Rátz László Vándorgyűlés 1997–1998

Minden nyáron Magyarország más-más városában rendezi a Bolyai János Matematikai Társulat a Fasori Evangélikus Gimnázium egykori tanáráról, Rátz Lászlóról elnevezett vándorgyűlését. Tavaly Eger adott otthont a rendezvénynek, idén Nyíregyháza volt a helyszíne az általános és középiskolák, valamint a felsőfokú intézmények matematikatanárai részére szervezett vándorgyűlésnek. Az ünnepélyes megnyitón adták át a matematikatanárok legnagyobb kitüntetését, a Beke Manó Emlékdíjat azoknak, akik kiemelkedő eredményeket értek el a matematika oktatásában és népszerűsítésében.

A Bolyai János Matematikai Társulat 1997-ben a Beke Manó emlékdíj I. fokozatában részesítette *Freud Róbertet,* az ELTE TTK kiváló és népszerű oktatóját.

A tavalyi vándorgyűlésen a Beke Manó díj II. fokozatát kapta *Ács Katalin*, a budapesti Dob utcai általános iskola tanára, *Bíró Bálint*, az egri Szilágyi Erzsébet Gimnázium tanára, *Deli Lajos*, a hajdúszoboszlói Hőgyes Endre Gimnázium tanára, *Kothencz Jánosné*, a szegedi Tiszaparti Általános Iskola vezető pedagógusa, *Nagy Józsefné*, a Fővárosi Pedagógiai Intézet gyakorlóiskolájának nyugdíjas tanítója és *Peresztegi László*, a szombathelyi Nagy Lajos Gimnázium tanára.

A Bolyai János Matematikai Társulat 1998-ban a Beke Manó Emlékdíj I. fokozatával tüntette ki *Békefi Zsuzsát,* a veszprémi Lovassy László Gimnázium tanárát. A Beke Manó Emlékdíj II. fokozatával tüntette ki *Cselyuszka Antalnét,* a székesfehérvári Hétvezér Általános Iskola tanárát, *Csordás Mihályt*, a kecskeméti Berkes Ferenc Szakközépiskola tanárát, *Doleszák Magdolnát,* a rátkai Általános Iskola tanárát, *Freller Miklóst*, a dombóvári Illyés Gyula Gimnázium tanárát, *Róka Sándort*, a nyíregyházi Bessenyei György Tanárképző Főiskola docensét és *Szilágyiné Oravecz Mártát,* a Fővárosi Pedagógiai Intézet vezető tanítóját.

Az idei megnyitó után a Bessenyei György Tanárképző Főiskola dísztermében több problémakörről hangzottak el előadások.

Ezek közül néhány: Visszamaradottak; A fogolydilemma; Egy gyakorlat-orientált matematikaoktatási modell a közoktatásban; Híres ókori problémák; Matematikatanításunk hatékonysága; Matematikatörténeti érdekességek; Magyar matematikai eredmények századunk első feléből; Matematika, fizika, számítástechnika, sakk, gondolkodás; A didaktikai PhD képzésről; A tanár-továbbképzésről. A szokásos nagy sikert aratták a feladatmegoldó szemináriumok, amelyeket az általános iskolai szekcióban Deli Lajos (Hajdúszoboszló), Kubatov Antal (Kaposvár), Mészáros József (Galánta), a középiskolai szekcióban Mihályi Gyula (Székesfehérvár), Peresztegi László (Szombathely) és Veres Pál (Miskolc) tartottak.

A szakmai programok mellett alkalmunk volt megismerkedni Nyíregyháza és a környék nevezetességeivel (Szabolcs, Tállya, Tokaj, Szatmárcseke, Nyírbátor és Máriapócs).

A vándorgyűlés 456 résztvevője között felvidéki, erdélyi, délvidéki és kárpátaljai tanárok is voltak.

A jövő évi Rátz László Vándorgyűlés helyszíne előreláthatólag Szombathely lesz.

Oláh György

Mérőlap felvételire készülőknek II.

A Fővárosi Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium tiszteletére, ahol 1958–1966 között tanítottam, és ahol megszerveztük az első matematika tagozatos gimnáziumi osztályt.

1. Egy háromszög oldalainak hossza 8,8 egység, 28,6 egység, illetve 33 egység. Számítsa ki a háromszög területét és a háromszögbe írható kör sugarát.

2. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{11+x+6\sqrt{x+2}}+\sqrt{4-x+2\sqrt{3-x}}=7.$$

3. Hat szám közül az első négy egy mértani, az utolsó négy egy számtani sorozat egymást követő elemei. Melyik ez a hat szám, ha az utolsó négy szám összege 16, a harmadik és a hatodik szám szorzata -20?

4. Egy háromszög két oldalának hossza 10, illetve 15 egység, a közbezárt szög felezőjének hossza $6\sqrt{3}$ egység. Számítsa ki az adott két oldal által bezárt szöget és a háromszög harmadik oldalának hosszát.

5. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(6;10)$ ponton, és a $4x+3y=32$ és a $4x+3y=2$ egyenletű egyenesek közti szakaszának az y tengelyen lévő vetülete 2 egység.

6. Az m valós paraméter mely értékeire van megoldása a

$$\cos 2x+(7-5m)\sin x-3m^2+9m-7=0$$

egyenletnek? Oldja meg az egyenletet, ha m értéke $\frac{1}{3}$, 1, $\frac{5}{3}$, 2, illetve 3.

7. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\log_4\frac{1}{x^2}+4\cdot\log_x\frac{1}{16}+10\geqslant 0$$

egyenlőtlenséget.

8. Az a valós paraméter mely értékeire teljesül, hogy az

$$x^4-(3a+2)x^2+a^2=0$$

egyenletnek négy különböző gyöke van, és ez a négy gyök egy számtani sorozat négy egymást követő eleme?

Rábai Imre

A novemberi szakköri feladatok megoldásvázlatai, eredményei

1. Az egyenlet gyökei akkor valósak, ha a diszkriminánsa nemnegatív, azaz ha
$$4(m+1)^2-4\cdot 2(m^2+2m)\geqslant 0,$$
ami akkor teljesül, ha
$$-1-\sqrt{2}\leqslant m\leqslant -1+\sqrt{2}.$$
Mivel $x_1+x_2=-(m+1)$ és $4x_1x_2=4\cdot\dfrac{m^2+2m}{2}=2m^2+4m$, azért
$$f(m)=2m^2+3m-1.$$
$f(m)$ legkisebb értéke a $[-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}]$ intervallumon $-\dfrac{17}{8}$, amit az $m=-\dfrac{3}{4}$ helyen vesz fel, míg legnagyobb értéke $2\left(\dfrac{1}{4}+\sqrt{2}\right)^2-\dfrac{17}{8}$, amit az $m=-1-\sqrt{2}$ helyen vesz fel.

2. a) Ismeretes, hogy minden háromszögben $\varrho=\dfrac{T}{s}$ és $r=\dfrac{abc}{4T}$, így $\varrho r=\dfrac{abc}{4s}$.

b) A háromszög egyik oldala 2 egység, a másik két oldal összege 4 egység. Célszerű jelöléssel a két oldal $2-x$, illetve $2+x$, ahol $0\leqslant x<1$. A szóban forgó körök területének szorzata
$$f(x)=\varrho^2\pi\cdot r^2\pi=\pi^2(\varrho r)^2=\pi^2\cdot\left(\frac{2\cdot(2-x)(2+x)}{4\cdot 3}\right)^2,$$
hiszen $2s=6$, $s=3$.

Az $f(x)=\dfrac{\pi^2}{36}(4-x^2)^2$ függvény a $[0,1)$ intervallumban akkor a legnagyobb, ha $x=0$, hiszen $4-x^2>0$, és így a négyzete akkor a legnagyobb, ha $4-x^2$ a legnagyobb.

Az $f(x)$ legnagyobb értéke $\dfrac{4}{9}\pi^2$, ami akkor adódik, ha a háromszög egyenlő oldalú.

3. Ha van ilyen k, azaz $a_1=ka_2$, $b_1=kb_2$ és $c_1=kc_2$, akkor
$$f(x)=\frac{k(a_2x^2+b_2x+c_2)}{a_2x^2+b_2x+c_2}=k,\qquad \text{tehát } f(x) \text{ értéke állandó.}$$

Ha $f(x)$ értéke állandó minden megengedett x-re, azaz
$$f(x)=\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}=K,$$
akkor

$$(1)\qquad (a_1-Ka_2)x^2+(b_1-Kb_2)x+(c_1-Kc_2)=0,$$

azaz az (1) *legfeljebb* másodfokú egyenletnek kettőnél több megoldása van, ami csak úgy lehetséges, hogy minden együttható nulla (a polinom azonosan nulla), tehát $a_1 - Ka_2 = 0$, $b_1 - Kb_2 = 0$, $c_1 - Kc_2 = 0$, így valóban van olyan $K \in \mathbf{R}$, hogy $a_1 = Ka_2$, $b_1 = Kb_2$ és $c_1 = Kc_2$.

4. A rekurzív definícióból következik, hogy

$$a_n - a_{n-1} = 2a_{n-2} - 2a_{n-1} = (-2)(a_{n-1} - a_{n-2}).$$

A $b_k = a_{k+1} - a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ különbségsorozat a $q = -2$ hányadosú mértani sorozat, $b_1 = a_2 - a_1 = 1$, ezért $b_k = (-2)^{k-1}$. Így

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 1, \\ a_3 - a_2 &= -2, \\ a_4 - a_3 &= 4, \\ &\vdots \\ a_n - a_{n-1} &= (-2)^{n-2}. \end{aligned}$$

Adjuk össze az egyenleteket:

$$a_n - a_1 = \frac{1 - (-2)^{n-1}}{1 - (-2)},$$

ahonnan $a_n = 1 + \frac{1}{3}(1 - (-2)^{n-1}) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}(-2)^{n-1}$.

$$S_n = \frac{4}{3}n - \frac{1}{3}(1 - 2 + \ldots + (-2)^{n-1}) = \frac{4}{3}n - \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - (-2)^n}{1 - (-2)} = \frac{4}{3}n - \frac{1}{9}(1 - (-2)^n).$$

Rábai Imre

C gyakorlatok megoldása

C. 501. *Egyik reggel az iskolában a táblára fel voltak írva az egymás után következő egész számok* 1*-től kezdve egy bizonyos számig. A hetes az egyik számot gondosan letörölte. Az egész ügy feledésbe merült volna, ha valaki nem jegyzi meg, hogy a megmaradt számok számtani közepe* $\frac{45}{4}$ *volt. Próbáljuk meg kinyomozni, hogy melyik számot törölte le a hetes.*

Megoldás. A táblára felírt számok:

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n-1, \quad n,$$

KöMaL – 1998/9 MAT9809 2001. április 4. – 10:20 (4. lap)

a letörölt számot jelöljük x-szel. Az első n természetes szám összege, S_n, az ismert formula szerint $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. A letörölt számot vonjuk ki az összegből, és írjuk fel a megmaradt számok számtani közepét, amelyről tudjuk, hogy $\frac{45}{4}$; kapjuk, hogy

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2} - x}{n-1} = \frac{45}{4}. \tag{1}$$

A letörölt szám legalább 1 és legfeljebb n, eszerint

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2} - n}{n-1} \leqslant \frac{45}{4} \leqslant \frac{\frac{n(n+1)}{2} - 1}{n-1}.$$

Rendezve az egyenlőtlenséget

$$\frac{n}{2} \leqslant \frac{45}{4} \leqslant \frac{n+2}{2},$$

ahonnan $20{,}5 \leqslant n \leqslant 22{,}5$. Mivel n csak egész szám lehet, azért $n=21$ vagy 22.

Az n most kapott értékeit (1)-be helyettesítve

$n=21$-re $\frac{21\cdot 11 - x}{20} = \frac{45}{4}$, innen $x=6$;

$n=22$-re $\frac{11\cdot 23 - x}{21} = \frac{45}{4}$, innen $4x=67$, x nem egész szám, s ezért nem megoldás.

A letörölt szám tehát a 6.

Bérces Márton (Budapest, Arany J. Gimn., 11. o.t.)

195 dolgozat érkezett. 5 pontos 81, 4 pontos 13, 3 pontos 23, 2 pontos 23, 1 pontos 40. Hibás 15 dolgozat.

C. 504. *Adottak a térben az A, B, C, D, E, F pontok. A pontok milyen elhelyezkedése esetén létezik olyan sík, amelytől a pontok egyenlő távolságra vannak, és amely az A, B, C ponthármast elválasztja a D, E, F pontoktól?*

Megoldás. Tudjuk, hogy három pont – ha nincs egy egyenesen – mindig meghatároz egy síkot. A három ponttól egyenlő távolságra pedig a pontok által meghatározott síkkal párhuzamos síkok vannak. A feladat szerint olyan síkot kell keresni, amely mind a 6 ponttól egyenlő távolságra van, és 3–3 pontot elválaszt. Ez csak úgy lehetséges, ha az A, B, C pontok által meghatározott S_1 sík párhuzamos a D, E, F pontokkal meghatározott S_2 síkkal. Ekkor a keresett sík is párhuzamos az S_1, S_2 síkok mindegyikével és azokat elválasztja. Ilyen sík létezik, és csak egy ilyen sík van, az S_1, S_2 távolságát felező mindkettővel párhuzamos sík.

Ha az A, B, C pontok egy e egyenesen vannak, akkor a D, E, F pontok által meghatározott S síknak párhuzamosnak kell lennie az e egyenessel. Az előzőhöz hasonlóan most is van egy olyan sík, amelyik elválasztja az e egyenest és az S síkot, és mindkettőtől egyenlő távolságra van.

Ha az A, B, C és D, E, F pontok egy-egy egyenesen vannak, akkor a két egyenesnek vagy párhuzamosnak, vagy kitérőnek kell lennie.

Ha a két egyenes párhuzamos, akkor végtelen sok olyan sík van, amelyik mindkettőtől egyenlő távolságra van. A két egyenes távolságának felezőpontján átmenő bármelyik sík megfelelő.

Ha a két egyenes kitérő, akkor pontosan egy megfelelő sík van, a két egyenes távolságát meghatározó szakasz felező merőleges síkja.

131 dolgozat érkezett. 5 pontos 59, 4 pontos 63, 3 pontos 2, 1 pontos 1 dolgozat. Hibás 6.

