) a pongyolaság, pontatlanság, értelmetlenség ellen. Ilyenkor mindig hosszas fejtegetésbe kezdett kifogásainak igazolására, pedig anélkül is elhittük neki.

Megemlíthetném, hogy hány kitüntetést, elismerést kapott (mert kapott), de nem teszem. Soha nem szerette, ha dicsérik, elismerik; ilyenkor mindig az volt a válasza: csak azt tettem, ami kötelességem. Szerény ember volt a szó igazi értelmében.

Néhány hónap óta, amikor a betegség első jelei mutatkoztak, már nélkülöznünk kellett személyes jelenlétét. Már nem járt be a szerkesztőségbe, de a feladatjavaslatokat elolvasta, és megjegyzéseit eljuttatta hozzánk még halála előtt néhány nappal is. Hiányoltuk, de tudtuk, hogy munkánkat változatlanul figyeli. A matematika iránti hűsége pedig abban nyilvánult meg, hogy kedvenc témakörével, a bűvös négyzetek tanulmányozásával töltötte napjait. Ahogy ő mondta, még hadifogsága idején ez volt számára a „búfelejtő narkotikum”. Ez a szenvedélye egész életén át elkísérte. Nemcsak elolvasott minden hozzáférhető irodalmat ebből a témából, de maga is gyártotta az érdekesnél érdekesebb bűvös négyzeteket, gyűjtötte a szabályokat. Ennek részeredményeként jelent meg 1998. novemberében a *Ki tud többet a bűvös négyzetekről?* című könyve a KöMaL kiadványaként, az Eötvös Társulat (és a Bakos család tagjainak) támogatásával. Nagy öröm számunkra, hogy a megjelent könyvet még láthatta. Ez alkalommal számos barátja, kollégája kereste fel, akiknek dedikálta is a könyvét.

A betegség lassan levette a lábáról. Míg szellemi frissességét végig megőrizte, fizikai ereje lassan elfogyott. Szerénységére jellemző, hogy utolsó kívánságai közt volt az, hogy ne rendezzenek számára hivatalos temetést, a gyászszertartásnál csak családja, rokonai legyenek ott.

Így búcsúzunk most tőle. Köszönjük, hogy köztünk volt, tanított minket nemcsak szakmailag, de élete példájával. Tanított emberségre, a munka szeretetére, szerénységre. Elment, de itt van közöttünk, még mondogatjuk intelmeit, megjegyzéseit, és megpróbáljuk továbbadni a következő generációnak.

S mi, akik csak így emlegettük, „Tibi bácsi”, búcsúzunk, de nem felejtjük.

Emléke köztünk marad!

A szerkesztőség munkatársai nevében

Fried Ervinné

A most következő cikk újraközlésével szeretnénk felidézni Bakos Tibort, a szerkesztőt. Nekünk majd minden szerkesztőségi ülésen alkalmunk volt egy-egy hasonló „gyorselemzését” meghallgatni. E kis cikkből talán olvasóink számára is kiviláglik elkötelezettsége a matematika, az élő és a leírt szó pontossága, szűkebb és tágabb hallgatósága iránt.

❄

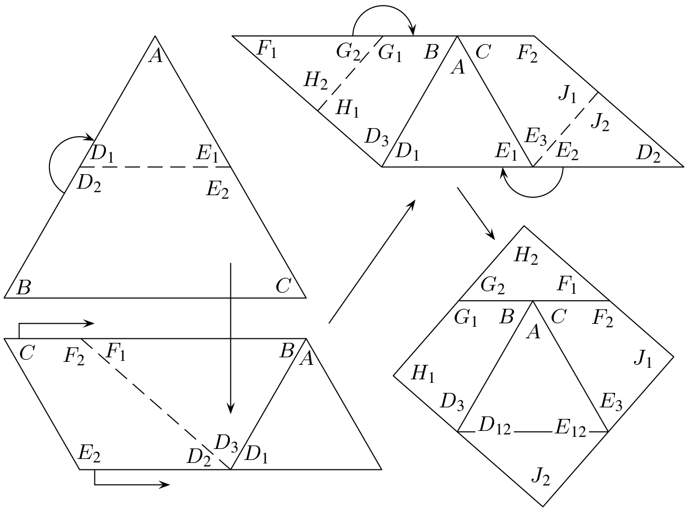
Bakos Tibor: A körnégyszögesítés – egy rosszul sikerült fordítás

(megjelent a KöMaL 1981. májusi számában)

A régi görögök akkor tekintették meghatározottnak egy síkidom területét, ha tudtak rajzolni egy avval egyenlő területű négyzetet, ha meg tudták szerkeszteni ennek az oldalát. Latinra áttérve kvadratáció lett a neve a problémának, másképpen kvadratúra, bár az utóbbi inkább csak akkor, amikor már inkább számították, hány egységnégyzet férne bele. Ezekből csinálta egy szerencsétlen fordító-magyarító a *négyszögesítést* – többek közt a körét is. Vajha látta volna előre azt a sok sületlen viccet, ami a jószándékából fakadt! –

Mai nyelvhasználattal *négyzetté* alakítást mondanánk, de így még jobb: a kör területének meghatározása. – (Más ilyen csodabogár a „legkisebb négyzetek elve”, értsd: négyzetösszeg minimummá tevése, minimumának keresése; de ez már németül is így hangzott: die kleinsten Quadrate. Jelentkeztek feltalálók, akik a legkisebbnél is kisebb négyzetet tudtak csinálni!)

Négyszögesítsünk egy háromszöget! Azaz daraboljuk szét az adott ABC szabályos háromszöget úgy, hogy a részekből – egy porcikát sem veszítve – négyzetet lehessen összeállítani.



1. Kettévágjuk a DE középvonal mentén és a trapézt D körül 180°-kal elfordítjuk (B egybeesik A-val).

2. A kapott paralelogrammát 1 vágás után olyan paralelogrammává rakjuk át, amelynek alapja és magassága egyenlő. Közös hosszuk a mértani közép lesz, ezt a már „úgyis kettévágott” D pontból induló DF helyzetbe visszük, és a $CEDF$ trapézt úgy toljuk el, hogy E_1 az E_1-be jusson; ez a pont felezi a D_2D_3 oldalt.

3. Az újabb paralelogrammát derékszögűvé alakítjuk: legyen F_1F_2 felezőpontja G, ennek vetülete F_1D_3-ra H, másrészt E_2 vetülete D_2F_2-re J. 180°-kal elfordítjuk G körül a GHF_1 háromszöget, E_1 körül E_2JF_2-t.

Mellékérdekességek: az E_2D_2 szakasz „újra egyesül” E_1D_1-gyel, mintha az első vágást nem is végeztük volt. F_1 egybeesik F_2-vel. Ha a D, E, F, G pontok közül 3-ban csuklóval kapcsoljuk össze a 2-2 részt, akkor a 4 rész „elveszíthetetlenül” egyben marad, bűvészkedhetünk vele (csuklós átdarabolás).

❄

Kérdések: Ki tudna egy „legkisebb” négyzetet átdarabolni szabályos háromszöggé?

Milyen közbeeső állapotban voltak a szabályos ötszög darabjai, mielőtt paralelogrammát lehetett kirakni belőlük?

Daraboljunk át tetszőleges (konvex vagy konkáv) négyszöget 3 vágással paralelogrammává!

Jelentés az 1998. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat az 1998. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyt október 30-án 14 órai kezdettel rendezte meg a következő 20 helyszínen: Békéscsaba, Bonyhád, Budapest, Debrecen, Eger, Győr, Kaposvár, Kecskemét, Miskolc, Nyíregyháza, Pécs, Salgótarján, Sopron, Szeged, Székesfehérvár, Szolnok, Szombathely, Tatabánya, Veszprém, Zalaegerszeg.

A Társulat Elnöksége a verseny lebonyolítására a következő bizottságot kérte fel: Bártfai Pál, Csirmaz László, Kálmán Tamás (titkár), Károlyi Gyula (elnök), Kós Géza, Pálmay Lóránt, Pelikán József, Reiman István, Surányi János (tiszteletbeli elnök), Ujváry-Menyhárt Zoltán.

A bizottság október 14-i ülésén (kimentette magát Csirmaz László) a következő feladatokat tűzte ki:

1. *Létezik-e pozitív egészekből álló végtelen sorozat, melyben semelyik szám sem osztója egyetlen másiknak sem, bármely két számnak van* 1*-nél nagyobb közös osztója, ugyanakkor nincs olyan* 1*-nél nagyobb szám, amely a sorozat minden elemének osztója?*

2. *Bizonyítsuk be, hogy minden* n *pozitív egészhez található olyan egész együtthatós polinom, amelynek az* $1, 2, \ldots, n$ *helyeken felvett értékei különböző* 2*-hatványok.*

3. *Mely* $N \geqslant 3$ *egész számok esetén adható meg* N *pont a síkon úgy, hogy semelyik 3 nem esik egy egyenesre, és a konvex burkuk bármely* 3 *csúcsa által meghatározott háromszög belsejébe közülük pontosan* 1 *pont esik?*

A bizottság a dolgozatok átnézése után december 8-i ülésén (nem tudott részt venni Bártfai Pál és Ujváry-Menyhárt Zoltán) egyhangúlag a következő jelentést fogadta el:

„A verseny minden helyszínen rendben lezajlott. A vidéki városokban 160 induló közül 134 adott be dolgozatot, Budapesten ugyancsak 160-an indultak és 139-en adtak be dolgozatot. Az előző évekhez képest örvendetes volt a helyes megoldások magas száma és az, hogy több, mint tíz versenyző foglalkozott érdemben mindhárom feladattal. Közülük hatan oldották meg lényegében mindegyik feladatot.

Lippner Gábor kifogástalan megoldást nyújtott be mindhárom feladatra és a 3. feladat esetében körvonalazott egy második megoldást is. Kun Gábor mindhárom megoldása helyes. Ennek alapján

I. *Kürschák József díjat* és 9000-9000 Ft jutalmat kapott:

Lippner Gábor, aki a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnáziumban tett érettségi vizsgát, Dobos Sándor, Thiry Imréné és Pósa Lajos tanítványa volt és

Kun Gábor, aki a budapesti Piarista Gimnáziumban érettségizett, Nyeste Pál tanítványa volt.

Lukács László és Terpai Tamás megoldotta mindhárom feladatot, de a megoldásaik leírásai tartalmaznak kisebb hiányosságokat és elírásokat. Ennek alapján

II. *Kürschák József díjat* és 7000-7000 Ft jutalmat nyert:

Lukács László, a miskolci Földes Ferenc Gimnázium 12. osztályos tanulója, Szabó Kálmán és Gulyás Tibor tanítványa és

Terpai Tamás, a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium 12. osztályos tanulója, Táborné Vincze Márta, Pataki János és Pósa Lajos tanítványa.

Hartmann Miklós lényegében megoldotta mindhárom feladatot, leírásai azonban elnagyoltak és egyes részbizonyításokat csak vázol. Zábrádi Gergely helyes megoldást nyújtott be az 1. és 3. feladatokra, a 2. feladat bizonyítása során viszont javítható hibákat követett el. Ennek alapján

dicséretet kapott első helyen, 4500 Ft jutalommal

Hartmann Miklós, aki a bonyhádi Petőfi Sándor Evangélikus Gimnáziumban tett érettségi vizsgát, dr. Katz Sándor tanítványa volt, továbbá

dicséretet kapott második helyen, 3500 Ft jutalommal

Zábrádi Gergely, a győri Révai Miklós Gimnázium 11. osztályos tanulója, dr. Szíjártó Miklósné, Zsebők Ottó és Pósa Lajos tanítványa."

1998. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldása

1. feladat. Megmutatjuk, hogy létezik a feladat követelményeinek eleget tevő sorozat. Legyen ugyanis $p_1=2$, $p_2=3$, p_3, $\ldots$ a prímszámok (végtelen) növekvő sorozata, és tekintsük az $a_1=6$, $a_2=10$, $a_n=15\cdot p_{n+1}$ $(n\geqslant 3)$ sorozatot.

Ebben a sorozatban a_n páratlan szám, ha $n\geqslant 3$, így nem osztható sem a_1-gyel, sem a_2-vel, hiszen azok páros számok. Az is világos, hogy a_1 és a_2 közül egyik sem osztója a másiknak. Ha pedig $n\geqslant 3$, akkor p_{n+1} osztója a_n-nek, de nem osztója a sorozat egyetlen további tagjainak sem, tehát a_n nem lehet osztója a sorozat egy másik elemének. Az első feltétel tehát teljesül.

A sorozatban bármely két számnak van 1-nél nagyobb közös osztója. Valóban: a_1 és a_2 esetén ez a szám 2; a_1 és a_n esetén 3, ha $n\geqslant 3$, végül ha n, $m\geqslant 2$, akkor a_n és a_m is osztható 5-tel. Tehát a második feltétel is teljesül.

Végezetül, ha egy pozitív egész osztója a sorozat minden elemének, akkor osztója a_1-nek és a_2-nak is, és így csak 1 vagy 2 lehet. A második lehetőség azonban könnyen kizárható, hiszen a_3 páratlan szám. Ezzel igazoltuk, hogy a sorozat a harmadik feltételt is kielégíti.

Megjegyzések. 1. A fenti sorozatban a második tagtól kezdve minden elem osztható 5-tel. Olyan sorozat is megadható, amelyben a sorozat elemeinek semelyik tagtól kezdve nem létezik 1-nél nagyobb közös osztója. Ilyen sorozat például az $a_{3n+1}=6p_{n+4}$, $a_{3n+2}=10p_{n+4}$, $a_{3n+3}=15p_{n+4}$ $(n\geqslant 0)$ összefüggésekkel definiálható. Az is világos azonban, hogy bármely, a feladat feltételeinek eleget tevő sorozatban lesz végtelen sok elem, amelynek van 1-nél nagyobb közös osztója. (Miért?)

2. A sorozat konstrukciójánál mindenképpen szükség van végtelen sok különböző prímszám segítségére. Nem lehet ugyanis megadni véges sok prímszámot úgy, hogy legyen olyan pozitív egészekből álló végtelen sorozat, amelyben egyik szám sem osztója egyetlen másiknak sem, és amelyben minden szám összes prímosztója az adott prímszámok közül való.

Feladat. Bizonyítsuk be a fenti állítást.

2. feladat. Először olyan p polinomot mutatunk, amely az egymástól különböző $a_1, a_2, \ldots, a_n$ helyeken rendre az egymástól nem feltétlenül különböző $b_1, b_2, \ldots, b_n$ értékeket veszi fel. Ehhez tekintsük $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén a következő p_i polinomot:

$$p_i(x) = \prod_{\substack{j \neq i \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}.$$

Világos, hogy $p_i(a_i) = 1$ és $p_i(a_j) = 0$, ha $j \neq i$. Ezért a $p(x) = b_1 \cdot p_1(x) + \ldots + b_n \cdot p_n(x)$ összefüggéssel definiált polinom, az ún. *Lagrange*-féle interpolációs polinom, megfelelő lesz. Könnyen látható, hogy ezen p polinom fokszáma legfeljebb $n - 1$. Azonban p még akkor sem lesz mindig egész együtthatós, ha $a_1, \ldots, a_n$ és $b_1, \ldots, b_n$ egész számok.

Legyen most $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $\ldots$, $a_n = n$. Milyen $b_1, \ldots, b_n$ egész értékek mellett tudunk egyszerűen következtetni arra, hogy a p polinom együtthatói egész számok? A p polinom minden együtthatója olyan racionális szám, amelynek a nevezője valamilyen $1 \leqslant i \leqslant n$ indexre

$$\prod_{\substack{j \neq i \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} (a_i - a_j) = (i-1)(i-2)\ldots(i-(i-1))(i-(i+1))\ldots(i-n) =$$
$$= (-1)^{n-i}(i-1)!(n-i)!$$

alakú, számlálója pedig ugyanekkor b_i-vel osztható egész szám. Könnyen látható, hogy az így adódó nevezők mindegyike osztója az $N = [(n-1)!]^2$ számnak. Ha tehát a b_i értékek mindegyike osztható N-nel, akkor a fenti konstrukcióval létrehozott p polinom egész együtthatós lesz.

Az általunk keresett polinomnak azonban az előírt helyeken 2-hatvány értékeket kell felvennie, azok pedig nem oszthatók N-nel, ha $n \geqslant 4$. Hogyan lehet ezen segíteni? Válasszunk ki n darab különböző 2-hatványt, ami ugyanannyi – mondjuk m – maradékot ad N-nel osztva. Ezt megtehetjük, hiszen végtelen sok különböző 2-hatvány van. Legyenek ezek $c_1, c_2, \ldots, c_n$, és tekintsük a $b_i = c_i - m$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ számokat. Ezekre igaz, hogy b_i osztható N-nel, létezik tehát olyan egész együtthatós polinom, amelyre $p(i) = b_i$ minden 1 és n közé eső i egész számra. Ennek a p polinomnak konstans tagját m-mel megnövelve olyan, továbbra is egész együtthatós p^* polinomhoz jutunk, amelyre $p^*(i) = c_i$. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyzések. 1. A megoldásból kitűnik, hogy különböző 2-hatványok helyett különböző 3-hatványokat vagy éppen különböző prímszámokat is előírhattunk volna a keresett polinom 1, 2, $\ldots$, n helyen felvett értékeiként. Sőt, még ennél is tovább mehetünk. Mivel

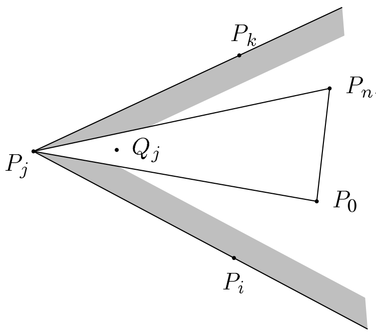
$$\binom{n-1}{i-1} = \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}$$

egész szám, az $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $\ldots$, $a_n = n$ alappontokra épített Lagrange-féle interpolációs polinom együtthatói már akkor is egész számok, ha minden b_i osztható $(n-1)!$-sal. A skatulya-elv szerint $(n-1)(n-1)! + 1$ szám között mindig található n olyan, amelyik $(n-1)!$-sal osztva ugyanolyan maradékot ad. Megfogalmazhatjuk tehát a következő, a feladatban szereplőnél erősebb állítást.

