Meglepetés előfizetőinknek

Bakos Tibor: Kit tud többet a bűvös négyzetekről

„A bűvös négyzetek arra valók, hogy átalakítsuk őket másik bűvös négyzetté. . . ”

Íme egy, a legújabb 5×5-ös bűvös négyzetek közül. És mennyi van még! Hogyan kell „varázsolni”, mi az a „közvagyon”, az „elrendezde” és az „átrendezde”, a sakktáblaszabály, a dominócsere, a „keresztrejtvény” és még sorolhatnám a bűvös szavakat. Megtudhatjuk a nagy bűvösnégyzetfacsarótól, aki egyben a KöMaL nagy szerkesztője immár 40 éve. A könyv az ő ajándéka a lap előfizetőinek, kapható a kiadónál, az Eötvös Társulatban és a KöMaL szerkesztőségben.

2	22	10	16	15
6	25	17	14	3
24	5	11	18	7
20	12	4	8	21
13	1	23	9	19

Kutatási lehetőségek középiskolásoknak

1995-ben egy olyan rendhagyó mozgalom indult el az országban, amelyben semmi rendhagyó nincsen. Középiskolások kezdtek el kutatni egyetemeken, főiskolákon és kutatóintézetekben. Ami miatt nincs ebben semmi rendhagyó, az az, hogy jónéhány helyen messze nem most kezdték, hanem tovább folytatták az eddigi ilyen irányú munkát. A tehetséges diákok és a kutatásban segítő tanáraik, mentoraik egymásratalálását egy olyan könyv segíti, amely a mentorok listáját tartalmazza. Már az első mentorlista is közel háromszáz tudományos labort (műhelyt) sorolt fel, amelyek száma az 1998 elején napvilágot látott második, bővített kiadásban már csaknem négyszázra növekedett, és azóta is folyamatosan nő. A tehetséges középiskolásokat váró kutatóhelyek Soprontól Szarvasig 27 magyar városban találhatók. A kutatható témákat az abortusztól a zsírsavanyagcseréig mintegy 1700 címszó fedi le. A mentornak jelentkezők között a Magyar Tudományos Akadémia több mint 60 tagja, alkotmánybíró, miniszter és szakterületének számos kiemelkedő professzora található. A mozgalom fővédnöki tisztségét Göncz Árpád köztársasági elnök úr vállalta el.

1997 márciusában rendeztük meg a kutató diákok első országos konferenciáját Kecskeméten, amelyet 1998 nyarán egy káptalanfüredi táborozás követett. A konferenciákra 40-50 diák jött el, és közülük 20-30-an számoltak be eredményeikről. A diákelőadások mellett akadémiánk olyan kiváló tagja, mint Balogh János professzor, és más neves magyar tudósok beszéltek elhivatottságukról, a kutatás szépségeiről. Már 98-ban is kijutott egyik kutató diákunk egy német tehetséggondozó táborba, és a káptalanfüredi tábornak belga vendége is volt. Táborunkat 99 nyarán is meg fogjuk rendezni, ahova minden diákot szeretettel várunk, aki addig belefog valamilyen kutatásba. Terveink szerint jövőre a kutatásokban jó eredményekkel résztvevő diákok francia, holland, ír és német tehetséggondozó táborokban is részt vehetnek. Minderről és még sok más izgalmas lehetőségről részletes és naprakész információk találhatók a mozgalom honlapján, a

`http://kutdiak.kee.hu/`

internet címen. Az érdeklődő diákokat fogadó mentorok listája a mozgalom szervezőjétől, **dr. Csermely Pétertől** is kérhető (1444 Bp. pf. 260; 266–2755 tel. 4102 mellék üzenetrögzítője; e-mail: `csermely@puskin.sote.hu`). Akármilyen módon is jelentkezik az érdeklődő diák, vagy a diákok figyelmét e lehetőségre felhívni kívánó tanár, a név és a postacím mellett kérjük annak egymondatos indoklását, hogy miért is érdeklődik a kutatások iránt.

A körre vonatkozó polaritás

Egy szokatlan leképezés

A középiskolában általában olyan geometriai transzformációkkal találkozunk, amelyek pontokhoz pontokat rendelnek. Vannak azonban ezektől különböző leképezések is. Most ezek közül vizsgáljuk meg az egyik legegyszerűbbet.

Vegyünk fel a síkon egy derékszögű koordinátarendszert. Egy, az origón át nem menő tetszőleges e egyenes egyenlete egyértelműen felírható $aX+bY=1$ alakban, ahol a és b egyszerre nem 0. Tekintsük azt a

$$P:(a,b) \quad \longleftrightarrow \quad p:\, aX+bY=1$$

megfeleltetést, amely az origótól különböző pontokat és az origón át nem menő egyeneseket rendeli egymáshoz. Ez a megfeleltetés nyilván kölcsönösen egyértelmű. Nevezzük p-t a P pont *polárisának*, P-t pedig a p egyenes *pólusának*.