C. 506. *Határozzuk meg mindazokat az m és n egész számokat, amelyek esetén a következő egyenlet gyökei ugyancsak egész számok:*

$$(2m-3)(n-1)x^2+(2m-3)(n-1)(m-n-4)x-2(2m-3)(n-1)(m-n-2)-1=0.$$

Megoldás. Mivel m egész szám, azért $2m-3\neq 0$. $n-1$ sem lehet 0, hiszen egyébként az egyenletből $-1=0$ következnék, ami lehetetlen. Adjunk az egyenlet mindkét oldalához 1-et, és osszuk el mindkét oldalt a $(2m-3)(n-1)\neq 0$-val.

$$x^2+(m-n-4)x-2(m-n-2)=\frac{1}{(2m-3)(n-1)}.$$

Ha x_1 és x_2 a fenti egyenlet gyökei, akkor

$$x_1+x_2=-(m-n-4) \qquad \text{és}$$
$$x_1x_2=-\left[2(m-n-2)+\frac{1}{(2m-3)(n-1)}\right].$$

Mivel m és n egészek, x_1+x_2 is egész. Ha a gyökök szorzata egész, akkor $\frac{1}{(2m-3)(n-1)}$ is egész. Ez akkor teljesül, ha a nevező +1 vagy -1. Vizsgáljuk meg a két esetet:

(A) Ha a nevező 1, akkor $2m-3=1$ és $n-1=1$, vagy $2m-3=-1$ és $n-1=-1$.

Az első esetben $m=2$ és $n=2$, a második esetben $m=1$ és $n=0$.

Nézzük meg, hogy m és n kapott értékei mellett mik az egyenlet gyökei.

Ha $m=2$ és $n=2$, akkor az (1) egyenlet $x^2-4x+3=0$, ahonnan $x_1=3$, $x_2=1$. A gyökök most egész számok.

Ha $n=1$ és $n=0$, akkor az (1) egyenlet $x^2-3x+1=0$ és $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, ezek pedig nem egész számok.

(B) Ha a nevező -1, akkor $2m-3=1$ és $n-1=-1$, vagy pedig $2m-3=-1$ és $n-1=1$. Az első esetben $m=2$, $n=0$, a második esetben $m=1$ és $n=2$.

Az $m=2$ és $n=0$ esetben a kapott egyenlet gyökei egész számok lesznek ($x^2-2x+{}$ $+1=0$; $x_{1,2}=1$), a második esetben viszont az egyenletnek nincs valós gyöke.

Az (1) egyenletnek tehát csak az $m=2$, $n=2$ és az $m=2$, $n=0$ esetekben lesznek egész gyökei.

Horváth László (Csurgó, Nagyváthy Középisk., 10. o.t.)

99 dolgozat érkezett. 5 pontos 53, 4 pontos 14, 3 pontos 14, 2 pontos 12, 1 pontos 2. Hibás 4 dolgozat.

C. 507. *Mi az $y=x^2+tx+1$ egyenletű parabolák tengelypontjainak (csúcspontjainak) mértani helye? (t valós paraméter.)*

Megoldás. Alakítsuk át a parabola egyenletét: $y=x^2+tx+1=\left(x+\frac{t}{2}\right)^2-\frac{t^2}{4}+1$. (Teljes négyzetté kiegészítés.) Ebből az alakból leolvashatjuk a parabola tengelypontjának koordinátáit: $x=-\frac{t}{2}$, $y=1-\frac{t^2}{4}$.

Innen $t=-2x$-et helyettesítve a második egyenletbe, az $y=-x^2+1$ összefüggést kapjuk, ami egy parabola egyenlete.

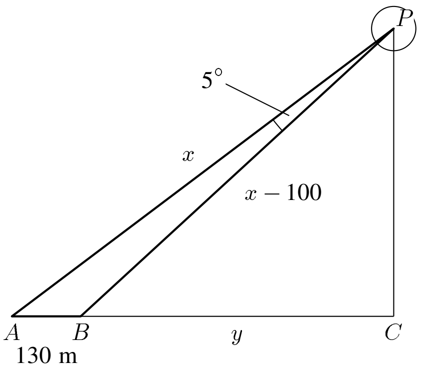
Ennek a parabolának minden pontjáról – visszahelyettesítéssel – megállapítható, hogy melyik t paraméterű $y=x^2+tx+1$ egyenletű parabola tengelypontja.

Ez azt jelenti, hogy a parabolák tengelypontjainak mértani helye az $y=-x^2+1$ egyenlettel leírható lefele nyíló parabola, amelynek tengelye az y tengely, csúcspontja pedig a (0; 1) pont.

117 dolgozat érkezett. 5 pontos 58, 4 pontos 20, 3 pontos 19, 2 pontos 10, 1 pontos 3 dolgozat. Hibás 3, nem versenyszerű 4.

C. 508. *Egyenes pályán* 26 m/s *sebességgel haladó vonat ablakából kitekintve a távolban egy henger alakú gabonatárolót látunk.* 5 *másodperc alatt a tárolóhoz állandóan közeledve távolságunk a tárolótól* 100 m*-rel csökken, miközben a tároló látszólag* $5°$*-kal elfordul. Mennyi ideig közeledünk még a tárolóhoz?*

Megoldás. A feladat szövege alapján a következő ábrát készíthetjük el:



Jelöljük a vonat helyzetét a kitekintés pillanatában A-val, az 5 másodperc alatt megtett út végpontját B-vel, a henger képzeletbeli középpontját P-vel, és a P pont vetületét az AB-n C-vel. Ha kezdetben x méterre voltunk a tárolótól, akkor $AB=5\text{ s}\cdot\frac{26\text{ m}}{\text{s}}=130$ m megtétele után $x-100$ méterre vagyunk, és $APB\sphericalangle=5°$. Azt az időt keressük, amíg a vonat az $y=\overline{BC}$ távolságot megteszi (Hiszen C után távolodunk P-től.)

Az APB háromszögre felírhatjuk a koszinusztételt:

$$130^2=x^2+(x-100)^2-2x(x-100)\cos 5°.$$

Innen x-re egy másodfokú egyenletet kapunk, amelynek pozitív gyöke $x\approx 903{,}48$.

A BPC és az APC derékszögű háromszögekből:

$$y^2+PC^2=(x-100)^2,$$
$$(y+130)^2+PC^2=x^2.$$

Rendezve

$$y^2+PC^2=x^2-200x+100^2$$
$$y^2+PC^2+260y+130^2=x^2.$$

A második egyenlet megfelelő oldalaiból kivonva az első egyenlet megfelelő oldalait:

$$260y+130^2=200x-100^2,$$
$$260y-200x=-(130^2+100^2)=-10^2(13^2+10^2)=-10^2\cdot 269,$$
$$26y-20x=-2690.$$

Helyettesítsük be az előbb kapott $x\approx 903{,}48$ értéket: $y\approx 591{,}5$, és mivel a vonat sebessége 26 m/s, ezt az utat $\frac{591{,}5}{26}\approx 22{,}75$ másodperc alatt teszi meg.

Csató György Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., 9. o.t.)

102 dolgozat érkezett. 6 pontos Gajdos Béla megoldása. 5 pontos 46, 4 pontos 23, 3 pontos 10, 2 pontos 7, 1 pontos 8 dolgozat. Hibás 7.

Matematika gyakorlatok megoldásai

Gy. 3166. *Melyik a nagyobb:* 1997^{1999} *vagy* 1999^{1997}*?*

Javasolta: *Árokszállási Tibor,* Paks

I. megoldás.

$$1997=\frac12+\frac12+\frac12+\frac12+\underbrace{1+1+\ldots+1}_{1995\ \text{db}},$$

így a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján

$$\frac{1997}{1999}=\frac{\frac12+\frac12+\frac12+\frac12+1+1+\ldots+1}{1999}\geqslant\sqrt[1999]{\frac12\cdot\frac12\cdot\frac12\cdot\frac12\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}=\sqrt[1999]{\frac{1}{16}}.$$

Ebből

$$\left(\frac{1997}{1999}\right)^{1999}\geqslant\frac{1}{16},$$

azaz

$$1997^{1999}\geqslant 1999^{1999}\cdot\frac{1}{16}\geqslant 1999^{1997}\cdot\frac{1999^2}{16}.$$

Mivel $\frac{1999^2}{16}>1$, így $1997^{1999}>1999^{1997}$.

Tarcsi Károly (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 10. o.t.)

II. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy $(n+2)^n < n^{n+2}$ minden $n \geqslant 3$ természetes számra. Ehhez elég az ezzel ekvivalens $\sqrt[n+2]{n+2} < \sqrt[n]{n}$ egyenlőtlenséget belátni, azaz elég megmutatni, hogy az $\{\sqrt[n]{n}\}$ sorozat $n=3$-tól kezdve szigorúan monoton fogyó. Azt kell tehát megmutatnunk, hogy $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$, vagyis

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n. \tag{1}$$

Teljes indukcióval bizonyítunk: $n=3$-ra (1) valóban teljesül, mert $\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} < 3$. Legyen most $n \geqslant 3$, és tegyük fel, hogy (1) fennáll. Bebizonyítjuk, hogy ekkor teljesül $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < n+1$ is. Valóban,

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \left(1+\frac{1}{n+1}\right) <$$
$$< \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n+1}\right) < \frac{n(n+2)}{n+1} < n+1.$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük, tehát valóban igaz, hogy $(n+2)^n < n^{n+2}$, és így $1999^{1997} < 1997^{1999}$.

Kovács Erika Renáta (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., 8. o.t.)

III. megoldás. Számoljuk ki, hogy melyik szám hány számjegyből áll. Tetszőleges pozitív egész x szám $[\lg x + 1]$ jegyű.

$$\left[\lg 1997^{1999}+1\right] = \left[1999 \cdot \lg 1997 + 1\right] = 6598$$
$$\left[\lg 1999^{1997}+1\right] = \left[1997 \cdot \lg 1999 + 1\right] = 6592.$$

Tehát 1997^{1999} több jegyű, mint 1999^{1997}, így biztosan nagyobb nála.

Máthé András (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gimn., 10. o.t.)

246 dolgozat érkezett. 7 pontos Máthé András megoldása. 6 pontot kapott Bajusz Csaba, Boros M. Mátyás, Csiszár Gábor, Deli Lajos, Fritz Lilla, Garai Zsolt, Harangi Viktor, Kiss 345 Gergely, Kovács Erika Renáta, Nagy 369 László, Pogátsa Attila, Taraza Busra, Tokodi Tünde, Tolvaj Nándor és Varga Szilvia. 5 pontos 136, 4 pontos 47, 3 pontos 7, 2 pontos 1, 1 pontos 16, 0 pontos 20, nem versenyszerű 3 dolgozat.

Gy. 3167. *Bizonyítsuk be, hogy az a, b pozitív egészeknek pontosan akkor azonos a paritása, ha vannak olyan c, d pozitív egészek, amelyekre $a^2+b^2+c^2+1=d^2$.*

Megoldás. Ha a és b paritása különböző, azaz egyikük páros, a másik páratlan, akkor a^2 és b^2 közül az egyik néggyel osztva 0, a másik 1 maradékot ad. A c^2 maradéka 0 vagy 1, így $a^2+b^2+c^2+1$ maradéka $1+0+1=2$ vagy $1+1+1=3$, és d^2 sem 2-t, sem 3-at nem adhat maradékul 4-gyel osztva. Így ebben az esetben nem létezik egész megoldása az $a^2+b^2+c^2+1=d^2$ egyenletnek.

Ha a és b paritása azonos, akkor a^2+b^2 biztosan páros, így $\frac{a^2+b^2}{2}$ egész szám. Tudjuk, hogy $d^2-c^2=(d+c)(d-c)$. Legyen továbbá $d-c=1$, azaz $d=c+1$, tehát $d^2-c^2=(d+c)(d-c)=2c+1$. A $c=\frac{a^2+b^2}{2}$, $d=\frac{a^2+b^2}{2}+1$ választással $a^2+b^2+1=$ $=2c+1=d^2-c^2$, ezek tehát megoldásai az egyenletnek, és valóban egészek.

Csirmaz Előd (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.)

169 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Bárány Zsófia és Taraza Busra. 5 pontos 102, 4 pontos 7, 3 pontos 41, 0 pontos 12, nem versenyszerű 5 dolgozat.

Gy. 3175. *Tetszőleges pozitív számokra igazoljuk a következő egyenlőtlenséget:*

$$\frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab} \leqslant \frac{(a-b)^2}{\sqrt{2}(a+b)}.$$

Javasolta: *Czirok Levente,* Szekszárd

Megoldás. Ha $a=b$, akkor az egyenlőtlenség: $0 \leqslant 0 \leqslant 0$ teljesül. A továbbiakban feltesszük, hogy $a \neq b$, azaz $a-b \neq 0$. Az egyenlőtlenség-lánc középső tagját a $\sqrt{x}-\sqrt{y}=$ $=\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ azonosság alapján átalakítva:

$$\frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \leqslant \frac{\frac{a^2+b^2}{2}-ab}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}} \leqslant \frac{(a-b)^2}{\sqrt{2}(a+b)},$$

$$\frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \leqslant \frac{\frac{(a-b)^2}{2}}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}} \leqslant \frac{(a-b)^2}{\sqrt{2}(a+b)}.$$

Mivel $(a-b)^2>0$, azért az egyenlőtlenségeket eloszthatjuk vele:

$$\frac{1}{2(a+b)} \leqslant \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}(a+b)}.$$

Ezzel egyenértékű:

$$2(a+b) \geqslant 2\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}\right) \geqslant \sqrt{2}(a+b).$$

Négyzetre emelve:

$$4(a+b)^2 \geqslant 4\left(\frac{a^2+b^2}{2}+ab+2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\sqrt{ab}\right) \geqslant 2(a+b)^2,$$

$$2(a+b)^2 \geqslant a^2+b^2+2ab+4\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\sqrt{ab} \geqslant (a+b)^2.$$

Mindenhonnan kivonva $(a+b)^2$-t

$$(a+b)^2 \geqslant 4\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\sqrt{ab} \geqslant 0.$$

A második egyenlőtlenség biztosan teljesül, mert a és b pozitívak. Az elsőt négyzetreemeléssel tovább alakítva:

$$(a+b)^4 \geqslant 16\frac{a^2+b^2}{2}\cdot ab,$$
$$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \geqslant 8a^3b+8ab^3,$$
$$a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4 \geqslant 0,$$
$$(a-b)^4 \geqslant 0.$$

Ez mindenképpen teljesül, és csak ekvivalens átalakításokat végeztünk (hiszen végig pozitív mennyiségekről volt szó, ahol a négyzetre emelés kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés); így az állítást bebizonyítottuk.

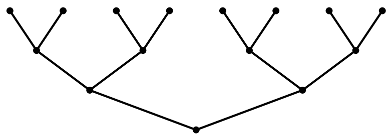
Vitéz Ildikó (Miskolc, Földes F. Gimn., 10. o.t.)

151 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Máthé András. 5 pontos 40, 4 pontos 61, 3 pontos 15, 2 pontos 6, 1 pontos 6, 0 pontos 16, nem versenyszerű 6 dolgozat.

