Szomorú szívvel tudatjuk, hogy

Bakos Tibor

lapunk volt felelős szerkesztője életének 90. évében, 1998. december 12-én csendesen elhunyt.

Emlékét megőrizzük.

Rácspontok a körben*

1. Bevezetés

A számsíkon az egész koordinátájú pontokat *rácspontoknak* nevezzük. Megpróbáljuk megmondani, hány rácspont van az origú középpontú, r sugarú körben. Ezt a számot a továbbiakban $N(r)$ fogja jelölni.

Mivel általában egységnyi területre esik egy rácspont, azt várjuk, hogy $N(r)$ körülbelül akkora lesz, mint a kör területe, vagyis πr^2. Ez a gondolat az alábbi módon önthető egzakt formába. Minden egyes rácspont köré írjunk a tengelyekkel párhuzamos oldalú egységnégyzetet. Ezek hézagtalanul lefedik a síkot. Ha közülük csak azokat tekintjük, amelyek középpontja az r sugarú körbe esik, ezek összterülete éppen $N(r)$. Mivel egy ilyen négyzet pontjainak legnagyobb távolsága a négyzet középpontjától $\frac{\sqrt{2}}{2}$, a fenti alakzat benne lesz az origó körüli $r+\frac{\sqrt{2}}{2}$ sugarú körben. Hasonlóan, mivel a körön kívüli középpontú négyzetek csak $\frac{\sqrt{2}}{2}$ mélységig tudnak a körbe benyúlni, alakzatunk tartalmazza az $r-\frac{\sqrt{2}}{2}$ sugarú kört. Így

$$\pi\left(r-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \leqslant N(r) \leqslant \pi\left(r+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2,$$

vagyis a $\Delta(r)=N(r)-\pi r^2$ jelöléssel

$$|\Delta(r)| \leqslant \sqrt{2}\pi r+\frac{1}{2} < 5r. \tag{1.1}$$

Ez az érvelés alig használt valamit a kör tulajdonságaiból, és csipetnyi változtatással szinte minden alakzatra elmondható. Vessük össze pl. a kört a köré írt, $2r$ oldalú négy-

* A téma iránt érdeklődők elolvashatják *Laczkovich Miklós:* Osztópontok száma c. cikkét, KöMaL 1983/3. 101. oldal.

zettel. Ennek területe $4r^2$, és azon rácspontok vannak benne, amelyek koordinátái 0, ± 1, $\pm 2, \ldots, \pm[r]$, számuk $(2[r]+1)^2$. A terület és a rácspontok száma különbsége ekkor

$$\Delta^*(r)=(2[r]+1)^2-4r^2=4r(1-2\{r\})+(1-2\{r\})^2.$$

Mivel r 0 és 1 között változik, $(1-2\{r\})$ bármi lehet -1 és 1 között, $\Delta^*(r)$ pedig $-(4r-1)$ és $4r+1$ között van, a felső határt néha (r egész értékeinél) felvéve, az alsót csak megközelítve. Ilyen általános gondolatmenettől tehát lényegesen jobb eredményt nem várhatunk.

Annak okát, hogy a négyzetnél ekkora eltérés lehet a terület és a rácspontok száma között, abban vélhetjük fellelni, hogy amikor r áthalad egy egész számon, a rácspontok száma egyszerre $8r$-et ugrik. Szemléletünk azt sugallja, hogy a kör ilyen disznóságot nem csinál. A körvonalra eső rácspontok száma, vagyis azon (x,y) egész számpárok száma, amelyekre

$$x^2+y^2=r^2 \tag{1.2}$$

felírható képlettel, mégpedig az alábbi módon. Ilyen pont persze csak akkor van, ha $r^2=n$ is egész szám. Bontsuk fel n-et prímtényezőkre, különválasztva a 2-t, a $4k+1$ és $4k-1$ alakú prímeket:

$$n=2^a p_1^{b_1}\ldots p_k^{b_k} q_1^{c_1}\ldots q_l^{c_l}, \qquad p_i\equiv 1 \pmod 4, \qquad q_j\equiv 3 \pmod 4.$$

E jelölésekkel az (1.2) egyenlet megoldásainak száma, $\varrho(n)=0$, ha a c_j számok között van páratlan, és

$$\varrho(n)=4(b_1+1)\ldots(b_k+1), \tag{1.3}$$

ha az összes c_j páros. Erről a $\varrho(n)$ mennyiségről belátható, hogy nemcsak $r=\sqrt{n}$-nél lesz kisebb, de n akármilyen kicsi pozitív kitevőjű hatványánál is, ha n elég nagy. Ha tehát csak ezen múlna, $\Delta(r)$ lehetne kisebb, mint r^ε akármilyen kicsi pozitív ε-nal.

A valóság kevésbé idilli; be lehet látni, hogy

$$\limsup \frac{|\Delta(r)|}{\sqrt{r}}=\infty. \tag{1.4}$$

A továbbiakban megmutatjuk, hogyan lehet elemi geometriai eszközökkel (kihasználva, hogy a kör nem szögletes) túllépni (1.1)-en, és belátni, hogy

$$|\Delta(r)|<Cr^{2/3} \tag{1.5}$$

alkalmas C konstanssal.

2. Bizonyítás

A továbbiakhoz bevezetjük az alábbi konvenciót: c, indexszel vagy anélkül, pozitív konstanst jelöl (amelyet kiszámolhatnánk, de nem tesszük); a „van olyan pozitív c, hogy” szavakat tehát elblicceljük.

A rácspontok alábbi tulajdonságai, amelyeket használni fogunk, fellelhetők az Erdős–Surányi könyv 4. fejezetében.*

* *Erdős Pál, Surányi János:* Válogatott fejezetek a számelméletből, Polygon könyvtár, Szeged, 1996.

Ha egy egyenesen legalább két rácspont van, akkor már végtelen sok van, és ezek egyenlő távolságban követik egymást (az ilyen egyenes neve *rácsegyenes*). Ha ez a távolság v, akkor az egyenessel párhuzamos rácsegyenesek egymást $\frac{1}{v}$ távolságban követik.

Rácssokszögek azon egyszerű sokszögek, amelyeknek minden csúcsa rácspont. Ezek területe és a bennük lévő rácspontok száma között az alábbi kapcsolat van:

$$T = B + \frac{H}{2} - 1, \tag{2.1}$$

ahol T a terület, B a sokszög belsejében, H pedig a határán lévő rácspontok száma.

A (2.1) képletet írjuk fel a körben lévő legnagyobb rácssokszögre, vagyis a *körben lévő rácspontok konvex burkára.* Tegyük még hozzá, hogy a keresett szám

$$N(r) = B + H,$$

és a kör területe

$$\pi r^2 = T + T',$$

ahol T' a sokszög és a körvonal közti sáv területe. A fentiekből

$$\Delta(r) = \frac{H}{2} + 1 - T';$$

(1.5) bizonyításához tehát elég belátni, hogy

$$H < c_1 r^{2/3} \tag{2.2}$$

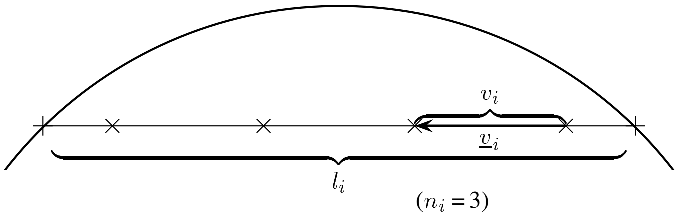
és

$$T' < c_2 r^{2/3}. \tag{2.3}$$

A továbbiakban bebizonyítjuk (2.2)-t, és vázoljuk (2.3) bizonyítását. Legyen k a sokszög oldalainak száma. Egy oldalt a rajta levő rácspontok egyenlő szakaszokra osztanak; legyen n_i az i-edik oldalon levő szakaszok száma (tehát $n_i - 1$ belső pont van az oldalon; ha csak a két csúcspont van, akkor $n_i = 1$). A két szomszédos osztópontot összekötő vektor legyen $\vec{v}_i$, ennek hossza v_i; az oldal hossza tehát $n_i v_i$, (*1. ábra*) a sokszög kerülete pedig

$$\sum n_i v_i \leqslant 2\pi r \tag{2.4}$$

(miért is?).

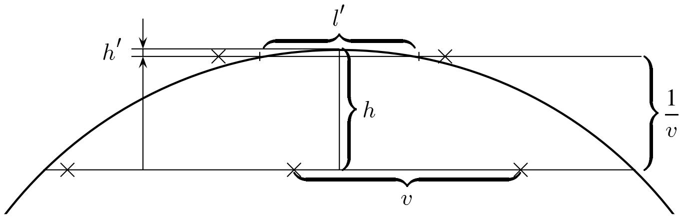


1. ábra

Az oldalegyenes által meghatározott húr hossza legyen l_i, a (kisebbik, a sokszögön kívül eső) körszelet magassága pedig h_i. Az l_i hosszú húrt a rácspontok n_i+2 részre osztják, amelyek közül a középső n_i hossza v_i, a két szélsőé kisebb, így

$$n_i v_i \leqslant l_i < (n_i+2)v_i \leqslant 3n_i v_i. \tag{2.5}$$

A továbbiakban az i indexeket általában elhagyjuk.



2. ábra

Eddig nem használtuk ki, hogy nem akármilyen rácssokszög van a körben, hanem a lehető legnagyobb. Ezt pedig így tehetjük meg. Húzzuk meg az oldallal párhuzamos szomszédos rácsegyenest, mégpedig a kör középpontjától távolabbit (*2. ábra*). Ennek távolsága az oldalegyenestől $\frac{1}{v}$. Ha $h > \frac{1}{v}$, akkor ez metszi a kört, és egy olyan körszeletet vág le, amelynek magassága

$$h' = h - \frac{1}{v}.$$

A húr hossza Püthagorasz tételéből számolható:

$$r^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + (r-h)^2 = \left(\frac{l'}{2}\right)^2 + (r-h')^2, \tag{2.6}$$

tehát

$$\frac{l^2 - l'^2}{4} = (r-h')^2 - (r-h)^2 = (h-h')(2r-h-h') = \frac{1}{v}(2r-h-h') < \frac{2r}{v}.$$

Számolás nélkül is észrevehetjük viszont, hogy $l' < v$, hiszen a rácspontok egymást v távolságban követik, és erre a húrra nem jut rácspont. Emiatt

$$l^2 < l'^2 + \frac{8r}{v} < v^2 + \frac{8r}{v}. \tag{2.7}$$

Ha $h \leqslant \frac{1}{v}$, akkor ez az egyenes a kört nem metszi. (2.7) ekkor is igaz, mert

$$l^2 = 4\left(r^2 - (r-h)^2\right) = 4h(2r-h) < 8rh \leqslant \frac{8r}{v}.$$

Mivel $l \geqslant nv$, ezért (2.7) azt adja, hogy

$$(n^2-1)v^2 \leqslant \frac{8r}{v}. \tag{2.8}$$

Innen

$$n^2 \leqslant \frac{8r}{v^3} + 1. \tag{2.9}$$

Foglalkozzunk először azokkal az oldalakkal, ahol $v < 2r^{1/3}$. Itt (2.9)-ben az első tag a nagyobb, és így $n^2 \leqslant \frac{16r}{v^3}$, $n \leqslant \frac{4r^{1/2}}{v^{3/2}}$.

Legyen

$$H_1 = \sum_{v_i < 2r^{1/3}} n_i;$$

ekkor tehát

$$H_1 < 4\sqrt{r} \sum_{v_i < 2r^{1/3}} v_i^{-3/2} \leqslant 4\sqrt{r} \sum_{v < 2r^{1/3}} v^{-3/2}, \tag{2.10}$$

ahol a második összegzés az összes legfeljebb $2r^{1/3}$ hosszú vektorra kiterjed, nemcsak azokra, amelyek valamelyik oldal irányába mutatnak.

Egy ilyesféle összeget így lehet becsülni. Legyen az összegzés határa a (most tehát $a = 2r^{1/3}$). Nézzük először azokat a vektorokat, amelyek hossza $\frac{a}{2} \leqslant v < a$. Ezek száma legfeljebb annyi, mint az origótól különböző rácspontok száma az origó körüli a sugarú körben, tehát kisebb, mint c_3a^2 (most a legdurvább becslés is elég nekünk), egy összeadandó pedig kisebb, mint $\left(\frac{a}{2}\right)^{-3/2}$, ez a részösszeg tehát kisebb, mint $c_4\sqrt{a}$. Ezt a becslést a helyett elvégezzük az $\frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \ldots, \frac{a}{2^j}$ számokra, amíg csak $\frac{a}{2^j} < 1$ nem lesz, és az eredményt összeadjuk:

$$\sum v^{-3/2} < c_4 \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a}{2^i}} = c_5\sqrt{a}.$$

Ezt (2.10)-be helyettesítve

$$H_1 < c_6\sqrt{r}\sqrt{r^{1/3}} = c_6 r^{2/3}.$$

A $v \geqslant 2r^{1/3}$ esethez tartozó H_2 összeget pedig (2.4)-ből becsülhetjük azonnal:

$$H_2 = \sum_{v_i \geqslant 2r^{1/3}} n_i \leqslant \frac{1}{2} r^{-1/3} \sum n_i v_i \leqslant \pi r^{2/3}.$$

H_1 és H_2 becslését összeadva (2.2)-t beláttuk.

Foglalkozzunk most T' becslésével. Egy körszelet területe

$$t_i < l_i h_i;$$

a körszeletek lefedik (átfedéssel) a sokszög és a körvonal közti sávot, tehát

$$T' < \sum t_i < \sum l_i h_i.$$

h és l között kapcsolat van: Püthagorasz (2.6) alatt felírt tételéből

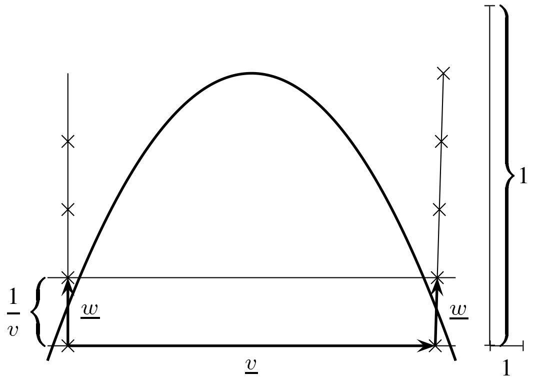
$$h = \frac{l^2}{4(2r-h)} < \frac{l^2}{4r}.$$

Tehát $t < hl < \frac{r^3}{r}$, és (2.5) miatt $1 < 3nv$, ezért végül

$$t < c_7 \frac{n^3 v^3}{r}. \tag{2.11}$$

Ha $v \leqslant 2n^{1/3}$, akkor az $n \leqslant 4r^{1/2}v^{3/2}$ egyenlőtlenség miatt $t < c_9 n$, úgyhogy az ehhez az esethez tartozó területek összege $< c_9 B < c_{10} r^{2/3}$.

A hátralevő eset – azon szeletek területét becsülni – ahol v nagy, komplikáltabb az eddigieknél. Mindenesetre (2.9)-ből látszik, hogy $n = 1$, de t nem lesz általában korlátos. Ha pl. r alig nagyobb egy n egész számnál, $n^2 < r^2 < n^2 + 1$, akkor az $(n, 0)$ pontot az $\left(n-1, \left[\sqrt{2n-1}\right]\right)$ ponttal egy kb. $\sqrt{2n}$ hosszú oldal köti össze, amely egy $\sqrt{n}$ nagyságrendű szeletet jelent. Ez az oldal „közel függőleges”; be lehet bizonyítani, hogy általában azok a hosszú oldalak, amelyeken csak a két csúcspont van, közel párhuzamosak egy kicsi vektorral. Ezt csak felszínesen vázoljuk, a számítások elvégzése nélkül.



3. ábra

Mivel v nagy ($> 2r^{1/3}$), $l \geqslant v$ is nagy és $h \approx l^2/r$ nagy $\frac{1}{v}$-hez képest. Ekkor a szomszédos rácsegyeneshez tartozó l' húr alig rövidebb l-nél. Mivel pedig rajta a rácspontok $v \leqslant l$ távolságra vannak, a húr két oldalán levő rácspontok a körvonaltól legfeljebb $l - l'$ távolságra vannak (*3. ábra*). Erről kiszámolható (újra Püthagorasz tételével), hogy kisebb, mint $c\frac{r}{v^2}$. A két csúcspontból ehhez a két rácsponthoz vezető $\vec{w}$ vektornak $\vec{v}$ irányú komponense tehát legfeljebb ekkora, a rá merőleges komponens pedig pontosan $\frac{1}{v}$, jóval kisebb. Ez a „közel párhuzamos” kicsi vektor (az ábra erősen torzít).

Mivel $v < c\sqrt{\dfrac{r}{w}}$ és $t < c\dfrac{v^3}{r}$, ezért $t < c\dfrac{\sqrt{r}}{w^{3/2}}$. Ez ugyanarra az összegre vezet, amit már egyszer kiszámítottunk; a baj csak az, hogy egy $\vec{w}$ vektor többször is előfordulhat. Némi fejtöréssel bizonyítható, hogy nemcsak egy körszelet területe becsülhető $\dfrac{\sqrt{r}}{w^{3/2}}$-nel, hanem az adott $\vec{w}$-hez tartozó összes körszeletek területeinek összege is.

3. Megjegyzések

1. Az (1.3) képlet bizonyítása megtalálható pl. a Turán–Gyarmati jegyzetben** Ez a képlet mutatja, hogy $\varrho(n) \leqslant 4\tau(n)$, ahol τ az osztók száma. $\tau(n) < n^{\varepsilon}$ nagy n-re.***

2. (1.4)-nél több is igaz, éspedig

$$\limsup \frac{\Delta(r)}{\sqrt{r}} = \infty, \qquad \liminf \frac{\Delta(r)}{\sqrt{r}} = -\infty.$$

Az első eredmény G. H. Hardytól származik 1915-ből, a második A. E. Inghamtől 1940-ből. Azóta mindkét tételt némileg erősítették, mégpedig a nevezőbe betettek egy-egy végtelenhez tartó függvényt ($\log r$ hatványát).