Vizsgáljuk meg e leképezés legfontosabb tulajdonságait.

1. *Ha a P pont polárisa a p egyenes, akkor p pólusa P.*

Ez nyilvánvaló, hiszen a definíció szerint az $(a;b)$ koordinátájú pont polárisa az $aX+$ $+bY=1$ egyenletű egyenes, ennek az egyenesnek a pólusa pedig az $(a;b)$ pont. □

2. *Az R pont r polárisa pontosan akkor megy át az S ponton, ha az S polárisa, s átmegy az R ponton.*

Legyenek R, illetve S koordinátái $(r;q)$ és $(s;t)$. Ekkor r, illetve s egyenlete $rX+qY=1$ és $sX+tY=1$. Az R és s illeszkedésének a feltétele

$$sr+tq=1$$

ami egyúttal S és r illeszkedésének is feltétele. □

3. *Egy pont pontosan akkor illeszkedik a polárisára, ha rajta van az*

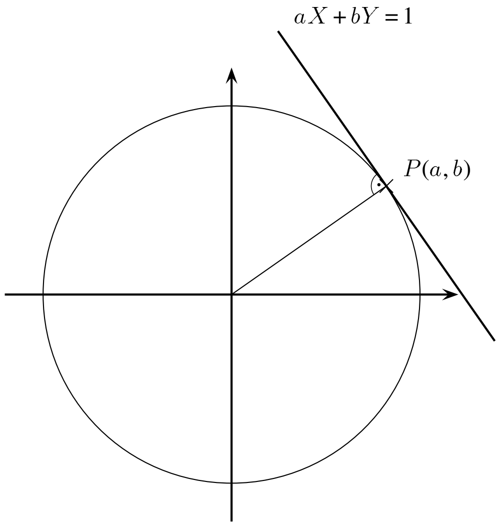
$$X^2+Y^2=1$$

egyenletű körön. Ekkor a pont polárisa éppen a kör adott pontbeli érintője (1. ábra).

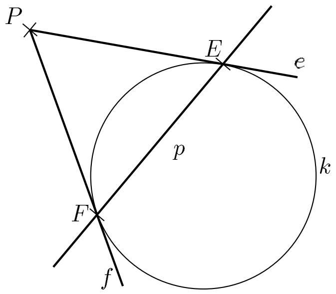
A $P(a;b)$ pont pontosan akkor illeszkedik az $aX+bY=1$ egyenletű polárisára, ha $a^2+b^2=1$, azaz ha a pont rajta van a körön. A kör egy tetszőleges $(s;t)$ pontjában az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra, ezért az érintő normálvektora éppen $\mathbf{n}(s;t)$, azaz az érintő egyenlete $sX+tY=s\cdot s+t\cdot t=1$, ami nem más mint a pont polárisának egyenlete. □

Látható, hogy az egységkör pontjainak és érintőinek speciális tuljadonságai vannak az általunk definiált leképezésnél. Leképezésünket szokás az egységkörre vonatkozó *polaritásnak* is nevezni.

Az egységkörre vonatkozó polaritás segítségével könnyen definiálhatjuk az egy tetszőleges k körre vonatkozó polaritást: A koordinátarendszert eltolva és az egységet alkalmasan megváltoztatva elérhetjük, hogy k legyen az egységkör. Ezután pedig alkalmazhatjuk az egységkörnél leírt definíciót. Az eddig leírt tulajdonságok nyilván érvényesek maradnak. Egyszerűen beláthatjuk a körre vonatkozó polaritás néhány további fontos tulajdonságát is.



1. ábra



2. ábra

4. *Ha a P pont a k körön kívül helyezkedik el, akkor a P-ből k-hoz húzott e és f érintők E és F érintési pontjait összekötő p egyenes éppen P polárisa* (*2. ábra*).

A 3. tulajdonság alapján E polárisa e, F polárisa pedig f. Mivel P illeszkedik e-re is és f-re is, ezért a 2. tulajdonság alapján p átmegy E-n is, és F-en is. □

5. *Ha a P és Q pontok polárisai a p és q nem párhuzamos egyenesek, akkor az M metszéspontjuk polárisa a PQ egyenes.*

A 2. tulajdonság alapján M polárisa átmegy P-n is és Q-n is, tehát csak a PQ egyenes lehet. □

6. *Ha a p, q és r egyenesek egy, a k középpontjától különböző ponton mennek át, akkor pólusaik P, Q és R egy egyenesre illeszkednek.*

Legyen p, q és r közös pontja M, ennek polárisa pedig m. (Az m egyenes létezik, mert M különbözik k középpontjától.) A 2. tulajdonság alapján m-re illeszkedik P is, Q is és R is. □