Gy. 3177. *A Bajnokcsapatok Európa Kupa legjobb* 16 *csapata közé bejutott két magyar csapat is: a Bolyai TC, és az Eötvös TK. Mi a valószínűsége, hogy egymás ellen játszanak? (A verseny egyenes kiesési rendben folyik; két csapat találkozóján az egyik továbbjut, a másik végleg kiesik.)*

Javasolta: *Pataki János,* Duino

Megoldás. Ha egyenes kiesési rend szerint játszanak, először párokat alakítanak a csapatokból (8 darabot), és ezek a párok játszanak. A továbbjutó 8 csapatból ismét párokat alakítanak stb. (Az *ábra* 8 kezdőcsapatra mutatja a játékok elrendeződését.)



A 16 csapat összesen $8+4+2+1=15$ mérkőzést játszik, és bármely két csapat 1 vagy 0 mérkőzést játszik egymással.

A párokat véletlenszerűen alakítják a 16 csapatból. Ezt azonban úgy is felfoghatjuk, hogy a párok és a mérkőzések adottak (tehát az is, kik jutnak tovább), és ebbe az ábrába „sorsolják be" a csapatokat. Ebből a felfogásból kiindulva úgy is gondolhatjuk, hogy a 16 csapat közül (amelyek között tehát adottak a meccsek, hogy ki jut tovább stb.) kiválasztjuk azt a kettőt, amelyek közül az egyik a Bolyai TC, a másik az Eötvös TK. Arra vagyunk kíváncsiak, e két csapat játszik-e egymással.

A kiválasztást $16\cdot 15/2=120$-féleképpen tehetjük meg. Mivel 15 mérkőzés van, és bármely két csapat legfeljebb egyszer találkozik, 15 olyan csapat-pár van, amelyek játszanak egymással, a többiek között pedig nincs mérkőzés.

A valószínűség ebből: $\dfrac{\text{Jó esetek száma}}{\text{összes esetek száma}}=\dfrac{15}{120}=\dfrac{1}{8}$. Ezzel a valószínűséget megkaptuk.

A feladatot általánosíthatjuk 2^n csapat esetére. Ekkor összesen $2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2+1=2^n-1$ mérkőzést játszanak (hiszen minden meccsen egy csapat esik ki). Két csapatot most $\binom{2^n}{2}=\frac{2^n(2^n-1)}{2}$-féleképpen választhatunk ki, így a keresett valószínűség:

$$\frac{2^n-1}{\frac{2^2(2^n-1)}{2}}=\frac{2}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Csirmaz Előd (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.)

Megjegyzés. Tetszett, hogy Máthé András és Kiss Gergely még általánosabban oldották meg a gyakorlatot, Máthé András ugyanis ezt írja: „Bár a feladatban nem volt benne, hogy labdarúgásról lenne szó, mi azért feltehetjük, hogy a magyar csapatok és a többi csapat nem ugyanúgy játszik. Legyen ezért a magyar csapat nyerési esélye bármelyik idegen csapattal szemben $q\ldots$"

154 dolgozat érkezett. 7 pontot kapott Kiss 345 Gergely és Máthé András, 6 pontot Harangi Viktor, Keszegh Balázs, Lovrics Anna, Pozsgay Balázs és Venter György. 5 pontos 77, 4 pontos 1, 3 pontos 3, 2 pontos 38, 0 pontos 28 dolgozat.

Gy. 3182. *Legyen az a, b, c, d nemnegatív valós számok összege 1. Bizonyítsuk be, hogy*

$$|ab-cd|\leqslant\frac{1}{4}.$$

Javasolta: *Blahota István,* Nyíregyháza

Megoldás. Mivel az állítás ab, illetve cd-re szimmetrikus, azért feltehetjük, hogy $ab\geqslant cd$. Ekkor

$$|ab-cd|=ab-cd\leqslant ab=\left(\sqrt{ab}\right)^2\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Egyenlőség pontosan akkor van, ha $a=b=\frac{1}{2}$, $c=d=0$ (vagy fordítva).

Kiss Gergely (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t.)

257 dolgozat érkezett. 7 pontot kapott Kiss 345 Gergely és Máthé András, 6 pontot Bákor Krisztina, Boros M. Mátyás, Horváth Szilárd, Keszegh Balázs, Nagy Tamás, Peresztegi Márton és Pozsonyi Gergő. 5 pontos 151, 4 pontos 30, 3 pontos 8, 2 pontos 19, 1 pontos 25, 0 pontos 15 dolgozat.

Gy. 3184. *Amerikában a hőmérsékletet Fahrenheit fokban mérik. Ez egy egyenletes skála, amelyben a víz fagyáspontja* $32\ ^\circ$F *és a forráspontja* $212\ ^\circ$F.

Valaki megadja a hőmérsékletet egész Fahrenheit fokokra kerekítve, amit mi átváltunk Celsiusra, és utána ismét egész fokokra kerekítünk. Legfeljebb mekkora lehet a kapott értéknek az eredeti hőmérséklettől való eltérése Celsius fokokban?

Javasolta: *Fried Ervin,* Budapest

I. megoldás. Az adatok szerint $180\ ^\circ\mathrm{F}=100\ ^\circ\mathrm{C}$, azaz $1\ ^\circ\mathrm{F}=\frac{5}{9}\ ^\circ\mathrm{C}$.

Az első kerekítésnél legfeljebb $\frac{1}{2}$ °F $= \frac{5}{18}$ °C az eltérés. A másodiknál pedig legfeljebb $\frac{1}{2}$ °C. Ennek ellenére a maximális eltérés nem $\frac{1}{2}$ °C $+ \frac{5}{18}$ °C $= \frac{14}{18}$ °C.

Az egész Fahrenheit fokok ugyanis nem eshetnek a Celsius skálán pontosan két egész fok közé. Az átszámítás szerint ugyanis egy egész Fahrenheit foknak a Celsius skálán csak olyan törtszám felelhet meg, amelynek a nevezője alkalmas tört-alakban 9. Ezért a Celsius fokok kerekítésénél az eltérés $\frac{1}{2}$ °C helyett legfeljebb $\frac{4}{9}$ °C.

Így az eredetitől való eltérés is legfeljebb $\frac{4}{9}$ °C $+ \frac{5}{18}$ °C $= \frac{13}{18}$ °C.

II. megoldás. Jelölje $(x)^*$ az x számot egészre kerekítve, és legyen $(x)_* = x - (x)^*$. Ekkor $(x)_* \in [-0{,}5; 0{,}5]$.

A hőmérséklet Fahrenheit fokban legyen f, ekkor Celsius fokban

$$\frac{f-32}{180} \cdot 100 = \frac{5f-160}{9},$$

a kérdés tehát az, hogy mekkora $\frac{5f-160}{9} - \left(\frac{5(f)^*-160}{9}\right)^*$ abszolút értékének maximuma. Ezt átalakítva:

$$\left| \frac{5\left((f)^* + (f)_*\right) - 160}{9} - \left(\frac{5(f)^*-160}{9}\right)^* \right| =$$

$$= \left| \frac{5(f)^*-160}{9} - \left(\frac{5(f)^*-160}{9}\right)^* + \frac{5(f)_*}{9} \right| =$$

$$= \left| \left(\frac{5(f)^*-160}{9}\right)_* + \frac{5(f)_*}{9} \right| \leqslant \left| \left(\frac{5(f)^*-160}{9}\right)_* \right| + \left| \frac{5(f)_*}{9} \right|.$$

Az első tag maximuma $\frac{4}{9}$, mert benne a számláló egész, a nevező pedig 9. A második tag pedig legfeljebb $\frac{5 \cdot \frac{1}{2}}{9} = \frac{5}{18}$, vagyis az összeg legfeljebb $\frac{4}{9} + \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$. A keresett különbség így biztosan nem nagyobb $\frac{13}{18}$-nál.

Az $f = 32{,}5$ választás esetén egyenlőség van, tehát a maximális eltérés Celsius fokban $\frac{13}{18}$.

Máthé András Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gimn., 10. o.t.)

221 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Babos Attila, Bajusz Csaba, Bákor Krisztina, Boros M. Mátyás, Breuer János, Buruzs Ádám, Csikvári Péter, Csirmaz Előd, Csóka Endre, Csordás Hunor, Dezső Balázs, Fehér Gergely, Földényi Tamás, Gerencsér Balázs, Gyenes Zoltán, Győri Nikolett, Harangi Viktor, Hegedűs Ákos, Horváth 713 György, Horváth Hedvig, Horváth Illés, Hudomiet Péter, Kerékfy Péter, Keszegh Balázs, Koch Dénes, Kunszenti-Kovács Dávid, Kurcz Éva, Lovrics Anna, Máthé András, Molnár 947 Zoltán, Nagy Tamás, Papp Dávid, Pozsonyi Gergő, Reviczky Ádám, Schmidt 414 András, Somlai Gábor, Szilágyi Tamás, Szűcs 702 Zsófia, Tolvaj Nándor, Tóth 716 Bence, Ureczky Judit, Varjú Péter, Venter György, Zábrádi Gergely, Zalán Péter és Zempléni Márton. 4 pontos 74, 3 pontos 14, 1 pontos 3, 0 pontos 84 dolgozat.

Gy. 3185. *Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ szabályos n-szög csúcsaira valamilyen sorrendben felírjuk az $1, 2, \ldots, n$ számokat.*

a) *Bizonyítsuk be, hogy a szomszédos számok közti különbségek abszolút értékének összege legalább $2n-2$.*

b) *Hány olyan elhelyezés van, amelyben a fenti összeg éppen $2n-2$?* (**H**)

Megoldás. a) A csúcsokra felírt számokat jelöljük $a_1, a_2, \ldots, a_n$-nel. Ekkor a bizonyítandó állítás:

$$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\ldots+|a_{n-1}-a_n|+|a_n-a_1|\geqslant 2n-2.$$

Legyen $a_1=1$ és $a_j=n$. Ekkor az ismert $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ alapján

$$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\ldots+|a_{j-1}-a_j|\geqslant|a_1-a_j|=n-1 \tag{1}$$

$$|a_j-a_{j+1}|+|a_{j+1}-a_{j+2}|+\ldots+|a_n-a_1|\geqslant|a_j-a_1|=n-1. \tag{2}$$

Ezt a két egyenlőtlenséget összeadva kapjuk a bizonyítandó állítást.

b) A bizonyítandó egyenlőtlenségben pontosan akkor van egyenlőség, amikor (1)-ben és (2)-ben egyaránt egyenlőség van. Ehhez az kell, hogy (1)-ben (és (2)-ben is) az abszolútértéken belüli különbségek mindegyikének ugyanaz legyen az előjele. Mivel $a_1=1$ (tehát a legkisebb szám), azért ebből következik, hogy $a_1<a_2<a_3<\ldots<a_j$, és mivel $a_j=n$ (a legnagyobb), azért $a_j>a_{j+1}>\ldots>a_n$. Tehát

$$a_1<a_2<\ldots<a_j,\qquad a_j>a_{j+1}>a_{j+1}>\ldots>a_n.$$

Ha azt eldöntjük, hogy mely számok kerülnek $a_1=1$ és $a_j=n$ közé, akkor az egyenlőtlenségek miatt a számokat már csak egyféleképpen helyezhetjük el. Ez 2^{n-2} lehetőség.

Székelyhidi Gábor (Kuwait, New English School, 11. o.t.)

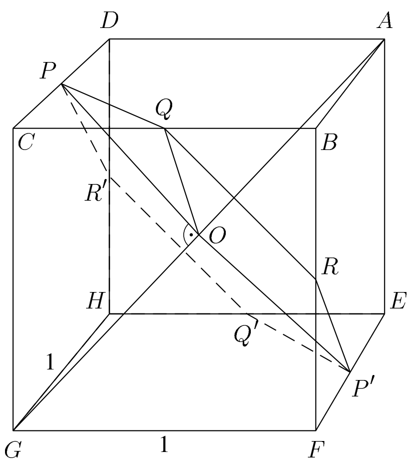
Megjegyzés. A b) kérdésre 2^{n-3}, 2^{n-2} vagy $n\cdot 2^{n-2}$ a válasz attól függően, hogy a tükrözéssel, illetve elforgatással egymásba vihető elrendezéseket megkülönböztetjük-e. Mind a három variációt elfogadtuk.

Megjegyzés. A példát *Hajnal Péter:* Elemi kombinatorikai feladatok (Polygon) c. könyvéből vettük!

127 dolgozat érkezett. 7 pontot kapott Kunszenti-Kovács Dávid, Máthé András és Mecz Balázs, 6 pontot Pozsár Balázs. 5 pontos 52, 4 pontos 18, 3 pontos 24, 2 pontos 20, 1 pontos 8, 0 pontos 1 dolgozat.

Gy. 3189. *Forgassunk el egy egységnyi élű kockát egyik testátlója körül 60°-kal. Számítsuk ki az eredeti és az elforgatott kocka közös részének térfogatát!* (**H**)

Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. Legyen AG az a testátló, ami körül forgatunk, ennek felezőpontja legyen O, a P, Q, R pontok pedig a DC, CB, BF élek felezőpontjai. Az O pontra a kocka középpontosan szimmetrikus, ebben a szimmetriában a P pont P' képe az EF él felezőpontja. Hasonlóan származtathatók a Q' és R' pontok. Megmutatjuk, hogy az AG körüli $+60^\circ$-os forgatás során P képe Q, Q képe R, R képe P' és így tovább. Először belátjuk, hogy $PO\perp AG$. Ehhez kiszámítjuk a PO, OA és AP szakaszok hosszát: $PO=\frac{1}{2}PP'=\frac{1}{2}ED=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $OA=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $AP=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{5}{4}}$. Mivel $PO^2+OA^2=AP^2$, a Pitagorasz-tétel megfordítása szerint $POA\sphericalangle=90^\circ$.



Hasonlóan belátható, hogy QO és RO is merőleges AG-re. Már láttuk, hogy $PO=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ugyanúgy $QO=PQ=$ $=\frac{\sqrt{2}}{2}$, tehát a PQO háromszög szabályos. Most már következik, hogy P képe az AG körüli $+60^\circ$-os elforgatásban Q. Ugyanígy kapjuk, hogy Q képe R, R képe P' és így tovább.

Nézzük meg azután, mi lesz az $ABCD$ lap elforgatottja. Ennek a lapnak A, P, Q három nem egy egyenesen lévő pontja, ezért a lap síkjának képét a három képpont, vagyis A, Q, R meghatározza. Az A, Q, R pontok síkja lemetszi a kockából az $AQRB$ gúlát. Hasonlóan megmutatható, hogy az A csúcsra illeszkedő másik két lap, illetve a G csúcsra illeszkedő három lap elforgatottja az $AQRB$ gúlával egybevágó gúlákat vág le a kockából. Egy ilyen gúla térfogata $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=$ $=\frac{1}{24}$, ezért a közös rész térfogata $1-6\cdot\frac{1}{24}=\frac{3}{4}$.