3. A kiinduló r-es becslés Gausstól származik; az $r^{2/3}$-os javítás Sierpińskitől 1906-ból. W. Sierpiński bizonyítása hosszú; többen készítettek egyszerű bizonyítást, rendszerint többé-kevésbé analitikus módon.

Az $r^{2/3}$-os becslés javításával sokan küszködtek, egy-egy hajszálnyit csökkentve a kitevőn. A rekord $\dfrac{46}{73} \approx 0{,}630137$. Általában azt sejtik, hogy az igazság $\dfrac{1}{2}$, vagyis $\dfrac{|\Delta(r)|}{r^t}$ bármely $t > \dfrac{1}{2}$ kitevőre korlátos. Ez irányban ismert, hogy $\Delta(r)$ „rendszerint” nem nagyobb, mint $\sqrt{r}$ abban az értelemben, hogy

$$\int_0^R \Delta(r)^2 < cR^2$$

Ez az eredmény E. G. H. Landautól származik.

Az itt leírt bizonyításnak $r^{2/3}$ a természetes határa. $\dfrac{\Delta(r)}{r^{2/3}} \to 0$ bizonyítása elképzelhető volna úgy, hogy belátjuk, hogy $\dfrac{H}{r^{2/3}} \to 0$ és $\dfrac{T'}{r^{2/3}} \to 0$; ezek viszont nem igazak, sőt az sem, hogy

$$\frac{H}{r^{2/3}} \to a, \qquad \frac{T'}{r^{2/3}} \to \frac{a}{2}$$

valamely a konstanssal. H és T' között tehát nemtriviális kapcsolat van, amelynek jellegéről nem tudunk semmit.

** *Gyarmati Edit:* Számelmélet, Nemzeti Tankönyvkiadó (ELTE-jegyzet).

*** l. *Erdős Pál–Surányi János:* Válogatott fejezetek a számelméletből, Polygon, Szeged, 1996. 8. fejezet X. tétel.

4. Lehetséges, hogy Q nagy pozitív és negatív kilengései máshogy viselkednek. Mindenesetre a pozitív és negatív becslések bizonyítása gyakran másmilyen és nem is ugyanolyan erősek. A mi bizonyításunkban is, amikor beláttuk (2.2)-t, ezzel már megkaptuk, hogy $\Delta(r) < cr^{2/3}$, míg az alsó becslés további kínlódással jár.

Ruzsa Z. Imre

❄

Surányi János professzor úrnak a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok volt főszerkesztőjének és szerkesztőbizottsági elnökének a tiszteletére 80. születésnapja alkalmából barátai, tanítványai és tisztelői 1998. május 25-én az MTA Matematikai Kutató Intézetében ünnepi ülésszakot rendeztek. Az előző és a most következő cikk is az ott elhangzott előadások kibővített változata.

❄

Binomiális együtthatók és teljes hatványok

Bevezetés

Régi, sokat vizsgált diofantikus problémák voltak a következők: egymás utáni egészek szorzata, illetve binomiális együttható mikor lehet teljes hatvány? Számos részeredmény után az első kérdést 1975-ben, a másodikat 1997-ben sikerült teljesen megválaszolni. A dolgozat első részében az első probléma történetének rövid áttekintését adjuk. A második részben részletesebben foglalkozunk a binomiális együtthatókkal kapcsolatos problémával és annak megoldásával. Végül a harmadik részben a két probléma egy közös általánosításáról és annak 1998-ban nyert megoldásáról számolunk be röviden.

1. Egymásra következő egész számok szorzata

A számelmélet egyik híres kérdése volt, hogy lehet-e egymásra következő pozitív egész számok szorzata teljes hatvány. Más megfogalmazásban: mik az

$$n(n+1)\dots(n+k-1) = x^l \qquad (1)$$

diofantikus egyenlet pozitív egész megoldásai a $k \geqslant 2$, $x \geqslant 2$, $l \geqslant 2$ feltételek mellett? A $k=2$ esetben nyilván nincs megoldás. A probléma *C. Goldbachig* nyúlik vissza, aki 1724-ben egy *D. Bernoullihoz* írt levélben megjegyezte, hogy az (1) egyenletnek $k=3$, $l=2$ esetén nincs megoldása. Valóban, ha volna ilyen megoldás, úgy a bal oldalt $(n+1)[(n+1)^2-1]$ alakba írva az következne, hogy $(n+1)^2-1$ négyzetszám, ami nem lehetséges. Hasonló okoskodás alkalmazható a $k=3$, $l>2$ esetre is.

Az 1820-as évekből származik az a sejtés, hogy az (1) egyenletnek egyáltalán nincs megoldása. A sejtéssel már a múlt században is sokan foglalkoztak. Számos speciális eredmény született azokban az esetekben, amikor k értéke „kicsi” és $l=2$ vagy $l=3$. Az érdeklődő olvasó ezek ismertetését megtalálhatja *L. E. Dickson* „History of the Theory of Numbers” című könyvének II. kötetében, a 679–680. oldalon (l. [1]).

1917-ben *S. Narumi* bebizonyította a sejtést a $k \leqslant 202$, $l = 2$ értékekre, *Szekeres György* pedig a 30-as években megmutatta, hogy (1)-nek nincs olyan megoldása, melyre $k \leqslant 8$.

1939-ben *Erdős Pál* és *O. Rigge* egymástól függetlenül bebizonyították a sejtést $l = 2$-re. Bizonyításuk meglehetősen komplikált, szellemes elemi okoskodásokon alapult. Egyebek között felhasználták *Sylvesternek* azt a tételét, hogy ha $n > k \geqslant 2$ egész számok, úgy

$$P(n(n+1)\dots(n+k-1)) > k.$$

Itt $P(a)$ egy $a > 1$ egész szám legnagyobb prímosztóját jelöli.

1940-ben *Erdős Pál* és *C. L. Siegel* közösen bebizonyították a sejtést minden elegendően nagy k-ra. Bizonyításukban diofantikus approximációs módszereket használtak, de magát a bizonyítást soha nem publikálták. 1955-ben *Erdős* erre a tételre egy másik, elemi bizonyítást adott. Erdős módszerét továbbfejlesztve, végül 1975-ben *Erdős* és *J. L. Selfridge* a sejtést teljes általánosságban igazolták.

1. Tétel. (Erdős P. és J. L.Selfridge [2].) *Az* (1) *egyenletnek nincs megoldása.*

Érdekes megjegyezni, hogy a komplikált és igen szellemes elemi bizonyítás jelentős mennyiségű numerikus számítást is igényelt. A témakör részletesebb tárgyalását adja *W. Narkiewicz* „Classical problems in number theory” című könyvében (l. [7]).

2. Binomiális együtthatók

Az (1) egyenlettel rokon diofantikus egyenlet

$$\binom{n+k-1}{k} = x^l, \tag{2}$$

ahol a megoldásokat a $k \geqslant 2$, $n \geqslant k+1$, $x \geqslant 2$, $l \geqslant 2$ tulajdonságú egész számok körében keressük. Itt az $n \geqslant k+1$ feltétel lényegében nem jelent megszorítást. Valóban, az

$$\binom{n-1+k}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$$

összefüggést felhasználva, valamint k-t és $n-1$-et felcserélve a (2) egyenletre vonatkozó eredmények az $n \leqslant k$ esetre is alkalmazhatók.

A $k = l = 2$ esetben az egyenlet $(n+1)n = 2x^2$ alakra hozható. Ekkor vagy

$$n = u^2, \qquad n+1 = 2v^2$$

vagy

$$n = 2v^2, \qquad n+1 = u^2,$$

ahol u, v pozitív egészek. Innen az

$$u^2 - 2v^2 = \pm 1$$

Pell-egyenletekre jutunk, melyeknek végtelen sok u, v pozitív egész megoldásuk van. Így ebben az esetben (2)-nek is végtelen sok megoldása van.

A $k=3$, $l=2$ esetet páratlan n-re *A. J. J. Meyl* (1878), páros n-re *G. N. Watson* (1919) intézte el. Eredményeikből következik, hogy ebben az esetben (2) egyetlen megoldása $n=48$, $x=140$, azaz

$$\binom{50}{3}=140^2.$$

Erdős egy 1939-ben megjelent dolgozatában fogalmazta meg azt a sejtést, hogy $l>2$ esetén a (2) egyenletnek nincs megoldása. Ugyanebben a dolgozatban ezt az állítást az $l=3$ és a $k\geqslant 2^l$ esetekben igazolta. Az $l=4$, 5 eseteket *Obláth Richárdnak* sikerült elintéznie 1948-ban.

Az (1) egyenletre korábban alkalmazott elemi módszere segítségével *Erdős* 1951-ben bebizonyította, hogy $k\geqslant 4$ esetén a (2) egyenletnek nincs megoldása. A bizonyítás igen szép és szellemes, magyar nyelven is elérhető *Erdős Pál* és *Surányi János* „Válogatott fejezetek a számelméletből” című könyvében (l. [3]).

Az *Erdős–Surányi könyv* 1960-ban jelent meg először. Élvezetes stílusa, bizonyításainak szépsége, a könyvben felvetett sok nyitott probléma rendkívül népszerűvé tették a könyvet a számelméletet kedvelők körében. A jelen dolgozat szerzője a könyv hatására kezdett a 60-as évek elején, egyetemista korában az Erdős-sejtés még nyitott $k=2$, 3 esetével foglalkozni. Első publikációja is ezzel kapcsolatos eredményeket tartalmazott.

Az Erdős–Surányi könyv első kiadásának valamennyi példánya hamar elfogyott a könyvesboltokban. 1996-ban jelent meg a könyv második, kibővített kiadása (l. [3]). Ennek angol nyelvű változata sajtó alatt van a Springer kiadónál.

Visszakanyarodva az Erdős-sejtéshez, 1951 után nyitott maradt a $k=2$ és a $k=3$ eset. Kiderült, hogy Erdős elemi módszere a $k=2$ és 3 esetre nem alkalmazható. Érdekes megjegyezni, hogy míg az (1) egyenletben a $k=2$ és a $k=3$ esetek bizonyultak a legkönnyebbeknek, a (2) egyenletnél a helyzet ennek éppen az ellenkezője, a probléma 1996-ig ellenállt minden próbálkozásnak. Ám szóljunk néhány szót az előzményekről, amelyek később igen hasznosnak bizonyultak a sejtés teljes általánosságban való bizonyítása során.

Erdős és Obláth eredményei következtében elég azzal az esettel foglalkozni, amikor (2)-ben $k=2$ vagy 3 és $l>5$ prímszám, amit a továbbiakban k-ról és l-ről fel is tételezünk.

1963-ban sikerült bebizonyítanom, hogy ha a (2) egyenlet $k=2$ esetén egy $l>5$ prímre nem megoldható, úgy $k=3$-ra és a tekintett l-re csak akkor lehet megoldható, ha

$$3^{l-1}\equiv 1 \pmod{l^2}. \tag{3}$$

Ez a kongruencia a kis Fermat-tétel szerint $(\bmod\ l^2)$ helyett $(\bmod\ l)$ minden $l>3$ prímre teljesül. Tudjuk viszont, hogy a 2^{30}-nál kisebb számok körében (3) csak az $l=11$ és az $l=1\ 006\ 003$ prímszámokra áll fenn. Így a nem túl nagy l prímek esetén a $k=3$ esetet lényegében sikerült a $k=2$ esetre visszavezetni.

R. Tijdeman 1976-ban az effektív *Baker-módszer* felhasználásával bebizonyította, hogy a (2) egyenletnek $k=2$ és $k=3$ esetén csak véges sok megoldása lehet, és ezek a megoldások elvileg meghatározhatók. Tijdeman bizonyítása egy olyan nagy felső korlátot szolgáltatott az n, x, l ismeretlenekre, hogy a korlát alatti esetleges megoldásokat még a mai modern számítógépekkel sem lehetne megkeresni. A Baker-módszer egy élesebb változatát használva *N. Terai* 1994-ben bebizonyította, hogy a (2) egyenletnek a $k=2$ és 3 esetekben csak akkor lehet megoldása, ha $l<4250$.

A sejtés teljes bizonyításához az egyébként igen hatékony, mély és széles körben alkalmazható Baker-módszer önmagában nem bizonyult elegendőnek. Ehhez szükség volt a

$$x^l + y^l = cz^l \tag{4}$$

általánosított Fermat-féle egyenlettel kapcsolatos néhány mély eredményre. Itt $l > 5$ prímszám, $c \geqslant 1$ egész szám, x, y, z pedig 0-tól különböző, relatív prím egész ismeretlenek.

Az olvasó számára bizonyára ismert, hogy Fermat híres sejtését *A. Wiles* amerikai matematikus 1995-ben bebizonyította, azaz megmutatta, hogy a (4) egyenletnek $c = 1$ esetén nincs megoldása. Wiles (részben más matematikusok közreműködésével) egy nehéz és mély módszert dolgozott ki a Fermat-sejtés bizonyítására, amiről kiderült, hogy alkalmasan továbbfejlesztve bizonyos más, 1-nél nagyobb c értékek esetén is sikerrel alkalmazható. *H. Darmon* és *L. Merel* egy 1997-ben megjelent dolgozatukban megmutatták, hogy a (4) egyenletnek $c = 2$ esetén csak triviális megoldásai vannak, amelyekre $xyz = \pm 1$ teljesül. Bár Darmon ás Merel dolgozatukban nem foglalkoztak a (2) egyenletre vonatkozó Erdős-sejtéssel (talán nem is ismerték azt), eredményükből egyszerűen következik, hogy (2) a $k = 2$ esetben nem megoldható. Valóban, ha (2)-nek $k = 2$ mellett volna megoldása, úgy $n = y^l$, $n + 1 = 2z^l$ vagy $n = 2z^l$, $n + 1 = y^l$, azaz

$$y^l \pm 1 = 2z^l$$

következne alkalmas 1-nél nagyobb y, z egészekkel, ami a Darmon–Merel tétel szerint nem lehetséges.

Ezt követően sikerült az Erdős-sejtés bizonyításában az utolsó lépést megtenni, a $k = 3$ esetet is elintézni. A fentiekből kitűnik, hogy ehhez tulajdonképpen már csupán egyetlen láncszem hiányzott, az $l = 11$ eset. Ehhez segítséget nyújtott *M. A. Bennett* és *B. M. M. de Weger* egy 1997-ben publikált eredménye, mely szerint ha a, b, l pozitív egészek, $b > a > 1$ és $3 \leqslant l < 17$ vagy $l > 347$, akkor az

$$|ax^l - by^l| = 1$$

egyenletnek legfeljebb egy pozitív egész x, y megoldása van. A fentieket felhasználva az 1997-ben megjelent [4] dolgozatomban megmutattam, hogy a (2) egyenletnek a $k = 2$ és $k = 3$ esetben nincs megoldása, azaz igaz a következő:

2. Tétel. (Erdős P., $k \geqslant 4$ eset; H. Darmon és L. Merel, $k = 2$ eset; Győry K., $k = 3$ eset.) *A $k = l = 2$ esettől eltekintve a* (2) *egyenlet egyetlen megoldása* $(n, k, x, l) = (48, 3, 140, 2)$, *azaz* $\binom{50}{3} = 140^2$.

A 2. Tételt a fenti formában publikáltam a [4] dolgozatomban. Az eddigiekből világos, hogy a tétel a felsorolt matematikusok által nyert részeredmények együtteséből született.

Erdős Pál rendszeres időközönként ellátogatott hozzánk Debrecenbe. Halála előtt tervezte, hogy 1996. október elején ismét meglátogat bennünket. A $k = 2$ és $k = 3$ esetekre a bizonyítást 1996 szeptemberében, Erdős Pál halála után pár nappal találtam. Úgy ismertük Őt, hogy biztosan örült volna a sejtése teljes bizonyításának. A [4] cikket az Ő emlékének dedikáltam.

Darmon és Merel, valamint Bennett és de Weger cikkei 1996-ban még csak megjelenés alatt voltak, ám a szerzők voltak szívesek kézirataikból egy-egy példányt rendelkezésemre bocsátani. És itt jön egy érdekesség: a $k=3$ eset bizonyításához szükség volt a fentebb ismertetett, 1963-as eredményemre. Ezt az eredményt a külföldi kollégák nem ismerték. Gondolom azért, mert annak idején azt magyarul, a Matematikai Lapokban publikáltam. Emiatt az angol nyelvű [4] dolgozatomban a $k=3$ esetre egy részletes, teljes bizonyítást adtam, az 1963-as eredményem bizonyítását is beépítve.

A $k=3$ eset bizonyításának főbb lépései a következők. Ha a $k=3$ és $l>5$ prím esetben (2) megoldható és $3\mid n$, vagy $3\mid n+2$, úgy könnyen belátható, hogy $\binom{n+2}{2}$, illetve $\binom{n}{2}$ teljes l-edik hatvány, ami a Darmon–Merel tétel miatt nem lehet. Maradt a $3\mid n+1$ eset, amikor

$$n=2w^l, \qquad n+1=3v^l, \qquad n+2=2^l u^l$$

vagy

$$n=2^l u^l, \qquad n+1=3v^l, \qquad n+2=2w^l,$$

ahol $n\geqslant 1$ és $v>1$, $w>1$ egészek. Innen az

(5) $$2\left(w^l \pm 1\right)=3v^l \pm 1=(2u)^l$$

diofantikus egyenletrendszerek adódnak.

Itt szükség volt egy *S. Lubelskitől* és a jelen szerzőtől származó tételre, mely szerint a (4) egyenletből $c>1$ esetén (bizonyos technikai feltételek mellett) következik, hogy ha x, y, z megoldás és $3\mid x-y$ (Lubelski, 1935) vagy $3\mid x+y$ (Győry, 1966), akkor szükségképpen teljesül a (3) kongruencia. Ennek bizonyításához mély algebrai számelméleti eszközökre volt szükség.