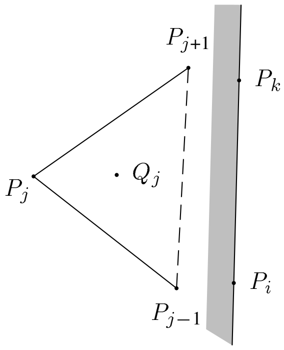
Legyen H egy legalább $(n-1)(n-1)!+1$ elemű egész számokból álló halmaz. Ekkor létezik olyan, legfeljebb $(n-1)$-ed fokú egész együtthatós polinom, amelynek az $1, 2, \ldots, n$ helyeken felvett értékei a H különböző elemei.

3. feladat. Tekintsünk egy N elemű H ponthalmazt, amely megfelel a feladatban szereplő feltételeknek. Tegyük fel, hogy H konvex burkának n csúcsa van. Ezt a konvex n-szöget egy csúcsából kiinduló átlói segítségével $n-2$ háromszögre bonthatjuk, amelyek mindegyikében H-nak pontosan egy pontja helyezkedik el, a második feltétel értelmében. Egy ilyen háromszög határára – az első feltétel miatt – H-nak nem eshet más pontja, mint a szóban forgó háromszög 3 csúcsa. A H halmaz tehát pontosan a konvex burkának a csúcspontjaiból és az előbb említett $n-2$ pontból áll. Ennek következtében $N=2n-2=2(n-1)$, azaz páros szám.

A következőkben megmutatjuk, hogy minden 3-nál nagyobb N páros szám esetén megadható a síkon N pont a követelményeknek megfelelően. Legyen $n=\dfrac{N+2}{2}$, ekkor $n \geqslant 3$. Tekintsünk egy tetszőleges $P_0P_1\ldots P_{n-1}$ konvex n-szöget. Ennek a belsejében vegyünk fel $n-2$ további pontot a következőképpen. Minden $1 \leqslant i \leqslant n-2$ esetén legyen Q_i a $P_0P_iP_{n-1}$ és $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ háromszögek közös részének tetszőleges belső pontja. Azt állítjuk, hogy a $H=\{P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, Q_1, \ldots, Q_{n-1}\}$ ponthalmaz megfelel a feltételeknek.



1. ábra



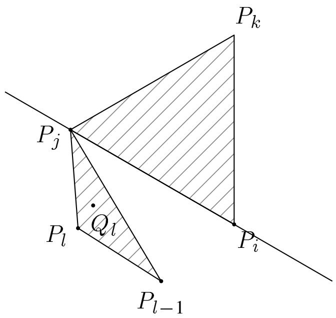
2. ábra

Legyen $0 \leqslant i < j < k \leqslant n-1$. Azt állítjuk, hogy a $P_iP_jP_k$ háromszög belseje H pontjai közül egyedül a Q_j pontot tartalmazza. Először azt mutatjuk meg, hogy Q_j valóban a $P_iP_jP_k$ háromszög belső pontja. A $P_iP_jP_k$ szögtartomány tartalmazza a P_0, P_j, P_{n-1} pontokat, és így a $P_0P_jP_{n-1}$ háromszög minden pontját is. Minthogy Q_j ennek a háromszögnek belső pontja, Q_j a $P_iP_jP_k$ szögtartomány belsejében van (*1. ábra*).

Hasonlóképpen látható, hogy Q_j a P_iP_k egyenesre támaszkodó, P_j-t tartalmazó félsík belsejében található, hiszen ez a félsík tartalmazza a P_{j-1}, P_j, P_{j+1} pontokat, és Q_j a $P_{j-1}P_jP_{j+1}$ háromszög belső pontja (*2. ábra*).

A Q_j pont tehát az *1. ábrán* látható nyílt szögtartomány és a *2. ábrán* látható nyílt félsík közös részében van, ez pedig éppen a $P_iP_jP_k$ háromszög belső pontjainak halmaza. Most megmutatjuk, hogy ez a halmaz H pontjai közül a Q_j-n kívül egyetlen pontot sem tartalmaz. A $P_0P_1\ldots P_{n-1}$ sokszög konvex, ezért egyik csúcsa sem eshet a $P_iP_jP_k$ háromszög belsejébe. Tekintsük most valamelyik Q_l pontot, ahol $l \neq j$. Ez a pont a $P_{l-1}P_lP_{l+1}$ háromszög belsejében helyezkedik el. Ha $l < i$, akkor a P_0P_i egyenes elválasztja ezt a háromszöget a $P_iP_jP_k$ háromszögtől, tehát Q_l valóban nem eshet az utóbbi háromszög belsejébe. Az $i < l < j$, $j < l < k$, illetve $k < l$ esetekben a megfelelő elválasztó egyenesek rendre a P_iP_j, P_jP_k és P_kP_{n-1} egyenesek. A *3. ábra* az $l = j-1$ esetet szemlélteti. Ezzel állításunkat bizonyítottuk.

Hátravan még annak igazolása, hogy H pontjai közül semelyik három nem esik egy egyenesre. A konstrukcióból azonnal következik, hogy semelyik P_iP_j egyenes nem illeszkedhet H-nak egyetlen további pontjára sem. Ha tehát egy egyenes H pontjai közül hármat is tartalmazna, akkor tartalmaznia kellene legalább két Q típusú pontot. Legyenek ezek Q_s és Q_t. A Q_sQ_t egyenes a $P_0P_1 \dots P_{n-1}$ sokszög kerületét két pontban metszi, jelöljük ezeket U-val és V-vel. Ha ezek közül az egyik, mondjuk U a sokszög P_i csúcsa volna, akkor V szükségképpen a sokszög valamely P_jP_k oldalának belső pontja lenne. Ekkor a $P_iP_jP_k$ háromszög a Q_s és a Q_t pontokat is tartalmazná, fenti állításunkkal ellentétben. Ha pedig U és V rendre a sokszög P_iP_j és P_kP_l oldalainak lenne belső pontja (feltehető, hogy P_i, P_j, P_k és P_l ilyen sorrendben, egy konvex négyszög csúcsai), akkor H-nak összes pontja, amely a Q_sQ_t egyenesre illeszkedik, a $P_iP_jP_kP_l$ négyszög belsejébe esne. Ez azonban lehetetlen, hiszen a fenti állításból könnyen levezethető, hogy ez a négyszög H-nak pontosan két pontját tartalmazza.

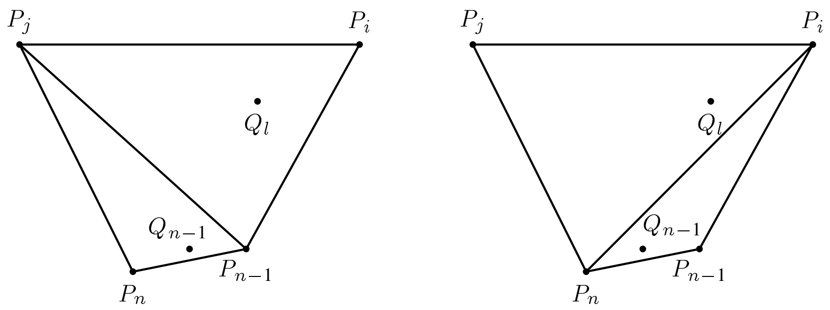


3. ábra

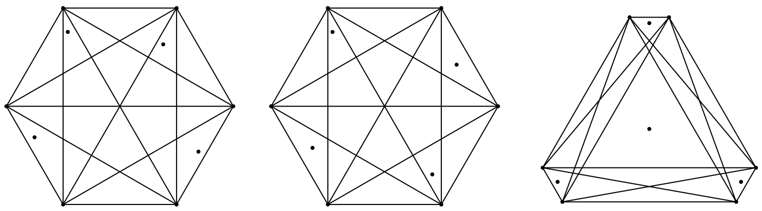
Ezzel a feladat megoldását befejeztük.

Megjegyzések. 1. Páros N esetén a keresett ponthalmaz létezésére indukciós bizonyítás is adható, amelyet csak vázolunk. Tegyük fel, hogy a $P_0P_1 \dots P_{n-1}$ konvex sokszöget, és annak $Q_1, \dots, Q_{n-2}$ belső pontjait már meghatároztuk úgy, hogy semelyik 3 pont nem esik egy egyenesre, és minden $P_iP_jP_k$ háromszög belsejébe pontosan egy Q pont esik. Vegyük fel a P_n pontot úgy, hogy $P_0P_1 \dots P_{n-1}P_n$ konvex $(n+1)$-szög legyen, semelyik $P_nP_iP_{n+1}$ háromszög ne tartalmazzon egyetlen Q_j pontot sem, továbbá P_n ne legyen rajta egyik olyan egyenesen sem, amely az eddigi pontok közül kettőre már illeszkedik. „Látszik”, hogy ezt mindig megtehetjük. A szabatos bizonyítás megfogalmazása azonban egyáltalán nem magától értetődő. Ezek után vegyük fel a Q_{n-1} pontot a $P_{n-1}P_iP_n$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ háromszögek közös részeinek belsejében, ami éppen a $P_{n-1}P_0P_n$ és $P_{n-1}P_{n-2}P_n$ háromszögek közös részének belseje. Eközben vigyázunk arra, hogy Q_{n-1} ne essék egyetlen olyan egyenesre sem, amelyeket az eddigi pontok meghatároznak. A keletkező $\{P_0, P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_{n-1}\}$ ponthalmaz konvex burka éppen a $P_0P_1 \dots P_n$ sokszög, és semelyik 3 pontja nem esik egy egyenesre. Az indukciós feltevésből adódik, hogy a $P_iP_jP_k$ belsejébe pontosan egy pont esik, ha $n \notin \{i, j, k\}$. A Q_{n-1} pont konstrukciója alapján ugyanez elmondható a $P_{n-1}P_nP_i$ háromszögekről is. Végül tekintsük bármelyik $P_iP_jP_k$ háromszöget, ahol $i < j < n-1$. A $P_iP_jP_{n-1}P_n$ négyszögbe, melyet annak P_jP_{n-1} átlója a $P_nP_{n-1}P_j$ és a $P_{n-1}P_jP_i$ háromszögekre bont, az előzőek alapján pontosan 2 pont esik. Ezek egyike a Q_{n-1} pont, amely a $P_{n-1}P_nP_i$ háromszög egyetlen belső pontja a tekintett pontok közül. Ezért a másik pont szükségképpen a $P_iP_jP_{n-1}$ háromszögbe esik, és oda más pont nem is eshet (*4. ábra*).

2. Ha az $n = 3$ esetén felrajzolható, lényegében egyértelmű konstrukcióból kiindulunk, és arra a fenti indukció lépéseit alkalmazzuk, akkor az első megoldásban ismertetett konstrukcióhoz hasonló pontrendszerhez jutunk. Felmerülhet az a gondolat, hogy lehetséges-e „geometriailag más



4. ábra



5. ábra

szerkezetű” ponthalmazokat is mutatni, amelyek a feltételeknek szintén megfelelnek. Ilyen ponthalmazokat is képezhetnénk az indukciós eljárás segítségével, ha nem ragaszkodunk ahhoz, hogy a P_0, P_1, ..., P_n csúcspontokkal rendelkező konvex sokszög csúcsai éppen ilyen sorrendben kövessék egymást.

Az *5. ábrán* három különböző konstrukciót mutatunk $N = 10$ ($n = 6$) esetén.

Károlyi Gyula

Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozó

A VIII. Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozót a Szlovákiai Magyar Pedagógusok Szövetségének matematika szakcsoportja rendezte meg 1998. november 20–22. között Rév-Komáromban. A házigazdák a komáromi Selye János Gimnázium és az Ipari Középiskola voltak, a fő szervező ezúttal is Oláh György tanár úr, akinek a megnyitón elhangzott, Nagy Károly munkásságát méltató előadásának egy részét a következőkben olvashatjuk. A több, mint 160 szlovákiai és magyarországi diák szívesen látott vendégként élvezhette a testvéri fogadtatást, az érdekes előadásokat és szemináriumokat. A rendezvény legfőbb célja a matematika iránti érdeklődés felkeltése, ébrentartása, és a tanulmányi versenyekre, továbbtanulásra fölkészülés segítése.

A három nap alatt 32 előadás hangzott el öt, korosztály szerinti szekcióban. Az előadók kiváló matematikatanárok, matematikusok – közöttük főiskolai, egyetemi oktatók – és a tanulmányi versenyeken jól szereplő diákok voltak.

A három nap alatt lehetőség nyílt baráti beszélgetésekre, szakmai tapasztalatcserékre, sőt egy színházi estére is hivatalosak voltunk a komáromi Jókai Színházba.

Bogdán Zoltán

A rendezvény névadójára, Nagy Károlyra tavaly, születésének 200. évfordulóján emlékeztek meg Budapesten, Bicskén és Komáromban.

A szülővárosában évente megrendezett diáktalálkozón, amelyen a Kárpát-medence különböző régióiból összesereglett ifjú matematikusok vettek részt, immár nyolcadik alkalommal emlékezünk a reformkor kiemelkedő gondolkodójára.

Nagy Károly

(Rév-Komárom, 1797. december 6. – Párizs, 1868. március 2.)

Középtanodai tanulmányait Pozsonyban végezte kitűnő eredménnyel. Korán kezdett érdeklődni a természettudományok – különösen a kémia iránt. Apja, aki Komáromban volt gyógyszerész – természettudományi ismereteinek bővítésére – 1819-ben Bécsbe küldte. A gyógyszerésznek indult ifjú Bécsben a legnagyobb szorgalommal folytatta kémiai tanulmányait, aminek eredményeként a kémiai doktorátust is megszerezte.

Hazatérése után Károlyi Lajos gróf, majd Batthyány Kázmér gróf pénzügyeit intézte. A tudományos közvélemény már ekkor felfigyelt Nagy Károly tudományos eredményeire, amelynek következtében az MTA 1832-ben levelező, 1836-ban rendes tagjai sorába választotta. 1830 és 1840 között több tanulmányutat tett külföldön, amelyek jelentősen hozzájárultak látókörének bővüléséhez. Többször járt Párizsban, Brüsszelben, ahol többek között megismerkedett az utópista szocialista tanokkal. Előbb Angliában, majd az USA-ban tett tanulmányútja során számos tudományos intézményt látogatott meg. A philadelphiai Philosophical Society kis számú külföldi tagjai közé választotta.

1845-ig Bécsben lakott. Számos közgazdasági, politikai és egyéb tárgyú írása jelent meg a Figyelmező, a Társalkodó, a Tudományos Gyűjtemény, az Athenaeum, a Pesti Hírlap és a Pozsonyban kiadott Századunk c. folyóiratokban. Több éven át szerkesztette az MTA Évkönyvei számára az Astronómiai Naplókat. A méterrendszer első hazai szorgalmazója volt, ő hozta be az első méter és kilogramm-etalonokat Párizsból. Bécsből Bicskére költözése után, Batthyány Kázmér birtokán csillagászati obszervatóriumot, majd 1847-ben egy kisebb tornyot építtetett a szükséges műszerek elhelyezésére. Az obszervatórium Európa, sőt a világ egyik legmodernebb és legnagyobb csillagvizsgálójává vált, amelynek főműszerei a kor legnagyobb távcsövei közé tartoztak. (A 19 cm nyílású nagy reflektorral még az 1950–60-as években is lehetett megfigyeléseket végezni.)

Annak ellenére, hogy Nagy Károly a szabadságharcban közvetlenül nem vett részt, 1849-ben mégis letartóztatták. Kiszabadulása után birtokának feláldozása révén sikerült Párizsba mennie, hogy „hazáját többé ne láthassa”. 1853-tól Bécsben és Párizsban élt. Nagyrészt matematikai tárgyú könyveit és cikkeit magyar, francia és német nyelven írta. Az Elemi arithmológia (Bécs, 1835.) c. munkájával az MTA nagyjutalmát nyerte el.

Főbb művei: A természetes számok logarithmái, London, 1834.; Elemi arithmológia, Bécs, 1835.; A kis számító, Bécs 1837.; A kis geometra, Bécs, 1838.; A magyarországi mértékek, Pest, 1839.; Daguerrotyp, Pozsony, 1841.; Considération sur les cométer, Párizs, 1862.; Mémoires sul le systéme solaire, Paris, 1862.; Die Sonne und die Astronomie, Leipzig, 1866.

Oláh György

Hogyan fogjunk oroszlánt?

A matematika legkülönfélébb ágaiban előfordulnak olyan tételek, amelyek valamilyen matematikai objektum létezését állítják. Az ilyen tételeket *egzisztencia-tételeknek*[1] nevezik.

Ebben a cikkben olyan eszközöket vizsgálunk meg, amelyek egzisztencia-tételek bizonyításához használhatóak, leginkább a valós analízis körében.

Először kimondunk néhány tipikus egzisztencia-tételt. Ezek részben szemléltetések, részben pedig eszközök lesznek más egzisztencia-tételek bizonyításához.

Tétel. *Létezik olyan pozitív valós szám, amelynek a négyzete* 2.

A legkisebb felső korlát tétele. *Ha a valós számokból álló H halmaz felülről korlátos és nem üres, akkor a felső korlátai között van legkisebb.*[2]

Bolzano–Weierstrass tétel. *Tetszőleges korlátos x_1, x_2, … számsorozatnak van torlódási pontja.*[3]

Borel fedési tétele. *Ha egy $[a;\, b]$ zárt intervallumot lefedünk akárhány nyílt intervallummal, akkor a nyílt intervallumok közül kiválasztható véges sok, amelyek még mindig lefedik az $[a;\, b]$ intervallumot.*

Az algebra alaptétele. *Minden legalább elsőfokú, valós vagy komplex együtthatós polinomnak van komplex gyöke.*

Ezekben a tételekben közös, hogy egy speciális tulajdonságú szám létezését állítják egy bizonyos halmazban. Egyedül a Borel-tétel látszik kivételnek, de ezt a következőképpen is megfogalmazhatjuk:

Borel fedési tételének átfogalmazása. *Ha adott akárhány nyílt intervallum, és ezek közül semelyik véges sok nem fedi le az $[a;\, b]$ intervallumot, akkor létezik olyan c szám az $[a;\, b]$ intervallumban, amelyet egyik nyílt intervallum sem tartalmaz.*

I. módszer: intervallum-felezés

Ezt a módszert nagyon szemléletesen mutatja be egy klasszikus példázat.

[1] A latin *egzisztencia* szó jelentése: létezés

[2] A H halmaznak a K szám felső korlátja, ha H-nak nincs K-nál nagyobb eleme. Egy halmaz felülről korlátos, ha létezik felső korlátja.