Balogh Attila (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., 11. o.t.)

Megjegyzés. A közös rész térfogata úgy is kiszámítható, hogy meghatározzuk a

$$PQRP'Q'R'$$

alapú A vagy G csúcsú gúla térfogatát, és ezt kétszer vesszük.

82 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Baharev Ali, Balogh Attila, Bíró Zsuzsanna, Devecsery András, Gueth Krisztián, Gyenes Zoltán, Harangi Viktor, Horváth 202 Gábor, Juhász András, Máthé András, Papp Dávid, Pogátsa Attila, Pszota Anikó, Rácz Balázs, Soós 740 Károly, Szabadka Zoltán, Szekeres Nóra, Végh A. László, Zábrádi Gergely és Zalán Péter. 4 pontos 19, 3 pontos 24, 2 pontos 12, 1 pontos 3, 0 pontos 2, nem versenyszerű 2 dolgozat.

Gy. 3190. *A* 49 *szám két jegye közé beírjuk a* 48 *számot. Ezután a* 4*-es és a* 8*-as közé újra beírjuk a* 48*-at, majd ezt néhányszor megismételjük (*$44\ldots48\ldots89$*). Igaz-e, hogy így mindig négyzetszámot kapunk?*

Megoldás. A feladatban leírt eljárással kapott számok mind felírhatóak a

$$\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9$$

alakban. Legyen

$$x=\underbrace{11\ldots1}_{n}=\frac{1}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{n}=\frac{1}{9}(10^n-1).$$

Ekkor $10^n = 9x+1$ és a számok

$$\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9 = 4x(9x+1)+8x+1 = 36x^2+12x+1 = (6x+1)^2.$$

Az így kapott számok tehát valóban négyzetszámok.

260 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Ambrus Gergely, Bákor Krisztina, Deli Lajos, Máthé András, Soós 740 Károly és Tóth 370 Ágnes. 5 pontos 102, 4 pontos 128, 2 pontos 3, 1 pontos 18, 0 pontos 3 dolgozat.

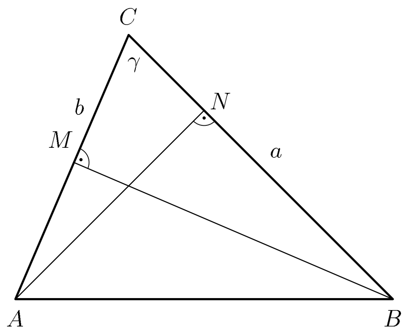
Gy. 3194. *Egy háromszög két magasságának hossza legalább akkora, mint a hozzájuk tartozó oldal. Mekkorák a háromszög szögei?*

I. megoldás. A háromszög területe a szokásos jelölésekkel $t=\frac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2}=\frac{a\cdot m_a}{2}=$ $=\frac{b\cdot m_b}{2}$. Mivel $m_a\geqslant a$ és $m_b\geqslant b$, $t\geqslant\frac{a^2}{2}$ és $t\geqslant\frac{b^2}{2}$. Ezért $\frac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2}\geqslant\frac{a^2}{2}$ és $\frac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2}\geqslant\frac{b^2}{2}$. Mivel a, b pozitív számok, azt nyerjük, hogy $\sin\gamma\geqslant\frac{a}{b}$ és $\sin\gamma\geqslant\frac{b}{a}$. Ezekből következik, hogy $\sin\gamma\geqslant1$, ami csak úgy lehetséges, ha $\sin\gamma=1$, vagyis $\gamma=$ $=90^\circ$.

Derékszögű háromszögben az egyik befogóhoz tartozó magasság a másik befogó, ezért a feltételek szerint $b\geqslant a$ és $a\geqslant b$, ahonnan $a=b$ következik.

Tehát a háromszög derékszögű és egyenlő szárú, így a szögei: 90°, 45°, 45°.

Zalán Péter (Budapesti Evangélikus Gimn., 9. o.t.



II. megoldás. *Ábránkon* az a két magasság, amelyekről a két feltétel szól, m_a, illetve m_b. A feltételek szerint $m_a\geqslant a$ és $m_b\geqslant b$. Írjuk fel az ANC és BMC háromszögekre a Pitagorasz-tételt, és használjuk föl a feltételeket:

$$m_a^2+NC^2=b^2\leqslant m_b^2;$$
$$m_b^2+MC^2=a^2\leqslant m_a^2.$$

Ezek az összefüggések természetesen elfajuló ANC és BMC háromszögekre is teljesülnek. Adjuk össze a kapott egyenlőtlenségeket:

$$m_a^2+NC^2+m_b^2+MC^2\leqslant m_b^2+m_a^2,$$

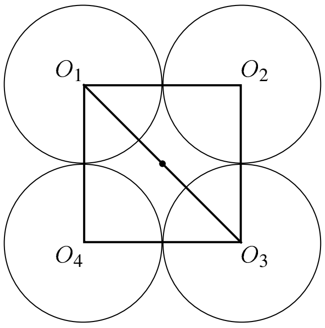
amiből következik: $NC^2+MC^2\leqslant0$. Ez pontosan akkor lehetséges, ha $NC=MC=0$, és így $\gamma=90^\circ$, továbbá $m_a=b$ és $m_b=a$. Ezért a feltételeket figyelembe véve $b\geqslant a$ és $a\geqslant b$, amiből $a=b$. A háromszög tehát derékszögű és egyenlő szárú, ezért a szögei: 90°, 45°, 45°.

Breuer János (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gimn., 9. o.t.)

214 dolgozat érkezett. 7 pontot kapott Gyenes Zoltán és Máthé András, 6 pontot Nagy Tamás és Varjú Péter. 5 pontos 128, 4 pontos 18, 3 pontos 9, 2 pontos 12, 1 pontos 15, 0 pontos 13 dolgozat.

Gy. 3197. *Egy vízszintes síkra négy, egymást érintő r sugarú gömböt helyezünk el úgy, hogy középpontjaik négyzetet alkossanak. A négy gömbre ráteszünk egy ötödik r sugarú gömböt, amelyik mind a négy másikat érinti. Milyen távolságra van a síktól az ötödik gömb legmagasabban lévő pontja?* (**H**)

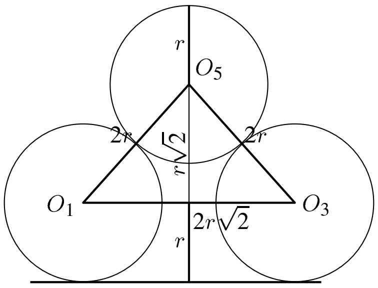
I. megoldás. A vízszintes síkon lévő négy gömb bármelyikéről azt mondhatjuk, hogy két, vele „szomszédos" gömböt érint, a negyedikkel pedig „szemben" van. Legyen a vízszintes síkon lévő két szemközti gömb középpontja O_1, O_3, az ötödiké pedig O_5 a két ábra szerint felül, illetve oldalnézetben. Egy $2r$ oldalú négyzet átlójaként $O_1O_3=2r\sqrt{2}$. Az $O_1O_3O_5$ háromszög egyenlő szárú, alapja O_1O_3, szárainak hossza pedig $2r$. Ezért az alaphoz tartozó magassága $r\sqrt{2}$. Így az ötödik gömbnek a legmagasabban lévő pontja a vízszintes síktól $r\sqrt{2}+2r$ távolságra van.



1. ábra

Tóth János Pál (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9.o.t.)

II. megoldás. Vegyünk fel egy x, y, z térbeli koordináta-rendszert úgy, hogy a vízszintes sík a $z=0$ legyen. Ha $r=1$, akkor a négy gömb középpontja pl. az $(1;1;1)$, $(-1;1;1)$, $(-1;-1;1)$ és $(1;-1;1)$ lehet, amikor az ötödik gömb középpontja a z tengelyen van. Legyen ez a középpont $(0;0;z_0)$. Mivel az ötödik gömb érinti az $(1;1;1)$ középpontú gömböt, a távolságképlet alapján: $1^2+1^2+(z_0-1)^2=2^2$, amiből $z_0=1+\sqrt{2}$.



2. ábra

Tetszőleges r esetén $z_0=(1+\sqrt{2})\cdot r$. Az ötödik gömb legmagasabban lévő pontja a vízszintes síktól így $z_0+r=r\sqrt{2}+2r$ távolságra van.

Zsbán Ambrus (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8.o.t.)

310 dolgozat érkezett 6 pontot kapott Máthé András. 5 pontos 156, 4 pontos 98, 3 pontos 25, 2 pontos 9, 1 pontos 5, 0 pontos 13, nem versenyszerű 3.

Gy. 3200. *Legyen H a $\{0,1,2,\ldots,1998\}$ halmaznak egy 1000 elemű részhalmaza. Bizonyítsuk be, hogy H-nak vannak olyan a, b nem feltétlenül különböző elemei, amelyekre $a+b$ értéke 2-hatvány.*

Megoldás. Megpróbálunk minél nagyobb részhalmazt kiválasztani úgy, hogy semelyik két elem összege ne legyen 2-hatvány, és megmutatjuk, hogy ez a részhalmaz nem lehet ezer- vagy többelemű.

Az nyilvánvaló, hogy a részhalmaznak nem lehet eleme egyetlen 2-hatvány sem, mert akkor a-nak és b-nek is azt választva az $a+b$ összeg is 2-hatvány lesz. Képezzük most a következő számpárokat:

1. $(50, 1998)$; $(51, 1997)$; $\ldots$; $(1023, 1025)$ – ez 974 pár.

2. $(15, 49)$; $(16, 48)$; $\ldots$; $(31, 33)$ – ez 17 pár.

3. $(2, 14)$; $(3, 13)$; $\ldots$; $(7, 9)$ – ez 6 pár.

Ezzel minden számot párokba soroltuk, kivéve néhány 2-hatványt (1024, 32, 8, 1), mert azok nem lehetnek a részhalmaz elemei, valamint a nullát. (Könnyen meggyőződhetünk, hogy minden számot besoroltunk valahová, mert $2(974+17+6)+4+1=1999$.) Látható, hogy az egy párba sorolt számok összege 2-hatvány: 2048, 64, illetve 16. Emiatt egy párból egyszerre csak egy szám lehet a részhalmazunkban. Így a H elemszámának maximuma, beleszámítva a nullát is: $974+17+6+1=998<1000$. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Papp Dávid (Budapest, Szent István Gimn., 10. o.t.)

98 dolgozat érkezett. 6 pontos Harangi Viktor megoldása. 5 pontot kapott 70, 4 pontot 16, 3 pontot 3, 2 pontot 2, 1 pontot 4, 0 pontot 2 beküldő.

Gy. 3202. *Daraboljunk fel egy n cm élű tömör kockát 1 cm élű kockákra (n természetes szám). Mely n esetén lehet a kapott kis kockákból $2n$ cm élű kockát összeállítani, ha megengedjük, hogy a kocka belsejében üreg is lehessen?*

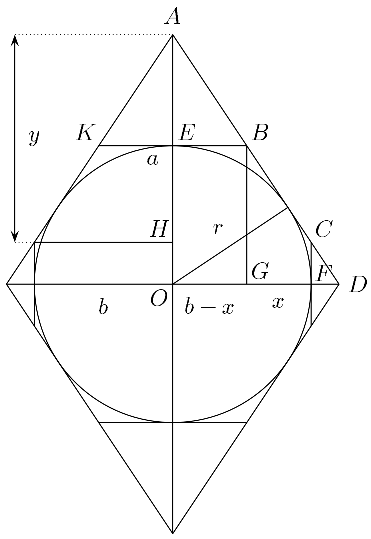
Megoldás. Az n cm élű feldarabolás után szétesik n^3 számú 1 cm élű kockára. A $2n$ cm élű kocka akkor állítható össze a feltételeknek megfelelően, ha a felszínét alkotó 1 cm élű négyzetlapok mindegyikére illeszkedik kis kocka. Ez akkor teljesül, ha $n^3 \geqslant (2n)^3-(2n-2)^3$, azaz $(2n-2)^3 \geqslant 7n^3$. Mivel az $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ függvény kölcsönösen egyértelmű, előbbi egyenlőtlenségünk pontosan akkor igaz, ha $2n-2 \geqslant n\sqrt[3]{7}$, amiből $n \geqslant \dfrac{2}{2-\sqrt[3]{7}} \approx 22{,}97$. Ezért a $2n$ cm élű kocka a kívánt módon akkor állítható össze, ha n legalább 23.

Bajusz Csaba (Szeged, Radnóti M. Gimn., 10. o.t.)

175 dolgozat érkezett. 6 pontos Börzsönyi Ádám, Harangi Viktor és Venter György megoldása. 5 pontos 52, 4 pontos 55, 3 pontos 33, 2 pontos 8, 1 pontos 14, 0 pontos 7, nem versenyszerű 3 dolgozat.

Gy. 3203. *Egy rombusz átlóinak hossza $2a$, illetve $2b$. A beírt körnek az átlókkal párhuzamos érintői és a rombusz oldalai egy nyolcszöget határoznak meg. Fejezzük ki a nyolcszög területét a-val és b-vel.*

I. megoldás. A nyolcszög t területét úgy fogjuk kiszámítani, hogy a rombusz $T=2ab$ területéből kivonjuk az érintők által levágott négy háromszög területét. Használjuk az *ábra* jelöléseit. Legyen az AEB háromszög területe t_1, a CFD háromszögé t_2. Könnyen látható, hogy $t_1=\dfrac{(b-x)(a-r)}{2}$ és $t_2=\dfrac{(a-y)(b-r)}{2}$. A párhuzamos szelők tétele szerint $\dfrac{x}{r}=\dfrac{b}{a}$, amiből $x=\dfrac{br}{a}$, és ugyanígy $y=\dfrac{ar}{b}$. Tekintve, hogy a rom-



busz oldala $\sqrt{a^2+b^2}$, az AOD háromszög kétszeres területét kétféleképpen kiszámítva: $ab=r\sqrt{a^2+b^2}$, tehát $r=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Ezekkel az értékekkel az érintők által levágott négy háromszög területének összege:

$$4t_1+4t_2=2\left[(a-r)\left(b-\frac{br}{a}\right)+(b-r)\left(a-\frac{ar}{b}\right)\right]=$$

$$=2\left(2ab-2ar-2br+r^2\frac{a^2+b^2}{ab}\right)=$$

$$=2\left(2ab-2(a+b)\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{a^2+b^2}{ab}\right)=2\cdot\left(3ab-2ab\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

A nyolcszög területe:

$$t=T-(4t_1+4t_2)=2ab-2\cdot\left(3ab-2ab\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=4ab\left(\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}-1\right).$$

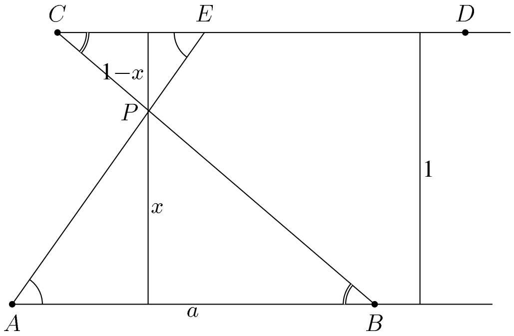
Csirmaz Előd (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.)
Siklósi Dávid (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.)