Az említett eredmény felhasználásával be lehet bizonyítani, hogy az (5)-ben szereplő diofantikus egyenletrendszerek akármelyikének a megoldhatóságából következik a (3) kongruencia. Továbbá (5)-ből adódóan

$$|2w^l-3v^l|=1,$$

aminek $v=w=1$ megoldása. Ezért $l<17$ vagy $l>347$ esetén Bennett és de Weger tétele szerint további megoldás nem létezhet, azaz az (5) egyenletrendszerek a $v>1$, $w>1$ feltételek mellett nem megoldhatók. A fennmaradó $17\leqslant l\leqslant 347$ esetekben a (3) kongruencia nem teljesül, így készen vagyunk. Megjegyezzük, hogy itt használhattuk volna Terai eredményét is, ebben az esetben Bennett és de Weger tételét elég az $l=11$ esetre alkalmazni.

3. Az (1) és (2) egyenletek egy közös általánosítása

Az (1) és (2) egyenletek közös általánosításaként tekintsük most a

(6) $$n(n+1)\dots(n+k-1)=bx^l$$

egyenletet, ahol n, k, b, x, l valamennyien pozitív egész ismeretlenek és $k\geqslant 2$, $l\geqslant 2$, $P(b)\leqslant k$, b l-edik hatványmentes. Amennyiben $b=1$, úgy ez éppen az (1) egyenlet, míg ha b a $k!$ l-edik hatványmentes része, úgy a (2) egyenletet kapjuk. Azt a feltételt, hogy b l-edik hatványmentes, elejthetnénk. Viszont ezen feltétel mellett a (6) jobb oldalának bx^l alakban való felírása egyértelművé válik, ami később hasznosnak fog bizonyulni.

A (6) egyenlettel és annak további általánosításaival (például a dolgozat végén szereplő (7) és (8) egyenletekkel) sokan, közöttük *Erdős Pál, T. N. Shorey, R. Tijdeman, N. Saradha, Hajdú Lajos, Brindza Béla, Ruzsa Imre* és a szerző foglalkoztak.

Mint fentebb láttuk, a (6) egyenletnek a $k=b=l=2$ esetben végtelen sok megoldása van.

Elég a (6) egyenlet azon (n,k,b,x,l) megoldásaival foglalkozni, amelyekre $P(x)>k$. Valóban, adott k-ra a (6) egyenletnek csak véges sok $P(x)\leqslant k$ tulajdonságú megoldása van, és mindezek könnyen meghatározhatók. Jelöljük ugyanis $p^{(k)}$-val a legkisebb olyan prímszámot, melyre $p^{(k)}>k$. Sylvester fentebb idézett tételének következménye, hogy $P(x)\leqslant k$ mellett (n,k,b,x,l) akkor és csak akkor megoldása (6)-nak, ha $n\in\{1,2,\ldots,p^{(k)}-k\}$. Tehát n és így b, x, l tényleg könnyen meghatározható. Vegyük észre, hogy $n=1$ minden k-ra megoldása (6)-nak, $k!$ mindig felírható bx^l alakban a kívánt tulajdonsággal.

Példa. Könnyen ellenőrizhető, hogy $p^{(2)}=3$ és $p^{(3)}=5$. Ezért $k=2$, 3 esetén (6) összes, $P(x)\leqslant k$ tulajdonságú (n,k,b,x,l) megoldásai:

$$(1,2,2,1,l\geqslant 2),\qquad (1,3,6,1,l\geqslant 2),$$
$$(2,3,24,1,l\geqslant 4),\qquad (2,3,6,2,2),\qquad (2,3,3,2,3).$$

Az Erdős–Selfridge tétel bizonyításának módszerét továbbfejlesztve *N. Saradha* egy 1997-ben megjelent dolgozatában bebizonyította, hogy $k\geqslant 4$ esetén a (6) egyenletnek nincs olyan megoldása, amelyre $P(x)>k$. A bizonyítás a $k=2$ és 3 esetekre nem alkalmazható.

A Wiles-módszer egy változatával *K. A. Ribet* 1997-ben megmutatta, hogy a (4) egyenletnek nincs megoldása, amennyiben c a 2-nek 1-nél nagyobb és l-nél kisebb kitevőjű hatványa. A Darmon–Merel-tétel és a Ribet-tétel felhasználásával a szerzőnek [5] újabban sikerült Saradha eredményének megfelelőjét $k=2$ és $k=3$-ra is igazolnia. A következő, [5]-ben ilyen formában publikált tétel a (6) egyenlet teljes megoldását szolgáltatja a $P(x)>k$ feltétel mellett.

3. Tétel. (N. Saradha, $k\geqslant 4$ eset; Győry K., $k\leqslant 3$ eset). *A* $k=b=l=2$ *esettől eltekintve* $(n,k,b,x,l)=(48,3,6,140,2)$*, azaz* $48\cdot 49\cdot 50=6\cdot 140^2$ *a* (6) *egyenlet egyetlen olyan megoldása, melyre* $P(x)>k$

Most megmutatjuk, hogy a 3. Tételből levezethető mind az 1. Tétel, mind pedig a 2. Tétel.

Először tekintsük az (1) egyenletet, s tegyük fel, hogy (n,k,x,l) megoldása (1)-nek. A $k=l=2$ eset nyilván nem lehetséges. Továbbá a 3. Tétel miatt $P(x)>k$ sem teljesülhet. Ha viszont $P(x)\leqslant k$, úgy Sylvester tétele szerint $n\leqslant k$, azaz $n\leqslant\dfrac{n+k}{2}$. Továbbá Csebisev tétele következtében létezik olyan p prímszám, amelyre $\dfrac{n+k}{2}\leqslant p\leqslant n+k-1$. Ebből következik, hogy p-nek csupán az első hatványa lehet osztója $n(n+1)\ldots(n+k-1)$-nek, ami (1) miatt nem lehetséges. Ezzel az 1. Tételt levezettük a 3. Tételből.

Ezután tekintsük a (2) egyenlet egy (n, k, x, l) megoldását. A (2) egyenlet

$$n(n+1)\dots(n+k-1)=bx^l$$

alakba írható, ahol b a $k!$ legnagyobb l-edik hatványmentes osztója. Feltevés szerint $n \geqslant k+1$, ezért Sylvester tételét alkalmazva $P(x)>k$ adódik. Ekkor viszont a 2. Tétel már azonnal következik a 3. Tételből.

Az (1), (2) és (6) egyenletek további általánosításai a

$$n(n+d)\dots(n+(k-1)d)=x^l \tag{7}$$

és a

$$n(n+d)\dots(n+(k-1)d)=bx^l \tag{8}$$

egyenletek, ahol n, d, k, b, x, l pozitív egész ismeretlenek, $k \geqslant 3$, $x \geqslant 2$, $l \geqslant 2$, $(n,d)=1$ és $P(b) \leqslant k$. Mint említettük, ezekkel az egyenletekkel is sokan foglalkoztak, sok érdekes eredményt publikáltak. Ezekről az eredményekről az érdeklődő olvasó áttekintést nyerhet a [7], [9], [8], [6] munkákból. Azonban ellentétben az (1), (2) és (6) egyenletekkel, amelyeknek teljes megoldását ismerjük, a (7) és (8) egyenletekkel kapcsolatban eddig csupán részeredmények születtek.

Irodalom

[1] *L. E. Dickson,* History of the Theory of Numbers, 2. kiadás, Chelsea Publ. Comp., New York, 1971.

[2] *P. Erdős* and *J. L. Selfridge,* The product of consecutive integers is never a power, Illinois J. Math. **19** (1975), 292–301.

[3] *Erdős Pál* és *Surányi János,* Válogatott fejezetek a számelméletből, Tankönyvkiadó Vállalat, Budapest, 1960. Második, kibővített kiadás: Polygon, Szeged, 1996.

[4] *K. Győry,* On the diophantine equation $\binom{n}{k}=x^l$, Acta Arith., **80** (1997), 289–295.

[5] *K. Győry,* On the diophantine equation $n(n+1)\dots(n+k-1)=bx^l$, Acta Arith., **83** (1998), 87–92.

[6] *K. Győry,* Power values of products of consecutive integers and binomial coefficients, in: „Number Theory and Its Applications" Kluwer Acad. Publ., megjelenés alatt.

[7] *W. Narkiewicz,* Classical Problems in Number Theory, Polish Scientific Publ., Warszawa, 1986.

[8] *T. N. Shorey* and *R. Tijdeman,* Some methods of Erdős applied to finite arithmetic progressions, The Mathematics of Paul Erdős, I, 251–267. Springer-Verlag, 1997.

[9] *R. Tijdeman,* Diophantine equations and diophantine approximations, in: „Number Theory and Applications", Kluwer Acad. Publ. 1989, 215–243.

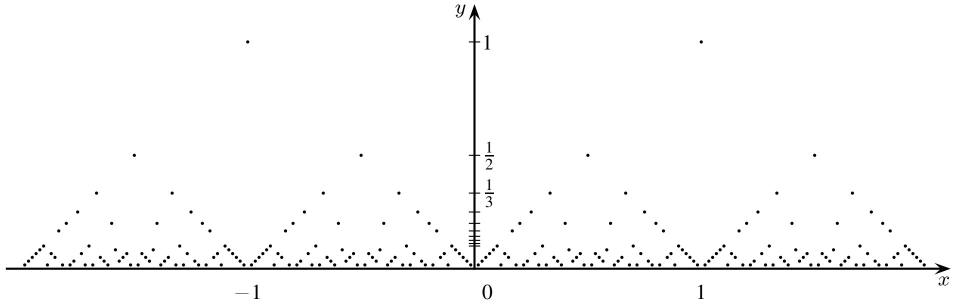
Győry Kálmán

A Riemann-függvényről

Bernhard Riemann (1826–1866), a neves német matematikus konstruálta az alábbi függvényt:

$$R(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ irracionális,} \\ \dfrac{1}{q}, & \text{ha } x \text{ racionális, } x=\dfrac{p}{q},\ (p,\ q \text{ egészek, } q>0,\ (p,q)=1. \end{cases}$$

Az *1. ábra* a függvény grafikonjának néhány pontját ábrázolja. A Riemann-függvényt bevezető analízis szemináriumokon szokás vizsgálni; többek között a *folytonosság* fogalmát teszi árnyaltabbá.



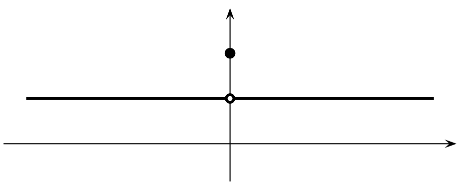
1. ábra. A Riemann-függvény néhány pontjának ábrázolása

Folytonos függvényekről, pontosabban intervallumon folytonos függvények grafikonjáról szemléletes képünk van: ezek a görbék „a ceruza felemelése nélkül” rajzolhatók meg. Maga a folytonosság azonban „lokálisan” adható meg, egy függvény folytonosságát először adott x_0 helyen szokás definiálni. Ezek után egy f függvényt folytonosnak mondunk egy M halmazon, ha annak minden pontjában folytonos.

Az x_0-beli folytonosság pedig azt jelenti, hogy a függvény az x_0-hoz „közeli” számokat az x_0-beli függvényértékhez, $f(x_0)$-hoz „közeli” értékekre képezi le.

Ezek után könnyű olyan függvényt megadni, amely pontosan egy adott helyen nem folytonos:

$$F(x)=\begin{cases} 2, & \text{ha } x=0, \\ 1 & \text{egyébként.} \end{cases} \qquad (\textit{2. ábra})$$



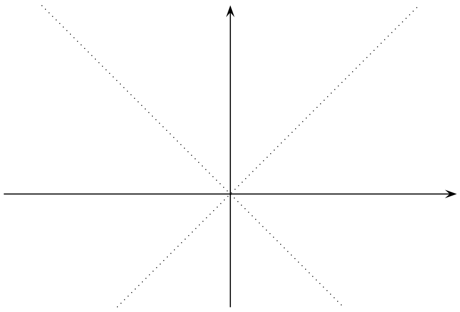
2. ábra

Olyan függvény, amelyik sehol nem folytonos:

$$D(x)=\begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

A fenti példa némi módosításával:

$$E(x)=\begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ racionális,}\\ -x, & \text{ha } x \text{ irracionális (\textit{3. ábra})}\end{cases}$$



3. ábra

olyan függvényhez jutunk, amelyik csupán egyetlen helyen folytonos. (Hol?)

Riemann példája azt mutatja, hogy a folytonosság fogalma tágabb, mint szemléletünk sugallja: $R(x)$ ugyanis végtelen sok helyen folytonos és végtelen sok helyen nem az; pontosabban $R(x)$ éppen az irracionális helyeken folytonos. Ez azon múlik, hogy tetszőleges x_0 valós számhoz „közel” már csak nagy nevezőjű törtek vannak, és így az x_0-hoz „közeli” számok kicsi, a 0-hoz közeli számokra képeződnek le. Mintha a konstans nulla függvényt a racionális helyeken „elszakítottuk” volna, de igen óvatosan: ritka – bár végtelen sok – kivételtől eltekintve közel maradunk a 0 értékhez.

Igazolható ([5]), hogy olyan függvény viszont nem létezik, amely éppen a racionális helyeken folytonos.

A függvény az integrál fogalmához is érdekes példa. A klasszikus fizika integrálfogalma, mint a görbe által határolt terület, általánosítható. Ennek első lépése az integrálható függvények körébe vonja az R függvényt is, az integrál értékére pedig

$$\int_0^1 R(x)\,dx=0$$

adódik, azaz dacára a sűrűn előforduló pozitív értékeknek, az integrál értéke 0. Kérdéses persze – és nem a matematika illetékességi köre –, hogy tulajdonítható-e fizikai jelentés az így kapott 0 értéknek, illetve van-e olyan fizikai folyamat, amelyet a Riemann-függvény ír le.

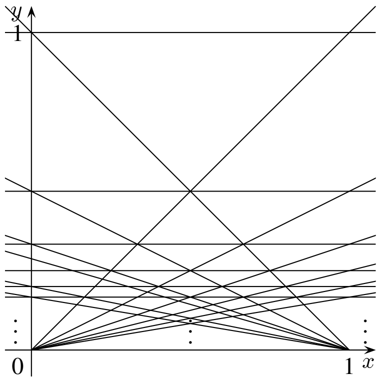
Az alábbiakban a Riemann függvénynek egy, az olvasó számára talán kevésbé ismert tulajdonságát mutatjuk be.

Könnyen látható, hogy a függvény korlátos, páros és periodikus. A továbbiakban a $[0,1]$ periódusra szorítkozunk, sőt – mivel irracionális helyeken a függvényérték 0 – a $[0,1]$ intervallumba eső racionális számokra szűkítjük az értelmezési tartományt. Az így nyert függvény gráfjának ponthalmazára (gráfpontok) röviden mint R-pontokra fogunk hivatkozni. Az R-pontokat a későbbiekben gyakran azonosítjuk első koordinátájuk redukált alakjával, azaz a $\left(\dfrac{p}{q},\dfrac{1}{q}\right)$ pontokat $\dfrac{p}{q}$-val.

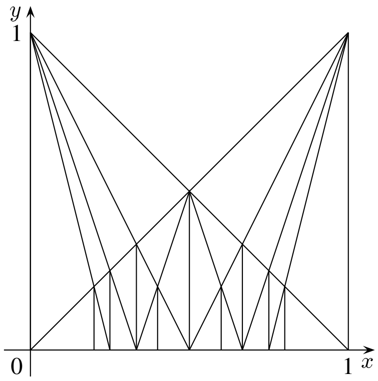
Az R-pontok halmazáról legalább hozzávetőleges képet szeretnénk kapni, hiszen a definíció szerint minden $[0,1]$-beli racionális pontban külön-külön kell ábrázolni a függvényt.

Néhány pont megszerkesztése után könnyű észrevenni, hogy az R-pontokat bizonyos szempontok alapján osztályozva egyes pontok egy-egy egyenesre, ún. *tartóegyenesekre* illeszkednek, amelyek segítségével a szerkesztés könnyebbé és pontosabbá válik.

Az azonos számlálójú, az azonos nevezőjű, illetve az azonos számláló–nevező különbségű pontok egy-egy tartóegyenesen helyezkednek el (*4. ábra*). Az egyenesekhez még néhány szerkesztési segédvonalat behúzva felfedezhetjük azt a szerkezetet, amelyet a továbbiakban vizsgálunk.



4. ábra



5. ábra

Olyan iteratív eljárást mutatunk, amely néhány R-pontból kiindulva újabb R-pontokat ad, amelyekre az eljárás újból alkalmazható. Sőt, az iterációval végül minden R-pontot megkapunk pontosan egyszer.

Bármely R-pont és első vetülete egy, az y tengellyel párhuzamos egyenest határoz meg, ebből következően ezek az egyenesek egymással is párhuzamosak. Ezek szerint bármely két R-pont (az első vetületeikkel) egy-egy trapézt feszít ki.

A legnagyobb ilyen trapéz az egységnégyzet, amely tartalmazza az összes R-pontot. Érdekes módon, ennek átlói újabb R-pontban metszik egymást. Az átlók metszéspontja a közvetlen ősökkel két újabb trapézt hoz létre. Látható, hogy a kapott trapézok átlómetszéspontjai is R-pontok ($\frac{1}{3}$ és $\frac{2}{3}$). Sőt, folytatva, akárhány lépést hajtunk végre, minden esetben azt tapasztaljuk, hogy az átlómetszéspontok egyúttal R-pontok is (*5. ábra*).