6'. *Ha a P, Q és R pontok egy, a k középpontján át nem menő egyenesre illeszkednek, akkor polárisaik p, q és r egy ponton mennek át.*

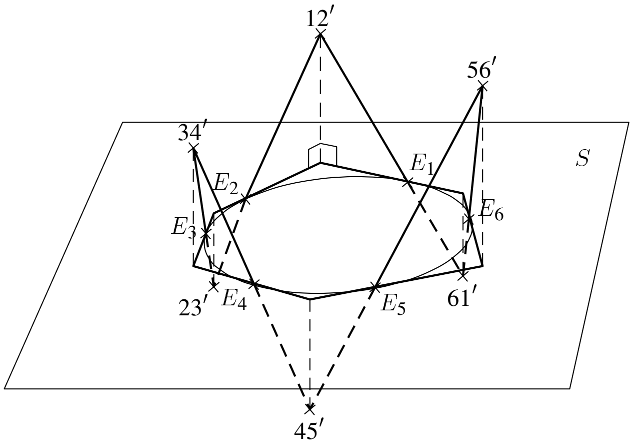
Legyen P, Q és R összekötő egyenese m, ennek pólusa pedig M. (Az M pont létezik, mert m nem megy át k középpontján.) A 2. tulajdonság alapján M-en átmegy p is, q is és r is. □

A 6. és 6'. állítások a polaritás egy fontos tulajdonságát mutatják: Ha egy tételben csak pontok, egyenesek, ezek polárisai, pólusai valamint összekötés és metszés szerepel, akkor a pontok és egyenesek, valamint az összekötés és a metszés szerepeit felcserélve ismét igaz állítást kapunk. Az így kapott tételt az eredeti duálisának, az elvet pedig a *dualitás elvének* nevezzük.

1. feladat: Fogalmazzuk meg az 1–5. állítások duálisait .

Kör köré írt sokszögek

Tekintsünk egy olyan hatszöget, melynek semelyik két oldala nem párhuzamos, és mindegyik oldalegyenese érint egy k kört. Jelöljük az oldalegyeneseket 1, 2, 3, 4, 5 és 6-tal; az i és a j egyenes metszéspontját pedig ij-vel (i, $j=1$, 2, ..., 6.) Megmutatjuk, hogy az 12 és 45; a 23 és 56 valamint a 34 és a 61 metszéspontokat összekötő e, f és g egyenesek egy ponton mennek át vagy párhuzamosak. Ez az állítás a *Brianchon tétel* egy speciális esete.

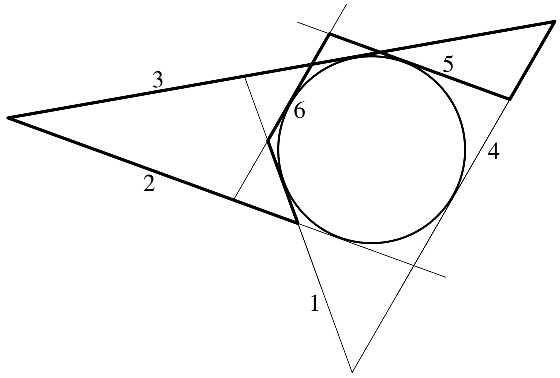


3. ábra

Jelöljük a k kör síkját $\mathcal{S}$-sel, a k kör és az i egyenes érintési pontját E_i-vel. Állítsunk az 12, 23, 34, 45, 56 és 61 metszéspontokban $\mathcal{S}$-re merőleges egyeneseket és mérjük fel ezekre az egyes pontokból a k-hoz húzható érintőszakaszok hosszát, mégpedig az 12, 34 és 56 pontokból az $\mathcal{S}$ egyik, a 23, 45 és 61 pontokból pedig az $\mathcal{S}$ másik oldalára. Legyenek az így kapott pontok $12'$, $23'$, $34'$, $45'$, $56'$ és $61'$ (*3. ábra*). Ezek a pontok egy olyan térbeli hatszöget alkotnak, amelyben az $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$ és $6'$-vel jelölt oldalegyenesek $\mathcal{S}$-re való merőleges vetületei éppen az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 egyenesek, és a térbeli hatszög oldalegyenesei az E_i pontokban döfik $\mathcal{S}$-t. Ugyanis a térbeli hatszög mindegyik oldalegyenese egy-egy olyan síkban van benne, amely $\mathcal{S}$-re merőleges és az 1, 2, 3, 4, 5, 6 egyenesek valamelyikét is tartalmazza, továbbá ezen síkok mindegyikében a benne lévő E_i pont, a térbeli hatszög csúcsai és az eredeti hatszög csúcsai két-két egyenlő szárú derékszögű háromszöget alkotnak. Az $12'$ és $45'$; a $23'$ és $56'$ valamint a $34'$ és a $61'$ pontokat összekötő e', f' és g' egyenesek $\mathcal{S}$-en lévő merőleges vetületei nyilván az e, f és g egyenesek.