II. megoldás. Az érintők levágta szemközti háromszögeket összetolva az eredeti rombuszhoz hasonló rombuszokat kapunk. Ismeretes, hogy hasonló alakzatok területének aránya egyenlő a hasonlóság arányának négyzetével. Ennek alapján az AKB háromszögből és OD-re vonatkozó tükörképéből kialakuló rombusz $4t_1$ területe a következőképpen nyerhető: $\dfrac{4t_1}{T}=\left(\dfrac{a-r}{a}\right)^2$, ahonnan $4t_1=2ab\left(\dfrac{a-r}{a}\right)^2$, ahol felhasználtuk, hogy $T=2ab$. Hasonlóan kapjuk: $4t_2=2ab\left(\dfrac{b-r}{b}\right)^2$. A nyolcszög területe: $t=$

$=2ab\left[1-\left(\dfrac{a-r}{a}\right)^2-\left(\dfrac{b-r}{b}\right)^2\right]$, amiből $r=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ behelyettesítése után némi számolással az első megoldásban nyert eredményt kapjuk.

148 dolgozat érkezett. 5 pontos 101, 4 pontos 16, 3 pontos 13, 2 pontos 9, 1 pontos 7, 0 pontos 2.

Gy. 3204. *Az AB és CD szakaszok párhuzamosak. A BC szakasz egy belső pontja P, az AP egyenes a CD egyenest E-ben metszi. Hogyan kell a P pontot megválasztani, hogy az APB és CPE háromszögek területének összege a lehető legkisebb legyen?*



Megoldás. Az *ábrán* az AB szakasz hosszát a-val, P és AB távolságát x-szel jelöltük, a két párhuzamos egyenes távolsága pedig legyen 1. Az ABP és ECP háromszögek szögei páronként megegyeznek, tehát ezek a háromszögek hasonlók. Ezért $CE=a\dfrac{1-x}{x}$. Így a háromszögek területeinek T összege:

$$T=\frac{ax}{2}+\frac{a(1-x)^2}{2x}=\frac{a}{2}\cdot\frac{2x^2-2x+1}{x},$$

és mivel P belső pont, $0<x<1$. T pontosan akkor lesz a legkisebb, amikor a $\dfrac{2x^2-2x+1}{x}$ tört a legkisebb.

$$\frac{2x^2-2x+1}{x}=2x+\frac{1}{x}-2\geqslant 2\sqrt{2x\cdot\frac{1}{x}}-2=2\sqrt{2}-2,$$

ahol a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből azt kaptuk, hogy a tört értéke biztosan nem kisebb a $2\sqrt{2}-2$ értéknél. Az is következik, hogy ezt a minimumot meg is kapjuk, ha $0<x<1$: ha $2x=\dfrac{1}{x}$, akkor $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Ez a feltétel a P pont helyzetét egyértelműen határozza meg a BC szakaszon. Továbbá – bár ezt a feladat nem kérdezi – a T minimumát is megadhatjuk: $T_{\min}=a(\sqrt{2}-1)$.

Papp Dávid (Budapest, Szent István Gimn., 10. o.t.)

122 dolgozat érkezett. 5 pontos 39, 4 pontos 28, 3 pontos 11, 2 pontos 13, 1 pontos 11, 0 pontos 18, nem versenyszerű 2 dolgozat.

Gy. 3207. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy szám felírható $3a^2+32b^2$ alakban, ahol a és b természetes számok, akkor a 97-szerese is felírható ilyen alakban.*

Litván versenyfeladat

Megoldás. Hajtsuk végre a következő átalakításokat:

$$(3a^2+32b^2)\cdot 97=(3a^2+96\cdot 32b^2)+(96\cdot 3a^2+32b^2)=$$
$$=3(a^2+32^2b^2+2\cdot 32ab)+32(3^2a^2+b^2-2\cdot 3ab)=3(a+32b)^2+32(3a-b)^2.$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Mások a $3(a-32b)^2+32(3a+b)^2$ felbontást alkalmazták. A fenti ötlettel belátható, hogy általában egy ka^2+mb^2 alakú szám $(km+x^2)$-szerese ugyancsak felírható ka^2+mb^2 alakban. Az is nyilvánvaló, hogy az x^2-szerese is. Sőt, az alábbi átalakításokkal beláthatjuk, hogy ha k négyzetszám és osztója m-nek, akkor a (kx^2+my^2)-szerese is: (x, y tetszőleges pozitív egészek)

$$(ka^2+mb^2)(kx^2+my^2)=$$
$$(k^2a^2x^2+m^2b^2y^2+2kmabxy)+(kma^2y^2+kmb^2x^2-2kmabxy)=$$
$$=k\left(\sqrt{k}ax+\frac{m}{\sqrt{k}}by\right)^2+m\left(\sqrt{k}ay-\sqrt{k}bx\right)^2.$$

(Az idei Nemzetközi Magyar Matematikaverseny kilencedik évfolyamos feladata volt bizonyítani ezt $k=1$ és $m=2$-re.) Nyitott még a kérdés, hogy vajon van-e olyan k és m, amelyre létezik megfelelő szorzó, amelyik nem áll elő a fenti három formula egyikével sem (beleszámítva a lehetséges kombinációkat, pl. a $z^2(km+x^2)$-szeres számokat is), semmilyen x-szel és y-nal.

Papp Dávid (Budapest, Szent István Gimn., 10. o.t.)

95 dolgozat érkezett. 7 pontot kapott Baharev Ali, Kiss 345 Gergely és Papp Dávid. 6 pontot Bajusz Csaba, Kisfügedi Viktória, Lábó Eszter, Lábó Melinda, Lovrics Anna, Lovrics Klára, Németh Lajos, Sipos Ádám, Tran Thanh Long és Zábrádi Gergely. 5 pontos 76, 4 pontos 2, 1 pontos 1, 0 pontos 3 dolgozat.

Gy. 3208. *Oldjuk meg az egész számok halmazán az*

$$x(x-y)+y(y-z)+z(z-x)=1$$

egyenletet.

Megoldás. Az egyenletet átalakítva:

$$1=x^2-xy+y^2-yz+z^2-zx,$$
$$2=2x^2-2xy+2y^2-2yz+2z^2-2zx=$$
$$=(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)=$$
$$=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2.$$

Mivel egész számokról van szó, azért ez csak akkor lehetséges, ha két négyzetnek 1, a harmadiknak pedig 0 az értéke. Vagyis x, y és z közül kettő egyenlő, a harmadik pedig ennél a közös értéknél 1-gyel nagyobb vagy kisebb.

Bíró Anna Mária (Budapest, Jedlik Á. Gimn., 10. o.t.)

150 dolgozat érkezett. 7 pontot kapott Máthé András, 6 pontot Bárány Zsófia, Kiss 345 Gergely és Nagy Tamás. 5 pontos 91, 4 pontos 23, 3 pontos 18, 2 pontos 4, 1 pontos 7, 0 pontos 3 dolgozat.

Gy. 3209. *Mely $p(x)$ polinomra teljesül az*

$$(x-16)p(2x)=16(x-1)p(x)$$

egyenlőség? (**H**)

Ír versenyfeladat

Megoldás. $x=16$ esetén a bal oldal 0, így a jobb oldalnak is 0-nak kell lennie. Mivel $16(16-1)\neq 0$, ezért úgy $p(16)=0$, vagyis a $p(x)$ polinom $(x-16)q(x)$ alakú. Ezt behelyettesítve:

$$(x-16)(2x-16)q(2x)=16(x-1)(x-16)q(x),$$
$$(2x-16)q(2x)=16(x-1)q(x),$$
$$(x-8)q(2x)=8(x-1)q(x).$$

A fentiekhez hasonló módon kiemelhetünk $(x-8)$-at, $(x-4)$-et, végül $(x-2)$-t:

$$q(x)=(x-8)r(x);\qquad (x-4)r(2x)=4(x-1)r(x),$$
$$r(x)=(x-4)s(x);\qquad (x-2)s(2x)=2(x-1)s(x),$$
$$s(x)=(x-2)t(x);\qquad (x-1)t(2x)=(x-1)t(x).$$

Tehát valamely $t(x)$ polinomra $t(2x)=t(x)$. Ekkor nyilván $t(1)=t(2)=t(4)=t(8)=\ldots=c$ konstans, tehát a $t(x)-c$ polinomnak végtelen sok megoldása sok gyöke van.

Ez csak úgy lehetséges, hogy $t(x)-c\equiv 0$, azaz $t(x)\equiv c$. Ekkor:

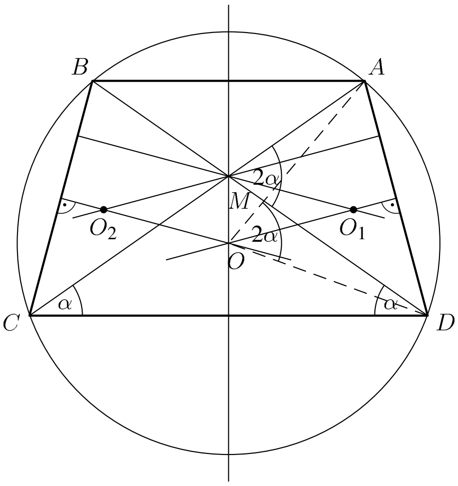
$$s(x)=c(x-2),\quad r(x)=c(x-2)(x-4),\quad q(x)=c(x-2)(x-4)(x-8),$$
$$p(x)=c(x-2)(x-4)(x-8)(x-16).$$

Az ilyen alakú polinomokra valóban teljesül a feladatban megkövetelt egyenlőség.

109 dolgozat érkezett. 6 pontos Gerencsér Balázs, Máthé András és Papp Dávid megoldása. 5 pontot kapott 39, 4 pontot 31, 3 pontot 14, 2 pontot 8, 1 pontot 5, 0 pontot 9 beküldő.

Gy. 3210. *A húrtrapézt két átlója négy háromszögre bontja. Bizonyítsuk be, hogy bármelyik háromszög köré írt kör középpontja rajta van az átlók metszéspontjából a trapéz oldalaira állított merőleges egyenesek valamelyikén.*

Megoldás. Legyen a trapéz köré írt kör középpontja O, az átlók metszéspontja M, az AMD, illetve BMC háromszögek körülírt körének középpontja pedig O_1, illetve O_2. A további jelölések az *ábrán* találhatók. Az ABM és CDM háromszögekre a feladat állítása nyilvánvaló. A CDM háromszög külső szögeként $AMD\sphericalangle=2\alpha$, az AD íven nyugvó középponti szög $AOD\sphericalangle=2\alpha$, ezért az A, M, O, D pontok egy körön vannak, amelynek középpontja jelölésünk szerint O_1. Ezekből következik, hogy $O_1M=O_1O$. Hasonlóan megmutatható, hogy $O_2M=O_2O$, és mivel MO az ábra szimmetriatengelye, az OO_1MO_2 négyszög rombusz. A rombusz OO_1 oldala merőleges AD-re, ezért MO_2 is merőleges AD-re.



Hasonlóan láthatjuk, hogy MO_1 merőleges BC-re.

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

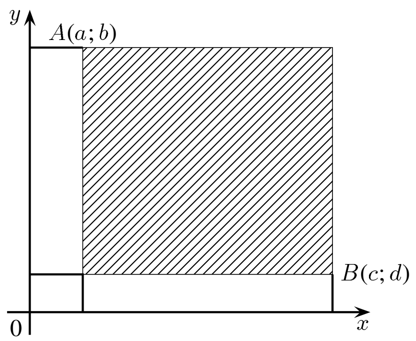
Tolvaj Nándor (Budapest, Árpád Gimn., 10. o.t.)

107 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Ambrus Gergely, Andrássy Zoltán, Baharev Ali, Buruzs Ádám, Gyenes Zoltán, Győri Nikolett, Hegedűs Ákos, Horváth Hedvig, Kiss 345 Gergely, Lábó Eszter, Lábó Melinda, Máthé András, Nagy Gergely, Nagy Tamás, Tolvaj Nándor, Vitéz Ildikó és Zalán Péter. 4 pontos 27, 3 pontos 33, 2 pontos 8, 1 pontos 19, 0 pontos 3 dolgozat.

Gy. 3211. *Végtelen sok téglalapot úgy helyeztünk el egy derékszögű koordinátarendszerben, hogy mindegyiknek egyik oldala az x, egy másik oldala az y tengelyre illeszkedik. A téglalapok origóval szemközti csúcsának koordinátái pozitív egész számok. Bizonyítsuk be, hogy van a téglalapok között két olyan, amelyek közül az egyik tartalmazza a másikat.*

Megoldás. A feladat állítását indirekt úton igazoljuk. Tegyük fel, hogy nincs két olyan téglalap, amelyek közül az egyik tartalmazza a másikat. Megmutatjuk, hogy ez esetben a téglalapok száma csak véges lehet, ami ellentmondás.

A feltételekből következik, hogy a téglalapok az első síknegyedben helyezkednek el. Tekintsük azt a téglalapot, amelyikben az origóval szemközti csúcs x koordinátája a legkisebb. (Ilyen biztosan létezik, mert pozitív egészekből álló halmazban mindig van legkisebb elem.) Két ilyen téglalap nem létezhet, mert akkor egyikük tartalmazná a másikat, és ez ellentmond indirekt feltevésünknek. Hasonlóan kiválasztható egyetlen olyan téglalap, amelyben az origóval átellenes csúcs y koordinátája minimális. *Ábránkon* ennek a két téglalapnak az origóval szemközti csúcsát $A(a;b)$, illetve $B(c;d)$-vel jelöltük. Ha volna olyan téglalap, amelyben az origóval szemközti csúcs y koordinátája legalább b, akkor az tartalmaz-



ná az A csúcsú téglalapot, de ez feltevésünk miatt nem lehetséges. Hasonlóan nem lesz olyan téglalap sem, ahol az origóval szemközti csúcs x koordinátája legalább c. A többi téglalap origóval szemközti csúcsa tehát csak a bevonalkázott nyitott téglalaplemezen lehet, ami véges sok eset. Ez ellentmondás, amiből következik a feladat állítása.