Igaz-e, hogy minden előálló trapéz átlómetszéspontja R-pont? Megfordítva: Igaz-e, hogy az iteráció során minden R-pontot megkapunk? Azt szeretnénk tehát, hogy az egységnégyzetből származtatott trapézok, illetve ezek átlómetszéspontjai és az R-pontok között lényegében (azaz a $(0,1)$ és az $(1,1)$ pontoktól eltekintve) kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés legyen.

A Riemann-függvény és az imént vázolt geometriai algoritmus kapcsolatának felderítéséhez a függvény definíciójában is érintett számelméleti–algebrai ismereteinket hívjuk segítségül. A függvény hozzárendelési szabálya a racionális számok redukált alakját használja. Még néhány észrevétel és egy teljes indukciós bizonyítással egyszerűen tisztázható a legtöbb nyitva maradt kérdés. A kiinduló egységnégyzetet a $\frac{0}{1}$ és az $\frac{1}{1}$ R-pontok feszítik ki, amelynek átlómetszéspontja az $\frac{1}{2}$. Geometriai eljárásunkkal a $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right)$ párból az $\frac{1}{2}$-t nyertük. Írjuk le algebrai művelettel a szerkesztést. Erre bevezetjük a $\boxtimes$

jelet, így a $\frac{0}{1} \boxtimes \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$ algebrai alakot öltötte a fenti szerkesztési lépés.

A fentiek alapján a $[0,1]$ racionális számaira általánosan is definiálhatjuk a *köztesképzésnek* vagy *mediánsképzésnek* nevezett műveletet. A geometriai szemléltetésből látszik, hogy a művelet eredménye az „összeadandók" (operandusok) közé ékelődik.

Definíció. Két racionális szám köztesét redukált alakjukból nyerjük (a fentiekhez hasonló módon). Legyen adva két redukált alakú racionális szám az $r = \frac{a}{b}$ és az $s = \frac{c}{d}$, ahol $(a,b) = 1$, illetve $(c,d) = 1$ és b, $d > 0$. Ekkor legyen $r \boxtimes s = \frac{a}{b} \boxtimes \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

Meg kell fogalmaznunk még egy fontos észrevételt: a trapézokat kifeszítő R-pontpárokat fel lehet ismerni csupán algebrai alakjukból. A kiinduló néhány lépésben szereplő párokat vizsgálva észrevehetjük, hogy a fenti jelölésekkel élve, ha $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, akkor $cb - ad = 1$.

1. Tétel. Ha az $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ racionális számokra teljesül, hogy $cb - ad = 1$, akkor a racionális számok redukált alakúak. Köztesüket vizsgálva az $\frac{a}{b}$ és $\frac{a}{b} \boxtimes \frac{c}{d}$, illetve az $\frac{a}{b} \boxtimes \frac{c}{d}$ és $\frac{c}{d}$ párokra hasonlóan igaz, hogy a megfelelő keresztszorzatok különbsége 1, azaz

$$(a+c)b - a(b+d) = 1 \qquad \text{és} \qquad c(b+d) - (a+c)d = 1.$$

Bizonyítás. A kiinduló racionális számok egyszerűsített alakban kell szerepeljenek, hiszen ellenkező esetben az 1-nél nagyobb közös osztó a $cb - ad$ kifejezésnek is osztója. De $cb - ad = 1$, aminek 1-nél nagyobb osztója nem lehet.

Az állítás második fele a zárójelek felbontása és rendezés után nyomban adódik.

$$(a+c)b - a(b+d) = ab + cb - ab - ad = cb - ad = 1,$$
$$c(b+d) - (a+c)d = cb + cd - ad - cd = cb - ad = 1. \quad \square$$

2. Tétel. Ha az $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ racionális számokra teljesül, hogy $cb - ad = 1$, akkor $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, köztesük pedig közéjük ékelődik, azaz $\frac{a}{b} < \frac{a}{b} \boxtimes \frac{c}{d} < \frac{c}{d}$.

Bizonyítás. $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{cb - ad}{db} = \frac{1}{db}$.

$\frac{1}{db}$ pozitív, így az állítás első felét beláttuk. Ezután az $\frac{a}{b} < \frac{a}{b} \boxtimes \frac{c}{d} < \frac{c}{d}$ egyenlőtlenséglánc az 1. tételből nyomban adódik.

Az 1. tételből az is következik, hogy a fenti jelölésekkel az $\frac{a}{b} \boxtimes \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ köztes is redukált alakú racionális szám. Ennek megfelelően $R\left(\frac{a}{b} \boxtimes \frac{c}{d}\right) = R\left(\frac{a+c}{b+d}\right) = \frac{1}{b+d}$. Vajon az egységnégyzetből kiinduló eljárás előállítja-e ugyanezt, vagyis a megfelelő

$\left(\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right)$ és $\left(\frac{c}{d}, \frac{1}{d}\right)$ gráfpontok által kifeszített trapéz átlómetszéspontja valóban az $\left(\frac{a}{b} \boxtimes \frac{c}{d}, \frac{1}{b+d}\right)$ pont lesz-e?

3. Tétel. A köztesképzés művelete megfelel az átlómetszéspont megszerkesztésének, azaz a következő eljárások ekvivalensek:

a) A $\left(\frac{0}{1}, 1\right)$, $\left(\frac{1}{1}, 1\right)$ számpárokból kiindulva, majd minden lépésben az $\left(\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right)$, illetve $\left(\frac{c}{d}, \frac{1}{d}\right)$ párokhoz az $\left(\frac{a+c}{b+d}, \frac{1}{b+d}\right)$-t rendeljük, ahol a párok első elemeire $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, és közéjük eső racionális érték az iteráció során még nem fordult elő.

b) Az R-pontokat tartalmazó egységnégyzetből kiindulva minden lépésben megszerkesztjük az újonnan kapott trapézok átlómetszéspontjait. Minden pont első vetítőszakasza a trapéz alapjaival (az y tengellyel párhuzamos oldalak) két újabb trapézt feszít ki, amelyekre az eljárás újból alkalmazható.

Bizonyítás. A tételt teljes indukcióval bizonyítjuk.

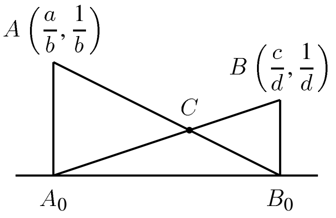
A kiinduló feltételeket az elvárásoknak megfelelően párhuzamba lehet állítani. Az előző tételek figyelembe vételével már csak azt kell igazolnunk, hogy a közös indulás után ugyanúgy haladunk tovább.

Tegyük fel, hogy az ekvivalencia – a kezdeti $\left(\frac{0}{1}, 1\right)$, illetve $\left(\frac{1}{1}, 1\right)$ párok és a kiinduló egységnégyzet megfeleltetése után az első $(n-1)$ lépésen keresztül az $\left(\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right)$, illetve a $\left(\frac{c}{d}, \frac{1}{d}\right)$ számpárok és az $A\left(\frac{a}{b}, R\left(\frac{a}{b}\right)\right)$, illetve $B\left(\frac{c}{d}, R\left(\frac{c}{d}\right)\right)$ R-pontok által kifeszített trapézok között megadható. Világos, hogy ekkor az egymásnak megfelelő két objektum:

a) a köztesképzés segítségével kapott $\left(\frac{a}{b} \boxtimes \frac{c}{d}, \frac{1}{b+d}\right)$ számpár, amelynek felhasználásával az $\left(\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right)$, $\left(\frac{a}{b} \boxtimes \frac{c}{d}, \frac{1}{b+d}\right)$ és az $\left(\frac{a}{b} \boxtimes \frac{c}{d}, \frac{1}{b+d}\right)$, $\left(\frac{c}{d}, \frac{1}{d}\right)$ számpárokhoz jutunk.

b) másrészt, a szóban forgó trapéz átlómetszéspontja (amelyet a négy csúcs vagy a trapéz alapjai egyértelműen meghatároznak), amelynek felhasználásával a folytatáshoz szükséges új trapézokat nyerünk.

Belátjuk, hogy ha $(n-1)$ lépésen keresztül egyértelmű a megfeleltetés az a) és a b) eljárás lépései között, akkor az az n-edik lépésben ugyanilyen módon folytatható. Elég belátni, hogy a fentiekben tárgyalt feltételek mellett a trapéz átlómetszéspontja a $C\left(\frac{a+c}{b+d}, \frac{1}{b+d}\right)$ pont lesz. Ezt a *6. ábra* jelöléseit használva koordiná-



6. ábra

tageometriai eszközökkel igazolhatjuk a leggyorsabban.

Az A_0B egyenes meredeksége $\frac{1}{d}:\left(\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\right)=\frac{1}{d}:\frac{1}{bd}=b$, a B_0A egyenesé pedig $\frac{1}{b}:\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)=\frac{1}{b}:\frac{-1}{bd}=-d$. Az egyenesek egyenlete így

$$A_0B:\ y=bx-a;\qquad B_0A:\ y=-dx+c.$$

A két egyenes C metszéspontjára

$$x=\frac{a+c}{b+d}\qquad\text{és}\qquad y=\frac{1}{b+d},$$

azaz valóban megkapjuk az $\frac{a}{b}\boxtimes\frac{c}{d}$ R-pontot.

Végül meg kell mutatnunk, hogy eljárásunk során minden R-pontot megkapunk. Ezt a nevezőkre vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk.

Ha $q=1$, akkor két R-pont van, $\frac{0}{1}$ és $\frac{1}{1}$, ezekkel kezdődik az eljárás. Legyen most $q>1$, és tegyük föl, hogy valamennyi q-nál kisebb nevezőjű R-pontot megkapunk. Megmutatjuk, hogy ha $0<p<q$ és $(p,q)=1$, akkor a $\frac{p}{q}$ R-pontot is megkapjuk.

Mivel $(p,q)=1$, azért a $px\equiv 1 \pmod{q}$ kongruenciának létezik olyan b megoldása, amelyre $0<b<q$. Ekkor $d=q-b$ választással $pd\equiv -1 \pmod{q}$. Ha most $\frac{pb-1}{q}=a$ és $\frac{pd+1}{q}=c$, akkor nyilván

$$a+c=\frac{p(b+d)}{q}=p\qquad\text{és}\qquad b+d=q,$$

továbbá $pb-aq=qc-pd=1$ miatt $(a,b)=(c,d)=1$, végül

$$\frac{a}{b}<\frac{p}{q}=\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}.$$

Megtaláltuk tehát a $\frac{p}{q}$-t szolgáltató két törtet, ezek $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$. Mindkét nevező kisebb, mint q, így az indukciós feltevést alkalmazva a bizonyítás teljes.

A cikket néhány feladattal zárjuk:

1. Bizonyítsuk be, hogy a Riemann-függvény periodikus!

2. A Riemann-függvény $[0,1]$ periódusában hány olyan x érték van, amelyre $R(x)=$ $=\frac{1}{n}$ (adott n természetes szám esetén)?

3. Hány olyan egyenes van a síkban, amelyre a Riemann-függvénynek végtelen sok gráfpontja esik?

4. Mit lehet mondani $R(x)$ differenciálhatóságáról?

5. A köztesképzésnek milyen műveleti tulajdonságai vannak? (Pl. kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás valamilyen másik műveletre nézve, idempotencia.)

6. Az iteratív eljárás során n lépés után mekkora az előforduló legnagyobb nevező?

Irodalomjegyzék

[1] KöMaL 1893–1993 matematika CD-ROM

[2] *Niven–Zuckermann:* Bevezetés a számelméletbe (Műszaki Könyvkiadó, 1978)

[3] *Reiman István:* A geometria és határterületei (Gondolat, 1986)

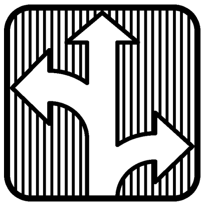
[4] *Sain Márton:* Nincs királyi út (Gondolat, 1986)

[5] *Sain Márton:* Matematikatörténeti ABC (Tankönyvkiadó, 1980)

[6] *Erdős–Surányi:* Válogatott fejezetek a számelméletből (Polygon, 1996)

Holló-Szabó Ferenc

Januári szakköri feladatok



A fővárosi Toldy Ferenc Gimnázium tiszteletére, ahol az 1957–58-as tanévben tanítottam.

1. Oldja meg a

$$\sqrt{x-1}+x-3 \geqslant \sqrt{2(x-3)^2+2x-2}$$

egyenlőtlenséget.

2. Az $ABCD$ konvex négyszög AC és BD átlóinak metszéspontja P. Legyen az APB, illetve CPD háromszögek területe t_1, illetve t_3. Az $ABCD$ négyszög területe $T=\left(\sqrt{t_1}+\sqrt{t_3}\right)^2$. Igazolja, hogy az $ABCD$ négyszög trapéz!

3. Oldja meg a

$$\sin^2 x\cos x-\sin x\cos^2 x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

egyenletet a valós számok halmazán!

4. Igazolja, hogy minden háromszögben

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}+\frac{\cos\beta}{\sin\gamma\sin\alpha}+\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}=2.$$

Rábai Imre

Megoldásvázlatok, eredmények a II. mérőlap (1998/9. sz.) feladataihoz

1. A háromszög kerülete $2s=70{,}4$ egység, így $s=35{,}2$ egység. A háromszög területe Heron képlettel számolva, $T^2=35{,}2\cdot 2{,}2\cdot 26{,}4\cdot 6{,}6$, ahonnan $T^2=(116{,}16)^2$, tehát $T=116{,}16$ területegység.

Ismeretes, hogy a háromszögbe írt kör sugara $\varrho=\frac{T}{s}$, azaz most $\varrho=\frac{116{,}16}{35{,}2}=3{,}3$ egység.

(A háromszög területét és a beírható kör sugarát más módon is kiszámíthatjuk. Hogyan?)

2. Az egyenletnek minden $-2\leqslant x\leqslant 3$ valós számra van értelme. Észrevehető, hogy

$$11+x+6\sqrt{x+2}=(x+2)+6\sqrt{x+2}+9=\left(\sqrt{x+2}+3\right)^2 \qquad \text{és}$$
$$4-x+2\sqrt{3-x}=(3-x)+2\sqrt{3-x}+1=\left(\sqrt{3-x}+1\right)^2.$$

Mivel $\sqrt{x+2}+3>0$ és $\sqrt{3-x}+1>0$, ha $-2\leqslant x\leqslant 3$, $\sqrt{a^2}=|a|=a$, ha $a>0$, ezért az adott egyenlet $\sqrt{x+2}+3+\sqrt{3-x}+1=7$, azaz

(1) $$\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=3,$$

alakban írható. Az eddigi átalakítások ekvivalensek voltak, így az (1) egyenlet a megoldandó egyenlettel ekvivalens. Az (1) egyenlet sokféle módon megoldható. Oldjuk meg egyenletrendszerre való visszavezetéssel. Legyen $\sqrt{x+2}=y$ ($\geqslant 0$) és $\sqrt{3-x}=z$ ($\geqslant 0$), akkor $x+2=y^2$ és $3-x=z^2$, ahonnan $5=y^2+z^2$, s mivel $y+z=3$, $z=3-y$, ezért $y^2+(3-y)^2=5$, ahonnan $y=1$ vagy $y=2$.

Figyelembe véve, hogy $x=y^2-2$, ezért az adott egyenlet megoldásai $x_1=-1$ és $x_2=2$.

3. Célszerű jelöléssel az utolsó négy szám legyen $a-3t$, $a-t$, $a+t$, $a+3t$.

A feltétel szerint $4a=16$, azaz $a=4$ és $(4-3t)(4+3t)=-20$, azaz $9t^2=36$, $t=2$ vagy $t=-2$. Ha $t=2$, akkor az utolsó négy szám -2, 2, 6, 10, és így $q=-1$, tehát $a_2=2$, $a_1=-2$; ha $t=-2$, akkor az utolsó négy szám 10, 6, 2, -2, és így $q=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, tehát $a_2=\frac{50}{3}$, $a_1=\frac{250}{9}$. (Természetesen más jelöléssel is dolgozhatunk.)

4. A háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt az őt közrezáró két oldal arányában osztja. A két oldal aránya most $10:15=2:3$, ezért a harmadik oldal két része legyen $2x$, illetve $3x$. A két adott oldal által bezárt szög legyen α. A két részháromszögben alkalmazzuk a koszinusztételt. Így

(1) $$4x^2=(6\sqrt{3})^2+10^2-2\cdot 6\sqrt{3}\cdot 10\cos\frac{\alpha}{2},$$

(2) $$9x^2=(6\sqrt{3})^2+15^2-2\cdot 6\sqrt{3}\cdot 15\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Az (1) egyenletet (-3)-mal, a (2) egyenletet 2-vel szorozva, majd az így kapott egyenleteket összeadva $6x^2=42$, $x=\sqrt{7}$ ($x>0$), majd ezt valamelyik egyenletbe helyettesítve $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ adódik.

Így $\frac{\alpha}{2}=30^\circ$, $\alpha=60^\circ$; a harmadik oldal $a=2x+3x=5x=5\sqrt{7}$ egység.

(A feladat más módokon is megoldható. Hogyan?)

5. A $P(6;10)$ ponton átmenő egyenesek egyenlete $x=6$ vagy $y-10=m(x-6)$ alakban írható, ahol $m\in\mathbf{R}$.

Az $x=6$ egyenletű egyenes az adott egyeneseket $y_1=\frac{8}{3}$, illetve $y_2=-\frac{22}{3}$ ordinátájú pontokban metszi, így az y tengelyen való vetület $|y_1-y_2|=10$, tehát ez nem megoldás. Az $y-10=$ $=m(x-6)$ egyenletű egyenes az adott két párhuzamos egyenest az

$$y_1=\frac{8m+40}{3m+4}, \qquad \text{illetve} \qquad y_2=\frac{40-22m}{3m+4}$$

ordinátájú pontokban metszi. (Itt $3m+4\neq 0$ és $m\neq 0$. Ha ugyanis $3m+4=0$ vagy $m=0$, akkor nincs megoldás.)