Megmutatjuk, hogy az e', f', g' egyenesek közül bármelyik kettő egy síkban van. Az egyenesek szerepe teljesen szimmetrikus, ezért elég azt megmutatnunk, hogy pl. e' és f' egy síkban vannak. Az e' is és f' is metszi a $2'$ és az $5'$ egyenest, ezért elég belátnunk hogy ez utóbbiak egysíkúak. Mivel az $12'$ és $56'$ pontok $\mathcal{S}$-nek az egyik, a $23'$ és a $45'$ pontok pedig $\mathcal{S}$-nek a másik oldalán vannak, ezért a $2'$ és az $5'$ egyenes is ugyanabban az $\mathcal{S}$ által meghatározott féltérben metszi a 25 pontban $\mathcal{S}$-re állított merőleges egyenest, sőt mindkettő pontosan abban a pontban, amely $\mathcal{S}$-től olyan távolságra van, mint a 25 pontból k-hoz húzott érintő hossza. Tehát $2'$ és $5'$, s így e' és f' is egy síkban van.

Az e', f' és g' egyenesek nincsenek ugyanabban a síkban, mert ha mindhárom benne lenne egy $\mathcal{T}$ síkban, akkor $\mathcal{T}$ tartalmazná az $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$, $6'$ egyenesek mindegyikét, ami nem lehetséges, mert az $12'$, $23'$, $34'$, $45'$, $56'$, $61'$ pontok nincsenek egy síkban. Ha viszont három egyenes nincs egy síkban, de közülük bármelyik kettő igen, akkor a három egyenes vagy egy ponton megy át, vagy párhuzamos (lásd pl.: *Geometriai feladatok gyűjteménye I,* 1703. és 1710. feladatok). Ekkor viszont az e', f', g' egyenesek $\mathcal{S}$-en lévő merőleges vetületei, e, f és g is vagy egy ponton mennek át, vagy párhuzamosak. □

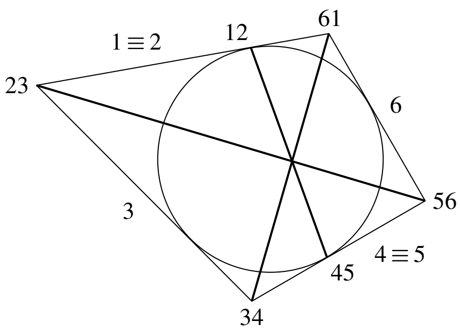


4. ábra

A bizonyítás során nem használtuk ki, hogy az érintőhatszög konvex, sőt azt sem, hogy az oldalakat „sorban” számoztuk. Bizonyításunk működik pl. a *4. ábrán* látható hatszög esetén is. Sőt egyéb esetekben is. Ha egy kör két érintőjét úgy mozgatjuk, hogy az érintési pontjaik egyre közelebb kerüljenek egymáshoz, akkor a két érintő egyre kisebb szöget fog egymással bezárni, metszéspontjuk pedig egyre közelebb kerül az érintési pontokhoz. Ennek alapján feltételezhetjük, hogy tételünk esetleg akkor is igaz, ha az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 egyenesek közül némelyek egybeesnek, és két egybeeső érintő metszéspontjának a közös érintési pontjukat tekintjük.

Tegyük fel, hogy az 1 és 2, valamint a 4 és 5 érintőegyenesek esnek egybe. Ekkor egy érintőnégyszöget kapunk (*5. ábra*), tételünk pedig azt mondja, hogy *az érintőnégyszög átlói, valamint az egyik szemközti oldalpáron lévő érintési pontokat összekötő egyenesek egy ponton mennek át.* Nézzük a bizonyítást:

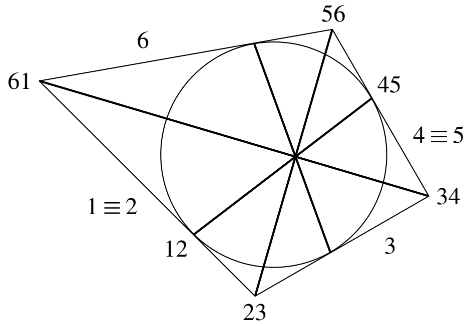
Használjuk ugyanazokat a jelöléseket, mint az előbb. A 23, 34, 56 és 61 pontokban $\mathcal{S}$-re állított merőlegeseken ugyanúgy kapjuk a $23'$, $34'$, $56'$ és $61'$ pontokat mint az előbb, az $12'$ és a $45'$



5. ábra

pontok pedig most egybeesnek az 12 és a 45 pontokkal, azaz a két érintési ponttal (hiszen az ezekből a pontokból k-hoz húzott érintő hossza 0). Most is igaz, hogy az $12'$ és $45'$; a $23'$ és $56'$ valamint a $34'$ és a $61'$ pontokat összekötő e', f' és g' egyenesek $\mathcal{S}$-en lévő merőleges vetületei az e, f és g egyenesek. Az is igaz, hogy pl. e' és f' egy síkban vannak, mert az $56'$ pont $\mathcal{S}$-nek az egyik, a $23'$ pedig $\mathcal{S}$-nek a másik oldalán van ($12'$ és $45'$ $\mathcal{S}$-en van), ezért a $2'$ és az $5'$ egyenes most is metszi egymást.