[3] Egy sorozatnak a c szám torlódási pontja, ha tetszőleges pozitív ε esetén a sorozatnak végtelen sok eleme esik a $(c-\varepsilon;\, c+\varepsilon)$ intervallumba.

Feladat: Fogjunk a sivatagban oroszlánt. Ehhez rendelkezésünkre áll egy oroszlánjelző műszer, ami a sivatag bármelyik részletéről megállapítja, hogy van-e benne oroszlán.

Megoldás: Két részre osztjuk a sivatagot, és mindkét felét lemérjük a műszerrel. Ha az egész sivatagban van oroszlán, akkor legalább az egyik felében szintén van. Kiválasztjuk az egyik ilyen fél sivatagot, a másik felét eldobjuk. A fél sivatagot ismét két részre osztjuk; az egyik részt (amiben van oroszlán) megtartjuk, a másik részt ismét eldobjuk. A felezgetést akkor hagyjuk abba, amikor a megmaradt sivatag darab már elég kicsi (azaz csupán egyetlen homokszemből áll), és akkor ráborítunk egy ketrecet. Ezzel megfogtuk az oroszlánt.

A gyakorlatban az *oroszlán* az a matematikai objektum, aminek a létezését bizonyítani akarjuk, például egy speciális tulajdonságú szám. A *sivatag* az a halmaz, amelynek elemei között keressük a kérdéses objektumot, legtöbbször egy intervallum. Az intervallumot természetesen nem elég véges sokszor két részre osztani. Végtelen sok felezésre van szükség, hogy végül csak egyetlen szám maradjon.

Sajnos a „megoldásban” komoly hiányosságok vannak. Ahhoz, hogy kijelenthessük: megfogtuk az oroszlánt, a következő három kérdést kell tisztáznunk:

K1. Biztosak lehetünk-e abban, hogy egyáltalán fogtunk valamit?

K2. Csak egyvalamit fogtunk?

K3. Hogyan győződhetünk meg róla, hogy oroszlánt fogtunk, és nem valami mást?

Ezeknek a kérdéseknek a megválaszolása nélkül a „megoldás” utolsó mondata közönséges blöff.

Tanulságképpen nézzük meg, mire jutottak volna az ókori görögök a $\sqrt{2}$-vel.

Akhilleusz és a $\sqrt{2}$

Az ókori görögök csak a racionális számokat ismerték, és tragikus felismerés volt számukra, hogy nincs olyan (racionális) szám, aminek a négyzete 2, holott a geometriában meg tudtak szerkeszteni ilyen hosszúságú szakaszt.

Képzeljük el, hogy Akhilleusz, a mesebeli görög hős megpróbálja megtalálni azt a számot, amelynek négyzete 2. Akhilleusz úgy találja, hogy az 1 túl kicsi (a négyzete kisebb, mint 2), a 2 viszont túl nagy. Ezért úgy dönt, hogy a számot az (1; 2) intervallumban keresi.

Ezután kipróbálja a $\frac{3}{2}$ számot, és megállapítja, hogy ez is túl nagy, mert a négyzete $\frac{9}{4}$, ami nagyobb 2-nél. Ezért a $\frac{3}{2}$-t és a nála nagyobb számokat eldobja, és csak az $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ intervallummal foglalkozik tovább. Ezután az $\frac{5}{4}$ számot próbálja ki (túl kicsi), majd a $\frac{11}{8}$-ot (túl kicsi), és így tovább. Közben az intervallum, amelyben a $\sqrt{2}$-t keresi, egyre fogy:

$$(1;2),\quad \left(1;\frac{3}{2}\right),\quad \left(\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right),\quad \left(\frac{11}{8};\frac{3}{2}\right),\quad \left(\frac{11}{8};\frac{23}{16}\right),\quad \left(\frac{43}{32};\frac{23}{16}\right),\quad \ldots .$$

Akhilleusznak elég sok ideje van, és az intervallum-felező lépést végtelen sokszor elvégzi. Közben kidobja az összes olyan racionális számot, aminek a négyzete nagyobb 2-nél, és azokat is, amelyeknek a négyzete kisebb 2-nél.

Ekkor kellemetlen meglepetés éri: az összes racionális számot kidobta, nem maradt egy sem.

A valós számok axiómarendszere

Akhilleusz problémáján úgy lehet segíteni, hogy a racionális számokon kívül további számokat vezetünk be. Az nyilván kevés, ha csak egy új számot (a $\sqrt{2}$-t) találunk ki, szükség van még $\sqrt{3}$-ra, $\sqrt[11]{7}$-re, az 1,01001000100001... tizedes törtre és még rengeteg más számra. Az új számokkal mit is akarnánk mást, mint számolni, tehát a jól megszokott alapműveleteket és a rendezést (a kisebb-nagyobb relációt) ki akarjuk terjeszteni az „új" számokra is.

A racionális számok kiegészítésére több konstrukció is létezik. Vannak természetesnek nevezhető konstrukciók, például mondhatjuk azt, hogy ezentúl a végtelen tizedes törteket nevezzük számoknak. Ennek a konstrukciónak az a hátránya, hogy a műveleteket – különösen a szorzást – nagyon nehéz definiálni. Vannak kevésbé természetes konstrukciók, amelyek nem annyira szemléletesek, de lényegesen könnyebb a műveleteket definiálni; ilyenek például a racionális számok Dedekind-szeletei[4] vagy a racionális számokból készített Cauchy-sorozatok ekvivalencia-osztályai.[5]

Magukat az új számokat „valós" (azaz létező) számoknak fogjuk hívni. Most nem az a célunk, hogy a lehetséges konstrukciókat tanulmányozzuk, vagy hogy az egyik konstrukciót előnyben részesítsük a többivel szemben. Inkább nem mondjuk meg, hogy milyen objektumokat nevezünk valós számnak, hanem csak a legfontosabb tulajdonságaikat soroljuk fel. Ezeket a tulajdonságokat hívjuk a valós számok axiómáinak.

Az axiómákat négy csoportra oszthatjuk:

I. Testaxiómák. Létezik két kétváltozós művelet, az összeadás és a szorzás, valamint két különböző kitüntetett szám, a 0 és az 1 a következő tulajdonságokkal:

- T1. Tetszőleges a, b valós számokra $a+b=b+a$.
- T2. Tetszőleges a, b, c valós számokra $(a+b)+c=a+(b+c)$.
- T3. Tetszőleges a valós számra $a+0=a$.
- T4. Tetszőleges a valós számhoz létezik olyan b valós szám, amelyre $a+b=0$.
- T5. Tetszőleges a, b valós számokra $a\cdot b=b\cdot a$.
- T6. Tetszőleges a, b, c valós számokra $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.
- T7. Tetszőleges a valós számra $a\cdot 1=a$.
- T8. Tetszőleges 0-tól különböző a valós számhoz létezik olyan b valós szám, amelyre $a\cdot b=1$.

[4] A $H\subset\mathbf{Q}$ halmazt a racionális számok Dedekind-szeletének hívjuk, ha tetszőleges $q_1<q_2$ racionális számokra $q_2\in H$ esetén $q_1\in H$. Egy ilyen szelet megfelel annak, hogy a racionális számok halmazát egy valós számnál „elvágjuk".

[5] A $q_1, q_2, \ldots$ sorozatot Cauchy-sorozatnak hívjuk, ha tetszőleges $\varepsilon>0$-hoz létezik olyan n_0 pozitív egész, hogy tetszőleges $m,n>n_0$ esetén $|q_n-q_m|<\varepsilon$. A $q_1, q_2, \ldots$ és $r_1, r_2, \ldots$ Cauchy-sorozatokat ekvivalensnek nevezzük, ha $(q_n-r_n)\to 0$.

T9. Tetszőleges a, b, c valós számokra $(a+b)\cdot c=(a\cdot c)+(b\cdot c)$.

Általában, egy algebrai struktúrát testnek nevezünk, ha teljesülnek ezek az axiómák. Testet alkotnak például a 0, 1, 2 számok, ha az összeadást és a szorzást modulo 3 végezzük (pl. $2+2=1$), vagy például a racionális törtfüggvények.

A testaxiómákból bebizonyítható az összes jól ismert műveleti azonosság, és sok más fontos tétel, például az, hogy egy polinomból ki lehet emelni a gyöktényezőket.

II. Rendezési axiómák: Létezik egy $<$ reláció a következő tulajdonságokkal:

R1. Tetszőleges a, b számokra vagy $a=b$, vagy $a<b$, vagy $b<a$.

R2. Ha az a, b, c számokra $a<b$ és $b<c$, akkor $a<c$.

R3. Ha az a, b, c számokra $a<b$, akkor $a+c<b+c$.

R4. Ha az a, b, c számokra $a<b$ és $0<c$, akkor $a\cdot c<b\cdot c$.

Egy struktúrát *rendezett testnek* hívunk, ha teljesülnek rá a test- és rendezési axiómák.

Érdekesség, hogy nem mondtuk ki, hogy $0<1$; ezt az axiómákból be lehet bizonyítani.

Ezek után definiálhatjuk a pozitív egész számokat: 1, $1+1$, $1+1+1$ stb. A rendezési axiómák garantálják többek között azt is, hogy ezek a számok különbözőek.

III. Arkhimédészi axióma: Tetszőleges valós számnál van nagyobb pozitív egész szám.

Ez az állítás nem következik a korábbiakból. Például a racionális törtfüggvények között lehet definiálni egy $<$ relációt úgy, hogy rendezett testet alkossanak, de ne teljesüljön az Arkhimédészi axióma.

IV. Cantor-axióma: Egymásba skatulyázott zárt intervallumok sorozatának mindig van közös pontja. Más szóval, ha adott két számsorozat: $a_1\leqslant a_2\leqslant\dots$ és $b_1\geqslant b_2\geqslant\dots$ úgy, hogy tetszőleges n-re $a_n\leqslant b_n$, akkor az $[a_1;\,b_1]\supset[a_2;\,b_2]\supset[a_3;\,b_3]\supset\dots$ intervallumoknak van közös eleme.

Az Arkhimédészi és a Cantor-axióma megadja a választ a K1 és K2 kérdésekre. Tegyük fel, hogy az $[a_0;\,b_0]$ intervallumból indultunk ki. Az intervallum felosztásakor a felezőpontot ne dobjuk ki; ezáltal egy zárt intervallumokból álló $[a_0;\,b_0]\supset[a_1;\,b_1]\supset[a_2;\,b_2]\supset\dots$ sorozatot kapunk, amelyben az n-edik intervallum hossza $b_n-a_n=\dfrac{b_0-a_0}{2^n}$. Ezeknek az intervallumoknak a Cantor-axióma szerint van közös eleme.

Ha az intervallumoknak legalább két közös eleme van: c és d, ahol $c<d$, akkor minden n-re $[c;\,d]\subset[a_n;\,b_n]$ teljesül. Ebből következik, hogy $d-c\leqslant b_n-a_n=\dfrac{b_0-a_0}{2^n}$, azaz $2^n<\dfrac{b_0-a_0}{d-c}$. Ez azonban azt jelenti, hogy a $\dfrac{b_0-a_0}{d-c}$ szám minden 2-hatványnál – és ezáltal minden pozitív egésznél – nagyobb, ami ellentmond az Arkhimédészi axiómának. Tehát a K1 és a K2 kérdésekre igen a válasz.

Első bizonyítás a $\sqrt{2}$ létezésére

Most már minden szükséges eszköz rendelkezésünkre áll, hogy bebizonyítsuk a $\sqrt{2}$ létezését.

Akhilleuszhoz hasonlóan definiálunk egy intervallumsorozatot. Legyen $[a_0;\, b_0] = [1;\, 2]$. Ha $[a_n;\, b_n]$-et már definiáltuk, akkor vizsgáljuk meg, hogy $\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)^2$ nagyobb-e mint 2. Ha $\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)^2 > 2$, akkor legyen $[a_{n+1};\, b_{n+1}] = \left[a_n;\, \frac{a_n+b_n}{2}\right]$. Ellenkező esetben legyen $[a_{n+1};\, b_{n+1}] = \left[\frac{a_n+b_n}{2};\, b_n\right]$. Ezzel egy olyan

$$[a_0;\, b_0] \supset [a_1;\, b_1] \supset [a_2;\, b_2] \supset \ldots$$

intervallum-sorozatot definiáltunk, amelyben tetszőleges n-re $a_n^2 \leqslant 2$ és $b_n^2 \geqslant 2$.

Az intervallumsorozatnak létezik egyetlen közös eleme; jelöljük ezt c-vel. Már csak azt kell bebizonyítanunk, hogy a K3 kérdés szavaival c egy oroszlán, azaz $c^2 = 2$.

Tetszőleges n-re igaz, hogy $c^2 \leqslant b_n^2$ és $a_n^2 \leqslant 2$, ezért

$$c^2 - 2 \leqslant b_n^2 - a_n^2 = (b_n - a_n)(b_n + a_n) < \frac{1}{2^n} \cdot (2+2) = \frac{4}{2^n}.$$

Ha a $c^2 \geqslant a_n^2$ és $b_n^2 \geqslant 2$ egyenlőtlenségből indulunk ki, akkor pontosan ugyanezt kapjuk $(2 - c^2)$-re. A két eredmény együtt azt állítja, hogy

$$\left|c^2 - 2\right| < \frac{4}{2^n}.$$

Az Arkhimédészi axióma miatt a $\frac{4}{2^n}$ szám tetszőleges pozitív számnál kisebb lesz, ha n elég nagy, ezért $\left|c^2 - 2\right|$ nem lehet pozitív. $\left|c^2 - 2\right|$ tehát 0, azaz $c^2 = 2$.

A legkisebb felső korlát tétele

Ugyanezzel a módszerrel bizonyíthatjuk be a legkisebb felső korlát tételét.

Legyen L_0 egy olyan szám, amely nem felső korlátja H-nak (Ilyen létezik, mert H nem üres), és legyen K_0 egy felső korlát. A K_0-nál nagyobb számok is mind felső korlátok, ezért biztosan $L_0 < K_0$.

A legkisebb felső korlátot nyilván a $[L_0;\, K_0]$ intervallumban érdemes keresnünk. Ezt az intervallumot fogjuk felezgetni.

Ha már definiáltuk az $[L_n;\, K_n]$ intervallumot, akkor vizsgáljuk meg, hogy $\frac{L_n+K_n}{2}$ felső korlátja-e H-nak. Ha igen, akkor legyen $[L_{n+1};\, K_{n+1}] = \left[L_n;\, \frac{L_n+K_n}{2}\right]$. Ha $\frac{L_n+K_n}{2}$ nem felső korlát, akkor legyen $[L_{n+1};\, K_{n+1}] = \left[\frac{L_n+K_n}{2};\, K_n\right]$.

Az így definiált

$$[L_0;\, K_0] \supset [L_1;\, K_1] \supset [L_2;\, K_2] \supset \ldots$$

intervallumsorozatban tetszőleges n-re K_n felső korlátja a H halmaznak, L_n pedig nem felső korlátja.

Az intervallumoknak létezik pontosan egy közös eleme, legyen ez M. Azt kell bebizonyítanunk, hogy M felső korlátja H-nak, és nincs M-nél kisebb felső korlát.

Legyen h a H halmaz egy tetszőleges eleme. Bármely n pozitív egészre K_n felső korlát, ezért $h \leqslant K_n$; másrészt $M \geqslant L_n$. Ebből következik, hogy

$$h - M \leqslant K_n - L_n = \frac{K_0 - L_0}{2^n}.$$

Ebből az Arkhimédészi axióma miatt következik, hogy $h - M$ nem lehet pozitív, vagyis $h \leqslant M$. Ezzel igazoltuk, hogy M felső korlát.

Legyen K egy tetszőleges felső korlátja H-nak. Ekkor tetszőleges n esetén $M \leqslant K_n$ a konstrukció miatt és $L_n < K$, mert a K-nál nem kisebb számok mind felső korlátok; ezért

$$M - K < K_n - L_n = \frac{K_0 - L_0}{2^n}.$$

Ebből következik, hogy $M - K$ nem lehet pozitív, azaz $M \leqslant K$. Az M számnál tehát nincs kisebb felső korlát.

A legkisebb felső korlátot latin eredetű kifejezéssel szuprémumnak is nevezzük, a H halmaz szuprémumát (legkisebb felső korlátját) $\sup H$-val jelöljük. A tétel párja a legnagyobb alsó korlát tétele: Tetszőleges nem üres, alulról korlátos halmaznak létezik legnagyobb alsó korlátja. Ezt infimumnak is nevezzük, jele $\inf H$.

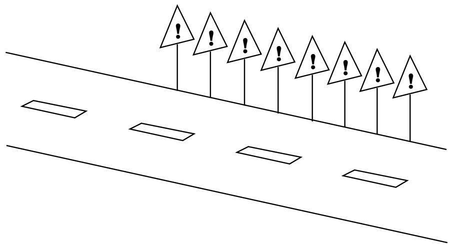
Ha a halmaznak létezik legnagyobb, illetve legkisebb eleme (maximuma, illetve minimuma), akkor ez természetesen azonos a halmaz szuprémumával, illetve infimumával. Maximuma és minimuma nincs minden halmaznak, viszont szuprémuma és infimuma minden nem üres és korlátos halmaznak van.

Érdekesség, hogy a valós számok axiómarendszerében az Arkhimédészi és a Cantor-axióma helyett a legkisebb felső korlát tételét is kimondhatjuk axiómaként. A test- és rendezési axiómákból, valamint a legkisebb felső korlát tételéből nagyon könnyű bebizonyítani a Cantor- és az Arkhimédészi axiómát.

Túl ezen, a legkisebb felső korlát tétele egy másik nagyon fontos eszköz egzisztencia-tételek bizonyítására.

II. módszer: a legkisebb felső korlát tételének alkalmazása

Egy autóút mentén a bokrok között oroszlánok bújtak el (legalább egy). Feladat: fogjunk meg legalább egy oroszlánt. Ismét rendelkezésünkre áll egy műszer, amely az autóút bármely szakaszára meg tudja mondani, hogy van-e ott oroszlán.



Megoldás: Minden egyes pontban állapítsuk meg, hogy az út hátralevő részén van-e oroszlán. Ha van, tegyünk ki egy „Oroszlánveszély" feliratú táblát. Ahol a táblák elfogynak, ott bújt el egy oroszlán.