Azokat az m értékéket keressük, amelyekre $|y_1-y_2|=2$, azaz

$$\left|\frac{8m+40}{3m+4}-\frac{40-22m}{3m+4}\right|=2,$$

ahonnan $30|m|=2|3m+4|$. Innen $15m=3m+4$ vagy $15m=-3m-4$, azaz $m=\frac{1}{3}$ vagy $m=-\frac{2}{9}$.

A feltételeknek két egyenes felel meg:

$$y-10=\frac{1}{3}(x-6)\quad (x-3y=-24)\qquad \text{vagy}\qquad y-10=-\frac{2}{9}(x-6)\quad (2x+9y=102).$$

(A feladat más módon is megoldható. Hogyan?)

6. A $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ azonosságot alkalmazva a

$$2\sin^2 x+(5m-7)\sin x+3m^2-9m+6=0 \tag{1}$$

egyenletet kapjuk. Az (1) egyenletnek akkor van megoldása, ha az egyenlet diszkriminánsa nemnegatív, és teljesül a $-1\leqslant \sin x\leqslant 1$ egyenlőtlenség. Most $D=(5m-7)^2-8\cdot(3m^2-9m+6)=$ $=(m+1)^2\geqslant 0$, így $\sin x=2-m$ vagy $\sin x=\frac{3}{2}(1-m)$.

Az $|2-m|\leqslant 1$ és a $\frac{3}{4}|1-m|\leqslant 1$ egyenlőtlenség közül legalább az egyik akkor teljesül, ha $\frac{1}{3}\leqslant m\leqslant 3$, így ezekre az m-ekre van az egyenletnek megoldása.

Ha $m=\frac{1}{3}$, akkor $\sin x=1$; ha $m=1$, akkor $\sin x=1$ vagy $\sin x=0$; ha $m=\frac{3}{2}$, akkor $\sin x=\frac{1}{2}$ vagy $\sin x=-\frac{3}{4}$; ha $m=\frac{5}{3}$, akkor $\sin x=\frac{1}{3}$ vagy $\sin x=-1$; ha $m=3$, akkor $\sin x=-1$. Oldja meg ezeket az alapegyenleteket!

7. Az egyenlőtlenség $x>0$, $x\neq 1$ valós számokra értelmezett. Azonosságok alkalmazásával, majd rendezéssel:

$$-2\log_4 x-8\log_x 4+10\geqslant 0,$$

$$\log_4 x+4\cdot\frac{1}{\log_4 x}-5\leqslant 0,$$

$$\frac{(\log_4 x)^2-5\cdot\log_4 x+4}{\log_4 x}\leqslant 0,$$

$$\frac{(\log_4 x-1)(\log_4 x-4)}{\log_4 x}\leqslant 0.$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha $\log_4 x<0$ vagy $1\leqslant\log_4 x\leqslant 4$. Az egyenlőtlenség megoldásai tehát: $0<x<1$ vagy $4\leqslant x\leqslant 256$.

8. Az x^2-re másodfokú egyenletnek csak akkor lehet négy különböző valós gyöke, ha a diszkriminánsa pozitív, azaz ha

$$D=(3a+2)^2-4a^2=5a^2+12a+4=(a+2)(5a+2)>0,$$

azaz $a<-2$ vagy $a>-\frac{2}{5}$. Most

$$x_{1,4}^2=\frac{1}{2}\left(3a+2+\sqrt{D}\right)\quad \text{vagy}\quad x_{2,3}^2=\frac{1}{2}\left(3a+2-\sqrt{D}\right);$$

$$x_1=-\sqrt{\frac{1}{2}(3a+2+\sqrt{D})},\qquad x_4=\sqrt{\frac{1}{2}(3a+2+\sqrt{D})},$$
$$x_2=-\sqrt{\frac{1}{2}(3a+2-\sqrt{D})},\qquad x_3=\sqrt{\frac{1}{2}(3a+2-\sqrt{D})}.$$

Mivel $x_1=-x_4$, $x_2=-x_3$ és $x_3<x_4$, azért $-x_4$, $-x_3$, x_3, x_4 pontosan akkor egy számtani sorozat négy egymást követő eleme, ha $2x_3=-x_3+x_4$, azaz $3x_3=x_4$. (Ekkor $-2x_3=-x_4+x_3$ is teljesül). Tehát

$$3\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(3a+2-\sqrt{5a^2+12a+4}\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(3a+2+\sqrt{5a^2+12a+4}\right)},$$
$$\frac{9}{2}\left(3a+2-\sqrt{5a^2+12a+4}\right)=\frac{1}{2}\left(3a+2+\sqrt{5a^2+12a+4}\right),$$
$$8(3a+2)=10\sqrt{5a^2+12a+4},$$
$$19a^2-108a-36=0,\qquad a=6\qquad\text{vagy}\qquad a=-\frac{6}{19}.$$

(Ha $a=6$, akkor $x^4-20x^2+36=0$, $x^2=2$ vagy $x^2=18$, $x_1=-3\sqrt{2}$, $x_2=-\sqrt{2}$, $x_3=\sqrt{2}$, $x_4=$ $=3\sqrt{2}$, ha $a=-\frac{6}{19}$, akkor $x^4-\frac{20}{19}x^2+\left(\frac{6}{19}\right)^2=0$, $x^2=\frac{2}{19}$ vagy $x^2=\frac{18}{19}$, $x_1=-\frac{3\sqrt{2}}{19}$, $x_2=-$ $-\frac{\sqrt{2}}{19}$, $x_3=\frac{\sqrt{2}}{19}$, $x_4=\frac{3\sqrt{2}}{19}$.)

Megjegyzés. A negyedfokú egyenletben x^3 együtthatója nulla, így a gyökök összege nulla. Jelölje a négy gyököt $x_1=b-3t$, $x_2=b-t$, $x_3=b+t$, $x_4=b+3t$. Innen $4b=0$, $b=0$. A gyökök tehát $-3t$, $-t$ t, $3t$. Az x^2-re másodfokú egyenlet két gyöke: $x^2=t^2$ vagy $x^2=9t^2$. Az egyenlet

$$(x^2-t^2)(x^2-9t^2)=0,\qquad x^4-10t^2x^2+9t^4=0$$

alakban írható. Hasonlítsuk össze a kitűzött egyenlettel. Ebből $9t^4=a^2$ és $10t^2=3a+2$, azaz $3t^2=$ $=a$ vagy $3t^2=-a$, így

$$10\cdot\frac{a}{3}=3a+2\qquad\text{vagy}\qquad 10\cdot\left(-\frac{a}{3}\right)=3a+2,$$

így $a=6$ vagy $a=-\frac{6}{19}$.

Rábai Imre

Matematika gyakorlatok megoldásai

Gy. 3176. *Az (a_i) sorozatot a következőképpen definiáljuk: $a_1=0$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_n=\max\limits_{1<d<n}\{a_d\cdot a_{n-d}\}$ ($n=4$, 5, 6, ...). Határozzuk meg a_{1998} értékét.*

Javasolta: *Fried Ervin,* Budapest

Megoldás. A definíció alapján számítsunk ki néhány további értéket:

$$a_4 = \max\{2 \cdot 2\} = 4,$$
$$a_5 = \max\{2 \cdot 3, 3 \cdot 2\} = 6,$$
$$a_6 = \max\{2 \cdot 4, 3 \cdot 3, 4 \cdot 2\} = 9,$$
$$a_7 = \max\{2 \cdot 6, 3 \cdot 4, 4 \cdot 3, 6 \cdot 2\} = 12,$$
$$a_8 = \max\{2 \cdot 9, 3 \cdot 6, 4 \cdot 4, 6 \cdot 3, 9 \cdot 2\} = 18,$$

... és így tovább. Ezek az eredmények azt sugallják, hogy $n > 1$ esetében $a_{n+3} = 3 \cdot a_n$ teljesül.*

Ezt n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ esetében a fenti számolások szerint igaz az állítás. Tegyük most fel, hogy az adott összefüggés igaz minden olyan $k < n$ esetén, amelyre $k > 2$.

A sorozat definíciója szerint a_{n+3} az

$$A_{n+3} = \{a_2 \cdot a_{n+1}, a_3 \cdot a_n, \ldots, a_{n-2} \cdot a_5, a_{n-1} \cdot a_4, a_n \cdot a_3, a_{n+1} \cdot a_2\}$$

halmazba eső számok maximuma. Az A_{n+3}-ba eső első $n-3$ szorzat második tényezőjének i indexe rendre $n+1$, n, ..., 5. Ezek mindegyike eleget tesz a $4 < i < n+3$ kikötésnek. Az indukciós feltétel szerint ezekre a szorzatokra $a_d \cdot a_{n+3-d} = 3 \cdot (a_d \cdot a_{n-d})$ teljesül. Ezek a szorzatok pontosan az

$$A_n = \{a_2 \cdot a_{n-2}, a_3 \cdot a_{n-3}, \ldots, a_{n-2} \cdot a_2\}$$

halmazba eső szorzatok háromszorosai.

A fennmaradó három szorzat: $\{a_{n-1} \cdot a_4, a_n \cdot a_3, a_{n+1} \cdot a_2\}$. Itt viszont az első tényezők mindegyikének az indexe legalább $6 - 1 = 5$. Ezekre alkalmazható az indukciós feltevés; vagyis ez nem más, mint az $\{a_{n-4} \cdot a_4, a_{n-3} \cdot a_3, a_{n-2} \cdot a_2\}$ szorzatok háromszorosai. Ezek a szorzatok viszont már szerepelnek A_n-ben (hiszen $n > 5$). Ezért az A_{n+3}-ba eső szorzatok pontosan az A_n-be eső szorzatok háromszorosai, azaz $a_{n+3} = 3 \cdot a_n$ valóban igaz.

Mivel $1998 = 3 \cdot 665 + 3$, azért $a_{1998} = 3^{665} \cdot 3 = 3^{666} \approx 579\,102 \cdot 10^{312}$.

Boros M. Mátyás (Budapest, Veres Péter Gimn., 9. o.t.) megoldása alapján

Megjegyzés. Ez a sorozat nem egy „kitalált” képlet. Azok számára, akik valamit hallottak már csoportelméletről, elmondjuk, hogy a_n-re való rekurzió azt mondja meg, hogy miképpen határozhatjuk meg az n-elemű halmaz összes permutációjának csoportjában a maximális méretű kommutatív részcsoport elemszámát; amennyiben ezt kevesebb elemű halmazok esetében már tudjuk.

115 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Babos Attila, Bajusz Csaba, Boros M. Mátyás, Buruzs Ádám, Csirmaz Előd, Deli Lajos, Gelencsér Gábor, Gerencsér Balázs, Győri Nikolett, Harangi Viktor, Kunszenti-Kovács Dávid, Lábó Eszter, Lábó Melinda, Lengyel Zoltán, Máthé András, Reviczky Ádám, Ritter Ádám, Schlanger Judit, Somlai Gábor, Taraza Busra, Tillinkó Zsanett, Ureczky Judit, Varga Szilvia, Varjú Péter, Vitéz Ildikó, Zábrádi Gergely és Zempléni Márton. 4 pontos 8, 3 pontos 38, 2 pontos 27, 1 pontos 1, 0 pontos 11 dolgozat. Nem versenyszerű 3.

---

* Az a_8 kiszámítására azért volt külön szükség, mert 8 a legnagyobb index, amelyre a szorzatok között szerepel 3-mal nem osztható; ami a teljes indukciós bizonyításban esetszétválasztást tenne szükségessé.

Gy. 3183. *Egymást jól ismerő emberek társaságában mindenki vagy mindig igazat mond, vagy mindig hazudik. Egy kerek asztal köré ülve mindenki azt állítja, hogy ő igazmondó, de a tőle k hellyel jobbra ülő hazug. Hányan ülhetnek az asztal körül?*

Javasolta: *Bakonyi Gábor,* Budapest

Megoldás. Üljön n ember az asztalnál.

Legyen t az a – csak n-től és k-tól függő – legkisebb egész, ahányszor k-t kell lépni az asztal mentén ahhoz, hogy visszajussunk a kiindulási helyre. Egy ilyen körutazás során igazmondó után hazug, hazug után pedig igazmondó következik, így a kör hossza szükségképpen páros. (Egyébként volna két „k-szomszédos" igazmondó vagy hazug.)

Megmutatjuk, hogy ha – adott n-re és k-ra – a t páros, akkor lehetséges a megfelelő elrendezés. Címkézzük meg ugyanis ekkor az ülőhelyeket (illetve a megfelelő helyen ülő embereket) a következőképpen. Szemeljünk ki egyet, ő legyen I(gazmondó), a tőle k hellyel jobbra ülő H(azug), az ettől k hellyel jobbra lévő ismét I stb; t lépésben jutunk vissza a kiindulási helyre, és az utolsó, t-edik címke H volt.

Ha van olyan hely/ember, amely/aki még nem kapott címkét, válasszunk ki egy ilyet, és tőle elindulva végezzünk el egy, az előbbihez hasonló címkézést. Ennek során nem juthatunk olyan helyre, ahol az előző szakaszban már jártunk, tehát újabb t darab címke is kiosztható; és így tovább.

Hátravan még a t meghatározása. Mivel k-asával lépve az n-személyes asztalt járjuk körbe-körbe – éppen t-szer – a t azon egészek minimuma, amelyekre $n \mid t \cdot k$, azaz $\frac{n}{(n,k)} \,\Big|\, t \cdot \frac{k}{(n,k)}$. Mivel pedig $\frac{n}{(n,k)}$ és $\frac{k}{(n,k)}$ egymáshoz relatív prímek, $\frac{n}{(n,k)} \,\Big|\, t$; a legkisebb ilyen t maga $\frac{n}{(n,k)}$.

A feladat megoldását tehát azok az n értékek adják, amelyre $t = \frac{n}{(n,k)}$ páros, azaz n a 2-nek magasabb hatványával osztható, mint a k.

136 dolgozat érkezett. 5 pontos 37, 4 pontos 8, 3 pontos 4, 2 pontos 8, 1 pontos 52, 0 pontos 27 dolgozat.

Gy. 3192. *Keressük meg azokat a pozitív egész A, B számokat, amelyek tízes számrendszerbeli alakját egymás után írva négyzetszámot kapunk, és ez egyenlő az A és B szorzatának kétszeresével.*

Megoldás. Egy négyzetszám csak páros számú nullára végződhet. Írjuk a B számot az A mögé, ekkor tehát B páros számú nullára végződik, hiszen $\overline{AB}$ négyzetszám. Könnyű belátni, hogy ha egy A, B pár megfelel a feladat követelményeinek, akkor A, $B \cdot 100$ is megfelel. (Hiszen $\overline{AB}$ és $2 \cdot A \cdot B$ is 100-szorosára változik.) Feltehetjük tehát, hogy B nem osztható 10-zel. Legyen a B szám b-jegyű. Ekkor $\overline{AB}$ négyzetszám, és

$$\overline{AB} = 10^b \cdot A + B = 2 \cdot A \cdot B.$$

Átrendezve

$$10^b \cdot A = (2A - 1) \cdot B \tag{1}$$

adódik, azaz $2^b \cdot A$ osztója a $(2A - 1) \cdot B$ szorzatnak. Azt állítjuk, hogy $2^b \cdot A$ és a szorzat első tényezője, $2A - 1$, relatív prímek. Valóban, $2^b \cdot A$ tetszőleges p prímosztója vagy

$p=2$ vagy pedig p osztója A-nak és így $2A$-nak is. A 2 nyilván nem osztója a páratlan $(2A-1)$-nek, a második esetben pedig p szintén nem lehet egyidejűleg osztója a szomszédos $(2A-1)$-nek és $2A$-nak.

Így viszont $2^b \cdot A$ mint a $(2A-1)\cdot B$ szorzat osztója, a második tényezőnek, B-nek is osztója, vagyis $B=k\cdot 2^b\cdot A$ valamilyen pozitív egész k-val. (1)-ben $2^b\cdot A$-val egyszerűsítve

$$5^b=(2A-1)\cdot k \qquad (2)$$

adódik. (2)-ből mind $(2A-1)$, mind pedig k az 5 hatványa. Mivel $b\geqslant 1$, azért k értéke csak 1 lehet, egyébként ugyanis $B=k\cdot 2^bA$ osztható volna 10-zel.

Így $5^b=2A-1$, azaz $A=\dfrac{5^b+1}{2}$ és $B=2^b\cdot A$. Ekkor $2\cdot A\cdot B=2^{b+1}A^2$ pontosan akkor négyzetszám, ha b páratlan. Eszerint $A=\dfrac{5^b+1}{2}$ és $B=2^b\cdot A=2^{b-1}(5^b+1)$, ahol b páratlan.

Így $2\cdot A\cdot B=2^{b+1}A^2$ valóban négyzetszám, fennál az $\overline{AB}=2\cdot A\cdot B$ egyenlőség, hiszen

$$10^bA+B=10^b\cdot A+2^b\cdot A=2^b\cdot A(5^b+1)=2^{b+1}\cdot A^2=2\cdot A\cdot B,$$

végül $10^{b-1}<B<10^b$, azaz B jegyeinek száma valóban b.

A feladat követelményeit tehát az

$$A=\frac{5^b+1}{2} \qquad \text{és a} \qquad B=2^b\cdot A\cdot 100^m$$

alakú számok elégítik ki, ahol b páratlan, m pedig tetszőleges természetes szám.

147 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Máthé András. 5 pontos 56, 4 pontos 15, 3 pontos 9, 2 pontos 20, 1 pontos 34, 0 pontos 12 dolgozat.

Gy. 3193. *Egy kosár mogyorót n kupacba osztottunk szét. Összekevertük, és utána $n+k$ kupacot készítettünk belőlük ($k>0$). Bizonyítsuk be, hogy legalább $k+1$ szem mogyoró kisebb kupacba került, mint amekkorában előzőleg volt.* (**H**)

Megoldás. Ha az eredetileg n kupac valamelyikének l eleme volt, úgy „írjunk rá” mindegyik benne lévő mogyoróra $\frac{1}{l}$-et. Ezt valamennyi kupacra elvégezve minden mogyoró pozitív számot visel, egy kupacon belül ezen számok összege 1, tehát az összes ilyen szám összege n.