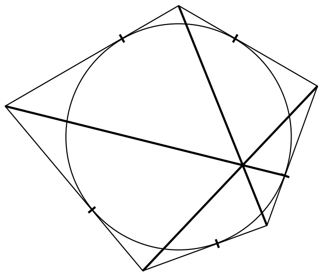
Ha egy kicsit megváltoztatjuk az oldalak számozását (*6. ábra*) akkor azt kapjuk, hogy a másik szemközti oldalpáron lévő érintési pontokat összekötő egyenes is átmegy az átlók metszéspontján. Összefoglalva tehát bebizonyítottuk, hogy *az érintőnégyszög átlói, valamint a szemközti oldalpárokon lévő érintési pontokat összekötő egyenesek egy ponton mennek át.*

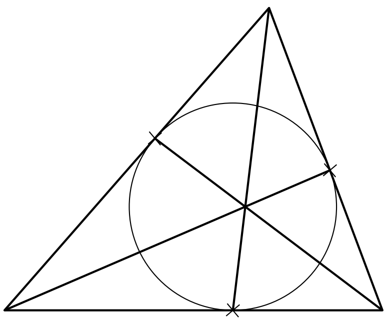


6. ábra

2. feladat: Bizonyítsuk be, hogy a *7. ábrán* látható három egyenes egy ponton megy át.

3. feladat: Bizonyítsuk be, hogy a háromszögbe írt kör érintési pontjait a szemközti csúcsokkal összekötő egyenesek egy ponton mennek át (*8. ábra*). (Lásd: *Geometriai feladatok gyűjteménye I,* 1266. feladat.)


7. ábra

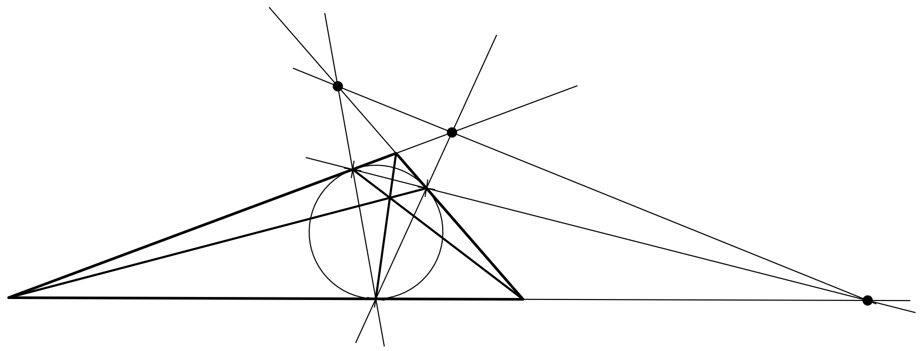

8. ábra

Pascal tétele

Alkalmazzuk most az 1. fejezetben megismert polaritást a 2. fejezetben szereplő k körre és a köréírt hatszögre. A 4. tulajdonság alapján az ij pont polárisa az E_iE_j egyenes. Ezért az 5. tulajdonság alapján az 12 és 45 pontokat összekötő egyenes pólusa az E_1E_2 és az E_4E_5 egyenesek A metszéspontja. Ugyanígy kapjuk, hogy a 23 és 56 pontokat összekötő egyenes pólusa az E_2E_3 és az E_5E_6 egyenesek B metszéspontja, a 34 és 61 pontokat összekötő egyenes pólusa pedig az E_3E_4 és az E_6E_1 egyenesek C metszéspontja. (Az 12 és 45, a 23 és 56 valamint a 34 és 61 pontok összekötőegyenese nem megy át k középpontján, mert a k köré írt hatszög semelyik két oldala nem párhuzamos, ezért mindhárom egyenesnek létezik pólusa.) Brianchon tétele szerint az 12 és 45, a 23 és 56 valamint a 34 és 61 pontok összekötőegyenese egy ponton megy át, ezért a 6. tulajdonság alapján pólusaik, A, B és C egy egyenesre illeszkednek. Ezzel bebizonyítottuk *Pascal tételének* egy speciális esetét:

Ha a k körbe írt $E_1E_2E_3E_4E_5E_6$ hatszög E_1E_4, E_2E_5 és E_3E_6 átlói nem mennek át k középpontján, továbbá az E_1E_2 és E_4E_5, E_2E_3 és E_5E_6 valamint E_3E_4 és E_6E_1 oldalegyenesei nem párhuzamosak, akkor e három oldalpár metszéspontjai egy egyenesre illeszkednek.