Tegyük fel, hogy egy $[a;\, b]$ intervallumban keresünk egy bizonyos c számot, és az intervallum bármelyik eleméről valamilyen módszerrel meg tudjuk állapítani, hogy a keresett c-nél kisebb vagy nagyobb. A c-nél nem nagyobb számok azok a helyek, ahova „táblát teszünk"; ezeket a számokat összegyűjtjük egy T halmazban. Az a hely, ahol „a táblák elfogynak", a T halmaz szuprémuma.

A szuprémum egyértelműen létezik, viszont ismét meg kell vizsgálnunk, hogy oroszlán-e, azaz rendelkezik-e a kívánt tulajdonságokkal.

A továbbiakban a két módszer alkalmazásaként bebizonyítjuk a bevezetőben kimondott tételeket.

Második bizonyítás a $\sqrt{2}$ létezésére

A $\sqrt{2}$-t ismét az $[1,2]$ intervallumban keressük. Azok a számok nem nagyobbak $\sqrt{2}$-nél, amelyek négyzete nem nagyobb 2-nél, ezért legyen

$$T = \left\{ t \in [1,2] :\ t^2 \leqslant 2 \right\}$$

és $c = \sup T$. A T halmaz nem üres, mert például $1 \in T$. Ugyanakkor felülről korlátos, például a 2 egy felső korlátja. Ezért a c szám definíciója értelmes.

Azt akarjuk igazolni, hogy $c^2 = 2$.

Tetszőleges $0 < \varepsilon < 1$ esetén $c - \varepsilon$ nem felső korlátja T-nek, (c a legkisebb felső korlát), ezért létezik olyan $t \in T$ elem, amelyre $c - \varepsilon < t \leqslant c$. Felhasználva, hogy $t \in T$ esetén $t^2 \leqslant 2$,

$$c^2 - 2 \leqslant c^2 - t^2 = (c-t)(c+t) < \varepsilon \cdot (2+2) = 4\varepsilon.$$

Hasonlóképpen, mivel c a legkisebb felső korlát, $c + \varepsilon$ nem eleme a T halmaznak, ezért $(c+\varepsilon)^2 > 2$, amiből következik, hogy

$$2 - c^2 < (c+\varepsilon)^2 - c^2 = 2c\varepsilon + \varepsilon^2 < 5\varepsilon.$$

Azt kaptuk, hogy tetszőleges $0 < \varepsilon < 1$ esetén $\left|c^2 - 2\right| < 5\varepsilon$. Ez pedig csak úgy lehetséges, ha $\left|c^2 - 2\right|$ nem pozitív, azaz $c^2 = 2$.

A Bolzano–Weierstrass tétel bizonyítása intervallum-felezéssel

Definiálunk egy olyan $[a_0;\, b_0] \supset [a_1;\, b_1] \supset [a_2;\, b_2] \supset \ldots$ intervallum-sorozatot, amelyre tetszőleges n esetén $[a_n;\, b_n]$ az $x_1, x_2, \ldots$ sorozatnak végtelen sok elemét tartalmazza.

Legyen $[a_0;\, b_0]$ egy olyan intervallum, amely a teljes $x_1, x_2, \ldots$ sorozatot tartalmazza.

Ha az $[a_n;\, b_n]$ intervallumot már definiáltuk, és az végtelen sok elemet tartalmaz az $x_1, x_2, \ldots$ sorozatból, akkor az $\left[a_n;\, \frac{a_n+b_n}{2}\right]$ és $\left[\frac{a_n+b_n}{2};\, b_n\right]$ intervallumok közül legalább az egyik szintén végtelen sok elemet tartalmaz. Az egyik ilyet válasszuk $[a_{n+1};\ b_{n+1}]$-nek.

A $[a_n;\ b_n]$ intervallumoknak létezik egy közös c eleme. Azt állítjuk, hogy ez torlódási pont. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik egy olyan n szám, amelyre $[a_n;\ b_n] \subset (c - \varepsilon;\ c+\varepsilon)$. Az $[a_n;\ b_n]$ intervallum végtelen sok elemet tartalmaz az $x_1, x_2, \ldots$ sorozatból; ezeket a $(c-\varepsilon;\ c+\varepsilon)$ intervallum is tartalmazza.

A Bolzano–Weierstrass tétel bizonyítása a legkisebb felső korlát tételével

Legyen az $x_1, x_2, \ldots$ sorozat egy alsó, illetve felső korlátja A, illetve B. Legyen T azoknak a t valós számoknak a halmaza, amelyekre a $[t;\ B]$ intervallum végtelen sok elemet tartalmaz az $x_1, x_2, \ldots$ sorozatból. Ez a halmaz nem üres, például $A \in T$, és felülről korlátos, például B egy felső korlátja. Létezik tehát legkisebb felső korlátja; legyen ez c.

Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $c+\varepsilon$ nem eleme a T halmaznak (nagyobb c-nél, a felső korlátnál), ezért a $[c+\varepsilon;\ B]$ intervallum csak véges sok elemet tartalmaz az $x_1, x_2, \ldots$ sorozatból.

A $c-\varepsilon$ szám viszont nem felső korlát (kisebb c-nél, a legkisebb felső korlátnál), ezért létezik egy olyan $t > c-\varepsilon$ szám, ami eleme T-nek. Ez azt jelenti, hogy a $[t;\ B] \subset (c-\varepsilon;\ B]$ intervallum végtelen sok elemet tartalmaz az $x_1, x_2, \ldots$ sorozatból.

Összefoglalva, tetszőleges ε esetén a $(c-\varepsilon;\ B]$ intervallum végtelen sok, a $[c+\varepsilon;\ B]$ intervallum viszont csak véges sok elemet tartalmaz az $x_1, x_2, \ldots$ sorozatból; ebből következik, hogy a két intervallum különbsége, $(c-\varepsilon;\ c+\varepsilon)$ is végtelen sokat tartalmaz.

Borel fedési tételének bizonyítása intervallum-felezéssel

Tegyük fel, hogy az $[a, b]$ intervallumot nem lehet lefedni véges sok nyílt intervallummal. Definiálunk egy olyan $[a_0;\ b_0] \supset [a_1;\ b_1] \supset [a_2;\ b_2] \supset \ldots$ intervallum-sorozatot, amelyre tetszőleges n esetén az $[a_n;\ b_n]$ intervallum nem fedhető le véges sok nyílt intervallummal.

Legyen $[a_0;\ b_0] = [a;\ b]$. Ha már definiáltuk $[a_n;\ b_n]$-et és ez nem fedhető le véges sok nyílt intervallummal, akkor az $\left[a_n;\ \dfrac{a_n+b_n}{2}\right]$ és $\left[\dfrac{a_n+b_n}{2};\ b_n\right]$ intervallumok közül legalább az egyiket szintén nem lehet véges sok nyílt intervallummal lefedni. Az egyik ilyet válasszuk $[a_{n+1};\ b_{n+1}]$-nek.

A $[a_n;\ b_n]$ intervallumoknak létezik egy közös c eleme. Tegyük fel, hogy c eleme egy I nyílt intervallumnak. Ekkor elég nagy n esetén $[a_n;\ b_n] \subset I$. Ez viszont ellentmondás, mert I egymagában lefedi az $[a_n;\ b_n]$ intervallumot. A c számot tehát egyik nyílt intervallum sem tartalmazza.

Borel fedési tételének bizonyítása a legkisebb felső korlát tételével

Tegyük fel ismét, hogy az $[a, b]$ intervallumot nem lehet lefedni véges sok nyílt intervallummal. Legyen T azoknak a $[a;\ b]$-beli t számoknak a halmaza, amelyekre a

$[t;\, b]$ intervallum nem fedhető le véges sok nyílt intervallummal. A T halmaz nem üres, például $a \in T$, másrészt felülről korlátos. Legyen $c = \sup T$.

Ha c-t egyik nyílt intervallum sem tartalmazza, kész vagyunk. Tegyük tehát fel, hogy c-t tartalmazza egy (u,v) nyílt intervallum. Ekkor $c < v$ miatt v nem eleme T-nek, és a $[c;\, b]$ intervallum lefedhető véges sok nyílt intervallummal. Ezek (u, v)-vel együtt az $(u;\, b]$ intervallumot is lefedik. Tehát tetszőleges $t > u$ esetén a $[t;\, b]$ intervallum lefedhető véges sok nyílt intervallummal. Ebből következik, hogy u is felső korlátja T-nek, ami ellentmond annak, hogy c a legkisebb felső korlát.

Az algebra alaptétele

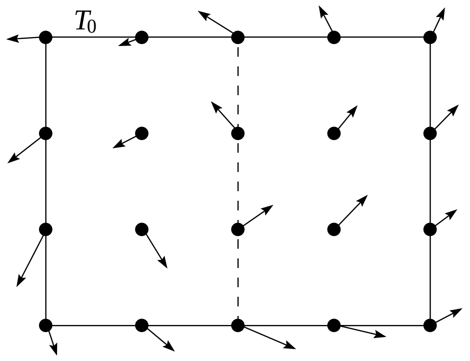
Az algebra alaptételét csak vázlatosan bizonyítjuk. A korrekt bizonyításhoz szükség lenne több fogalom pontos definiálására, amelyek a bizonyítást sokkal hosszabbra nyújtanák.

Tekintsük a

$$p(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

polinomot, ahol $k \geqslant 1$ és $a_k \neq 0$, és tegyük fel indirekte, hogy nincs gyöke a komplex számok körében.

A polinomot mint a komplex számokon értelmezett komplex értékű függvényt ábrázoljuk úgy, hogy a komplex számsík minden pontjába rajzoljuk be a polinom itteni helyettesítési értékét. Így minden egyes pontba egy vektort rajzoltunk.



A komplex síkon egy függvénynek tetszőleges téglalapon definiálhatjuk a *körülfordulási számát.* Ez azt mondja meg, hogy a téglalap kerületén pozitív irányban körbehaladva a függvényértékek összesen hányszor fordulnak körbe. A körülfordulási számot „előjelesen” számítjuk. Ha például a függvényértékek előbb 60°-ot fordulnak pozitív irányba, majd 420°-ot negatív irányba, akkor összesen 360°-ot fordulnak negatív irányba, és a körülfordulási szám -1.

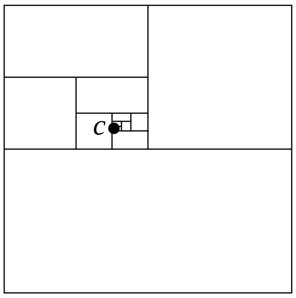
Tekintsünk egy T_0 téglalapot, amely a belsejében tartalmazza a 0-t. Ha az $a_k z^k$ függvényt ábrázoljuk, akkor a komplex hatványozás tulajdonságai miatt a körüljárási szám pontosan k.

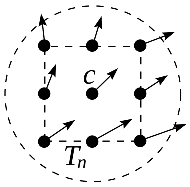
Válasszuk a téglalapot olyan nagyra, hogy kerületén az $a_k z^k$ tag sokkal nagyobb legyen, mint az összes többi tag együttvéve. Ekkor a téglalap kerületén a függvényértékek iránya majdnem ugyanaz lesz, mint az $a_k z^k$ iránya, és a körüljárási szám nem változik.

Felezzük el a téglalapot valamelyik oldalával párhuzamosan. Ha körbesétálunk a két fél téglalap kerületén, akkor az egész téglalap kerületének minden szakaszán pontosan egyszer haladunk végig, a két fél téglalap közötti szakaszon pedig mindkét irányban pontosan egyszer. Emiatt a két fél téglalapon a körüljárási számok összege megegyezik a teljes téglalap körüljárási számával.

Most definiáljuk a $T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset \ldots$ téglalapokat úgy, hogy tetszőleges n pozitív egész esetén p körüljárási száma a T_n téglalapon pozitív legyen. A T_0 téglalapot már definiáltuk. Ha T_n-et már előállítottuk, akkor felezzük el a hosszabbik oldalára merőlegesen. Ezzel két fél téglalapra bontottuk. A két fél téglalapon a körüljárási számok összege megegyezik T_n körüljárási számával, ami pozitív. Ebből következik, hogy legalább az egyik fél téglalap körüljárási száma pozitív. Az egyik ilyen fél téglalapot válasszuk T_{n+1}-nek.

Nem nehéz meggondolni, hogy a téglalapoknak egyetlen közös pontja van. Legyen ez c. Azt állítjuk, hogy c gyöke a polinomnak.





Tegyük fel, hogy c nem gyök, azaz $p(c) \neq 0$. Mivel a polinom folytonos, rajzolhatunk c körül egy elég kis kört úgy, hogy annak belsejében a polinom értékének iránya $p(c)$ irányától legfeljebb 90°-kal térjen el. Ez a kör tartalmazza a T_n téglalapot, ha n elég nagy. Ez viszont ellentmondás, mert a körüljárási szám T_n-en pozitív, ugyanakkor a kör belsejében a függvényértékek egy félsíkba esnek, egyszer sem tudnak tehát körbefordulni.

„Oroszlánfogás” a Téli Ankéton

Feladatok

1. Bizonyítsuk be mindkét módszerrel Bolzano tételét: Ha f az $[a;\ b]$ intervallumon értelmezett folytonos függvény, $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$, akkor létezik olyan $c \in (a;\ b)$ szám, amelyre $f(c) = 0$.

2. Bizonyítsuk be mindkét módszerrel Weierstrass tételét: Tetszőleges, az $[a;\, b]$ intervallumon értelmezett folytonos f függvénynek létezik maximuma és minimuma. (Segítség: Keressünk olyan c számot, amelyre $f(c)$ az f értékkészletének szuprémuma, illetve infimuma.)

3. Keressünk a valós számok axiómái között olyat, amelyik következik a többiből.

4. Igaz marad-e a Cantor-axióma, ha zárt intervallumok helyett nyílt intervallumokkal mondjuk ki?

5. Miért nincs legkisebb felső korlátja az üres halmaznak?

6. Bizonyítsuk be a test- és rendezési axiómákból valamint a legkisebb felső korlát tételéből az Arkhimédészi és a Cantor-axiómát.

7. Mutassunk példát olyan rendezett testre, amelyben teljesül a Cantor-axióma, de nem teljesül az Arkhimédészi axióma.

8. Adjunk meg olyan rendezést a racionális törtfüggvények testén, hogy rendezett testet alkossanak és ne teljesüljön az Arkhimédészi axióma.

9. Egy p polinomnak nincs gyöke a T téglalap kerületén, ahol a körüljárási száma n. Bizonyítsuk be, hogy a polinomnak, az esetleges többszörös gyököket multiplicitással számolva, pontosan n gyöke van a téglalap belsejében.

Kós Géza

Helyesbítés

Győry Kálmán: Binomiális együtthatók és teljes hatványok című cikkében (megjelent az 1999/1. számban) sajnos néhány sajtóhiba maradt. Közülük a lényegesebbek javításai:

A 10. oldal utolsó előtti bekezdésében:

1963-ban sikerült bebizonyítanom, hogy ha a (2) egyenlet $k=2$ esetén egy $l>5$ prímre nem megoldható, úgy $k=3$-ra és a tekintett l-re csak akkor lehet megoldható, ha

$$3^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^2}. \tag{3}$$

A 11. oldalon a szerző neve helyesen Győry Kálmán.

A 12. oldal 3-as fejezetében az első képlet száma helyesen (6).

A 14. oldal 2. bekezdése:

Az (1), (2) és (6) egyenletek további általánosításai a

$$n(n+d)\ldots(n+(k-1)d)=x^l \qquad \text{és a} \tag{7}$$

$$n(n+d)\ldots(n+(k-1)d)=bx^l \tag{8}$$

egyenletek, ahol n, d, k, b, x, l pozitív egész ismeretlenek, $k\geqslant 3$, $x\geqslant 2$, $l\geqslant 2$, $(n,d)=1$ és $P(b)\leqslant k$. Mint említettük, ezekkel az egyenletekkel is sokan foglalkoztak, sok érdekes eredményt publikáltak. Ezekről az eredményekről az érdeklődő olvasó áttekintést nyerhet a [7], [9], [8], [6] munkákból.

Ezúton kérünk elnézést a Szerzőtől.

A szerk.

FIGYELEM!

Kós Géza és Győry Kálmán cikke internet honlapunkon (`http://komal.elte.hu`) is olvasható.

Mérőlap felvételire készülőknek III.

A pécsi Janus Pannonius gimnázium tiszteletére, ahol az 1956–57. tanévben tanítottam.

1. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán.

a) $2^x + \sqrt{2^{x+2} \cdot 5^x} = 3 \cdot 5^x$; b) $\dfrac{1}{x^2-3x+3} + \dfrac{2}{x^2-3x+4} = \dfrac{6}{x^2-3x+5}$;

c) $2\sin 2x + 2\sin x = 2\cos x + 1$.

2. Oldja meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán.

a) $(x+1)(|x|-1) \leqslant -\dfrac{1}{2}$; b) $\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} \geqslant -2$;

c) $\log_2(4^x - 5 \cdot 2^x + 8) > 2$.

3. Tekintsük a $4x - 3y + 20 = 0$ egyenletű e egyenest és az $x_0 = -2$ abszcisszájú E pontját. A k kör sugara 10 egység, és az e egyenest az E pontban érinti.

a) Számítsa ki az $\overrightarrow{EK}$ és $\overrightarrow{OK}$ vektorok koordinátáit, ha K a k kör középpontja, O pedig az origó.

b) Írja fel a k kör egyenletét.

4. Igazolja, hogy az $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0,\ b^2 - 4ac > 0)$ egyenlet két gyökének aránya pontosan akkor (akkor és csak akkor) $3:2$, ha $6b^2 = 25ac$.

5. Az $ABCD$ téglalapban $2 \cdot AB = 3 \cdot BC$. Az AB oldal *egyenesének* egy P pontjától a C, illetve D csúcsok távolsága $8\sqrt{2}$, illetve $4\sqrt{5}$ egység. Számítsa ki a téglalap oldalainak hosszát. Hová esik a P pont?

6. Igazolja, hogy egy háromszög pontosan akkor derékszögű, ha $\sin\gamma = \cos\alpha + \cos\beta$, ahol γ a háromszög egyik hegyesszöge.

7. Oldja meg az $x^{1+\log_a x} > a^2 x$ egyenlőtlenséget, ahol $a > 0$, $a \neq 1$ valós paraméter.

8. Határozza meg az

$$f(x,y) = x^4 + 4y^4 + \frac{1}{x^2y^2}$$

kifejezés legkisebb helyettesítési értékét! Mely $(x;y)$ számpárok esetén veszi fel $f(x;y)$ a legkisebb értékét?