Tételezzük fel – a feladat állításával ellentétben –, hogy legfeljebb k szem mogyoró került az új elosztás során az eredetivel kisebb kupacba. Mivel az új kupacok száma $n+k$, azért lesz legalább n olyan (új) kupac, amelyben minden mogyoróról elmondható, hogy legalább akkora kupacba került, amekkorában eredetileg volt. Így a szóban forgó n új kupac bármelyikében a mogyorószemek által viselt számok összege legalább 1, az n új kupacban levőket összegezve pedig legalább n. Ez azonban azt jelenti, hogy a fennmaradó k új kupacban a mogyorókra írt számok összege legfeljebb nulla, ami ellentmond annak, hogy itt is csupa pozitív számot összegeztünk.

Megjegyzés. A $(k+1)$-es becslés nem javítható. Osszuk el eredetileg a mogyorókat úgy, hogy az egyik kupacba pontosan $k+1$ szem mogyoró kerüljön. A második szétosztás pedig csupán abban különbözzék az elsőtől, hogy a korábbi kiszemelt $k+1$-es kupacot $k+1$ darab egyelemű kupacba osztjuk szét. Ekkor pontosan ez a $k+1$ mogyoró kerül az eredetinél kisebb kupacba.

Poronyi Gábor (Pécs, Janus Pannonius Gimn., 11. o.t.) és
Terpai Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) dolgozatai alapján

73 dolgozat érkezett. 6 pontos Juhász András, 5 pontos Bárány Kristóf, Gyenes Zoltán, Győri Nikolett, Hangya Balázs, Harangi Viktor, Kunszenti-Kovács Dávid, Papp Dávid, Patakfalvi Zsolt, Poronyi Gábor, Székelyhidi Gábor, Terpai Tamás és Végh A. László megoldása. 4 pontot kapott 9, 3 pontot 23, 2 pontot 22, 1 pontot 6 dolgozat.

Gy. 3198. *Vannak-e olyan a, b, c, d pozitív egész számok, amelyekre $ab=cd$, és az $a+b+c+d$ összeg értéke prím?*

Iráni versenyfeladat

Megoldás. Tegyük fel, hogy a, b, c, d a feladat feltételeit kielégítő pozitív egészek. Ekkor $a+b+c+d=p$, ahol p prímszám. Helyettesítsük be az $ab=cd$ egyenlőségbe $d=$ $=p-(a+b+c)$-t:

$$ab=c(p-a-b-c),$$
$$ab+ac+bc+c^2=cp,$$
$$(a+c)(b+c)=cp.$$

Mivel p osztója $cp=(a+c)(b+c)$-nek és p prím, azért p osztója az $(a+c)$ és $(b+c)$ valamelyikének; az általánosság sérelme nélkül feltehető, hogy például $p\mid a+c$. Ekkor nyilván $p\leqslant a+c$, így

$$c=\frac{(a+c)(b+c)}{p}\geqslant b+c.$$

Ez azt jelenti, hogy $b\leqslant 0$, ami ellentmondás. A feladat követelményeinek eleget tevő pozitív egészek tehát nem léteznek.

163 dolgozat érkezett. 6 pontos Gelencsér Gábor megoldása. 5 pontos 72, 4 pontos 9, 3 pontos 1, 2 pontos 2, 0 pontos 74 dolgozat. Nem versenyszerű 4.

Gy. 3199. *Oldjuk meg az egész számok körében az*

$$1996x+1998y+1=xy$$

egyenletet.

Ír versenyfeladat

Megoldás. Vegyük észre, hogy

$$1996\cdot 1998=(1997-1)(1997+1)=1997^2-1=3\ 998\ 008.$$

A feladat egyenlete átrendezés és szorzattá alakítás után:

$$(x-1998)(y-1996)=1997^2.$$

Mivel 1997 prímszám, azért az 1997^2 csak a következő 6-féle módon áll elő két egész szám szorzataként:

$x-1998=1$,	$y-1996=1997^2$,	tehát	$x=1999$,	$y=3\,990\,005$;
$x-1998=1997$,	$y-1996=1997$,	tehát	$x=3995$,	$y=3993$;
$x-1998=1997^2$,	$y-1996=1$,	tehát	$x=3\,990\,007$,	$y=1997$;
$x-1998=-1$,	$y-1996=-1997^2$,	tehát	$x=1997$,	$y=-3\,986\,013$;
$x-1998=-1997$,	$y-1996=-1997$,	tehát	$x=1$,	$y=-1$;
$x-1998=-1997^2$,	$y-1996=-1$,	tehát	$x=-3\,986\,001$,	$y=1995$.

Ezzel a feladatot megoldottuk.

Szilasi Zoltán (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 9. o.t.)

Megjegyzés. Kiss Gergely (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t.) a fentiekhez hasonlóan általában a

$$k(a-b)x+k(a+b)y+b^2=k^2xy$$

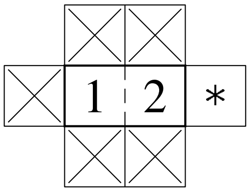
alakú egyenleteket is vizsgálta. Ebből a feladat közvetlen általánosítását az a típus adja, ahol $k=1$, az a paraméter pedig prím.

225 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Kiss 345 Gergely és Máthé András, 5 pontot Árvay Eszter, Babos Attila, Csikvári Péter, Gelencsér Gábor, Győri Nikolett, Harangi Viktor, Keszegh Balázs, Németh 555 Lajos, Pogátsa Attila, Powell Pál, Pozsár Balázs, Szentes Szilvia, Szilágyi Tamás, Szilasi Zoltán, Tóth 013 Zoltán, Tran Thanh Long és Wéber Zoltán. 4 pontos 85, 3 pontos 63, 2 pontos 35, 1 pontos 4, 0 pontos 13 dolgozat. Nem versenyszerű (másolt) 6.

Gy. 3201. *Egy* 9×9*-es sakktáblát lefedtünk* 1×2*-es dominókkal úgy, hogy valamelyik sarka üresen maradt. Bizonyítsuk be, hogy a táblán a dominókat tologatva az üres mező bármelyik sarokba „átvihető”.* (**H**)

Megoldás. 9×9-es helyett általában olyan „sakktáblán” bizonyítjuk az állítást, amelynek oldalai (a mezők élhosszában mérve) páratlan hosszúságúak. Vezessünk be egy a sakkjátékban használatoshoz hasonló koordinátarendszert a tábla mezőinek jelölésére; eszerint a „bal alsó” mező koordinátái $(1,1)$, az eggyel fölötte levőé $(1,2)$ stb.

Szemeljük ki az egyik lefedő dominót, és jelöljük a két négyzetét 1-gyel és 2-vel (*1. ábra*). Az ábrán $*$-gal jelöltük meg azt a dominónkkal élszomszédos egyetlen mezőt, amelynek az 1-es mezővel nincs közös csúcsa. Ha ez nem éppen az üres sarok, akkor őt pontosan egy dominó fedi le. Nevezzük ezt a kiszemelt dominó rákövetkezőjének, és számozzuk a $*$-gal jelölt mezőjét 1-gyel, a másikat 2-vel.

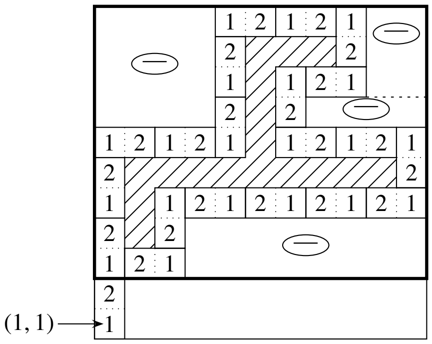


1. ábra

(1) A továbbiakban megmutatjuk, hogy ha egy olyan dominót szemelünk ki, amely a tábla egyik sarkát – pl. az $(1,1)$ koordinátájút – fedi le, és a saroknál lévő mezője az 1-es, akkor képezve ennek rákövetkezőjét, a rákövetkező rákövetkezőjét stb., végül az üres sarok lesz az eljárásban $*$-gal jelölendő mező, amelynél a dominók eme sorozatának képzése szükségképpen megakad.

Ha állításunkkal szemben nem ez a helyzet, akkor a láncban mindegyik dominónak van rákövetkezője, és egyszer olyan dominót kapunk rákövetkezőként, amely már korábban előfordult a sorozatban; a *2. ábra* ábrázolja azt a helyzetet, amikor ez az ismétlődés először bekövetkezik.

A rákövetkezési sorrendben „kört” alkotó dominókból álló alakzatot foglaljuk bele abba a legkisebb téglalapba, amelynek oldalai az eredeti tábla éleivel párhuzamosak (az ábrán ez a vastag vonallal határolt téglalap).



2. ábra

Mivel a dominók részeinek számozása összhangban van a sakktábla szokásos színezésével (pl. az 1-es mezők mindig fehérek, a 2-esek pedig feketék), azért az ábrából látható, hogy a befoglaló téglalap mindkét oldala páratlan hosszúságú, ezért a – mezőkben mért – területe páratlan. Ebből a területből kivonva a $\ominus$ jellel ellátott téglalapok összterületét, a dominók által közrezárt területhez jutunk. Világos, hogy a dominók páros mérőszámú területet fednek le, hiszen mindegyik dominó területe 2 egység. Látható továbbá, hogy a dominók alkotta „töröttvonal” töréspontjai mindig 1-es jelű mezőben vannak, ezért a levonandó téglalapok területe páros (szemköztes csúcsaik azonos színűek). Ezzel azt kaptuk, hogy a dominókör által bekerített (az ábrán vonalkázással jelölt) rész páratlan sok mezőt tartalmaz. Így lennie kell a bekerített részen olyan mezőnek, amelyet nem fed le dominó. Ez azonban lehetetlen, mivel mindegyik belső mező le van fedve (egyedül az egyik sarok fedetlen). Az (1) állítást ezzel igazoltuk.

Jelölje ezután $D_1, D_2, \ldots, D_t$ azt a dominósorozatot, amelyben D_1 1-es mezője az $(1,1)$ sarok, D_i rákövetkezője D_{i+1} $(i=1, 2, \ldots, t-1)$, és D_t-nek nem létezik rákövetkezője, azaz (az 1. ábra jelöléseivel) D_t 2-es jelű mezőjének $*$-gal jelölendő élmenti szomszédja a tábla egyetlen fedetlen sarokmezője. Így D_t eltolható úgy, hogy az eredetileg D_t által lefedett 1-es mező legyen üres. Az eljárást ezzel az üres mezővel és D_{t-1}-gyel folytatjuk, s.í.t.; végül $(1,1)$ lesz fedetlen.

Máthé András (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gimn., 10. o.t.)

64 dolgozat érkezett. 7 pontot kapott Bárány Kristóf, Juhász András, Keszegh Balázs, Kunszenti-Kovács Dávid, Máthé András, Terpai Tamás és Végh A. László. 6 pontot Devecsery András, Gyenes Zoltán, Harangi Viktor és Varjú Péter. 5 pontot Fehér Lajos Károly, Gelencsér Gábor, Győri Nikolett, Kiss 345 Gergely, Papp Dávid, Pesti Gábor, Szabadka Zoltán, Szabó 997 Péter, Székelyhidi Gábor és Tóth 370 Ágnes. 4 pontos 3, 3 pontos 5, 2 pontos 4, 1 pontos 11, 0 pontos 20 dolgozat.

Matematika feladatok megoldásai

F. 3196. *Legyen az a_n sorozat a következő:*

$$a_0=1, \quad a_{n+1}=\sin a_n \qquad n=0, 1, 2, \ldots$$

Mutassuk meg, hogy az na_n^2 sorozat korlátos.

Megoldás. Először belátjuk, hogy $\cos x < \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Mivel $0 < x < \frac{\pi}{2}$ esetén $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, azért

$$\cos x \cdot \sqrt{1+x^2} < \cos x \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1,$$

tehát valóban $\cos x < \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Ezek után n-re vonatkozó indukcióval igazoljuk, hogy amennyiben $n \geqslant 1$, akkor $0 < a_n < 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{n}}$.

$n = 1$ esetén: $0 < a_1 = \sin 1 \leqslant 1 < 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{1}} = 2$. $n = 2$-re $0 < \sin(\sin 1) < 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

Legyen $k \geqslant 2$, és tegyük fel, hogy k-ig minden természetes számra igaz a fenti állítás.

Nyilván $\sin a_k < \sin 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{k}}$, mivel $a_k < 2\sqrt{\frac{1}{k}}$, a szinuszfüggvény szigorúan monoton növekvő a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban, végül $0 < a_k < 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{k}} < \frac{\pi}{2}$. Felhasználva a $\sin x < x$ és a $\cos x < \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ egyenlőtlenségeket, kapjuk, hogy:

$$0 < a_{k+1} = \sin a_k < \sin 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{k}} = 2 \sin \sqrt{\frac{1}{k}} \cos \sqrt{\frac{1}{k}} < 2\sqrt{\frac{1}{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{k}}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Vagyis, ha $n = k$ esetén igaz az állítás, akkor $n = k+1$ esetén is. Így minden $n > 1$-re $0 < a_n < 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{n}}$. Ebből $0 < na_n^2 < 4$, az na_n^2 sorozat tehát valóban korlátos.

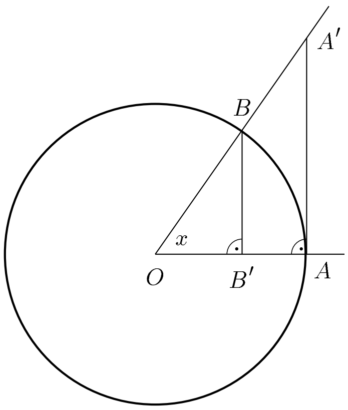
Megjegyzések. 1. A megoldás során nem bizonyítottuk a $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ egyenlőtlenséget. Ez persze csak akkor áll fenn, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Vegyük az egységsugarú kört és benne az x nagyságú középponti szöget.

Használjuk az *ábra* jelöléseit: az AB körív hossza x, $BB' = \sin x$, $AA' = \operatorname{tg} x$. Az AB körív hosszabb, mint az AB szakasz. Így $AB > BB'$ miatt $x > \sin x$. Az AOA' háromszög területe nagyobb, mint az AOB körcikk területe. Tehát:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{2} = \frac{OA \cdot AA'}{2} > \frac{AO^2 \cdot AOB\sphericalangle}{2} = \frac{x}{2}.$$

Összefoglalva: $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.



2. Körülményesebb úton a talált felső korlát javítható. Többen igazolták, hogy $0 < na_n^2 < 3$ is teljesül.

Hegedűs Péter (Miskolc, Földes F. Gimn., 11. o.t.) amellett, hogy bebizonyította az élesített egyenlőtlenséget, felhívta figyelmünket, hogy *Pólya György–Szegő Gábor:* Feladatok és tételek az analízis köréből I. című könyvében (Tankönyvkiadó, 1980) a II. fejezet 173. feladata szerint, ha $\sin x > 0$, akkor a $\sin_1 x = \sin x$, $\sin_n x = \sin(\sin_{n-1} x)$ iterációval megadott sorozatra

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{3}} \sin_n x = 1.$$

Eszerint a feladatban megadott na_n^2 sorozat nemcsak korlátos, hanem konvergens is, és a határértéke 3. Ez pedig azt jelenti, hogy ez a felső korlát már nem javítható tovább.

39 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Hegedűs 396 Péter, 5 pontos Bárány Kristóf, Barát Anna, Bíró Zsuzsanna, Dályay Virág, Gueth Krisztián, Gyenes Zoltán, Hartmann Miklós, Juhász András, Léka Zoltán, Lippner Gábor, Lukács László, Mansur Boase, Pataki Péter, Pogány Ádám, Terpai Tamás, Vaik Zsuzsanna és Végh A. László megoldása. 4 pontot kapott 5, 3 pontot 2, 2 pontot 3, 1 pontot 5, 0 pontot 6 dolgozat.

F. 3202. *Legyen n prímtényezős felbontása $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t}$. Jelölje $r_1, r_2, \ldots, r_m$ azokat az n-nél kisebb pozitív egész számokat, amelyek n-hez relatív prímek. Mutassuk meg, hogy*

$$r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_m^2 = \frac{m}{3}\left(n^2 + \frac{1}{2}(-1)^t p_1 p_2 \ldots p_t\right).$$

Megoldás. Az $N^* = r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_m^2$ kifejezés értékét a logikai szita formula segítségével fogjuk meghatározni, azaz 1-től n-ig összeadjuk az egész számok négyzeteit, majd kivonjuk azon számok négyzeteit, amelyeknek van közös osztójuk n-nel. Ha k az n osztója, akkor jelölje $N(k)$ az n-nél nem nagyobb, k-val osztható pozitív egész számok négyzetösszegét. Ekkor a logikai szita formula szerint

$$N^* = N(1) - N(p_1) - N(p_2) - \ldots - N(p_t) + N(p_1p_2) + \ldots + N(p_{t-1}p_t) -$$
$$- N(p_1p_2p_3) - \ldots - N(p_{t-2}p_{t-1}p_t) + \ldots + (-1)^t N(p_1p_2\ldots p_t).$$

Felhasználva az ismert

$$N(k) = k^2 + (2k)^2 + \ldots + n^2 = k^2\left(1^2 + 2^2 + \ldots + \left(\frac{n}{k}\right)^2\right) =$$
$$= k^2 \cdot \frac{\frac{n}{k}\left(\frac{n}{k}+1\right)\left(2\cdot\frac{n}{k}+1\right)}{6} = \frac{n^3}{3k} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}k$$

egyenlőséget, kapjuk, hogy

$$N^* = \frac{n^3}{3}\left(1 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} - \ldots - \frac{1}{p_t} + \frac{1}{p_1p_2} \ldots + \frac{1}{p_{t-1}p_t} -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{p_1p_2p_3} - \ldots - \frac{1}{p_{t-2}p_{t-1}p_t} + \ldots + (-1)^t \frac{1}{p_1p_2\ldots p_t}\right) +$$
$$+ \frac{n^2}{2}\left(1 - \binom{t}{1} + \binom{t}{2} - \binom{t}{3} + \ldots + (-t)^t \binom{t}{t}\right) + \frac{n}{6}(1 - p_1 - p_2 - \ldots - p_t) +$$
$$\left. + p_1p_2 + \ldots + p_{t-1}t_t - p_1p_2p_3 - \ldots - p_{t-2}p_{t-1}t_p + \ldots + (-1)^t(p_1p_2\ldots p_t)\right).$$

A binomiális tétel szerint:

$$1-\binom{t}{1}+\binom{t}{2}-\binom{t}{3}+\ldots+(-1)^t\binom{t}{t}=0,$$

tehát az n-ben másodfokú tag együtthatója 0. Az n-ben harmad-, illetve elsőfokú tagok együtthatója szorzattá alakítható, és így:

$$N^*=\frac{n^3}{3}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_t}\right)+\frac{n}{6}(1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_t)=$$

$$=\frac{n}{3}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_t}\right)\left(n^2+\frac{1}{2}(-1)^t p_1p_2\ldots p_t\right).$$

Ismert összefüggés, hogy $m=\varphi(n)=n\left(1-\dfrac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{p_t}\right)$. Ebből

$$N^*=\frac{m}{3}\left(n^2+\frac{1}{2}(-1)^t p_1p_2\ldots p_t\right)$$

valóban.