A bizonyítás során most sem használtuk ki, hogy a körbeírt hatszög konvex, sem azt, hogy a csúcsokat „sorban” számoztuk. Bizonyításunk ismét működik abban az esetben is, ha a hatszög néhány csúcsa egybeesik. Két egybeeső csúcs összekötő egyenesének a k-hoz az egybeeső csúcsokban húzott érintőt kell tekintenünk. A *8. ábrán* látható háromszögekre vonatkozó tétel megfelelője pl. a *9. ábrán* látható állítás:



9. ábra

Ha egy háromszögbe írt kör érintési pontjai által meghatározott háromszög oldalai metszik az eredeti háromszög szemközti oldalait, akkor ez a három metszéspont egy egyenesre illeszkedik.

4. feladat: Fogalmazzuk meg a kör köré írt ötszögre, illetve az érintőnégyszögre vonatkozó állítások megfelelőit.

5. feladat: Oldjuk meg az **F. 3253.** feladatot (megtalálható a kitűzött feladatok között a 489. oldalon).

Tételeink megfogalmazásában sok problémát okozott, hogy a k kör középpontjának nem értelmeztük a polárisát, a rajta átmenő egyeneseknek pedig a pólusát. Ezért a Brianchon és Pascal tételek megfogalmazásakor sok kikötést kellett tennünk. Ezeket a nehézségeket el lehet kerülni, ha a polaritást nem az euklidészi síkon, hanem a *projektív síkon* definiáljuk. Az említett tételek igazából a projektív sík kúpszeleteiről szólnak, ennek ismertetése azonban meghaladja e cikk kereteit. Az érdeklődő olvasó ezek részletes leírását megtalálhatja pl. *Hajós György: Bevezetés a geometriába*, (Tankönyvkiadó, Budapest, 1985) vagy *Schopp János: Kúpszeletek* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1972) című könyveiben.

Kiss György

Kiegészítés az olimpiai beszámolóhoz

Az 1998. évi Nemzetközi Matematikai Diákolimpián kiemelkedő sikert elért csapat felkészítő tanárainak neve szerepelt a szeptemberi versenybeszámolóban. Ezúttal az egyes diákok iskolai tanárainak, illetve szakkörvezetőinek nevét adjuk közre, akik nagymértékben hozzájárultak a kiváló eredményhez:

Gyenes Zoltán tanárai: *Drozdy Győzőné dr.*, *Pósa Lajos*;
Kun Gábor tanára: *Nyeste Pál*;
Lippner Gábor tanárai: *Dobos Sándor, Thiry Imréné, Pósa Lajos, Montágh Balázs, Surányi László*;
Lukács László tanárai: *Szabó Kálmán, Gulyás Tibor*;
Terpai Tamás tanárai: *Táborné Vincze Márta, Beleznay Ferenc*, *Pósa Lajos, Montágh Balázs*;
Zubcsek Péter Pál tanárai: *Fazakas Tünde, Dobos Sándor*, *Pósa Lajos.*

Valamennyi tanárnak ezúton is köszönjük kitűnő munkáját.

Pelikán József

Az 1997–98-as tanév matematika pontversenyének összesített eredménye

	F, GY, N pontv.		C pontv.		Összesen	
	benevezett	dicséret	benevezett	dicséret	benevezett	dicséret
Legf. 8. osztályosok:	105	31	100	17	129	40
9. osztályosok:	559	103	395	54	667	137
10. osztályosok:	436	109	283	55	523	147
11. osztályosok:	180	57	226	56	357	107
12. osztályosok:	121	36	106	24	186	59
	1401	336	1110	206	1862	490

Az alábbiakban azokat az iskolákat soroljuk fel, amelyeknek volt az 1998/6. számban közölt végeredményben legalább dicsérettel szerepelt diákja. Az iskola neve után álló két számpár a pontversenyben (F, GY és N), illetve a C pontverseny végeredményében szereplő tanulók számát és az általuk szerzett összpontszámot jelzi. A számok után a felsorolt tanulók szaktanárainak neve áll, ahogyan azt a nevezési lapokról kiírtuk. Az esetleges nevelírásokért szíves elnézésüket kérjük.

A szerk.