Rábai Imre

MEGJELENT

Rábai Imre: Matematika mérőlapok érettségire, felvételire készülőknek című könyve. (Műszaki Könyvkiadó, 1998).

Ajánljuk mind a tanárok, mind a diákok figyelmébe!

A januári szakköri feladatok megoldásvázlatai, eredményei

1. Csak olyan x szám lehet megoldás, amelyre $\sqrt{x-1}+x-3\geqslant 0$, azaz $x\geqslant 2$. Legyen $x-3=z$ és $\sqrt{x-1}=y$ (>0). Ekkor $y+z\geqslant\sqrt{2y^2+2z^2}$, ami ekvivalens az $y^2+z^2+2yz\geqslant 2y^2+2z^2$ és így az $(y-z)^2\leqslant 0$ egyenlőtlenséggel; tehát $y=z$, $\sqrt{x-1}=x-3$, $x-1-\sqrt{x-1}-2=0$, $\sqrt{x-1}=2$ (hiszen $\sqrt{x-1}>0$), $x=5$. Az adott egyenlőtlenséget egyetlen szám, $x=5$ elégíti ki.

2. Jelölje a BPC, illetve a DPA háromszögek területét t_2, illetve t_4, a négyszög területét T. Mivel egyrészt $T=t_1+t_2+t_3+t_4$, másrészt $T=t_1+t_3+2\sqrt{t_1t_3}$, azért $t_2+t_4=2\sqrt{t_1t_3}$.
Legyen $AP=e_1$, $PC=e_2$, $BP=f_1$, $PD=f_2$.
Az egyenlő magasságú háromszögek területének arányára vonatkozó állítás alkalmazásával:

$$\frac{t_1}{t_2}=\frac{e_1}{e_2}\quad\text{és}\quad\frac{t_4}{t_3}=\frac{e_1}{e_2},\qquad\text{tehát}\quad t_1t_3=t_2t_4.$$

Így $t_2+t_4=2\sqrt{t_2t_4}$, $\left(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_4}\right)^2=0$, azaz $t_2=t_4$.

Ha az átlók szöge φ, akkor $t_2=\frac{1}{2}e_2f_1\sin\varphi$ és $t_4=\frac{1}{2}e_1f_2\sin\varphi$, amiből $e_1f_2=e_2f_1$, $\frac{e_1}{f_1}=\frac{e_2}{f_2}$. Az APB és a CPD háromszögek tehát hasonlók, $PAB\sphericalangle=PCD\sphericalangle$, ezért AB párhuzamos CD-vel, azaz a négyszög valóban trapéz.

3. Szorozzuk meg $2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$-vel az egyenlet mindkét oldalát, a bal oldalon alakítsunk szorzattá.

$$(2\sin x\cos x)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=1,\qquad\qquad \sin 2x\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

Ez csak úgy lehetséges, ha

a) $\sin 2x=1$ és $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$ vagy b) $\sin 2x=-1$ és $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$.

a) $2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ *és* $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2n\pi$, $x=\frac{3\pi}{4}+2n\pi$, ilyen x tehát nincs;

b) $2x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ *és* $x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}+2n\pi$, $x=\frac{7\pi}{4}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$.

Az egyenlet megoldásai az $x=\frac{7\pi}{4}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$ számok.

4. Az igazolandó egyenlőség ekvivalens a következőkkel:

$$\cos\alpha\sin\alpha+\cos\beta\sin\beta+\cos\gamma\sin\gamma=2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$
$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Így elegendő ez utóbbit igazolni.

Mivel $\sin 2\alpha+\sin 2\beta=2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$, és felhasználva, hogy $\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)$, $2\gamma=360^\circ-2(\alpha+\beta)$,

$$\sin 2\gamma=-\sin 2(\alpha+\beta)=-2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta),$$

tehát

$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=2\sin(\alpha+\beta)(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))=$$
$$=2\sin(180^\circ-(\alpha+\beta))\cdot 2\sin\alpha\sin\beta=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Rábai Imre

C gyakorlatok megoldásai

C. 509. *Egy mozgólépcsőn* 125 *lépcsőfok van. Az egyenletesen felfelé haladó mozgólépcsőn mi is elindulunk felfelé, és* 45 *lépcsőfok megtétele után felérünk. Legközelebb már* 55 *lépcsőfokot tudunk ily módon megtenni. (A mozgólépcső sebessége nem változott.) Hányszorosára sikerült sebességünket növelni?*

Javasolta: *Fried Ervin,* Budapest

I. megoldás. Az első esetben a mozgólépcső t_1 időegység alatt 80 lépcsőfokot, a második esetben t_2 időegység alatt 70 lépcsőfokot haladt felfelé. Sebességére (amelyről tudjuk, hogy állandó), vagyis az időegység alatt megtett lépcsőfokok számára:

$$\frac{80}{t_1}=\frac{70}{t_2},$$

ahonnan $t_2=\frac{7}{8}t_1$.

A mi sebességünk az első esetben $v_1=\frac{45}{t_1}$, a második esetben $v_2=\frac{55}{t_2}$.

Ezért

$$\frac{v_2}{v_1}=\left(\frac{55}{t_2}\Big/\frac{45}{t_1}\right)=\frac{11t_1}{9t_2}=\frac{11}{9\cdot\frac{7}{8}}=\frac{88}{64}\approx 1{,}397.$$

Balog Krisztián (Miskolc, Földes F. Gimn., 12. o.t.)

II. megoldás. Az első alkalommal a „hiányzó” $125-45=80$ lépcsőfokot a mozgólépcső azalatt az idő alatt tette meg, amíg mi 45-öt. Így a sebességünk a mozgólépcsőéhez viszonyítva $\frac{45}{80}$ volt. A második alkalommal erre a sebességarányra $\frac{55}{70}$ adódik. Ezért a sebességnövekedés aránya:

$$\left(\frac{55}{70}\right)\Big/\left(\frac{45}{80}\right)=\frac{55\cdot 80}{70\cdot 45}=\frac{88}{63}\approx 1{,}397.$$

(Ez jóval nagyobb, mint a hibásan számítható $\frac{55}{45}\approx 1{,}222$ érték.)

789 dolgozat érkezett. 5 pontos 542, 4 pontos 5, 3 pontos 5, 2 pontos 7, 1 pontos 79, 0 pontos 151 dolgozat.

C. 510. *Legyen A tízmilliárd jegyű, kilenccel osztható pozitív szám. Az A számjegyeinek összege B, a B számjegyeinek összege C. Mekkora a C számjegyeinek összege?*

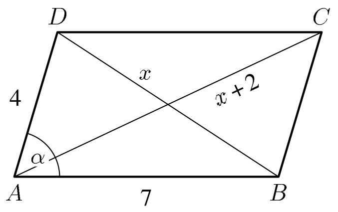
Megoldás. Világos, hogy egy pozitív szám számjegyeinek az összege is pozitív; jól ismert továbbá, hogy egy kilenccel osztható szám számjegyeinek az összege is osztható kilenccel. Ennek következtében kilenccel osztható pozitív szám a B is, a C is, sőt a C jegyeinek az összege, D is.

Mivel A-nak tízmilliárd jegye van, azért jegyeinek összege nem lehet nagyobb tízmilliárd darab 9-es összegénél: $B \leqslant 9 \cdot 10^{10}$. Más szóval, B egy legfeljebb 11-jegyű szám, amely nem állhat 11 darab 9-es jegyből, mert az nagyobb, mint $9 \cdot 10^{10}$. Ebből viszont azt kapjuk, hogy C határozottan kisebb, mint $9 \cdot 11$, azaz 99. Így D két olyan számjegy összege, amelyek közül legalább az egyik kisebb, mint 9; tehát $C \leqslant 9+8=17$. Mivel az egyetlen 17-nél kisebb 9-cel osztható pozitív szám a 9, azért $D=9$.

Megjegyzés. A hibás dolgozatok viszonylag nagy száma abból adódott, hogy azt a feltételt, mely szerint A tízmilliárd jegyű, összetévesztették azzal, hogy A tízmilliárd nagyságrendű, azaz 11-jegyű.

597 dolgozat érkezett. 5 pontos 249, 4 pontos 57, 3 pontos 47, 2 pontos 44, 1 pontos 67, 0 pontos 133 dolgozat.

C. 511. *Egy paralelogramma oldalai* 4 cm *és* 7 cm *hosszúak; két átlójának hossza között pedig* 2 cm *a különbség. Mekkorák a paralelogramma átlói?*



Megoldás. Az $ABCD$ paralelogrammában legyen $AD=BC=4$ cm, $AB=CD=7$ cm, $BD=x$, $AC=x+2$, az A csúcsnál lévő hegyesszög α. Az ABD és ABC háromszögre írjuk fel a koszinusztételt:

$$x^2=4^2+7^2-2\cdot 4\cdot 7\cdot\cos\alpha, \qquad \text{illetve}$$

$$(x+2)^2=4^2+7^2-2\cdot 4\cdot 7\cos(180^\circ-\alpha).$$

Mivel $\cos\alpha=-\cos(180^\circ-a)$, a két egyenlet megfelelő oldalait összeadva kapjuk, hogy

$$x^2+(x+2)^2=2(4^2+7^2). \tag{1}$$

Az egyenletet rendezve az

$$x^2+2x-63=0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, ahonnan $x=7$ (a másik gyök negatív) és $x+2=9$ a két átló hossza.

Fiedler Ágnes (Esztergom, Sz. István Gimn., 11. o.t.)

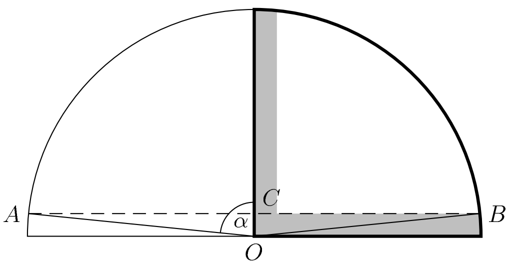
Megjegyzések. Az (1) egyenletet rögtön felírhatjuk az úgynevezett paralelogramma tétel ismeretében, ami azt mondja ki, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő a négy oldal négyzetösszegével. Ezt többen (jogosan) fel is használták, mint ismert tételt.

2. A feladatot megoldhatjuk a Pitagorasz-tétel, vagy a Heron-képlet felhasználásával is. Ezek a megoldások jóval bonyolultabbak.

732 dolgozat érkezett. 6 pontos Bérces Márton, Birkner Tamás, Farkas Milán, Gyérmán , János, Horváth 313 Dániel, Kardos Péter, Kegyes Tamás, Keresztély Éva, Lovas Róbert, Matécsa 999 Márta, Matos Zoltán, Medve Kinga Sára, Monyók Akos, Orbán Viktor, Pallagi Orsolya, Pintér Zsuzsanna, Radics Géza, Robotka Zsolt, Szalay Zsófia, Székelyhidi Tamás, Szép László, Taraza Busra, Tóth 777 Balázs, Vanya Ádám, Varga Adrienn, Varga Zoltán, Vincze Tímea, Yu Da megoldása. 5 pontos 570, 4 pontos 53, 3 pontos 1, 2 pontos 8, 1 pontos 8, 0 pontos 34, nem versenyszerű 30 dolgozat.

C. 512. *A kör alakú torta negyedrésze (*15 cm *sugarú negyedkör) még megvolt, amikor elmentek a vendégek. Azután levágtunk a szélső sugarakkal párhuzamosan egy-egy* 1,5 cm *széles csíkot, és megettük. Hányadrészét fogyasztottuk el a tortadarabnak?*

Megoldás. Helyezzük át az egyik levágott szeletet az *ábra* szerint. Vegyük észre, hogy ha a félkör T_1 területéből levonjuk az $\widehat{AB}$ körszelet T_2 területét, a különbség majdnem a megevett tortacsíkok területét adja; csupán egy kicsivel több, mégpedig az 1,5 cm oldalú négyzet területével



Az $\widehat{AB}$ területének kiszámításához szükségünk van az AOB szögre. Ennek felét az OAC derékszögű háromszögből kaphatjuk meg: $\cos\alpha=\dfrac{1{,}5}{15}=0{,}1$ innen $\alpha\approx 84{,}26^\circ$ és $OAB\sphericalangle=2\alpha\approx 168{,}52^\circ$.

Az $\widehat{AB}$ körszelet területét az AOB körcikk és az AOB háromszög területének különbsége adja:

$$T_2=\frac{r^2\pi\alpha}{360^\circ}-\frac{r^2\sin 168{,}52^\circ}{2}\approx 330{,}89-22{,}39=308{,}5\ \text{cm}^2.$$

$$T_1-T_2\approx\frac{r^2\pi}{2}-308{,}5=\frac{15^2\pi}{2}-308{,}5\approx 44{,}929\ \text{cm}^2.$$

A most kapott különbségből kell levonnunk az 1,5 cm^2 oldalú négyzet területét. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$44{,}929\ \text{cm}^2-2{,}25\ \text{cm}^2=42{,}679\ \text{cm}^2.$$

Ennyi a megevett torta területe. Végül a két terület hányadosa:

$$\frac{42{,}678}{15^2\pi/4}\approx 0{,}2405,$$

azaz a tortadarabnak majdnem a negyedrészét fogyasztottuk el.

Varga Attila (Tamási, Béri Balogh Á. Gimn., 11. o.t.)

725 dolgozat érkezett. 7 pontot kapott Károly Zoltán és Székelyhidi Tamás. 6 pontot Bécsi Kristóf, Fazekas Gábor, Havran Dániel, Kalmár Mónika, Nyíri 104 Sándor és Varga 951 Attila. 5 pontos 277, 4 pontos 21, 3 pontos 42, 2 pontos 30, 1 pontos 18, 0 pontos 316, nem versenyszerű 13 dolgozat.

Matematika gyakorlatok megoldásai

Gy. 3216. *Milyen a, b esetén van közös megoldása a*

$$19x^2+19y^2+ax+by+98=0 \qquad \textit{és a}$$
$$98x^2+98y^2+ax+by+19=0 \qquad \textit{egyenleteknek?}$$

Megoldás. Vonjuk ki a második egyenletből az elsőt, azt kapjuk, hogy

$$79x^2+79y^2-79=0,$$

azaz

(1) $$x^2+y^2=1.$$

Most adjuk össze az eredeti egyenleteket:

$$117x^2+117y^2+2ax+2by+117=0;$$

(1)-et behelyettesítve

(2) $$ax+by=-117.$$

Az eredeti egyenletnek ugyanakkor lesz közös megoldásuk, amikor (1)-nek és (2)-nek.

Nézzük meg először azt az esetet, ha $a=0$.

Ekkor (2) miatt $b\neq0$, tehát $y=-\dfrac{117}{b}$. (1) miatt viszont $y^2\leqslant1$, tehát $b^2\geqslant117^2$ kell, hogy teljesüljön ($b\geqslant117$ vagy $b\leqslant-117$), ekkor (1)-nek és (2)-nek mindig lesz közös megoldása.

Abban az esetben, ha $a\neq0$, (2)-ből $x=\dfrac{-117-by}{a}$, és ezt (1)-be helyettesítve, majd $a^2(>0)$-val beszorozva és rendezve, az

$$(a^2+b^2)y^2+(2\cdot117\cdot b)y+(117^2-a^2)=0$$

másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek főegyütthatója, $a^2+b^2>0$. Ennek pontosan akkor lesz megoldása, ha diszkriminánsa nagyobb vagy egyenlő nullánál, azaz

$$4\left(117^2b^2-(a^2+b^2)(117^2-a^2\right)\geqslant0$$

Ezt az egyenlőtlenséget rendezve, majd $a^2>0$-val elosztva kapjuk, hogy

(3) $$a^2+b^2\geqslant117^2.$$

Ez a feltétel magában foglalja az $a=0$ esetben kapottat is, így (1)-nek és (2)-nak, tehát az eredeti egyenletrendszernek is pontosan akkor van megoldása, ha (3) teljesül, vagyis mindazokra az (a, b) számpárokra a síkon, amelyek az origó középpontú, 117 egység sugarú körvonalon és azon kívül vannak.

Tóth Ágnes (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., 9. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Némi koordinátageometriai ismeretet feltételezve látható, hogy az (1), (2) egyenletekből álló rendszer megoldhatósága azt jelenti, hogy a (2) egyenletű egyenes metszi vagy érinti az origó körüli egységsugarú kört.

Az egyenes távolsága az origótól $\frac{117}{\sqrt{a^2+b^2}}$, így akkor és csak akkor kapunk közös pontot, ha ez a távolság nem nagyobb, mint 1, a kör sugara, azaz $117^2 \leqslant a^2+b^2$.

281 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Lovrics Anna, 5 pontot Ambrus Gergely, Bálint Gergely, Birkner Tamás, Bóta Gergő, Csóka Endre, Csurgó Krisztina, Erdei Zsuzsa, Fodor 133 Gyula, Garai Zsolt, Gerencsér Balázs, Harangi Viktor, Horváth Szilárd, Jakab 282 Orsolya, Jelitai Kálmán, Kunszenti-Kovács Dávid, Kurcz Éva, Leipold Diána, Moldvai Levente, Nagy 139 Gergely, Pozsonyi Tamás, Schlanger Judit, Somogyi György, Ta Vinh Thong, Tóth 370 Ágnes, Tran Thanh Long és Vígh Viktor. 4 pontos 67, 3 pontos 19, 2 pontos 35, 1 pontos 89, 0 pontos 34, nem versenyszerű 10 dolgozat.

Gy. 3217. *Melyek azok a p prímszámok, amelyekre a*

$$p+1=2x^2$$
$$p^2+1=2y^2$$

egyenletrendszernek van egész megoldása? (**H**)

(Német versenyfeladat)

Megoldás. Ha (x, y) egész megoldása a fenti egyenletrendszernek, akkor nyilván $(-x, y)$, $(-x, -y)$ és $(x, -y)$ is megoldásai, tehát feltehetjük, hogy $x>0$, $y>0$. Másrészt a két egyenletből nyilvánvaló, hogy $y>x$ és hogy $p>y$, tehát $p>x$ is, azaz $2p>x+y$.