Illés Balázs (Jászberény, Liska J. Erősáramú Szki. és Gimn., 10. o.t.)
Papp Dávid (Budapest, Szent István Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzések. *Erdei Zsuzsa* (Hajduszoboszló, Hőgyes E. Gimn., 8. o.t.) és *Gerencsér Balázs* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.) a következőket állapítja meg:

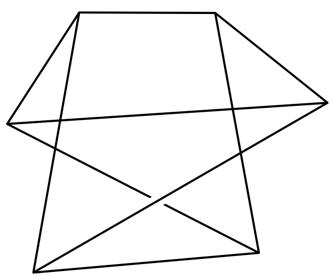
1. A feladat állítása akkor is igaz, ha a téglalapok origóval szemközti csúcsának koordinátái tetszőleges egészek.

2. Ha az origóval szemközti csúcs koordinátáinak legalább egyike racionális szám is lehet, akkor a feladat állítása már nem igaz. Tekintsük az $x \mapsto \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ függvény grafikonjának pozitív egész abszcisszájú pontjait. Ezek a pontok legyenek az origóval szemközti téglalapcsúcsok. Így végtelen sok téglalapot helyeztünk el, és nincs két olyan, amelyek közül az egyik tartalmazná a másikat.

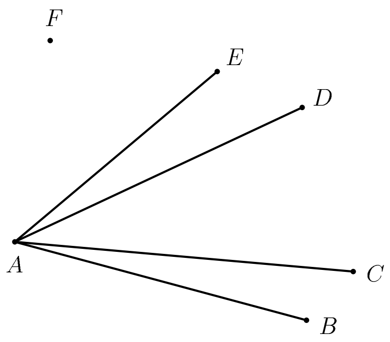
115 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Erdei Zsuzsa és Papp Dávid. 5 pontos 82, 4 pontos 10, 3 pontos 4, 2 pontos 1, 1 pontos 1, 0 pontos 11, nem versenyszerű 4 dolgozat.

Gy. 3212. *A sík* 6 *adott pontja közül semelyik három nincs egy egyenesen. A pontpárokat összekötő szakaszok közül hányat kell meghúzni ahhoz, hogy biztosan legyen olyan háromszög, amelynek csúcsai az adott pontok közül valók?*

Megoldás. Az *1. ábrán* látható, hogy az összekötő szakaszok közül 9 meghúzása nem elegendő. A 9 szakasz még nem hoz létre olyan háromszöget, amelynek csúcsai az adott pontok közül valók.



1. ábra



2. ábra

Könnyű látni, hogy összesen $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ szakasz megrajzolása lehetséges. Húzzunk meg ezek közül 10-et. A 10 szakasznak összesen 20 végpontja van. Ha a 6 adott pont mindegyikéből legfeljebb 3 szakasz indulna ki, akkor összesen legfeljebb $6 \cdot 3 = 18$ végpont lehetne. Tekintve, hogy 20 végpont van, a 6 pont között van legalább egy olyan, amelyikből legalább 4 szakasz indul ki. A *2. ábrán* ez a pont A, az A-ból induló szakaszok másik végpontja pedig B, C, D, E. Ha azt akarjuk, hogy ne keletkezzen háromszög, akkor a BC, BD, BE, CD, CE, DE szakaszokat nem húzhatjuk meg. Ezért – mivel összesen 15 szakasz van – csak 9 lenne húzható úgy, hogy ne legyen olyan háromszög, amelynek csúcsai a 6 adott pont közül valók. A 10 szakasz tehát már létrehoz legalább egy háromszöget.

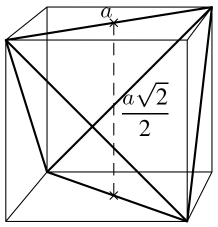
Tóth Ágnes (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., 8. o.t.)

119 dolgozat érkezett. 6 pontos Ambrus Gergely, Bárány Zsófia, Kiss 345 Gergely, Máthé András, Papp Dávid, Tran Thanh Long, Ureczky Judit és Zábrádi Gergely megoldása. 5 pontot kapott 39, 4 pontot 16, 3 pontot 11, 2 pontot 8, 1 pontot 32, 0 pontot 5 beküldő.

Matematika feladatok megoldásai

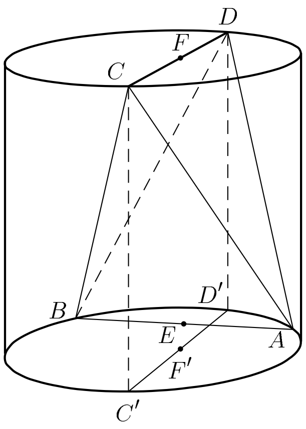
F. 3207. *Egy* 2 *egységnyi élű szabályos tetraéder két-két csúcsa egy egyenes körhenger alap-, illetve fedőlapjának kerületén van. Mekkora a körhenger térfogata?*

Megoldás. Ismert, hogy egy szabályos tetraéder belefoglalható egy kockába úgy, hogy a tetraéder két-két csúcsa a kocka szemközti lappárjain helyezkedik el, a tetraéder élei pedig a kocka egy-egy lapjának egy-egy lapátlóját alkotják (*1. ábra*). Ebből nyilvánvaló, hogy a szabályos tetraéder szemközti élei merőlegesek egymásra, továbbá ha a tetraéder élhossza a, akkor két szemközti él felezőpontját összekötő szakasz hossza $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, és ez az összekötő szakasz merőleges azokra a síkokra, amelyek mindkét éllel párhuzamosak.



1. ábra

Ezeket a tulajdonságokat felhasználva egyszerűen meghatározhatjuk a körhenger méreteit. Legyen a tetraéder A és B csúcsa a körhenger alap-, C és D csúcsa pedig a fedőlapján. A CD él alaplapon lévő merőleges vetülete legyen $C'D'$ (*2. ábra*). Mivel a körhenger egyenes, azért C' is és D' is az alaplap kerületén van, továbbá $C'D' = CD = AB$. A tetraéderben AB és CD szemközti élek, ezért az AB és CD felezőpontjait, E-t és F-et összekötő szakasz merőleges azokra a síkokra, amelyek AB-vel is és CD-vel is párhuzamosak; vagyis merőleges a körhenger alap-, illetve fedőlapjára. Ez egyrészt azt jelenti, hogy $EF = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ a körhenger alkotójának a hosszával egyezik meg, másrészt



2. ábra

F-nek az alaplapon lévő F' merőleges vetülete éppen E. De egy szakasz felezőpontjának merőleges vetülete felezi a szakasz merőleges vetületét, ezért E felezi $C'D'$-t is. Vagyis a henger k alapkörének kerületén az A, B, C' és D' pontok úgy helyezkednek el, hogy $AB = C'D'$, $AB \perp C'D'$, továbbá AB és $C'D'$ felezőpontja (azaz E és F') egybeesik (nem úgy, mint a 2. ábrán). Mivel egy kör egy húrjának felezőpontja rajta van a kör középpontjából a húrra állított merőlegesen, azért AB is és CD is az alap-, illetve a fedőkör egy-egy átmérője kell, hogy legyen.

Tehát a feladatban szereplő egyenes körhenger alapkörének sugara $r = \dfrac{AB}{2} = 1$ egység, alkotójának hossza $m = \sqrt{2}$ egység, így térfogata $V = r^2\pi m = \sqrt{2}\pi \approx 4{,}44$ térfogategység.

152 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Mecz Balázs. 5 pontos 96, 4 pontos 29, 3 pontos 24, 2 pontos 2 dolgozat.

F. 3221. *Az $A_1A_2\dots A_n$ szabályos n-szög csúcsaira valamilyen sorrendben felírjuk az 1, 2, $\dots$, n számokat.*

a) *Mekkora lehet legfeljebb a szomszédos számok közötti különbségek abszolút értékeinek összege?*

b) *Ez a maximális összeg hányféle elrendezésnél fordulhat elő?*

Megoldás. a) Legyen az A_j csúcshoz írt szám a_j, továbbá $b_j = \max(a_{j+1}, a_j)$ és $c_j = \min(a_{j+1}, a_j)$. Ekkor ($a_{n+1} = a_1$ megállapodással):

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{j+1} - a_j| = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{j=1}^{n} c_j.$$

A b_1, b_2, $\dots$, b_n, c_1, c_2, $\dots$, c_n számok között az 1, 2, $\dots$, n számok mindegyike pontosan kétszer fordul elő.

Ezért páros n esetén:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \leqslant 2\left[\left(\frac{n}{2}+1\right) + \left(\frac{n}{2}+2\right) + \dots + n\right]$$

és

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \geqslant 2\left[1 + 2 + \dots + \frac{n}{2}\right].$$

Tehát

$$\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{j=1}^{n} c_j \leqslant 2\left[\left(\frac{n}{2}+1\right) + \left(\frac{n}{2}+2\right) + \dots + n\right] - 2\left[1 + 2 + \dots + \frac{n}{2}\right] =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} + 1 + n\right) - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \left(1 + \frac{n}{2}\right) = \frac{n^2}{2}.$$

Hasonlóan páratlan n-re:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{j=1}^{n} c_j \leqslant \left(2\left[\frac{n+1}{2}+1+\frac{n+1}{2}+2+\ldots+n\right]+\frac{n+1}{2}\right) -$$

$$- \left(2\left[1+2+\ldots+\frac{n+1}{2}-1\right]+\frac{n+1}{2}\right) = \frac{n^2-1}{2}$$

Megmutatjuk, hogy mindkét esetben állhat egyenlőség.

Az első esetben megfelel, ha a körre felírjuk a számokat az 1, $\frac{n}{2}+1$, 2, $\frac{n}{2}+2$, $\ldots$, $\frac{n}{2}$, n sorrendben, a második esetben pedig az 1, $\frac{n+3}{2}$, 2, $\frac{n+5}{2}$, $\ldots$, $\frac{n-1}{2}$, n, $\frac{n+1}{2}$ sorrend megfelelő.

b) Ha n páros, úgy maximális összeget kapunk, ha az $\frac{n}{2}$-nél nem nagyobb és az $\frac{n}{2}$-nél nagyobb számok váltogatják egymást: a $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{j=1}^{n} c_j$ összegben ugyanis csak ekkor szerepel minden $\frac{n}{2}$-nél nagyobb szám +2, és minden $\frac{n}{2}$-nél nem nagyobb szám -2 együtthatóval. A lehetőségek száma tehát:

$$n \cdot \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\ldots 1 \cdot 1 = 2\left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^2;$$

ugyanis az A_1-nél lévő számra n lehetőség van, ezek után az A_2-nél levőre $\frac{n}{2}$, az A_3-nál levőre $\frac{n}{2}-1$ és így tovább.

Ha n páratlan, egy kicsit másképpen számolunk. A $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{j=1}^{n} c_j = \frac{n^2-1}{n}$ egyenlőség akkor áll fenn, ha az elrendezésben minden $\frac{n+1}{2}$-nél kisebb számnak $\frac{n+1}{2}$-nél nagyobb szomszédja van és fordítva, továbbá $\frac{n+1}{2}$ egyik szomszédja nagyobb, a másik kisebb, mint $\frac{n+1}{2}$. Így a megfelelő elhelyezések száma $2n\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2$; ugyanis az $\frac{n+1}{2}$ elhelyezésre n lehetőségünk van, ezután pozitív irányban körüljárva a kört, a szomszédjára $n-1$ lehetőség van, majd pedig rendre $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-1}{2}-1$, $\frac{n-1}{2}-1$, $\frac{n-1}{2}-2$, $\frac{n-1}{2}-2$, $\ldots$, 1, 1 a lehetőségek száma.

Gyenes Zoltán (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján

53 dolgozat érkezett. 5 pontos Babos Attila, Bárány Kristóf, Csizmadia László, Dancsó Zsuzsanna, Devecsery András, Gyenes Zoltán, Hangya Balázs, Harangi Viktor, Juhász András, Keszegh Balázs, Kiss András Péter, Máthé András, Naszódi Gergely, Pap Júlia, Patakfalvi Zsolt, Szabadka Zoltán, Terpai Tamás, Végh A. László. 4 pontos 6, 3 pontos 8, 2 pontos 15, 1 pontos 3, 0 pontos 3 dolgozat.

F. 3222. *Legyen n prímszám. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az*

$$(1^n+2^n+\ldots+x^n)+(1^n+2^n+\ldots+(n-1)^n)=1^n+2^n+\ldots+(2n-1)^n$$

egyenletnek nincs pozitív egész megoldása.

Megoldás. Az egyenletet rendezve kapjuk, hogy

$$1^n+2^n+\ldots+x^n=n^n+(n+1)^n+\ldots+(2n-1)^n.$$

Ha $x\leqslant n$, akkor

$$1^n+2^n+\ldots+x^n<n^n+(n+1)^n+\ldots+(n+x-1)^n\leqslant$$
$$\leqslant n^n+(n+1)^n+\ldots+(2n-1)^n.$$

Másrészt, ha $x\geqslant 2n-1$, akkor

$$1^n+2^n+\ldots+x^n>n^n+(n+1)^n+\ldots+x^n\geqslant n^n+(n+1)^n+\ldots+(2n-1)^n.$$

Mindkét esetben ellentmondásra jutottunk, tehát ha van megoldás, akkor $n<x<2n-1$.

A $3>x>2$ egyenlőtlenségnek nincs egész megoldása, így feltehetjük, hogy $n>2$.

A kis Fermat-tétel szerint tetszőleges k egészre és n prímre $k^n\equiv k \pmod n$, azaz

$$\sum_{j=1}^{x} j^n\equiv\sum_{j=1}^{x} j=\frac{x(x+1)}{2}\pmod n,$$

továbbá

$$\sum_{j=n}^{2n-1} j^n\equiv\sum_{j=0}^{n-1} j^n\equiv\sum_{j=0}^{n-1} j=\frac{n(n-1)}{2}\equiv 0\pmod n.$$

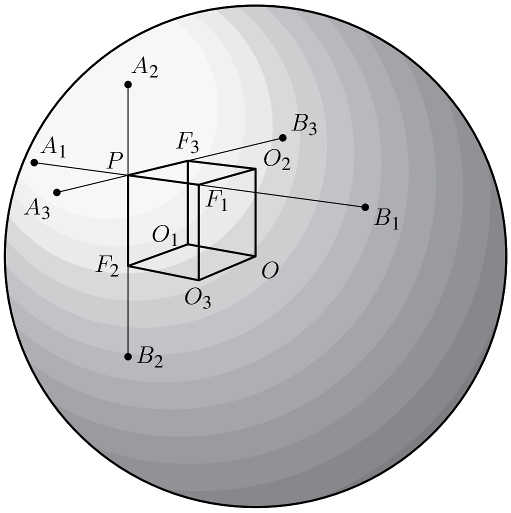
Így x-nek vagy $(x+1)$-nek oszthatónak kell lennie n-nel, hiszen n páratlan prím. Ez viszont nem lehet, mert mint láttuk: $n<x<2n-1$.