Baja: *III. Béla Gimn.* (1,153), (1,183), Királyné Nagy Éva; **Balatonalmádi:** *Kéttannyelvű Gimn.* (–), (1,108), Várkuti Attila; **Balatonfüred:** *Lóczy Lajos Gimn.* (3,211), (–), Szilágyi Lajos; **Békéscsaba:** *Rózsa Ferenc Gimn.* (–), (2,214), Bajnok Zoltán; *Széchenyi István Közg. és Ker. Szki* (–), (4,377), Schédl Ilona, dr. Szabó

Jánosné; **Bonyhád:** *Petőfi Sándor Evangélikus Gimn.* (20,2755), (–), Hohl Árpád, dr. Katz Sándor, Kovács Balázsné, Varga Tünde; **Budakeszi:** *Prohászka Ottókár Katolikus Gimnázium* (1,119), (–), Rainer Ferenc; **Budapest:** *Alternatív Közgazd. Gimn.* (–), (1,139), Korom Pál, Monos Zoltán; *Arany János Gimn.* (1,68), (1,174), Antall Erzsébet, Seltsam László; *Árpád Gimn.* (6,783), (3,345), Mikusi Imre, Gyimesi Róbert; *Bárdos Lajos Ált. Isk. és Gimn.* (–), (1,82), Hehl Éva; *Berzsenyi Dániel Gimn.* (19,2176), (2,205), Bánhegyi László, Bényei Károly, Bodó Boglárka, Erben Péter, Gál Györgyné, dr. Ökördi Péterné, Nemecskó István, dr. Urbán János; *Deák Ferenc Gimn.* (–), (1,94), Gál Józsefné; *Deutsche Schule* (1,222), (1,104), Burkhard Reichman; *ELTE Apáczai Csere János Gyak. Isk.* (15,3359), (10,1003), Drozdy Győzőné dr., Falta Zoltán, Pósfai Péter, Sparingné Köves Ildikó, Tóth Attila; *ELTE Radnóti Miklós Gyak. Isk.* (5,852), (4,456), Hegyi Györgyné, Marcsek Gábor, Morvai Éva, Széplaki Györgyné; *ELTE Trefort Á. Gyak. Isk.* (2,151), (2,228), Veszprémi Ferenc; *Eötvös József Gimn.* (3,443), (–), Balga Attila, Gyengéné Beé Andrea, Somfai Zsuzsa; *Fasori Evangélikus Gimn.* (3,412), (2,286), Harasztos Barnabás, Nagy-Baló András; *Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn.* (62,12521), (5,502), Beleznay Ferenc, Dobos Sándor, Fazakas Tünde, Laczkó László, Pósa Lajos, Rubóczky György, Solti Lajos, dr. Surányi László, Táborné Vincze Márta, Thiry Imréné; *Jedlik Ányos Gimn.* (7,684), (–), Gudenus Lászlóné, Kovács Gabriella, dr. Sebestyén Zoltánné; *Kaffka Margit Gimn.* (1,159), (–), Kutnyánszky Jenőné; *Könyves Kálmán Gimn.* (–), (1,125), Csordás László; *Lauder Javne Gimn.* (1,173), (–), Gábos Adél; *Leövey Klára Gimn.* (–), (1,113), Fehérné Dallos Eszter; *Móricz Zsigmond Gimn.* (1,76), (1,67), Vékássy Tímea; *Németh László Gimn.* (–), (1,154), Csúzdi Csabáné; *Petőfi Sándor Ált. Isk. és Gimn.* (–), (1,115), Királyné Kulcsár Mónika; *Petőfi Sándor Gimn.* (–), (1,168); *Piarista Gimn.* (1,122), (–), Nyeste Pál; *Szent István Gimn.* (22,2842), (5,521), Halek Tamás, Juhász István, Lászlóné Sergyán Stefánia, Magyar Zsolt, dr. Mikite Gyuláné, Paróczay József, Rácz János; *Tamási Áron Ált. Isk. és Gimn.* (–), (1,138), Zombori Natasa; *Toldy Ferenc Gimn.* (1,163), (–), dr. Pelényi Attiláné; *Városmajori Gimn.* (–), (1,168), Kovács Károlyné; *Veres Péter Gimn.* (5,823), (19,2001), Kötél Tamás, Márton Gábor, Rácz Mihályné, Simon János, Számadó László, Varga Mária; **Budaörs:** *Illyés Gyula Gimn.* (1,93), (–), Tollner József; **Csongrád:** *Batsányi János Gimn.* (3,324), (2,248), Bottyán István, Papp Ferencné, Szabó Tamás; **Csorna:** *Hunyadi János Gimn.* (–), (1,112), Wekszli Árpádné; **Csurgó:** *Nagyváthy János Középisk.* (1,237), (3,312), Kiss Edit; **Debrecen:** *Fazekas Mihály Gimn.* (13,2101), (17,1863), Balázs Tivadar, Csarkó Tibor, Kovács Péter, Nagy Erzsébet, Nagy Mária, dr. Szabó Józsefné; *KLTE Gyak. Gimn.