29 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Devecsery András, Gáli Gergely, Gerbicz Róbert, Gueth Krisztián, Gyenes Zoltán, Juhász András, Léka Zoltán, Lippner Gábor, Mansur Boase, Mecz Balázs, Papp Dávid, Pataki Péter, Pogány Ádám, Szabadka Zoltán, Székelyhidi Gábor, Terpai Tamás, Végh A. László, Zábrádi Gergely és Zawadowski Ádám. 4 pontos 1, 3 pontos 1, 2 pontos 3, 5 pontos 5 dolgozat.

F. 3208. *Tegyük fel, hogy az x, y, z pozitív számokra*

$$x^2+xy+y^2=9,\qquad y^2+yz+z^2=16,\qquad z^2+zx+x^2=25.$$

Határozzuk meg $xy+yz+zx$ értékét.

Javasolta: *Horváth Gábor,* Debrecen

Megoldás. Alakítsuk át a feladat feltételeit:

$$3^2=x^2+y^2-2xy\cos 120^\circ,$$
$$4^2=y^2+z^2-2yz\cos 120^\circ,$$
$$5^2=z^2+x^2-2zx\cos 120^\circ.$$

Ha felveszünk egy ABC háromszöget $AB=3$, $BC=4$ és $AC=5$ oldalakkal, akkor Pitagorasz tételének megfordítása alapján ez a háromszög derékszögű. Létezik tehát a P izogonális pontja. (P akkor és csak akkor izogonális pontja az ABC háromszögnek, ha $APB\sphericalangle=BPC\sphericalangle=CPA\sphericalangle=120^\circ$.)

Vegyük észre, hogy ha $AP=x$, $BP=y$ és $CP=z$, akkor a három feltétel megegyezik az ABP, BCP és CAP háromszögekre felírt koszinusztételekkel. Mivel azonos koszinusztételek csak egybevágó háromszögekre írhatók fel, és a fentiekben láttunk a háromszög létezésére egy példát, azért az egyenletrendszer megoldásai: AP, BP, CP.

Ekkor:

$$6=\frac{3\cdot 4}{2}=T_{ABC}=T_{APB}+T_{BPC}+T_{CPA}=$$
$$=\frac{xy\sin 120^\circ}{2}+\frac{yz\sin 120^\circ}{2}+\frac{zx\sin 120^\circ}{2}.$$

$\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ miatt tehát

$$xy+yz+zx=8\sqrt{3}.$$

Gyenes Zoltán (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gimn., 10. o.t.) és
Horváth Gábor (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

83 dolgozat érkezett. 5 pontos 38, 4 pontos 22, 3 pontos 10, 2 pontos 4, 0 pontos 9 dolgozat.

F. 3216. *Igaz-e minden n természetes számra a*

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\ldots\sqrt{n}}}}<3$$

egyenlőtlenség?

Javasolta: *Róka Sándor,* Nyíregyháza

Megoldás. Ha $n\geqslant 2$, akkor rögzítsük az n értékét, és tekintsük az alábbi sorozatot:

$$a_n=\sqrt{n},\quad a_{n-1}=\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}=\sqrt{(n-1)a_n},\ \ldots,\ a_k=\sqrt{ka_{k+1}},\ \ldots,\ a_2=\sqrt{2a_3}.$$

A feladat kérdése az, hogy $a_2<3$ igaz-e. Általánosabban bizonyítjuk, hogy ha $n\geqslant 2$, akkor $a_k<k+1$, ha $k=2,3,\ldots,n$.

Ezt $k=n$-ről indulva – ekkor $a_n=\sqrt{n}<n+1$ nyilvánvaló – a k csökkenő értékeire vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk, azaz megmutatjuk, hogy ha $a_k<k+1$, akkor $a_{k-1}<k$.

Valóban, $a_{k-1}=\sqrt{(k-1)a_k}<\sqrt{(k-1)(k+1)}=\sqrt{k^2-1}<\sqrt{k^2}=k$. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Hartmann Miklós Bonyhád, Petőfi S. Gimn., 12. o.t.)

Megjegyzések. 1. *Biró Márton* (Sepsiszentgyörgy, Székely Mikó Koll., 10. o.t.) megmutatta, hogy ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív tagú növekvő számtani sorozat, akkor

$$\sqrt{a_1\sqrt{a_2\ldots\sqrt{a_n}}}<a_2$$

minden n-re.

2. *Less Áron* (Miskolc, Földes F,. Gimn., 12. o.t.) a kitűzöttnél erősebb

$$\sqrt{2\sqrt{3}\sqrt{4\ldots\sqrt{n}}}<3^{\frac{-1}{2^{n-1}}}\left(3-\frac{n-1}{2^{n-1}}\right)$$

állítást igazolta.

72 dolgozat érkezett. 6 pontos Bíró Márton, Hegedűs 396 Péter, Homolya Dániel, Less Áron, Máthé András és Páles Csaba megoldása. 5 pontos 34, 4 pontos 11, 3 pontos 4, 2 pontos 8, 1 pontos 4, 0 pontos 5 dolgozat.

F. 3220. *Egy téglalap alakú mezőt az oldalaival párhuzamos egyenesek segítségével* 100 *db egybevágó téglalap alakú parcellára osztottunk úgy, hogy a szomszédos parcelláknak az egyik oldala közös. Kezdetben a mezőn* 9 *parcella gazos volt. Egy parcella elgazosodik, ha legalább két szomszédja gazos. Lehetséges-e, hogy előbb-utóbb az egész mező elgazosodik?*

Megoldás. Nem lehetséges. Tekintsük ugyanis a gazos paracellák „szabad” oldalait, vagyis azokat, amelyekhez nem kapcsolódik gazos parcella. A gazosodás során ezek száma nem növekedhet, egy új gazos parcella létrejöttekor ugyanis legalább két szabad oldal megszűnik, és helyette legfeljebb két új szabad oldal keletkezik.

A kezdőállapotban legfeljebb $9\cdot 4$ szabad oldal van. Ha az egész mező elgazosodna, $2(a+b)$ szabad oldal lenne, ahol a téglalap alakú mező egyik, illetve másik oldala a, illetve b részre van osztva; tehát $ab=100$. A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség szerint $2(a+b)\geqslant 4\sqrt{ab}=4\cdot 10$. Ez bizonyítja állításunkat, mivel $4\cdot 9<4\cdot 10\leqslant 2(a+b)$.

Gyenes Zoltán (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Látható, hogy 10 gazos parcella esetén már megtörténhet, hogy az egész mező elgazosodik; ehhez elegendő, ha kezdetben az „átló” mentén elhelyezkedő tíz parcella gazos.

102 dolgozat érkezett. 6 pontos Végh A. László megoldása, 5 pontot kapott 32, 4 pontot 7, 3 pontot 2, 2 pontot 2, 1 pontot 13, 0 pontot 45 beküldő.

F. 3227. *Milyen m értékek mellett osztható az*

$$x^m+y^m+z^m-(x+y+z)^m$$

polinom az $(y+z)(z+x)(x+y)$ polinommal?

I. megoldás. Legyen $a=x+y$, $b=z+x$, $c=y+z$. Ekkor $x+y+z=\dfrac{a+b+c}{2}$, $x=\dfrac{-a+b+c}{2}$, $y=\dfrac{a-b+x}{2}$, $z=\dfrac{a+b-c}{2}$, a feladat kérdése pedig a következőképpen módosul: milyen m értékek mellett osztható a

$$p(a,b,c)=\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)^m+\left(\frac{a-b+c}{2}\right)^m+\left(\frac{a+b-c}{2}\right)^m-\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^m$$

polinom abc-vel.

A zárójeleket felbontva, a polinomiális tétel szerint adódik, hogy

$$p(a,b,c)=\frac{1}{2^m}\Bigg[\sum_{p+q+r=m}\frac{m!}{p!q!r!}(-a)^pb^qc^r+\sum_{p+q+r=m}\frac{m!}{p!q!r!}a^p(-b)^qc^r+$$
$$+\sum_{p+q+r=m}\frac{m!}{p!q!r!}a^pb^q(-c)^r-\sum_{p+q+r=mp!q!r!}\frac{m!}{p!q!r!}a^pb^qc^r\Bigg]$$

Ebben a polinomban az abc-vel való oszthatóság szempontjából elég azokat a tagokat tekinteni, ahol a p, q, r kitevők valamelyike 0. Nézzük mondjuk azoknak a tagoknak az összegét, ahol $r=0$:

$$\frac{1}{2^m}\left[\sum_{p+q=m}\frac{m!}{p!q!}(-a)^p b^q+\sum_{p+q=m}\frac{m!}{p!q!}a^p(-b)^q+\sum_{p+q=m}\frac{m!}{p!q!}a^p b^q-\sum_{p+q=m}\frac{m!}{p!q!}a^p b^q\right]=$$
$$=\frac{1}{2^m}\left[\sum_{p+q=m}\frac{m!}{p!q!}(-a)^p b^q+\sum_{p+q=m}\frac{m!}{p!q!}a^p(-b)^q\right].$$

A binomiális tétel szerint ez éppen

$$\frac{1}{2^m}[(b-a)^m+(a-b)^m].$$

Hasonló mondható el $p=0$ és $q=0$ esetén is. Így azon tagok összege, amelyekben p, q, r valamelyike (legalább egy és legfeljebb kettő) nulla:

$$\frac{1}{2^m}[(b-a)^m+(a-b)^m+(c-a)^m+(a-c)^m+(c-b)^m+(b-c)^m]-$$
$$-\frac{1}{2^m}[(a^m+b^m+c^m)-(a^m+b^m+c^m)].$$

Összefoglalva: az $x^m+y^m+z^m-(z+y+z)^m$ polinom akkor és csak akkor osztható az $(x+y)(y+z)(z+x)$ polinommal, ha a

$$(b-a)^m+(a-b)^m+(b-c)^m+(c-b)^m+(a-c)^m+(c-a)^m$$

polinom osztható abc-vel.

Ez végül pontosan akkor teljesül, ha m páratlan.

Megjegyzés. A megoldók többsége szimmetrikus polinomokat használt.

II. megoldás. Felhasználjuk, hogy a háromváltozós polinomok körében (is) teljesül a számelmélet alaptételének megfelelője. Ennek következményeként egy polinom pontosan akkor osztható $(y+z)(z+x)(x+y)$-nal, ha az $(y+z)$, $(z+x)$, $(x+y)$ tényezők bármelyikével osztható. Ezek ugyanis egymáshoz páronként relatív prímek, ami azt jelenti, hogy a nemnulla konstans polinomokon kívül nincs más közös osztójuk. A kifejezés szimmetrikus x, y, z-ben, így elegendő pl. az $(x+y)$-nal való oszthatóságot vizsgálni. Mivel

$$x^m+y^m+z^m-(x+y+z)^m=x^m+y^m-\sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}(x+y)^i z^{m-i},$$

a kérdés x^m+y^m-nek az $(x+y)$-nal való oszthatóságára egyszerűsödik. Itt pedig

$$x^m+y^m=$$
$$=(x+y)\left(x^{m-1}-x^{m-2}y+x^{m-3}y^2-+\ldots+(-1)^{m-1}y^{m-1}\right)+\left(y^m-(-1)^{m-1}y^m\right)$$

mutatja, hogy az oszthatóság akkor következik be, ha $y^m-(-1)^{m-1}y^m=(1+(-1)^m)y^m$ osztható $(x+y)$-nal, vagyis ha m páratlan.

50 dolgozat érkezett. 5 pontos Bujdosó Attila, Devecsery András, Gáspár Merse Előd, Gyenes Zoltán, Harangi Viktor, Lippner Gábor, Pap Júlia, Pataki Péter, Pogány Ádám, Poronyi Gábor, Szabó 130 Gábor, Szabó 997 Péter, Terpai Tamás, Tisch Dávid és Végh A. László megoldása. 4 pontot kapott 23, 3 pontot 8, 2 pontot 1, 1 pontot 3 beküldő.

F. 3232. *Keressük meg az*

$$\frac{x}{y}=\frac{\left(x^2-y^2\right)^{\frac{y}{x}}+1}{\left(x^2-y^2\right)^{\frac{y}{x}}-1} \tag{1}$$

egyenlet pozitív egész megoldásait.

Javasolta: *Bencze Mihály,* Brassó

I. megoldás. Az (1) kifejezésben egyik tört nevezője sem lehet 0-val egyenlő, így $x^2-y^2\neq 1$. Végezzük el a következő ekvivalens átalakításokat:

$$\begin{gathered}
\frac{x}{y}=\frac{(x^2-y^2)^{\frac{y}{x}}+1}{(x^2-y^2)^{\frac{y}{x}}-1},\\
x(x^2-y^2)^{\frac{y}{x}}-x=y(x^2-y^2)^{\frac{y}{x}}+y,\\
(x-y)(x^2-y^2)^{\frac{y}{x}}=x+y,\\
(x-y)^x(x^2-y^2)^y=(x+y)^x,\\
(x-y)^x(x-y)^y(x+y)^y=(x+y)^x,\\
(x-y)^{x+y}=(x+y)^{x-y}.
\end{gathered}$$

Vezessük be az $a=x+y$ és $b=x-y$ jelöléseket. Ekkor $b^a=a^b$, ahol $a>b$, mivel y pozitív. Az a-val együtt b is pozitív, mert $a=x+y>0$, és ha b negatív lenne, akkor a bal oldal abszolút értéke nagyobb volna 1-nél, míg a jobb oldal abszolút értéke kisebb. Ha $b=0$, akkor $x=y$ miatt $\frac{x}{y}\neq\frac{(x^2-y^2)^{\frac{y}{x}}+1}{(x^2-y^2)^{\frac{y}{x}}-1}$.

Legyen $(a,b)=d$. Ekkor léteznek olyan a_1, b_1 pozitív egészek, amelyekre $a=a_1d$, $b=b_1d$ és $(a_1,b_1)=1$. Azaz $(db_1)^{da_1}=(da_1)^{db_1}$.

Mivel a_1, b_1, d_1 pozitív egészek: $d^{a_1}\cdot b_1^{a_1}=d^{b_1}\cdot a_1^{b_1}$. $a>b$ alapján $a_1>b_1$. Tehát

$$d^{a_1-b_1}b_1^{a_1}=a_1^{b_1}.$$

Mindkét oldalon pozitív egészek állnak és $(a_1,b_1)=1$, vagyis az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $b_1=1$. Így $d^{a_1-1}=a_1$, ahol $d\neq 1$, ugyanis az ellenkező esetben $a=b=1$, de mint tudjuk, $a>b$. Feltehető tehát, hogy $d\geqslant 2$. Használjuk fel a következő becslést:

$$d^{a_1-a}\geqslant 2^{a_1-1}\geqslant a_1.$$

Ebből $d=2$ azonnal adódik. $2^{a_1-1}=a_1$ könnyen ellenőrizhetően akkor áll fenn, ha a_1 értéke 1 vagy 2. Ha $a_1=1$, úgy $a=b=2$, ami nem megoldása a feladatnak. Ha $a_1=2$, úgy $a=4$ és $b=2$, amiből $x=3$ és $y=1$ következik. Ezek kielégítik a feladat feltételeit. Tehát az egyedüli megoldás $x=3$ és $y=1$.

Léka Zoltán (Makó, József Attila Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

II. megoldás. Akárcsak az előző megoldásban, most is az $a^b=b^a$ egyenletre vezetjük vissza a feladatot. Ebből:

$$\sqrt[a]{a}=\sqrt[b]{b}.$$

A kérdést tehát a következőképpen fogalmazhatjuk át: Létezik-e pozitív egészeken értelmezett $n\to\sqrt[n]{n}$ függvénynek két olyan értéke, amelyek egyenlők egymással? Ha $n\geqslant 5$, akkor $\sqrt[n]{n}>1$ és a függvény szigorúan monoton csökken, hiszen

$$n\geqslant 4>e=2{,}71\ldots>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{miatt} \qquad n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

Így $n^{n+1}>(n+1)^n$, tehát $\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1}$.