Vonjuk ki eredeti második egyenletünkből az elsőt:

$$p^2-p=2(y^2-x^2)$$

innen

$$p\cdot\frac{p-1}{2}=(y+x)(y-x). \tag{1}$$

Mivel $p=2$ esetén nincs a fenti egyenletrendszernek egész megoldása, így p páratlan, tehát $\frac{p-1}{2}$ egész. Mivel p prím, így a jobb oldali szorzat valamelyik tényezőjének osztója kell, hogy legyen.

A p nem lehet osztója $(y-x)$-nek, hiszen láttuk, hogy $0<y-x<y<p$. Ezért biztosan $(y+x)$-nek osztója p, tehát $x+y=k\cdot p$ ($k \geqslant 1$ egész). A megoldás elején viszont megállapítottuk, hogy $2p>x+y$, így csak $k=1$ lehet. Tehát $x+y=p$, és így $y-x=\frac{p-1}{2}$ kell, hogy legyen. Ezt a két egyenletet összeadva $2y=p+\frac{p-1}{2}$-ből $y=\frac{3p-1}{4}$. Ezt a második egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$p^2+1=2\cdot\frac{(3p-1)^2}{16},$$

amit átrendezve a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$p^2-16p-7=0.$$

Ennek megoldásai $p_1=7$, $p_2=-1$. Közülük a $p=7$ prím, így csak ebben az esetben van az eredeti egyenletrendszernek egész megoldása ($x=\pm 2$, $y=\pm 5$).

Megjegyzés. Nagyon sok versenyző az (1) egyenlethez eljutva, minden egyéb megfontolás nélkül közölte, hogy ha a bal és a jobb oldalon a szorzatok egyenlők, akkor a kisebbik tényező kisebbikkel, a nagyobb pedig a nagyobbal lesz egyenlő. Ez azonban egyáltalán nincs így általában egy p prímszám és x, y egészek esetén (pl. $p=17$, $x=15$, $y=19$). Így többen hiába kaptak helyes eredményt, dolgozatukra csak részpontszámot adhattunk.

206 dolgozat érkezett. 5 pontos Ambrus Gergely, Arató Orsolya, Babos Attila, Bartha 321 Ágnes, Bence Virág, Bohák András, Bokros Krisztián, Csikvári Péter, Csiszár Gábor, Dénes Attila, Devecsery Ágnes, Dombai Péter, Dőrr Zsuzsanna, Fodor 133 Gyula, Gáspár Merse Előd, Görföl Tamás, Hablicsek Márton, Harangi Viktor, Kisfügedi Viktória, Kiss 345 Gergely, Lang Péter, Leipold Diána, Lovrics Anna, Majtényi Gergő, Mándy Péter, Paál Csaba, Papp Dávid, Rácz Judit, Szalay Zsófia, Taraza Busra, Terjéki László Dénes, Tran Thanh Long, Újvári Gergely, Urr Beáta, Varga Veronika, Varjú Péter, Venter György és Zábrádi Gergely megoldása. 4 pontos 20, 3 pontos 45, 2 pontos 19, 1 pontos 46, 0 pontos 38 dolgozat.

Gy. 3225. *Az (a_i) sorozatot a következőképpen definiáljuk:*

$$a_1=1, \qquad a_n=\frac{n+1}{n-1}(a_1+\ldots+a_{n-1}).$$

Határozzuk meg a_{1998} értékét.

I. megoldás. A képlet szerint a sorozat minden tagja nagyobb az előzőnél, tehát a sorozat pozitív tagú és monoton növekedő.

Szorozzuk be a k-adik tagot $(k-1)$-gyel, majd a $(k-1)$-ediket $(k-2)$-vel ($k>2$ egész):

(1)
$$(k-1)a_k=(k+1)(a_1+\ldots+a_{k-1})$$
$$(k-2)a_{k-1}=k(a_1+\ldots+a_{k-2}).$$

Itt adjunk mindkét oldalhoz $k\cdot a_{k-1}$-et:

(2)
$$(2k-2)a_{k-1}=k(a_1+\ldots+a_{k-1}).$$

(2)-t eloszthatjuk (1)-gyel (hiszen a_k is, $a_1+\ldots+a_{k-1}$ is pozitív):

(3)
$$2\cdot\frac{a_{k-1}}{a_k}=\frac{k}{k+1}.$$

(3)-at felírva $k=n, n-1, \ldots$, 3-ra, sőt 2-re is (ami $a_2=3a_1$ miatt szintén teljesül), majd összeszorozva kapjuk, hogy

$$2\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot 2\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\cdot 2\frac{a_{n-3}}{a_{n-2}}\cdot\ldots\cdot 2\frac{a_2}{a_3}\cdot 2\frac{a_1}{a_2}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3},$$

azaz

$$2^{n-1}\frac{a_1}{a_n}=\frac{2}{n+1},$$

tehát $a_n=(n+1)2^{n-2}$, $a_{1998}=1999\cdot 2^{1996}$.

II. megoldás. A sorozat első néhány elemét kiszámítva, $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=8$, $a_4=20$, sejthető, hogy $a_n=(n+1)2^{n-2}$, ha $n\geqslant 2$. Lássuk ezt be teljes indukcióval. Kiszámolhatjuk, hogy teljesül $n=2$, 3, 4-re. Tegyük fel, hogy valamely $n(>4)$ egészre $a_n=(n+1)2^{n-2}$, és bizonyítsuk be, hogy ekkor $(n+1)$-re is teljesül, azaz $a_{n+1}=(n+2)2^{n-1}$. Mivel $a_n=\dfrac{n+1}{n-1}(a_1+\ldots+a_{n-1})=(n+1)2^{n-2}$, így $a_1+\ldots+a_{n-1}=(n-1)\cdot 2^{n-2}$, tehát

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\frac{n+2}{n}(a_1+\ldots+a_n)=\frac{n+2}{n}\Big((n-1)2^{n-2}+(n+1)2^{n-2}\Big)=\\&=\frac{n+2}{n}\cdot 2\cdot n\cdot 2^{n-2}=(n+2)2^{n-1},\end{aligned}$$

amint azt bizonyítani akartuk.

Deli Lajos (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., 10. o.t.) megoldásai alapján

228 dolgozat érkezett. 6 pontos Deli Lajos megoldása. 5 pontot kapott 115, 4 pontot 14, 3 pontot 3, 2 pontot 54, 1 pontot 11, 0 pontot 26 beküldő. Nem versenyszerű 4 dolgozat.

Matematika feladatok megoldásai

F. 3215. *Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ valós számok mindegyike nagyobb a k pozitív számnál. Igazoljuk, hogy*

$$\frac{a_1^2}{a_2-k}+\frac{a_2^2}{a_3-k}+\ldots+\frac{a_{n-1}^2}{a_n-k}+\frac{a_n^2}{a_1-k}\geqslant 4kn.$$

Javasolta: *Czirok Levente,* Szekszárd

Megoldás. Nyilvánvalóan teljesül az $(a_i-2k)^2\geqslant 0$ egyenlőtlenség. A zárójelet felbontva adódik, hogy $a_i^2\geqslant 4ka_i-4k^2=4k(a_i-k)$.

$a_i>k$ miatt innen

$$\frac{a_i^2}{a_i-k}\geqslant 4k.$$

Szorozzuk össze a kapott egyenlőtlenségeket $i=1, 2, \ldots, n$-re, rendezzük át a szorzatban a nevezők sorrendjét, majd alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget. Ezt nyilván megtehetjük, mert minden mennyiség pozitív.

$$\begin{aligned}4^nk^n&\leqslant\frac{a_1^2}{a_1-k}\cdot\frac{a_2^2}{a_2-k}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n^2}{a_n-k}=\frac{a_1^2}{a_2-k}\cdot\frac{a_2^2}{a_3-k}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n^2}{a_1-k}\leqslant\\&\leqslant\left(\frac{\frac{a_1^2}{a_2-k}+\frac{a_2^2}{a_3-k}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_1-k}}{n}\right)^n.\end{aligned}$$

Innen n-edik gyökvonással és átrendezéssel kapjuk, hogy

$$4kn \leqslant \frac{a_1^2}{a_2-k}+\frac{a_2^2}{a_3-k}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_1-k},$$

ami éppen a bizonyítandó állítás. Az egyenlőséghez szükséges, hogy teljesüljön $(a_i-2k)^2=0$, azaz $a_i=2k$. Ezt behelyettesítve látható, hogy az egyenlőség ekkor valóban fenn is áll.

Megjegyzés. A megoldásból egyszerűen látszik a következő általánosítás is: ha a b_1, b_2, $\ldots$, b_n számok az a_1, a_2, $\ldots$, a_n valamilyen permutációja, akkor

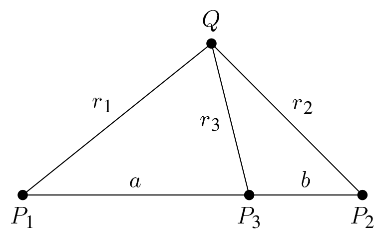
$$4kn \leqslant \frac{a_1^2}{b_1-k}+\frac{a_2^2}{b_2-k}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n-k}.$$

66 dolgozat érkezett. 6 pontos Hartmann Miklós, Horváth 472 András és Pataki Péter megoldása, 5 pontot kapott Csikvári András, Gáli Gergely, Gáspár Merse Előd, Gelencsér Gábor, Harangi Viktor, Hegedűs 396 Péter, Homolya Dániel, Horváth 202 Gábor, Kunszenti-Kovács Dávid, Léka Zoltán, Lippner Gábor, Lovrics Anna, Mecz Balázs, Oláh 407 Szabolcs, Pogány Ádám, Sarlós Ferenc, Szécsi Vajk, Vaik István, Vidor Anna és Zawadowski Ádám. 4 pontos 26, 3 pontos 11, 2 pontos 1, 1 pontos 3, 0 pontos 2 dolgozat.

Nehezebb matematika feladatok megoldása

N. 179. *Adott* 3 *kollineáris pont. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész* n *esetén megadható mindegyik pont körül* n *különböző sugarú kör úgy, hogy a sík azon pontjainak száma, amelyek* 3 *körvonalra illeszkednek, legalább* cn^2, *ahol* c *a pontok helyzetétől független pozitív állandó.*

Megoldás. Legyen a három pont P_1, P_2 és P_3. Ha valamelyik kettő egybeesik, akkor ezek köré ugyanakkora sugarú köröket rajzolva elérhetjük, hogy legyen $2n^2$ olyan pont, amelyen három kör is átmegy. A továbbiakban ezért feltesszük, hogy P_1, P_2 és P_3 különbözőek, valamint P_3 a P_1P_2 szakasz belsejében helyezkedik el.



Legyen $a=P_1P_3$ és $b=P_3P_2$, és vizsgáljuk meg, hogy P_1, P_2, P_3 köré egy r_1, r_2, illetve r_3 sugarú kört rajzolva, a három kör mikor megy át egy ponton. Legyen a P_i körüli r_1 sugarú és a P_2 körüli r_2 sugarú kör metszéspontja Q. Ahhoz, hogy ez a metszéspont létrejöjjön, szükséges és elégséges, hogy teljesüljenek a háromszög-egyenlőtlenségek az r_1, r_2 és $a+b$ számokra.

Tegyük fel, hogy a P_3 körüli, r_3 sugarú kör is átmegy Q-n. Felírva a koszinusztételt a P_1P_3Q és P_2P_3Q háromszögekre,

$$\cos P_1P_3Q\sphericalangle = \frac{a^2+r_3^2-r_1^2}{2ar_3} = -\cos P_2P_3Q\sphericalangle = -\frac{b^2+r_3^2-r_2^2}{2br_3},$$

ami rendezve a

$$b(r_1^2-a^2)+a(r_2^2-b^2)=(a+b)r_3^2 \tag{1}$$

alakba írható.

Legyen $d=\min\left(\frac{a}{n},\frac{b}{n}\right)$. Rajzoljuk meg P_1 körül az

$$r_{11}=\sqrt{a^2+ad},\quad r_{12}=\sqrt{a^2+2ad},\quad \ldots,\quad r_{1n}=\sqrt{a^2+nad}$$

sugarú köröket, P_2 körül az

$$r_{21}=\sqrt{b^2+bd},\quad r_{22}=\sqrt{b^2+2bd},\quad \ldots,\quad r_{2n}=\sqrt{b^2+nbd}$$

sugarú köröket, P_3 körül pedig az

$$r_{31}=\sqrt{2\frac{abd}{a+b}},\quad r_{32}=\sqrt{3\frac{abd}{a+b}},\quad \ldots,\quad r_{3n}=\sqrt{(n+1)\frac{abd}{a+b}}$$

sugarú köröket. Ezzel a választással $b(r_1^2-a^2)$ és $a(r_2^2-b^2)$ az abd, $2abd$, $\ldots$, $nabd$ számokon, $(a+b)r_3^2$ pedig a $2abd$, $3abd$, $\ldots$, $(n+1)abd$ számokon fut végig.

Az r_{1j}, r_{2j} és $a+b$ számokra mindig teljesülnek a megfelelő háromszög-egyenlőtlenségek, mert

$$a<r_{1j}\leqslant\sqrt{a^2+nad}\leqslant\sqrt{a^2+ab}<a+b$$

és

$$b<r_{2j}\leqslant\sqrt{b^2+nbd}\leqslant\sqrt{b^2+ab}<a+b.$$

Az egy ponton átmenő körhármasoknak a száma tehát megegyezik az $x+y=z$ egyenlet azon megoldásainak számával, amelyekben x, $y\in\{1,2,\ldots,n\}$ és $z\in\{2,3,\ldots,n+1\}$. Az ilyen számhármasok száma

$$\sum_{x=1}^{n}(n+1-x)=\frac{n(n+1)}{2}>\frac{n^2}{2}.$$

Mivel minden ilyen számhármashoz két metszéspont tartozik, összesen több, mint n^2 olyan pont van, amelyen három kör megy át. A feladat állítása tehát igaz a $c=1$ választással.

Megjegyzés. Az előbbi konstrukciót módosítva, az

$$r_{3i}=\sqrt{\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+i\right)\frac{abd}{a+b}}\qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

választással azoknak a pontoknak a száma, amelyeken három kör megy át, $\frac{3}{2}n^2$ lesz ha n páros, és $\frac{3n^2+1}{2}$ ha n paratlan. Azt is be lehet bizonyítani, hogy ennél több már nem érhető el. A legnagyobb c érték tehát, amivel az állítás igaz, a $\frac{3}{2}$.

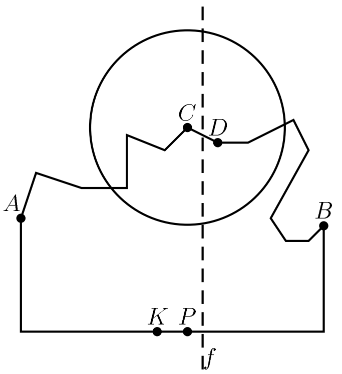
Terpai Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.) dolgozata alapján

9 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Terpai Tamás. 5 pontot kapott Gerbicz Róbert, Gyenes Zoltán, Juhász András, Lukács László és Végh A. László. 3 dolgozat hibás volt (0 pont).

N. 184. *Egy végtelen fagráf minden éle két olyan rácspontot köt össze, amelyek távolsága legfeljebb* 1998*. A sík minden rácspontja csúcsa a gráfnak. Bizonyítsuk be, hogy van két egységnyi távolságra lévő pont a síkon, amelyeket a fagráfban legalább* 10^{1998} *hosszúságú út köt össze.*

Megoldás. Válasszuk ki az A és B rácspontokat úgy, hogy azok távolsága nagyobb legyen, mint $2\cdot(10^{1998}+1)\cdot 1998$, és jelöljük az AB szakasz felező merőlegesét f-fel. Az A, B pontokat összekötő út tartalmaz legalább egy olyan élt, amelynek van közös pontja f-fel; legyen CD egy ilyen él.

A CD szakasz és f közös pontja $(10^{1998}+1)\cdot 1998$-nál nagyobb távolságra van A-tól és B-től is, a hossza pedig legfeljebb 1998, ezért a C és D pontok távolsága A-tól és B-től is nagyobb, mint $10^{1998}\cdot 1998$.



Ha a CD élt elhagyjuk a gráfból, a gráf két komponensre esik szét. Színezzük ki a pontokat pirosra és kékre aszerint, hogy melyik komponensbe esnek. Az A és B pontokat összekötő út tartalmazta a CD élt, ezért A és B különböző színűek.

Rajzoljunk C körül egy $10^{1998}\cdot 1998$ sugarú kört. Az A és B pontok ezen kívül vannak, és különböző színűek. Kössük össze az A és B pontokat egy olyan töröttvonallal, amelynek minden éle két szomszédos rácspontot köt össze, és teljes egészében a körön kívül halad. Mivel a töröttvonal két vége különböző színű, van olyan éle, amely egy piros és egy kék rácspontot köt össze; legyenek ezek P és K. A gráfban P és K pontokat összekötő útnak tartalmaznia kell a CD élt, mivel P és K különböző színűek (azaz CD elhagyásával különböző komponensbe kerülnek). Mivel P és K a körön kívül vannak, az őket összekötő út éleinek hossza összesen legalább $PC+CK\geqslant 2\cdot 10^{1998}\cdot 1998$, ezért a P és K szomszédos rácspontokat összekötő út legalább $2\cdot 10^{1998}$ élből áll.

11 versenyző küldött be dolgozatot. 5 pontot kapott Csóka Endre, Juhász András, Máthé András, Lukács László, Terpai Tamás és Végh A. László. 4 pontot kapott Gerbicz Róbert és Koch Dénes. 3 pontot kapott Devecsery András. 2 versenyző 2 pontot kapott.

A Természet Világa MATEMATIKA különszáma

Több évi szervező és előkészítő munka után a tavalyi év karácsonyi meglepetéseként jelent meg a Természet Világa MATEMATIKA különszáma. A Császár Ákos akadémikus szakmai felügyeletével Staar Gyula főszerkesztő gondozásában megjelent kiadvány széles ívű áttekintést ad a magyar matematika múltjáról és jelenéről: Bolyai János, Riesz Frigyes, Rényi Alfréd, Erdős Pál portréja mellett az élő magyar matematika reprezentatív képviselőinek írásait is olvashatjuk. Emellett a nagyvilág matematikájára is kitekinthetünk.

A színvonalas ismeretterjesztéstől az igényes matematikai közleményekig terjednek a kiadvány írásai, amelyekből a világ és benne Magyarország matematikájának sokszínűsége és összetartozása és az emberi kultúra változatossága és egysége tárul elénk.