Juhász András (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t.)

60 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Baharev Ali, Bárány Kristóf, Barát Anna, Bíró Anikó, Boros M. Mátyás, Csikvári András, Csikvári Gábor, Gáspár Merse Előd, Harangi Viktor, Horváth 202 Gábor, Horváth 472 András, Juhász András, Kiss András Péter, Kunszenti-Kovács Dávid, Kutalik Péter, Lippner Gábor, Máthé András, Mecz Balázs, Naszódi Gergely, Páles Csaba, Papp Dávid, Pataki Péter, Szabadka Zoltán, Szabó 997 Péter, Székelyhidi Gábor, Terpai Tamás, Tóth 235 Ádám, Tran Thanh Long, Végh A. László, Zombori Tamás. 4 pontos 16, 3 pontos 8, 2 pontos 1, 1 pontos 2, 0 pontos 3 dolgozat.

F. 3231. *A g gömb egy rögzített belső P pontján átmenő h_1, h_2 és h_3 húrjai páronként merőlegesek egymásra. A húrok által meghatározott három sík egy-egy kört metsz ki a gömbből. Mutassuk meg, hogy a három kör területének összege nem függ a húrok helyzetétől.*

Megoldás. Jelöljük g középpontját O-val, sugarát r-rel, a h_i húr ($i=1$, 2, 3) végpontját A_i-vel és B_i-vel, felezőpontját F_i-vel, a húrpárok által meghatározott síkokkal a gömbből kimetszett körök középpontjait pedig O_1, O_2 és O_3-mal (lásd az *ábrát*).



Tudjuk, hogy egy kör/gömb húrjának felezőmerőleges egyenese/síkja átmegy a kör/gömb középpontján. Mivel h_1, h_2 és h_3 páronként egymásra merőlegesek, ezért ebből következik, hogy az $OO_2F_1O_3O_1F_3PF_2$ test téglatest. Ebben OP testátló, tehát

(1) $$OP^2 = OO_1^2 + OO_2^2 + OO_3^2.$$

A feladatban szereplő három kis kör területének összege

(2) $$O_2A_1^2 \cdot \pi + O_3A_2^2\pi + O_1A_3^2\pi.$$

Viszont az OO_i egyenesek merőlegesek e körök síkjaira, ezért Pitagorasz tétele szerint

$$OO_2^2 + O_2A_1^2 = OA_1^2, \qquad OO_3^2 + O_3A_2^2 = OA_2^2 \quad \text{és} \quad OO_1^2 + O_1A_3^2 = OA_3^2.$$

Mivel $OA_i = r$, ezért ezekből az egyenletekből és (1)-ből kapjuk, hogy

(3) $$O_2A_1^2 + O_3A_2^2 + O_1A_3^2 = OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2 - (OO_2^2 + OO_3^2 + OO_1^2) = 3r^2 - OP^2.$$

A három kör területösszege (2) és (3) szerint $(3r^2 - OP^2) \cdot \pi$, ami állandó, mert r is és OP is állandó.

Kis-Tóth Ágnes (Kaposvár, Táncsics M. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

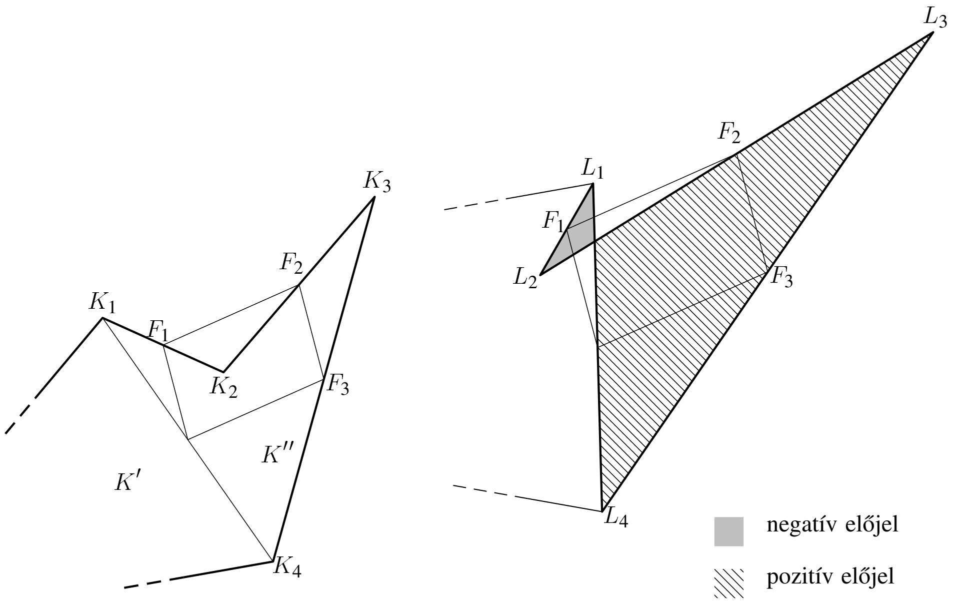
60 dolgozat érkezett. 5 pontos Baharev Ali, Barát Anna, Bosznay Tamás, Csikvári András, Dancsó Zsuzsanna, Gáspár Merse Előd, Gelencsér Gábor, Györkei Györgyi, Hangya Balázs, Harangi Viktor, Hegedűs 396 Péter, Hermann György, Homolya Dániel, Horváth 472 András, Juhász András, Keszegh Balázs, Kis-Tóth Ágnes, Kitlei Róbert, Kunszenti-Kovács Dávid, Less Áron, Lippner Gábor, Mansur Boase, Máthé András, Mizda Roland, Pál András, Páles Csaba, Pogány Ádám, Sarlós Ferenc, Szabadka Zoltán, Szabó 997 Péter, Szép László, Terpai Tamás, Tisch Dávid, Tran Thanh Long, Vágvölgyi Péter, Vaik István, Végh A. László, Vidor Anna, Zábrádi Gergely és Zombori Tamás megoldása. 4 pontot kapott 9, 3 pontot 2, 2 pontot 7, 1 pontot 1, 0 pontot 1 beküldő.

F. 3235. *Két* 1998*-szög oldalfelező pontjai egybeesnek. Igaz-e, hogy egyenlő a területük?*

Megoldás. Megmutatjuk, hogy ha K és L olyan $2n$ oldalú sokszögek ($n \geqslant 2$ egész), amelyek oldalfelező pontjai egybeesnek, akkor a két sokszögnek egyenlő a területe. Állításunkat n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.

Ha $n=2$, akkor K és L négyszögek. Tudjuk, hogy egy négyszög oldalfelező pontjai olyan paralelogrammát alkotnak, amelynek oldalai párhuzamosak a négyszög átlóival, hosszuk pedig az átlók hosszának fele. Ha tehát K és L oldalfelező pontjai egybeesnek, akkor K és L megfelelő átlói egyenlő hosszúak és párhuzamosak. Ebből viszont következik, hogy K és L egyenlő területűek, mert ismert, hogy ha egy négyszög átlóinak hossza e és f, az átlók szöge pedig φ, akkor a területe

$$T=\frac{e\cdot f\cdot\sin\varphi}{2}. \tag{1}$$



1. ábra *2. ábra*

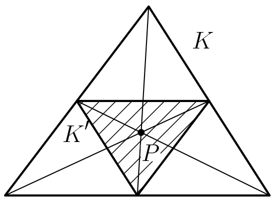
Tegyük most fel, hogy az állítást már beláttuk $2k$-szögekre, és legyen K és L két olyan $2(k+1)$-szög, amelyek oldalfelező pontjai egybeesnek. Jelöljük a sokszögek csúcsait $K_1, K_2, \ldots, K_{2k+2}$, illetve $L_1, L_2, \ldots, L_{2k+2}$-vel úgy, hogy a K_iK_{i+1} és az L_iL_{i+1} oldalak közös felezőpontja legyen F_i ($i=1, 2, \ldots, 2k+2$). Rajzoljuk meg a sokszögekben a K_1K_4 és az L_1L_4 átlókat. E két átló a $K_1K_2K_3K_4$ és az $L_1L_2L_3L_4$ – esetleg hurkolt – négyszögeknek egy-egy oldala. Mivel a két négyszög másik három-három oldalának felezőpontjai egybeesnek, és a négyszögek oldalfelező pontjai paralelogrammát alkotnak, amit három csúcsa egyértelműen meghatároz, ezért K_1K_4 és L_1L_4 felezőpontjai is egybeesnek. Vagyis a két átló a K és L $(2k+2)$-szögeket úgy osztja egy-egy K' és L' $2k$-szögre és a K'', valamint L'' négyszögekre, hogy azok oldalfelező pontjai egybeesnek. Ekkor viszont az indukciós feltevésünk szerint K' területe megegyezik L' területével, K'' területe pedig L'' területével. Ebből viszont következik, hogy K területe megegyezik L területével (a *2. ábrán* látható esetben L'' hurkolt négyszög, amelynek területét az (1) képlet előjelesen adja).

Ezzel beláttuk, hogy ha két páros oldalszámú sokszög oldalfelező pontjai egybeesnek, akkor a két sokszög területe egyenlő.

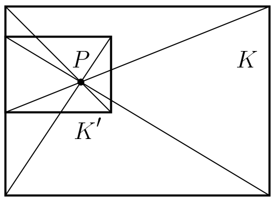
Megjegyzés. Páratlan oldalszámú sokszögek esetén több is igaz: ha két páratlan oldalszámú sokszög oldalfelező pontjai esnek egybe, akkor a két sokszög nemcsak egyenlő területű, hanem egybevágó is. Ezt az állítást is be lehet bizonyítani a megoldásunkban leírt „darabolós” módszerrel.

38 dolgozat érkezett. 6 pontos Terpai Tamás megoldása. 5 pontot kapott Baharev Ali, Bárány Kristóf, Bíró Ádám, Csikvári András, Győri Nikolett, Harangi Viktor, Horváth Hedvig, Juhász András, Keszegh Balázs, Kunszenti-Kovács Dávid, Lippner Gábor, Lovas Róbert, Máthé András, Páles Csaba, Pogány Ádám, Pszota Anikó, Szabadka Zoltán, Szabó 997 Péter, Székelyhidi Gábor, Taraza Busra, Tóth 235 Ádám, Tóth 370 Ágnes és Zombori Tamás. 4 pontos 2 3 pontos 9 2 pontos 1 1 pontos 1 0 pontos 1 dolgozat.

F. 3236. *Adott egy K konvex sokszög és a belsejében a P pont. Mutassuk meg, hogy van olyan irány, hogy az azzal párhuzamos egyenesek közül a P-n átmenőnek esik a leghosszabb darabja K belsejébe.*

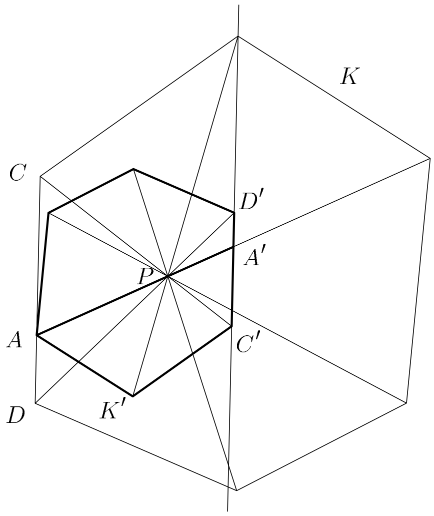


1. ábra



2. ábra

Megoldás. Tükrözzük K-t P-re, majd a tükörképet középpontosan kicsinyítsük P-ből úgy, hogy a kicsinyített K' sokszöget K tartalmazza, de K'-nek legyen egy olyan A csúcsa, amely K kerületén van. (Ez a tulajdonság L konvexsége miatt a kicsinyítés arányát egyértelműen meghatározza. Ugyanakkor előfordulhat, hogy K' több csúcsa – pl. ha K egy háromszög és P a súlypontja, (*1. ábra*) –, vagy esetleg egy egész oldala – (*2. ábra*) – K kerületére kerül.)



3. ábra

Megmutatjuk, hogy az AP irányú egyenesek közül AP-nek esik a leghosszabb darabja K belsejébe. Ehhez elegendő megmutatnunk azt, hogy az AP-vel párhuzamos egyenesek közül AP-nek esik a leghosszabb darabja K' belsejébe, mert a K-t K'-be vivő leképezés megtartja az egyenesek irányát és a szakaszok arányát. Mivel A rajta van K kerületén, ezért K-nak van (legalább) egy CD oldala, amely tartalmazza A-t. Legyen CD képe a K-t K'-be vivő leképezésnél $C'D'$ (*3. ábra*). Ekkor K' a CD egyenes által meghatározott félsíkok közül is, valamint a $C'D'$ egyenes által meghatározott félsíkok közül is teljes egészében abban a félsíkban van, amelyikben P, mert K' konvex. Azonban $C'D'$ definíciója miatt P benne van a CD és $C'D'$ egyenesek által határolt síkban, tehát K' is teljes egészében ebben a sávban van. Ha A' jelöli A képét a K-t K'-be vivő leképezésnél, akkor a P-n átmenő AA' szakaszra teljesül, hogy a K'-t tartalmazó CD és $C'D'$ párhuzamos egyenesek által meghatározott sáv határoló egyeneseinek egy-egy pontját köti össze, és teljes egészében K' belsejében van. Mivel K' a CD és a $C'D'$ egyenesek meghatározta sávban fekszik, azért minden, az AA'-vel párhuzamos egyenesből olyan szakaszt vág ki K', amely része egy AA' hosszúságú szakasznak. Az AP irány tehát valóban eleget tesz a feladat követelményének.

11 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Bárány Kristóf, Juhász András, Lippner Gábor, Nagy 333 Kálmán, Székelyhidi Gábor, Terpai Tamás, Végh A. László és Zombori Tamás. 3 pontos 1, 2 pontos 1, 0 pontos 1 dolgozat.

Negyedikesek figyelem!

Alkalmazott matematikus képzés az Eötvös Loránd Tudományegyetemen

A mai ipar és gazdaság termékeinek értékét jelentős mértékben meghatározza a bennük rejlő szellemi munka. Ezért a modern ipar igényli a matematika professzionális, nagy számítógépes háttér melletti alkalmazását új termékek kifejlesztésére, meglévő technológiák optimalizálására, marketing stratégiák kidolgozására. Nyugati egyetemeken képeznek ilyen célra szakembereket. A szak neve „technomatematikus", és az itt végzetteket az ipar szívesen alkalmazza. Az ELTE Természettudományi Karán 1996-ban újra megindult

alkalmazott matematikus szak

ezen követelményeket kielégítő, teljesen új tematikával. A szakon belül modern banki, biztosítási és tőzsdei, valamint műszaki és természettudományi folyamatok korszerű matematikai és számítástechnikai kezelésével ismertetjük meg a hallgatókat. Az ECMI (European Consortium for Mathematics in Industry) tapasztalataival támogatja ezt a szakot.