Ezek szerint, ha $n\geqslant 5$, akkor a függvény összes értéke különböző, és

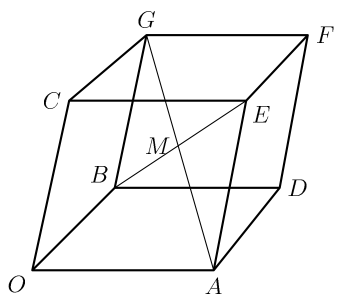
$$1<\sqrt[n]{n}\leqslant\sqrt[5]{5}<\min\{\sqrt[n]{n}\,:\,n\in\{2,3,4\}\}.$$

$1\leqslant n\leqslant 4$ esetén $\sqrt[4]{4}=\sqrt[2]{2}$ adódik, amiből egyedüli megoldásként $x=3$ és $y=1$.

Zombori Tamás (Budapest, Toldy F. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

60 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Barát Anna, 5 pontot Bíró Márton, Gáspár Merse Előd, Harangi Viktor, Hegedűs 396 Péter, Hermann György, Horváth 202 Gábor, Horváth 472 András, Juhász András, Kunszenti-Kovács Dávid, Kutalik Péter, Léka Zoltán, Lippner Gábor, Lovas Róbert, Máthé András, Pataki Péter, Sidó Péter, Szabadka Zoltán, Terpai Tamás, Vaik István, Végh A. László és Zombori Tamás. 4 pontos 11, 3 pontos 20, 2 pontos 2, 1 pontos 1, 0 pontos 4 dolgozat.

F. 3237. *Mutassuk meg, hogy ha egy négyszög alapú hasáb testátlói egy ponton mennek át, akkor a hasáb paralelepipedon.*



Megoldás. Jelöljük a hasáb csúcsait az *ábrán* látható módon O, A, B, C, D, E, F, G-vel. Legyen $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$ és $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$. Ekkor $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ lineárisan független vektorok. Mivel a D csúcs az OAB síkban van, azért vannak olyan 0-tól különböző x, y számok, amelyekre $\overrightarrow{OD}=x\mathbf{a}+y\mathbf{b}$. A hasáb tulajdonságaiból következik, hogy $\overrightarrow{OE}=\mathbf{a}+\mathbf{c}$, $\overrightarrow{OG}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$ és $\overrightarrow{OF}=x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+\mathbf{c}$.

Ismert, hogy ha az O-ból egy KL szakasz végpontjaiba mutató vektorok $\mathbf{k}$ és $\mathbf{l}$, akkor a szakasz tetszőleges N pontja esetén az $\overrightarrow{ON}$ vektor felírható $\alpha\mathbf{k}+(1-\alpha)\mathbf{l}$ alakban, ahol α 0 és 1 közti valós szám. Legyen a hasáb testátlóinak metszéspontja M. Mivel M rajta van az AG átlón, azért van olyan β szám, amelyre

$$\overrightarrow{OM}=\beta\cdot\overrightarrow{OA}+(1-\beta)\overrightarrow{OG}=\beta\cdot\mathbf{a}+(1-\beta)(\mathbf{b}+\mathbf{c}). \tag{1}$$

De M rajta van a BE és az OF átlókon is, ezért vannak olyan γ és δ számok, amelyekre

$$\overrightarrow{OM}=\gamma\cdot\overrightarrow{OB}+(1-\gamma)\overrightarrow{OE}=(1-\gamma)\mathbf{a}+\gamma\mathbf{b}+(1-\gamma)\mathbf{c} \qquad \text{és} \tag{2}$$

$$\overrightarrow{OM}=\delta\cdot\overrightarrow{OF}=\delta(x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+\mathbf{c}). \tag{3}$$

Az $\overrightarrow{OM}$-et viszont egyértelműen lehet felírni a lineárisan független **a**, **b** és **c** vektorok kombinációjaként, azért az (1), (2) és (3) egyenletekben **a**, **b**, illetve **c** együtthatói rendre ugyanazok a valós számok lesznek; tehát

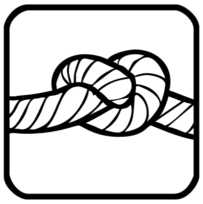
$$\begin{aligned} \beta = 1-\gamma &= \delta\cdot x, \\ 1-\beta=\gamma &= \delta\cdot y, \\ 1-\beta = 1-\gamma &= \delta. \end{aligned}$$

Ezen egyenletekből nyilvánvalóan következik, hogy $x=y=1$, azaz $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, ami azt jelenti, hogy a hasáb alaplapja paralelogramma, tehát a hasáb paralelepipedon.

Székelyhidi Gábor (Kuwait, New English School, 11. o.t.) dolgozata alapján

49 dolgozat érkezett. 5 pontos 47, 4 pontos 1, 0 pontos 1.

A pontversenyben kitűzött C gyakorlatok (525–528.)



C. 525. A „marslakóknál” egy év hossza 687 nap. A hónapok marslakó-emlékezet óta 26 és 29 naposak. A Mindenáron Újítók azt javasolják, hogy térjenek át 27 és 31 napos hónapokra. A Nyírbálók támogatásával ezt el is fogadtatják, akik azt remélik, hogy ilymódon a hónapok számát (és ezáltal a béreket is) csökkenteni lehet. Nyélbeüthető-e Nyírbálóék elképzelése?

C. 526. Hány olyan 9-cel osztható 7-jegyű szám van, amelynek utolsó előtti számjegye 5?

C. 527. Egy trapéz alakú tó párhuzamos partszakaszai 200 m és 100 m hosszúak, a másik két partvonal hajlásszöge ezekhez 90° és 45°. A tavat két őr járja körbe azonos irányban és tempóban úgy, hogy a tó kerülete mentén a két körüljárási irányban egyenlő távolságot tartanak egymástól. Mekkora a két őr legnagyobb távolsága légvonalban?

C. 528. Adott a térben három, egy ponton átmenő, egymásra páronként merőleges egyenes. Elhelyezhető-e egy tetszőleges hegyesszögű háromszög úgy, hogy mindegyik egyenesre essen csúcspontja?

❄

Beküldési határidő: 1999. február 15.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest, Pf. 47. 1255

❄

Általános iskolásoknak javasolt feladatok: **C. 525, C. 528, Gy. 3246, Gy. 3252.**

A pontversenyben kitűzött gyakorlatok (3246–3253.) és feladatok (3262–3267.)

Gy. 3246. Két játékos a következő játékot játssza egy $n \times n$-es sakktáblán. Minden mezőn egy korong van elhelyezve, amelynek egyik oldala piros, a másik kék. A játékosok felváltva lépnek. Aki éppen lép, kiválaszt egy kék korongot, és abban a téglalapban, amelynek bal felső sarka a kiválasztott korong, jobb alsó sarka az egész tábla jobb alsó sarka, minden egyes korongot megfordít. Az veszít, aki nem tud lépni.

Melyek azok a kiinduló helyzetek, amelyekben a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája?

Gy. 3247. Melyik szám nagyobb,

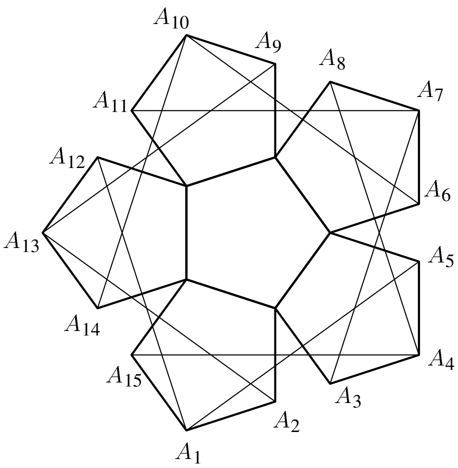
$$1997^{1998^{1999}} \qquad \text{vagy} \qquad 1999^{1998^{1997}}?$$

Gy. 3248. Jelöljön p tetszőleges prímszámot. Keressük meg a

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{p}$$

egyenlet összes nem negatív egész megoldását.

Gy. 3249. Adott $2n+1$ pozitív páratlan szám, amelyek egyike sem nagyobb, mint $6n$. Bizonyítandó, hogy a számok közül valamelyik osztója egy másiknak. (**H**)



Gy. 3250. Szabályos ötszögekből egy virágot készítettünk. Az ötszögek csúcsait összekötő szakaszok közül tízet az ábrán látható módon megrajzoltunk. Bizonyítsuk be, hogy az általuk meghatározott tízszög szabályos.

Gy. 3251. Egy háromszög a, b, c oldalaival szemközti szögei 55, 15 és 110 fokosak. Bizonyítsuk be, hogy $c^2-a^2=ab$.

Gy. 3252. Tekintsük a térnek azon pontjait, amelyeknek mindhárom koordinátája n-nél nem nagyobb pozitív egész szám. Hány olyan egyenes található, amely ezek közül n pontra illeszkedik?

Gy. 3253. Egy szabályos hatszög keresztmetszetű ceruza lapjai felváltva kék és fehér színűek. Igaz-e, hogy ha „messziről” nézzük a ceruzát, akkor „ugyanannyi” fehéret és kéket látunk? (**H**)

Javasolta: *Csóka Endre,* Debrecen

Beküldési határidő: 1999. február 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

F. 3262. Bizonyítsuk be, hogy a $2^{2^{1999}}-1$ számnak van 1999 darab különböző prímosztója.

F. 3263. Legfeljebb hány különböző 3-tagú számtani sorozatot tudunk kiválasztani egy $a_1<a_2<\ldots<a_n$ valós elemű sorozatból?

Amerikai versenyfeladat

F. 3264. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív x-re

$$\left(1+\frac{[x]}{x}\right)^x \geqslant 2^{[x]}.$$

F. 3265. Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja legyen F. Mutassuk meg, hogy

$$\cot FAC\sphericalangle-\cot FAB\sphericalangle=2\cot AFB\sphericalangle.$$

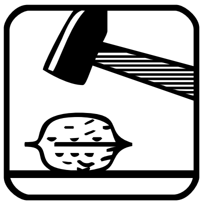
Javasolta: *Vörös Zoltán,* Budapest

F. 3266. Adottak az egyenlő hosszúságú AB és CD szakaszok. AB-t rögzítjük, CD-t pedig úgy mozgatjuk a síkban, hogy az $ABCD$ négyszög AC és BD átlói egyenlőek és állandó hosszúságúak legyenek. Milyen pályát ír le a mozgás során az $ABCD$ négyszög átlóinak metszéspontja?

F. 3267. Ismert, hogy ha egy gömb alakú bolygó felszínén van három ház és három kút, akkor nem tudunk a kutakat és a házakat összekötő, összesen kilenc darab, egymást nem metsző utat építeni.*

Igaz-e hasonló állítás, ha a házak és a kutak egy tórusz alakú bolygón vannak?

A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (195–198.)



N. 195. Két játékos a következő játékot játssza egy $n\times n$-es sakktáblán. Minden mezőn egy korong van elhelyezve, amelynek egyik oldala piros, a másik kék. A játékosok felváltva lépnek. Aki éppen lép, négyféle lépés közül választhat:

a) Kiválaszt egy kék korongot és megfordítja;

---

* ld. *Reimann István:* A geometria és határterületei, 324–325. o. (16.5. tétel).

b) Kiválaszt egy kék korongot, és ezt, valamint a vele megegyező sorban, tőle jobbra levő korongok mindegyikét megfordítja;

c) Kiválaszt egy kék korongot, és ezt, valamint a vele megegyező oszlopban az alatta levő korongok mindegyikét megfordítja;

d) Kiválaszt egy kék korongot, és abban a téglalapban, amelynek bal felső sarka a kiválasztott korong, jobb alsó sarka az egész tábla jobb alsó sarka, minden egyes korongot megfordít.

A játékban az veszít, aki nem tud lépni.

Melyek azok a kiinduló helyzetek, amelyekben a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája?

Kósa Tamás (Budapest) ötletéből

N. 196. Adottak a térben az A, B, C, D, E rácspontok úgy, hogy $ABCD$ egy paralelogramma. Igazoljuk, hogy ha az $ABCDE$ gúla térfogata nagyobb, mint $\frac{1}{3}$, akkor tartalmaz a belsejében vagy a határán a csúcsaitól különböző rácspontot.

N. 197. Legyen α tetszőleges 1 és 2 közötti szám, és legyen $a_n=[\alpha^n]$ ($n=0$, 1, 2, ...). Igaz-e, hogy véges sok kivétellel bármelyik pozitív egész szám előáll az (a_n) sorozat néhány különböző indexű elemének összegeként?

N. 198. Adott két n pontú teljes gráf, amelyeknek csúcsaiba természetes számokat írtunk, majd minden élre ráírtuk az él két végpontjában lévő számok összegét. Bizonyítsuk be, hogy ha n nem 2-hatvány és a két gráfban az éleken pontosan ugyanazok a számok szerepelnek (mindegyik ugyanannyiszor), akkor ugyanez igaz a két gráf csúcsaira is.

Javasolta: *Kiss Tamás,* Budapest

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 49. No. 1. January 1999)

New exercises for practice (see page 39): **C. 525.** The Martians' calendar counts 687 days a year. From time immemorial, the months last either 26 or 29 days. The Habitual Innovators suggest to switch over to months that last either 27 or 31 days. They have their plan accepted with the help of the Trimmers who hope that the number of months (and thus the wages, too) can be reduced this way. Is the Trimmers' conception feasible? **C. 526.** How many 7-digit numbers exist which are divisible by 9 and whose last but one digit is 5? **C. 527.** The two parallel shores of a trapezium-shaped lake are 200 m and 100 m long. The other two shores, respectively, meet these at angles of 90° and 45°. Two guards are walking around the lake in the same direction and at the same pace so that they keep the same distance in both directions along the lake. Determine the maximum distance between the two sentries, measured in a straight line across the lake. **C. 528.** Three pairwise orthogonal concurrent lines are given in 3-space. Is it possible to place any acute triangle in such a way that its 3 vertices are incident to the 3 lines, respectively?

New exercises: Gy. 3246. A disc is placed on each field of an $n\times n$ "chessboard". Each disc has a red and a blue face. Two players play the following game. They move alternately. The one who moves picks out a blue disc, and turns every disc over in the rectangle whose upper left corner is the selected disc, lower right corner is the lower right corner of the whole board. The player who cannot move, loses the game. Determine those initial positions when the first player has a winning strategy. **Gy. 3247.** Which one of the two numbers $1997^{1998^{1999}}$ and $1999^{1998^{1997}}$ is greater? **Gy. 3248.** Let p denote an arbitrary prime number. Find all nonnegative integer solutions of the equation $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{p}$. **Gy. 3249.** There are given $2n+1$ odd positive numbers, none of which is greater than $6n$. Prove that one of these numbers divides an other one. (**H**) **Gy. 3250.** Regular pentagons are arranged to form a "flower". Ten segments, each connecting vertices of these pentagons, are drawn, according to the Figure. Prove that they produce a regular 10-gon. **Gy. 3251.** In a triangle, the angles opposite to sides a, b, c measure 55°, 15° and 110°, respectively. Prove that $c^2-a^2=ab$. **Gy. 3252.** Consider those points in $3-$space whose three coordinates are all nonnegative integers, not greater than n. Determine the number of straight lines that pass through n of these points. **Gy. 3253.** The cross-section of a pencil is a regular hexagon. The sides of the pencil are alternately coloured blue and white. Is it true that, if we look at the pencil "from afar", then we see "the same amount" of the blue and the white surfaces? (Proposer: *E. Csóka,* Debrecen)

New problems: F. 3262. Prove that the number $2^{2^{1999}}-1$ has at least 1999 different prime factors. **F. 3263.** Find the maximum number of 3-term arithmetic progressions one can select from a sequence $a_1<a_2<\ldots<a_n$ of real numbers. (*American competition problem*) **F. 3264.** Prove that every positive x satisfies

$$\left(1+\frac{[x]}{x}\right)^x \geqslant 2^{[x]}.$$

F. 3265. In a triangle ABC, let F denote the midpoint of side BC. Prove that

$$\cot\angle FAC-\cot\angle FAB=2\cot\angle AFB.$$

(Proposer: *Z. Vörös,* Budapest) **F. 3266.** Segments AB and CD of the same length are given. Fix AB, and move CD in the plane in such a way that the diagonals AC and BD of the quadrilateral $ABCD$ are both equal to a constant length, too. Find the locus of the intersection point of the diagonals of quadrilateral $ABCD$. **F. 3267.** It is known that, given 3 cottages and 3 wells on the surface of a ball-shaped planet, it is impossible to connect each cottage to each well with a road such that the 9 road segments do not cross each other. Is a similar statement true if the cottages and wells are on a doughnut-shaped planet?

New advanced problems: N. 195. A disc is placed on each field of an $n\times n$ "chessboard". Each disc has a red and a blue face. Two players play the following game. They move alternately. The one who moves, may choose among the following 4 options: a) to turn a blue disc over; b) to turn a blue disc over, and at the same time to turn over all discs lying in the same row to the right of the selected disc; c) to turn a blue disc over, and at the same time to turn over all discs lying in the same column below the selected disc; d) to pick a blue disc out and turn every disc over in the rectangle whose upper left corner is the selected disc, lower right corner is the lower right corner of the whole board. The player who cannot move, loses the game. Determine those initial positions which admit the first player to have a winning strategy. (*Based on a problem submitted by T. Kósa,* Budapest) **N. 196.** Lattice points A, B, C, D, E are given in 3-space such that $ABCD$ is a parallelogram. Assuming that pyramid $ABCDE$ has a volume greater than $1/3$, prove that it contains (either in its interior or on its boundary) a lattice point other than its vertices. **N. 197.** Let α be a real number between 1 and 2, and define $a_n=[\alpha^n]$ ($n=0, 1, 2, \ldots$). Is it true that all but a finite number of positive integers are expressible as the sum of the elements of some finite subsequence of (a_n)? **N. 198.** Two complete graphs, each of n vertices, are given such that a natural number is written at each vertex. Write along each edge the sum of the numbers written at its two endpoints. Suppose that n is not a power of 2. Prove that, if the same numbers, with the same multiplicity, appear along the edges in the two graphs, then a similar statement is true for the vertices of the two graphs, too. (Proposer: *T. Kiss,* Budapest)