Minden olvasónknak melegen ajánljuk a Természet Világa matematikai különszámát. Kapható az újságárusoknál, szerkesztőségünkben (is), ára 560 Ft.

A pontversenyben kitűzött C gyakorlatok (529–532.)

C. 529. Melyik az a legkisebb pozitív páratlan szám, amelynek ugyanannyi osztója van, mint a 360-nak?

C. 530. Bizonyítsuk be, hogy egy α szög szinusza és koszinusza akkor és csak akkor racionális egyszerre, ha $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ racionális (vagy nem értelmezett).

Javasolta: *Hans Zoltán*

C. 531. Tekintsük azokat a valódi háromszögeket, amelyek csúcspontjainak koordinátái egy síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben a -1, 0, 1 számok közül valók. Milyen távolságra lehet e háromszögek súlypontja az origótól?

C. 532. Az r_1 és r_2 sugarú körök kívülről érintik egymást. Egyik közös külső érintőjüknek az érintési pontok közé eső szakaszát megforgatjuk a körök centrálisa körül. Fejezzük ki a keletkező csonkakúp palástjának területét r_1-gyel és r_2-vel.

❄

Beküldési határidő: 1999. március 16.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest, Pf. 47. 1255

❄

Általános iskolásoknak javasolt feladatok: **C.529, Gy.3254, Gy.3255, Gy.3257, Gy.3258.**

A pontversenyben kitűzött gyakorlatok (3254–3261.) és feladatok (3268–3273.)

Gy. 3254. Van-e olyan köbszám, amelynek tízes számrendszerbeli alakja $ababab1$ alakú?

Spanyol versenyfeladat

Gy. 3255. Öreg falióránk számlapjáról leesett az összes szám. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan összekeverve tesszük is vissza a tizenkét számot, lesz közöttük három egymás melletti, amelyek összege legalább 20. Igaz-e, hogy mindig van 20-nál nagyobb összeg is?

A kolozsvári Matematikai Lapok nyomán

Gy. 3256. Adjuk meg az összes olyan p, q, r (nem feltétlenül pozitív) prímszámot, amelyre

$$\frac{1}{p-q-r}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}.$$

Javasolta: *Kovács Ádám,* Budapest

Gy. 3257. Van két egyforma bögrénk. Meg szeretnénk tudni, hogy egy 31 szintes ház hányadik emeletéről lehet egy ilyen bögrét leejteni úgy, hogy még ne törjön össze. Ehhez a két bögrét a ház különböző emeleteiről kiejthetjük.

Hány kísérletre van szükség a kérdés eldöntéséhez? (**H**)

Javasolta: *Marx Balázs,* Budapest

Gy. 3258. Mekkora lehet egy egységnyi területű konvex hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott hatszög területe?

Gy. 3259. Az O középpontú kör OA sugarát a BC húr merőlegesen metszi az M pontban. Legyen X a nagyobbik BC ív tetszőleges pontja, XA és BC metszéspontja Y, az XM egyenes és a kör második metszéspontja pedig Z. Bizonyítsuk be, hogy $AY \geqslant MZ$.

Gy. 3260. Egy derékszögű koordinátarendszerben megrajzolt négyzet oldalai 45°-os szöget zárnak be a tengelyekkel. Lehetséges-e, hogy a négyzet belsejében pontosan 7 rácspont található?

Gy. 3261. Adott az $ABCD$ konvex négyszög a síkban. Bizonyítsuk be, hogy a síkra merőlegesen állított AC és BD átmérőjű körök akkor és csak akkor metszik egymást, ha $ABCD$ húrnégyszög. **(H)**

Beküldési határidő: 1999. március 16.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

F. 3268. Legyen p egy $4k+3$ alakú prímszám. Igazoljuk, hogy ha az x, y pozitív egész számokra $x^2-xy+\frac{p+1}{4}y^2$ osztható p-vel, akkor léteznek olyan u, v egészek, amelyekre

$$x^2-xy+\frac{p+1}{4}y^2=p\left(u^2-uv+\frac{p+1}{4}v^2\right).$$

F. 3269. Határozzuk meg az $s+1$ alapú számrendszerben felírt $1+22+333+4444+$ $+\ldots+\underbrace{sss\ldots s}_{s\text{-szer}}$ összeg $(s-1)$-gyel való osztási maradékát.

F. 3270. Tekintsük azokat a $p(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ polinomokat, amelyek együtthatói 3-nál kisebb pozitív számok, és amelyeknek nincs valós gyöke. Legfeljebb mekkora lehet abc értéke?

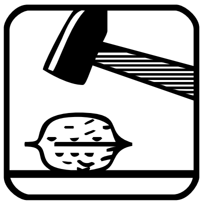
F. 3271. A $P_1P_2\ldots P_n$ konvex n-szög belsejében úgy helyeztük el a Q_1, Q_2, ..., Q_{n-2} pontokat, hogy bármelyik $P_iP_jP_k$ háromszög belsejébe pontosan egy esik közülük. Igazoljuk, hogy ha az n-szöget az összes átlója behúzásával felosztjuk, akkor mindegyik Q_ℓ pont egy háromszög alakú tartományba esik.

Sarlós Ferenc ötletéből

F. 3272. Legfeljebb hány egyenest határoznak meg négy, páronként különböző sugarú, egymáson kívül elhelyezkedő gömb páronkénti külső és belső hasonlósági pontjai?

F. 3273. Adott a k kör és annak egy e átmérő egyenese. Határozzuk meg azon körök középpontjainak halmazát, amelyek e-t érintik, k-hoz legközelebbi pontjuknak k-tól való távolsága pedig megegyezik a sugarukkal.

A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (199–202.)



N. 199. Van k darab egyforma bögrénk. Meg szeretnénk tudni, hogy egy n szintes ház hányadik emeletéről lehet egy ilyen bögrét leejteni úgy, hogy még ne törjön össze. Ehhez a bögréket a ház különböző emeleteiről kiejthetjük. Hány kísérletre van szükség a kérdés eldöntéséhez?

N. 200. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok pozitív egész n-hez létezik olyan n-edfokú valós együtthatós p polinom, amelyre $p(1)$, $p(2)$, $\ldots$, $p(n+2)$ különböző 2-hatványok.

N. 201. Adott a komplex számsíkon négy pont: u_1, u_2, v_1 és v_2. A síkra merőlegesen vesszük azt a két kört, amelynek átmérője az u_1, u_2, illetve v_1, v_2 pontokat összekötő szakasz. Mutassuk meg, hogy ez a két kör pontosan akkor metszi egymást merőlegesen, ha

$$\frac{(u_1-v_1)(u_2-v_2)}{(u_2-v_1)(u_1-v_2)}=-1.$$

N. 202. Legyen p egy $4k+3$ alakú prímszám. Igazoljuk, hogy az $x^2-x+\dfrac{p+1}{4}$ számnak semmilyen pozitív egész x-re sincs $kp-1$ alakú osztója.

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS

(Volume 49. No. 2. February 1999)

New exercises for practice (see page 99): **C. 529.** Find the smallest odd positive integer that has the same number of divisors as the (even) number 360. **C. 530.** Prove that the sine and cosine of an angle α are both rational numbers if and only if $\tan(\alpha/2)$ is either a rational number or not defined. (Proposer: *Z. Hans*) **C. 531.** In the Cartesian system, consider all proper triangles whose vertices have integer coordinates of absolute value at most 1. Find a complete list of the distances of the centroids of these triangles from the origin. **C. 532.** Two circles of respective radii r_1 and r_2 touch each other externally. Consider one of their common external tangents. Rotate the segment of this line, which lies between the points of tangency, about the axis that connects the centres of the circles. Express, in terms of r_1 and r_2, the area of the curved surface obtained this way.

New exercises: Gy. 3254. Is there an integer whose cube has a decimal representation of the form $ababab1$? (*Spanish competition problem*) **Gy. 3255.** All the numbers have fallen down one by one from the face of an old wall-clock. Prove that if we replace the numbers, in any order, on the empty face of the clock, there will be three consecutive numbers among them that add up to 20 at least. Is it always true that there will also be a sum greater than 20? **Gy. 3256.** Find all (not necessarily positive) prime numbers p, q, r which satisfy

$$\frac{1}{p-q-r}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}.$$

(Proposer: *Á. Kovács,* Budapest) **Gy. 3257.** We have 2 identical mugs. In a 31-storey building, we have to determine the highest floor from which, when a mug is dropped, it still does not brake. The experiment we are allowed to do is to drop a mug from a floor of our choice. How many experiments are necessary to solve the problem in any case, for sure? (Proposer: *B. Marx,* Budapest) **Gy. 3258.** Find the maximum possible area any hexagon may have whose vertices are the midpoints of the sides of some convex hexagon of unit area. **Gy. 3259.** In a circle with centre O, radius OA intersects chord BC perpendicularly at a point M. Let X be an arbitrary point on the longer arc BC, and denote by Y the intersection point of XA and BC, and by Z the point of intersection of the circle with line XM, other than X. Prove that $AY \geqslant MZ$. **Gy. 3260.** In a rectangular coordinate system a square is drawn with sides forming angles of 45° with the axes. Is it possible that there are exactly 7 lattice points inside the square? **Gy. 3261.** A convex quadrilateral $ABCD$ is given in the plane. Prove that the circles with respective diameters AC

and BD, each orthogonal to the plane, intersect each other if and only if the quadrilateral $ABCD$ is cyclic.

New problems: F. 3268. Let p denote a prime number of the form $4k+3$. Suppose that x, y are positive integers such that $x^2-xy+\frac{p+1}{4}y^2$ is divisible by p. Prove that there exist integers u,v such that

$$x^2-xy+\frac{p+1}{4}y^2=p\left(u^2-uv+\frac{p+1}{4}v^2\right).$$

F. 3269. Determine the remainder when the number $1+22+333+4444+\ldots+\underbrace{sss\ldots s}_{s\text{ times}}$, written in base $s+1$, is divided by $s-1$. **F. 3270.** Consider those polynomials $p(x)=x^4+ax^3+bx^2+$ $+cx+1$ whose coefficients are all positive numbers less than 3, and which do not have any real root. Find the maximum value of the product abc. **F. 3271.** Given a convex n-gon $P_1P_2\ldots P_n$, points Q_1, Q_2, $\ldots$, Q_{n-2} are placed inside the polygon such a way that each triangle $P_iP_jP_k$ contains exactly one of them in its interior. Partition the n-gon into regions by drawing all of its diagonals. Prove that each point Q_ℓ lies in a triangular region of the partition. (*Based on an idea of F. Sarlós*) **F. 3272.** In 3-space there are given four pairwise unequal spheres, each lying outside all the others. Each pair of these spheres admits an internal and an external centre of similarity. Consider the straight lines determined by these points. Find the maximum possible number of different straight lines in such an arrangement. **F. 3273.** A circle k and a line e containing one of its diameters are given in the plane. An other circle touches e such that the distance between its point closest to k and circle k itself equals to the length of its radius. Find the locus of the centres of all such circles.

New advanced problems: N. 199. We have k identical mugs. In an n-storey building, we have to determine the highest floor from which, when a mug is dropped, it still does not brake. The experiment we are allowed to do is to drop a mug from a floor of our choice. How many experiments are necessary to solve the problem in any case, for sure? **N. 200.** Prove that, for infinitely many positive integers n, there exists a polynomial p of degree n with real coefficients such that $p(1)$, $p(2)$, $\ldots$, $p(n+2)$ are different whole powers of 2. **N. 201.** Four points u_1, u_2, v_1 and v_2 are given on the complex plane. Consider those two circles, each orthogonal to the plane, whose diagonals are segments u_1u_2 and v_1v_2, respectively. Prove that these circles intersect each other perpendicularly if and only if

$$\frac{(u_1-v_1)(u_2-v_2)}{(u_2-v_1)(u_1-v_2)}=-1.$$

N. 202. Let p denote a prime number of the form $4k+3$ and let x be any positive integer. Prove that the integer $x^2-x+\frac{p+1}{4}$ does not have any divisor of the form $kp-1$.

THE PROBLEMS OF THE 1998 KÜRSCHÁK COMPETITION

1. Does there exist an infinite sequence of positive integers in which no term divides any other term, any two terms have a common divisor greater than 1, but there is no integer, greater than 1, which divides each element of the sequence?

2. Prove that, for every positive integer n, there exists a polynomial with integer coefficients whose values at 1, 2, $\ldots$, n are different powers of 2.

3. Determine those integers $N\geqslant 3$ for which there exist N points in the plane, no 3 are collinear, such that each triangle formed by some 3 vertices of their convex hull contains exactly one of the points in its interior.

NEGYEDIKESEK FIGYELEM!

MEGÚJULT MATEMATIKUS KÉPZÉS A JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEMEN

Új szakirányok:
közgazdász-matematikus, pénzügyi matematikus, informatikai matematikus

A gazdaságirányítás, a bankok és biztosító társaságok egyre több olyan szakembert igényelnek, akik igen alapos matematikai tudással rendelkeznek. Ez abból is kitűnik, hogy egyre többen helyezkednek el matematikus diplomával ilyen intézményekben. Ezt kívánjuk megkönnyíteni a **közgazdász-matematikus** és a **pénzügyi matematikus** szakirányok bevezetésével. Hasonlóan szükség van olyan szakemberekre is, akik az informatika, a számítástudomány és számítástechnika terén felmerülő, a mindennapi programozási gyakorlaton túlmutató elméleti jellegű modelleket is kezelni tudják. Ilyen szakemberek képzését biztosítja az **informatikai matematikus** szakirány.

A három szakirány egy hároméves közös matematikai alapképzésre épül. Ezt követően a matematikai tárgyak mellett a választott szakiránynak megfelelően megjelennek olyan tárgyak is, mint mikro- és makroökonómia, marketing, vállalati pénzügyek, menedzsment, banküzemtan, pénzügypolitika, biztosítás-gazdaságtan, gazdasági informatika, illetve algoritmusok és adatstruktúrák, adatbázisok, számítógéphálózatok.

A három új szakirány mellett változatlanul megmarad a már nagy múltra visszatekintő matematikus szakunk is: azok, akik az elméleti matematika iránt érdeklődnek, tiszta matematikai tárgyak tanulásával folytatják tanulmányaikat az első három év után, és szereznek matematikus diplomát.

Mi az előnye az új képzésnek?

- Hallgatóink egyetemi tanulmányaik harmadik évében kényszerülnek csak dönteni végső szakirányukról, miután alaposan tájékozódtak a különböző képzésekről (akár bele is kóstolhatnak azokba egy-egy tárgy korábbi felvételével).
- A matematikus diploma által megkövetelt magas szintű matematikai ismereteken túl hallgatóink szert tehetnek olyan szakirányú alapműveltségre is, amely megkönnyíti, felgyorsítja a gazdasági-pénzügyi-irányítási szférában elhelyezkedni kívánók számára a megfelelő szaktudás megszerzését.
- Az új képzés nagy mértékben megkönnyíti végzett hallgatóink elhelyezkedését.

A felvétel részleteiről a Felsőoktatási felvételi tájékoztatóban olvashatnak, de bármilyen további információért közvetlenül hozzánk is fordulhatnak a következő címen:

Bolyai Intézet
6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.
Tel: (62)-454-076; (62)-426-246
e-mail: klukovits@math.u-szeged.hu
Dr. Klukovits Lajos egy. docens

A József Attila Tudományegyetem Fizikus Tanszékcsoportjának közleménye pályaválasztók számára

Szeretnéd megérteni a természeti jelenségek mögött meghúzódó fizikai törvényszerűségeket? Érdekelnek a technika és a tudomány legújabb vívmányai? Szeretsz kísérletezni? Kedved volna a jövő generációját megismertetni a fizika szépségeivel? Ha igen, akkor **jelentkezz** Szegedre **a József Attila Tudományegyetem** (JATE) Természettudományi Karának **fizikus, csillagász,** illetve **fizika tanár szakára!**

E szakokon a tanulmányi idő 5 év. Az első két évben a fizikai jelenségek klasszikus tárgyalásmódját ismerik meg a hallgatók a középiskolai szintnél jóval részletesebben és mélyebben. Számos látványos előadótermi kísérlet segíti a tanultak jobb megértését. Harmadévtől pl. a kvantummechanika segítségével a mikrovilág törvényeinek a vizsgálata kezdődik meg. Az elméleti oktatás mellett a kísérleti munkában való jártasságot a hallgatók laboratóriumi gyakorlatokon szerzik meg.

A fizika tanári szak mellé bármely természettudományi, illetve bölcsész szak választható; **új szakpár a fizika–környezettan szak**. Már egy éve folyik a **fizika szakfordító** képzés angol nyelvből, amelynek előfeltétele egy C vagy $A + B$ típusú középfokú nyelvizsga.

A fizikához, különösen az elméleti fizikához szükséges alapos matematikai felkészültséget a hallgatók a Bolyai Intézetben matematikai kurzusokon sajátítják el. Mind a fizikus és csillagász, mind a fizika tanár szakos hallgatók számítástechnikai tárgyakat is tanulnak, mivel manapság nélkülözhetetlenek ezek az ismeretek a tudományos kutatásban és oktatásban. Az egyetemi évek haladtával a különböző szakokon a képzés egyre jobban különválik, mivel a tanár szakosoknak pedagógiai és szakmódszertani ismeretekre, míg a fizikusoknak, a csillagászoknak a tanárokénál mélyebb tudományos ismeretekre van szükségük.

Azon kiemelkedő tanulmányi eredményeket felmutató hallgatóknak, akik szeretnének a tudományos kutatásokba is bekapcsolódni és nemzetközileg elismert kutatókkal együtt dolgozni, lehetőségük van az ún. *tudományos diákköri munka* keretében ezt megtenni. A Tanszékcsoport többek között az alábbi tudományterületeken biztosít lehetőséget kutatómunkára: *matematikai és elméleti fizika, lineáris-, nemlineáris- és kvantumoptika, lézerfizika, elméleti és kísérleti szilárdtestfizika, biofizika, fotoakusztika, tantárgypedagógia és csillagászat.* A hallgatók az egyetemi évek alatt kutatási eredményeiket hazai és külfdldi konferenciákon mutathatják be, illetve nemzetközi folyóiratokban publikálhatják. A kiemelkedő tanulmányi eredményű hallgatók számára a Tanszékcsoport szerteágazó külföldi kapcsolatai révén lehetőség nyílik neves európai és amerikai egyetemeken résztanulmányok folytatására.