A szak olyan alkalmazott matematikusok képzését tűzi ki célul, akik: 1. mérnökökkel, közgazdászokkal és természettudományos szakemberekkel közösen tudnak dolgozni műszaki és gazdasági problémák megoldásán, ezen szakemberek nyelvét beszélik; 2. modern matematikai eljárások alkalmazásában gyakorlatuk van, képesek ezeket a mindenkori feladathoz illeszteni; 3. maguk is tudnak új matematikai módszereket és modelleket kifejleszteni; 4. a modern számítógépes eszközöket biztosan és célirányosan alkalmazzák.

Az alkalmazott matematikus szak anyaga négy részből áll: matematika, informatika, műszaki-mérnöki, valamint közgazdasági ismeretek. A matematika alapozása ezen képzésen belül azért különösen széleskörű, mert a jövendőbeli ipari fejlődésre csak így lehet felkészülni. A képzés fontos része az **ipari gyakorlat**, amely a 7–8. félévben teljesíthető.

Az **érettségizett fiatalok** az ELTE Természettudományos Karának felvételi eljárási rendjében (amely azonos a matematikus szakéval) nyerhetnek felvételt az alkalmazott matematikus szakra.

Részletesebb információt adunk a matematikus és az alkalmazott matematikus szakokról a TTK nyílt napján, december 8-án 14^{h}-tól a VIII. Múzeum krt. 4/A épület Szabó József termében.

A pontversenyben kitűzött C gyakorlatok (521–524.)

C. 521. 1512 Ft-unk van 2, 5, 10, 20, 50, 100 és 200 Ft-os címletekben. (Mindegyik előfordul.) A pénz 1512-féleképpen osztható el a jobb és a bal zsebünkbe, beleértve azt a két esetet is, amikor valamelyik zsebünk üres. Hány darabot tartalmaz az összeg az egyes címletekből? (Az azonos címletű pénzeket nem különböztetjük meg.)

Javasolta: *Bakonyi Gábor,* Budapest

C. 522. Keressük meg az $y=x^2$ egyenletű parabolának azokat az érintőit, amelyek 45°-os szöget zárnak be a fókuszpontból az érintési pontba húzott szakasszal.

C. 523. Egy R sugarú gömbből levágott gömbszeletet határoló gömbsüveg felszíne a gömbszeletet határoló körlap területének c-szerese ($c>1$). Mekkora a gömbszelet magassága?

C. 524. Az egyenlő szárú ABC háromszögben $AC=BC$. Adott az AB oldalon egy P pont úgy, hogy $ACP\sphericalangle=30^\circ$, valamint a háromszögön kívül egy Q pont úgy, hogy

$$CPQ\sphericalangle=CPA\sphericalangle+APQ\sphericalangle=78^\circ.$$

Az ABC és a QPB háromszög szögei fokokban kifejezve egészek. Mekkorák e két háromszög szögei?

Javasolta: *Müncz Márton,* Budapest

❄

Beküldési határidő: 1999. január 15.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest, Pf. 47. 1255

❄

A pontversenyben kitűzött gyakorlatok (3238–3245.) és feladatok (3256–3261.)

Gy. 3238. Hány dobókocka esetén a legnagyobb annak a valószínűsége, hogy a kockákat egyszerre feldobva pontosan egy hatos lesz a kapott számok között?

Általános iskolásoknak javasolt feladatok: **C. 521, C. 524, Gy. 3240, Gy. 3238, Gy. 3242.**

Gy. 3239. Határozzuk meg azokat az x,y,z egész számokat, amelyekre

$$(x-y-1)^3+(y-z-2)^3+(z-x+3)^3=18.$$

Javasolta: *Kovács Béla,* Szatmárnémeti

Gy. 3240. Egy 9×9-es sakktábla minden mezőjébe +1-et vagy -1-et írtunk. Első lépésként minden mezőbe beírjuk az élszomszédos mezőkben levő számok szorzatát. Ezt a lépést akárhányszor megismételhetjük. Igaz-e, hogy véges sok lépés után visszajutunk a kiindulási állapothoz?

Kínai versenyfeladat

Gy. 3241. Van-e az 1, 1, 2, 2, ..., 1998, 1998 számoknak olyan sorrendje, amelyben minden $1\leqslant n\leqslant 1998$-ra az n két előfordulása között pontosan n darab szám van? (**H**)

Gy. 3242. Egy konvex négyszög belsejében található olyan pont, amelyet a csúcsokkal összekötve négy egyenlő területű háromszöget kapunk. Bizonyítsuk be, hogy ez a pont rajta van a négyszög egyik átlóján.

Gy. 3243. Osszuk fel a síkot 1000 részre a lehető legkevesebb egyenes felhasználásával. (**H**)

Gy. 3244. Két hasonló és azonos körüljárású háromszög megfelelő csúcsait összekötő szakaszokat megfeleztük. Bizonyítsuk be, hogy ha ezek a felezőpontok háromszöget alkotnak, akkor ez a háromszög az eredetiekhez hasonló.

Gy. 3245. Melyik az a legkisebb k természetes szám, amelyre igaz a következő állítás? „Ha egy tetraéder élszögei között van k darab 60°-os, akkor a tetraéder csak szabályos lehet.”

❄

Beküldési határidő: 1999. január 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

❄

F. 3256. Legyenek x_1, x_2, ..., x_n pozitív valós számok, amelyek összege 1. Bizonyítsuk be, hogy ekkor:

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\ldots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}\geqslant\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}.$$

F. 3257. A $[-1,1]$ szakaszon értelmezett $x\mapsto 2x^3-2x$ függvény grafikonjának melyik két pontja van egymástól a legtávolabb?

F. 3258. Az (a_n) sorozat első eleme pozitív egész szám. A sorozat további elemeire

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{2}a_{n-1}, & \text{ha } a_{n-1} \text{ páros,}\\ 3a_{n-1}+1, & \text{ha } a_{n-1} \text{ páratlan.}\end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy a sorozat elemei között mindig található 4-gyel osztható szám.

F. 3259. Egy derékszögű háromszög α és β hegyesszögeire:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{tg}^3\beta=70.$$

Határozzuk meg a szögeket.

Javasolta: *Fitos László,* Esztergom

F. 3260. A sík $A_1, A_2, \ldots, A_n$, B és C pontjairól tudjuk, hogy

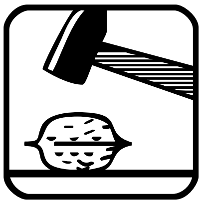
$$\sum_{i=1}^{n} A_iB=\sum_{i=1}^{n} A_iC=d,$$

továbbá a sík minden P pontjára igaz, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} A_iP\geqslant d.$$

Mutassuk meg, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontok egy egyenesen vannak.

F. 3261. Mutassuk meg, hogy ha a tér v_1, v_2, v_3, v_4 nem egy síkban lévő vektorainak összege 0, akkor létezik olyan tetraéder, amelynek S_1, S_2, S_3, S_4 lapjai merőlegesek a v_i vektorokra, és S_i területének mérőszáma megegyezik v_i hosszának mérőszámával.



A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (191–194.)

N. 191. Jelölje L_n a Lucas-sorozat n-edik elemét ($L_0=2$, $L_1=1$, $L_{n+1}=L_n+$ $+L_{n-1}$), és legyen $a_1, a_2, \ldots$ egész számokból álló olyan sorozat, amelyre tetszőleges pozitív egész n esetén

$$\sum_{d\mid n} a_d=L_n$$

teljesül. Igazoljuk, hogy tetszőleges n pozitív egészre $n\mid a_n$.

N. 192. A H halmaz elemei a pozitív egész számok halmazának bizonyos részhalmazai, közülük bármely két különbözőnek a metszete véges halmaz. Következik-e ebből, hogy H megszámlálható?

Javasolta: *Szabó Jácint,* Győr

N. 193. Bizonyítsuk be, hogy ha n kellően nagy pozitív egész, akkor létezik olyan p polinom, amelyre

$$|p(0)|>\frac{1}{10}\left(\binom{n}{1}|p(1)|+\binom{n}{2}|p(2)|+\ldots+\binom{n}{n}|p(n)|\right),$$

és a foka legfeljebb $n-\dfrac{1}{10}\sqrt{n}$.

N. 194. Megadható-e véges sok pozitív egész szám: $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ úgy, hogy

1) a belőlük készíthető, különböző tagokból álló összegek, beleértve az egytagú összegeket is, mind különbözők;
2) tetszőleges olyan $a_{n+1} > a_n$ egészre, amelyre az a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1} számokból készíthető összegek is mind különbözők, $a_{n+1} > 1998a_n$ teljesül?

Javasolta: *Kun Gábor,* Budapest

❄

Beküldési határidő: 1999. január 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS

(Volume 48. No. 9. December 1998)

New exercises for practice (see page 546): **C. 521.** An amount of 1512 forints is made up of HUF 2, 5, 10, 20, 50, 100 and 200 denominations (containing at least one of each). There are 1512 different ways to distribute this money between our left and right pockets, including the two cases when one of our pockets is empty. (We do not make any distinction between pieces of the same denomination.) How many pieces does the sum contain of each denomination? (Proposer: *Bakonyi Gábor,* Budapest) **C. 522.** Find all lines, tangent to the parabola defined by equation $y=x^2$, which form an angle of 45° with the segment that connects the focus of the parabola to the point of tangency. **C. 523.** A spherical cap is cut off a ball of radius R such that the curved surface area of the cap is c times larger ($c>1$) than the area of the circular cross-section. Determine the height of the spherical cap. **C. 524.** In a triangle ABC, $AC=BC$. There is given a point P on side AB such that $\angle ACP=30^\circ$. In addition, point Q outside the triangle satisfies

$$CPQ\angle = CPA\angle + APQ\angle = 78^\circ.$$

Given that all angles of triangles ABC and QPB, measured in degrees, are integers, determine the angles of these two triangles. (Proposer: *Müncz Márton,* Budapest)

New exercises: Gy. 3238. How many dice must be rolled at the same time to maximize the probability that exactly one 6 occurs among the scores? **Gy. 3239.** Determine those integers x, y, z for which

$$(x-y-1)^3+(y-z-2)^3+(z-x+3)^3=18.$$

(Proposer: *Kovács Béla,* Szatmárnémeti) **Gy. 3240.** Each field of a 9×9 "chessboard" contains a +1 or -1. First, we simultaneously replace each number with the product of the numbers written in the fields that share an edge with the field containing the given number. We may repeat this step again and again. Is it true that, after a finite number of repetitions, we get back to the original arrangement? (*Chinese contest problem*) **Gy. 3241.** Is there any order of the numbers 1, 1, 2, 2, ..., 1998, 1998 in which there are exactly n numbers placed between the two copies of n, for every $1 \leqslant n \leqslant 1998$? **Gy. 3242.** Connect a point inside a convex quadrilateral to each vertex of the quadrangle. Assuming that the four triangles obtained this way have the same area, prove that the point is incident to one of the diagonals of the quadrangle. **Gy. 3243.** Divide the plane into 1000 parts, using the smallest possible number of straight lines. **Gy. 3244.** Given two similar triangles of the same orientation, consider the midpoints of the segments that connect the corresponding vertices of the triangles, respectively. Assuming that these points form a triangle, prove that this triangle is similar to the original ones. **Gy. 3245.** Find the smallest natural number k for which the following statement is true. If, in a tetrahedron, there are k pairs of edges each forming an angle of 60°, then the tetrahedron is necessarily regular.

New problems: F. 3256. The sum of the positive real numbers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is 1. Prove that

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\ldots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geqslant \frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}.$$

F. 3257. Consider the graph of the function defined by $x \mapsto 2x^3-2x$ on the interval $[-1,1]$. Which two points of the graph lie at the greatest distance apart? **F. 3258.** The first term of a sequence (a_n) is a positive integer. The subsequent terms of the squence are defined recursively by the rule

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{2}a_{n-1}, & \text{if } a_{n-1} \text{ is even,}\\ 3a_{n-1}+1, & \text{if } a_{n-1} \text{ is odd.}\end{cases}$$

Prove that the sequence must contain a number which is divisible by 4. **F. 3259.** In a right-angled triangle, acute angles α and β satisfy

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^3\alpha+\tan^3\beta=70.$$

Determine the angles of the triangle. (Proposer: *Fitos László,* Esztergom) **F. 3260.** Points A_1, A_2, $\ldots$, A_n, B and C of the plane satisfy $\sum_{i=1}^{n} A_iB=\sum_{i=1}^{n} A_iC=d$. Moreover, $\sum_{i=1}^{n} A_iP \geqslant d$ holds for every point P of the plane. Prove that the points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ all lie on the same line. **F. 3261.** Let v_1, v_2, v_3, v_4 be non-coplanar vectors in the 3-space whose sum is 0. Show that there exists a tetrahedron with faces S_1, S_2, S_3, S_4 such that for each $1 \leqslant i \leqslant 4$, S_i is perpendicular to v_i and the area of S_i is equal to the length of v_i.

New advanced problems: N. 191. Let L_n denote the nth term of the Lucas squence, defined by $L_0=2$, $L_1=1$, $L_{n+1}=L_n+L_{n-1}$. Let, in addition, $a_1, a_2, \ldots$ be a sequence of integers such that $\sum_{d|n} a_d=L_n$ holds for every positive integer n. Prove that $n \mid a_n$ for every positive integer n. **N. 192.** In a set H, whose elements are certain subsets of the set of all positive integers, any two distinct elements have a finite intersection. Is H necessarily enumerable? (Proposer: *Szabó Jácint,* Győr) **N. 193.** Prove that, for any sufficiently large integer n, there exists a polynomial p of degree at most $n-\frac{1}{10}\sqrt{n}$ such that

$$|p(0)|>\frac{1}{10}\left(\binom{n}{1}|p(1)|+\binom{n}{2}|p(2)|+\ldots+\binom{n}{n}|p(n)|\right).$$

N. 194. Is it possible to find finitely many positive integers, $a_1<a_2<\ldots<a_n$, with the following two properties: 1) all sums of different summands that can be formed of them, including the monomials as well, are different; 2) any integer $a_{n+1}>a_n$, for which all sums, which can be formed from the numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$, are different, satisfies $a_{n+1}>1998a_n$? (Proposer: *Kun Gábor,* Budapest)