A végzett hallgatók legjobbjai a *JATE Doktori Iskolájára* nyerhetnek felvételt, ahol a hároméves doktori képzés után megfelelő szintű tudományos munka esetén megszerezhetik a *doktori (PhD) fokozatot.*

Ha a fentiek felkeltették érdeklődésedet, várjuk jelentkezésedet! Bővebb tájékoztatást a felvételi feltételekről (mentességről) a Felvételi Tájékoztatóban találsz. További információval is szívesen állunk rendelkezésedre, illetve megtekintheted **honlapunkat** a `http://www.jate.u-szeged.hu/physics/indexh.html` címen.

Szeged, 1999. január 11. — JATE Fizikus Tanszékcsoport

Téli Ifjúsági Ankét ’98

1998. december 18-án a Téli Ifjúsági Ankét nyitó délutánján megtelt a budapesti ELTE TTK Gólyavára; több, mint 100 vidéki, kárpátaljai, erdélyi és felvidéki, valamint ugyancsak több, mint 100 budapesti középiskolás és sokuk matematika- vagy fizikatanára jött el a KöMaL díjkiosztó ünnepségére.

Radnai Gyula Eötvös Loránd gravitációs kutatásainak kezdetéről szóló előadása előtt megnyitóját visszaemlékezéssel kezdte: az éppen 100 évvel ezelőtti Középiskolai Mathematikai Lapok cikke bűvös négyzetekről szólt. Annak a nemrég megjelent füzetnek a szerzője pedig, aki ugyanerről a témáról oly sokat tudott, a KöMaL-t évtizedekig szerkesztő Bakos Tibor pár nappal e rendezvény előtt hunyt el.

A szünetben a résztvevők megkapták a TOTÓ kérdéseit (a következő napig lehetett gondolkodni), és megnézhették a Texas Instruments legújabb grafikus és egyéb számológépeinek kínálatát, sőt, mindenki hazavihetett egy reklámsapkát is.

A KöMaL 1997–98-as tanévi matematika és fizika pontversenyének könyvjutalmait (a Tankönyvkiadó és a Typotex Kft. kiadványait) az Oktatási Minisztériumtól pályázat útján nyert összegből, a pénzdíjakat (3000–10 000 forintig) a MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány a részére juttatott adományokból tudta biztosítani.

Minden tanár, akinek diákja az első három között végzett valamelyik pontversenyben, a Bolyai János Matematikai és az Eötvös Loránd Fizikai Társulattól elismerő emléklapot, az alapítványtól ajándékkönyveket kapott.

A legjobbak közül tíz diák jutalma a MICROSOFT Hungary Rt. által felajánlott egyik legújabb ismeretterjesztő CD-ROM, az ENCARTA Encyclopedia 99 volt.

A fizika mérési verseny nyertese, Ivády Balázs újra hazavihette Kazincbarcikára a vándorserleget, mellé pedig az Euro-Profil Rt. ajándékát, a TI 83 grafikus számológépet, PC csatlakozásához szükséges CD-ROM-mal és kábellel együtt. A fizika pontversenyben legjobb összeredményt elért iskolának, a debreceni KLTE Gyakorló Gimnáziumnak képviselője ugyancsak egy TI 83 tanári gépet és egy hozzá kapcsolható kivetítő panelt vehetett át.

A díjak átadása

A matematika pontversenyben legeredményesebb Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium és Általános Iskola 1999-ben tíz példányban megkapja a Természet Világa folyóirat szerkesztőségének ajándékét, egy éves előfizetést.

Idén a holland Europees Platform voor het Nederlandse Onderwijs is hozzájárult a jutalmazáshoz egy HP 38G grafikus számológéppel, továbbá a COMPAQ Computer Magyarország Kft. húsz, Benedek József tanár pedig tíz jutalomkönyvvel.

A délután kiosztott ajándékok, jutalmak és díjak összértéke jóval meghaladta az egymillió forintot.

A Téli Ifjúsági Ankét étkezési és szállásköltségeit nagy részben a Fővárosi Közgyűlés Kulturális Bizottságának pályázatán nyert támogatásból fedeztük.

Nekik és a többi felsorolt szponzornak ezúton köszönjük a tavalyi év zárórendezvényének sikerét. A rendezők, a Bolyai János Matematikai Társulat, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat és a MATFUND Alapítvány nevében köszönetet mondunk az ankét összes előadójának, akik hétvégi szabadnapjukat feláldozva egytől egyik nagyon érdekes, színvonalas előadást tartottak. Mi sem bizonyítja ezt jobban, mint hogy mindhárom napon telt ház volt az előadótermekben. Ezért pedig a résztvevő diákokat is köszönet illeti. Reméljük, ők is úgy gondolják, nemhogy megrövidítették volna a téli szünetüket 3 nappal, hanem éppen nagyon is sokat kaptak karácsony előtt!

Az ankét második és harmadik napjáról így számol be egy résztvevő, a soproni *Bacsárdi László:*

„Szombaton, az ankét második napján az ELTE TTK egyik új és csodaszép épületében hallgathattunk előadásokat. A matematika és a fizika iránt érdeklődők különböző programokon vettek részt. Kísérletezhettünk Skrapits Lajossal, színeket figyeltünk Rajkovits Zsuzsával, „elmélyedtünk az atomban” Nagy Dénes Lajos vezetésével, majd Tichy Géza megtanított biciklizni, és Horváth Gábor szemén és fóliáin keresztül szemügyre vettük az állati szemeket. Kós Géza elárulta az oroszlánfogás titkát, majd elkezdtük kicsomózni magunkat, de ez csak Rimányi Richárdnak sikerült. Fried Ervin bevezetett a szimmetrikus polinomok világába, majd Pataki János vezetésével túrát tettünk a háromszögben, végül Katona Gyulától megtudtuk, mekkora lehet egy halmazrendszer: alkalmazásként az előadó furulyaszólóját is meghallgatva.

Skrapits Lajos előadása

Mint olvasható, nagyon sok érdekes dologról hallottunk, én személy szerint Frei Zsolt asztrofizikusnak az Univerzumról tartott előadását emelném ki. Legszívesebben az egészet ismertetném, de sajnos erre most nincs elég hely. Szegény előadót az előadása után kérdéseinkkel majdnem egy egész órán át ostromoltuk, ő pedig kitartóan megpróbálta fellebbenteni előttünk a „fátylat", amely az Univerzumot „borítja".

Természetesen a kikapcsolódásra is jutott idő, bár ez némelyek esetében az alvás rovására (is) ment. Például egy tizenvalahány fős csapattal szombat éjjelének nagy részét különböző játékokkal töltöttük.

Vasárnap Varga István „katasztrofális" kísérleteket mutatott be, majd Dávid Gyula megmagyarázta nekünk, hogy miért felesleges a fiúnak a barátnője után ugrani egy fekete lyukba... A TOTÓ feladatait is megbeszéltük, majd egy órakor búcsút vettünk egymástól. Reményeink szerint jövőre újból találkozunk itt, az Ankéton. A KöMaL szorgalmas feladatmegoldói ugyanis ingyenesen vehetnek részt a rendezvényen, és ha a nagy versenyben netán nem lennének az első tíz között, önköltségesen mindenki előtt nyitva áll az Ankét."

A matematika és fizika totó eredménye

A múlt havi számunkban közreadtuk az 1998. évi Téli Ankét totó-kérdéseit*. A telitalálatos szelvény:

$$1,\ 1,\ 32^{**},\qquad 1,\ 2,\ 2,\qquad 1,\ 1,\ 2,\qquad 1,\ x,\ 1,\qquad x,\ 1.$$

A mostani feladatok nehezebbnek bizonyultak a korábbiaknál (igaz, nem kellett gyorsan beadni, „alhattak rá egyet" a megoldók). A legjobb eredményt, 11 találatot *Tóth Zsigmond* (Révkomárom, Ipari Középiskola 9. o.) érte el. 10 találatos szelvényt adott be *Börcsök József* (Debrecen, Fazekas M. Gimn. 10. o.), *Balogh Tímea* (Mezőkövesd, Szent László Gimn. 11. o.), *Máthé András* (Bp., ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn. 11. o.), *Patay Gergely* (Debrecen, Tóth Á. Gimn. 11. o.), *Gerbicz Róbert* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn. 12. o.) és *Horváth Gábor* (Debrecen, Fazekas M. Gimn. 12. o.); mindannyian könyvjutalmat kaptak.

Néhány megjegyzés, rövid utalás a feladatok megoldásához.

1. Kiszámítható, hogy

$$t_n = n\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} = n\left(\frac{\pi}{n} - \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)^5\right),$$

$$T_n = n\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n} = n\left(\frac{\pi}{n} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)^5\right),$$

ahonnan

$$(\pi - t_n) - (T_n - \pi) = \frac{\pi^3}{3n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

ahol $\mathcal{O}(x)$ x „nagyságrendű" számot jelöl. Elegendően nagy számra tehát $\pi - t_n > T_n - \pi$, de pl. $n=3$-ra a fordított irányú egyenlőtlenség igaz.

---

* A feladatokat Honyek Gyula, Kós Géza, Pataki János és Varga István állította össze.

** A 3. feladat kinyomtatott szövegébe hiba csúszott (mindhárom válasz hibás volt), emiatt ennél a feladatnál az Ankéton nem a szokásos módon, hanem a kérdéses szám megadásával lehetett „tippelni".

2. Úgy is lehet ilyen „kvadrupól-mágnest” készíteni, ha egymással szembefordított (ellentétesen tekercselt) elektromágnes belsejében kialakított kvadrupól-térrel mágnesezünk fel egy lágyvasrudat.

3. $a=1998$ jelöléssel a megadott egyenlet $(x-a)(y-a)=a(a+1)$ alakra hozható. Az $1998\cdot 1999=2\cdot 3^3\cdot 37\cdot 1999$ szám pozitív osztóinak száma $2\cdot 4\cdot 2\cdot 2=32$, ennyi megoldása van az egyenletnek a pozitív egész számok halmazán. (Könnyen ellenőrizhető, hogy a negatív osztók nem adnak megoldást.)

4. A hangsebesség 1 %-ával haladó adó- és vevőkészüléknél a Doppler-hatás miatt kb. 1 %-nyi frekvencia-eltolódás figyelhető meg. A mozgó „tükörről” visszaverődő hang minden visszaverődésénél $1{,}01/0{,}99\approx 1{,}0202$-szeresére növekszik a frekvencia, mert a visszaverődés úgy is felfogható, mint hangészlelés és hangkibocsátás egymásutánja. Mivel $(1{,}0202)^{34}<2<(1{,}0202)^{35}$, a helyes válasz: 35. (Ha nem vennénk figyelembe, hogy a mozgó hullámforrásra és a mozgó megfigyelőre vonatkozó Doppler-képlet kicsit különbözik egymástól, és naiv módon az „$1\,\%+1\,\%=2\,\%$” eltolódással számolnánk, akkor azt kapnánk, hogy 35 visszaverődés még éppen nem elegendő a frekvencia megduplázásához. Igaz, hogy ezen állítás kimondásához a megadott 1 %-os adatot 5 tizedesjegy pontossággal el kellene fogadnunk!)

5. Jelöljük az $n+n$ résztvevőt $F_1, F_2, \ldots, F_n$ és $L_1, L_2, \ldots, L_n$ módon, X választottját pedig X^*-gal. Annak valószínűsége, hogy az F_i és L_j egymást választják:

$$P\left(\left(F_i^*\right)^*=F_i\right)=\frac{1}{n},$$

a kedvező eseteké pedig

$$p_n=1-P\left(F_1^{**}\neq F_1,\text{ és }\ldots\text{ és }F_n^{**}\neq F_n\right)=1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

Mivel $p_3=\dfrac{19}{27}$ és $p_4=\dfrac{175}{256}<p_3$, a résztvevők számának $3+3$-ról $4+4$-re történő növelésekor a kedvező eset valószínűsége *csökken*. (p_n monoton csökkenő sorozat, így a résztvevők számának további növelésével a valószínűség tovább csökken, $n\to\infty$ határesetben $1-(1/e)\approx 0{,}63$-hoz tart.

6. Szemünk a *szögnagyítást*, nem pedig az $N=k/t$ nagyítást érzékeli. Egy T méretű, a lencsétől t távolságban levő tárgy látószöge $T/(t+d)$, a képé pedig $K/(|k|+d)$, ahol d a szemünk és a nagyító távolsága. A szögnagyítás tehát

$$N_{\mathrm{sz}}=\frac{K}{|k|+d}:\frac{T}{t+d}=\frac{k}{t}\cdot\frac{t+d}{|k|+d}=N\cdot\frac{t+d}{|k|+d}<N.$$

Úgy is gondolkozhatunk, hogy ha a kép és a tárgy ugyanazon a helyen lenne, a szögnagyítás éppen a K/T nagyítással egyezne meg; mivel azonban a lupén keresztül nézett bélyeg képe messzebbre kerül a szemünktől, mint ahol a bélyeg van, látószöge kisebb, mint $K/T=N$.

7. *Van!* L. Euler azt sejtette, hogy nincs ilyen szám, sőt általában azt, hogy az

$$x_1^n+x_2^n+\ldots x_{n-1}^n=y^n$$

egyenletnek nincs nem triviális egész megoldása $n>3$ esetén, de *tévedett*. Például:

$$95\,800^4+217\,519^4+414\,560^4=422\,481^4.$$

8. A pénzérmék a súlyuk miatt kicsit „belesüppednek” a vízfelszín alkotta hártyába, s ha nem merülnek el, a felületi feszültségből származó erő függőleges összetevője tart egyensúlyt a nehézségi erővel. A közelükbe helyezett másik pénzdarab az enyhén lejtős felületen „le akar csúszni”, a két (vagy több) pénzdarab között tehát vízszintes irányú vonzóerő alakul ki. Sok egyforma pénzt helyezve a víz felszínére megfigyelhetjük, hogy ez a „rövid hatótávolságú” vonzóerő szabályos

„kristályrácsba” rendezi a pénzdarabokat, mintegy modellezi az atomok közötti vonzóerő hatására végbemenő kristályosodás folyamatát.

9. $\pi(x)$ aszimptotikusan $\dfrac{x}{\ln x}$-hez tart (a hányadosuk határértéke 1), de pontosabb becslés a

$$(*)\qquad \pi(x)=\int\limits_2^x \frac{dt}{\ln t}+\mathcal{O}\left(xe^{-c\log^{3/5}-\varepsilon}x\right).$$

(Linnik, 1942; Vinogradov és Korobov, 1957.)

Parciálisan integrálva

$$\int\limits_2^x \frac{dt}{\ln t}=\left[\frac{t}{\ln t}+\frac{t}{\ln^2 t}\right]_2^x+\int\limits_2^x \frac{2dt}{\ln^3 t}>\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{\ln^2 x}-c.$$

Az $\dfrac{x}{\ln^2 x}$ tag sokkal nagyobb, mint a $(*)$ becslés hibája, ezért elég nagy x-re $\pi(x)>\dfrac{x}{\ln x}$.

10. A mellékmaximumok száma kettővel kevesebb, mint a rácsot alkotó rések száma. (Kettős rés esetén minden maximum főmaximumnak tekinthető, három résnél 1 mellékmaximum jelenik meg stb.) Ezt az egyes résekből érkező hullámok fázishelyes összeadásával, majd az így kapott „eredő hullám” négyzetének kiszámításával láthatjuk be.

11. A kérdéses függvény szükségképpen bijektív. Mivel $f(a)=b$ esetén $f(b)=-a$, $f(-a)=-b$ és $f(-b)=a$, egyrészt $f(f(0))=0$, $f(0)=f(f(f(0)))=f(0)=-f(0)$, tehát $f(0)=0$, másrészt az $f(x)=x$ egyenletnek ez az egyetlen megoldása.

Tegyük fel, hogy f folytonos az (a,b) intervallumon $(0<a<b)$ és $f((a,b))=(c,d)$. Ekkor $f((c,d))=(-b,-a)$, $f((-b,-a))=(-d,-c)$ és $f((-d,-c))=(a,b)$. Nem nehéz végiggondolni, hogy f nem lehet folytonos a 0-ban, valamint a $(0,\infty)$-hez rendelt értékei között pozitív és negatív is van.

Tegyük fel, hogy a függvény a $0,\pm p_1,\ldots,\pm p_n$ pontokban szakad. Ekkor a függvény 4-esével ciklikusan cseréli a szakadási helyek közötti intervallumokat, melyek száma $2n+2$. Másrészt a $\pm p_1,\ldots,\pm p_n$ pontokat is 4-esével cseréli, ezek száma $2n$. Viszont $2n$ és $2n+2$ egyszerre nem lehet 4-gyel osztható, tehát f-nek végtelen sok szakadási helye kell legyen.

12. Ha egy nyugvó részecskének egy vele megegyező tömegű másik részecske ütközik rugalmasan, az ütközés után egymásra merőlegesen kezdenek mozogni. (Ellenőrizhető pénzdarabok vízszintes asztallapon történő ütköztetésével.) Ez az energia- és impulzusmegmaradás törvényéből következik, ha a részecskék mozgása nemrelativisztikus. A nagy sebességgel mozgó protonok azonban megközelíthetik a fénysebességet, s ekkor a relativisztikus megmaradási törvényeket kell alkalmaznunk. Ezekből az adódik, hogy az ütközés utáni sebességük hegyesszöget zár be.

13. A víz első fele rövidebb idő alatt folyik ki, mint a második, mert a kiáramlás sebessége fokozatosan csökken. A kifolyási sebesség (közelítőleg) a vízmagasság négyzetgyökével arányos, hasonlóan az egyenletesen változó mozgás $v=\sqrt{2ax}$ képletéhez. Eszerint a tartály $2+\sqrt{2}$ óra, vagyis több, mint 200 perc alatt ürül ki.

13 + 1. A fény színét a frekvencia határozza meg, az pedig nem változik meg sem az elhajlás, sem pedig a fénytörés során. Érdekes, hogy a helyes eredményt (a tényleges elhajlási szögeket) kétféleképpen is meghatározhatjuk. Ha pl. egy vízzel telt akvárium falához optikai rácsot illesztünk, az üvegfal akármelyik oldalára tesszük is a rácsot, az elhajlási kép ugyanaz lesz. Ez közvetlenül adódik a Fermat-elvből (a legrövidebb terjedési idő elvéből).