* (3,641), (1,182), Bíró Erzsébet, Bíró Lajos; *Református Gimn.* (–), (1,72), dr. Bajza Istvánné; *Tóth Árpád Gimn.* (2,198), (1,138), Kovács Ákos, dr. Makai Imréné; **Dombóvár:** *Illyés Gyula Gimn.* (2,261), (–), Freller Miklós, Mesterházyné dr. Illés Ágnes; **Eger:** *2. sz. Gyak. Ált. Isk.* (1,96), (–), Dombóvári Jánosné; *Dobó István Gimn.* (1,107), (–), Homolyáné Nagy Irma; *Gárdonyi Géza Gimn.* (–), (2,189), Csák György; *Pásztorvölgyi Gimn.* (2,175), (–), Hevesi Zoltán; **Esztergom:** *Szent István Gimn.* (–), (1,92), Báthori Attiláné; **Érd:** *Vörösmarty Mihály Gimn.* (–), (1,90), Bartus Éva; **Fonyód:** *Mátyás Király Gimn.* (1,107), (–), Németh László; **Gyula:** *Erkel Ferenc Gimn.* (1,112), (–), Nagy Sándor, Székely András; **Győr:** *Bercsényi Miklós Gimn.* (–), (1,85), Honti Dénes; *Czuczor Gergely Bencés Gimn.* (2,283), (–), Bárdos Oresztész; *Jedlik Ányos Ipari Szki.* (–), (2,194), Kovács Sándorné, Oross Tiborné; *Kazinczy Ferenc Gimn.* (3,213), (8,671), Öllős Éva, Szigeti Béláné, Poóczáné Kecskeméty Szilvia; *Krúdy Gyula Gimn.* (–), (4,331), Babarczi Imréné, Csorba Ferenc, Márton Csaba; *Révai Miklós Gimn.* (3,631), (1,114), Pósa Lajos, dr. Szíjártó Miklósné, Zábrádiné Schmierer Emilía, Zsebők Ottó; *Szent-Györgyi Albert Gimn. és Szki.* (–), (1,149), Szabó Zoltán; **Gyöngyös:** *Berze Nagy János Gimn.* (1,56), (–), Farkas Béla; **Gödöllő:** *Premontrei Szt. Norbert Gimn.* (–), (1,79), Szabó Csaba; **Hajdúböszörmény:** *Bocskai István Gimn.* (–), (1,149), Pappné Balogh Erzsébet; **Hajdúszoboszló:** *Hőgyes Endre Gimn.* (6,1192), (10,1119), Balla Éva, Dankó Sándor, Deli Lajos; **Hatvan:** *Bajza József Gimn.* (–), (2,230), Budai Csilla, Fazekas Gabriella; **Heves:** *Eötvös József Gimn.* (–), (3,237), Forgó János; **Hódmezővásárhely:** *Bethlen Gábor Gimn.* (1,75), (1,74), Ábrahám Zoltánné; *Kertvárosi Ált. Isk.* (–), (1,74); **Jászapáti:** *Mészáros Lőrinc Gimn.* (–), (1,137), Zsoldos János; **Jászberény:** *Liska József Erősáramú Szki.* (1,74), (–), Máthé Barabássy Judit; **Kalocsa:** *Eperföldi Ált. Isk.* (1,47), (1,78), Farkasné Kurucz Ágnes; **Kaposvár:** *Munkácsy Mihály Gimn.* (1,74), (–); *Táncsics Mihály Gimn.* (3,411), (1,83), Bernáth Sándor, Drankovics József, Iharos Csabáné, Terlaky Edit, Szabó József; **Kecskemét:** *Bányai Júlia Gimn.* (–), (3,353), Lukács Lajos, Pálinkás Ilona; *Bolyai János Gimn.* (1,113), (1,97), Varga József; *Katona József Gimn.* (1,67), (1,66), Horti Attila; **Keszthely:** *Vajda János Gimn.* (–), (1,73), Bartha Kálmánné; **Kisvárda:** *Bessenyei György Gimn.* (–), (2,218), Nehéz Rudolf; **Kisújszállás:** *Móricz Zsigmond Gimn.* (1,103), (1,65), Ágotai László, Kiss Géza; **Körmend:** *Kölcsey Ferenc Gimn.* (–), (1,77), Klementné Mészáros Erzsébet; **Makó:** *József Attila Gimn.* (2,331), (–), Rójáné Oláh Erika; **Miskolc:** *Avasi Gimn.* (1,102), (1,115), dr. Pabis Györgyné; *Földes Ferenc Gimn.* (9,1558), (1,65), Fejér Szabolcs, Gulyás Tibor, Pinkó Béla, Szabó Kálmán, Vass Iván, Veres Pál; **Monor:** *József Attila Gimn.* (–), (1,78), Kozákné Székely Ildikó; **Nagykanizsa:** *Batthyány Lajos Gimn.* (5,512), (2,160), Erdős Gábor, dr. Pintér Ferenc; **Ócsa:** *Bolyai János Gimn.* (–), (1,112), Vigh Gyöngyi; **Paks:** *Vak Bottyán János Gimn.* (2,251), (1,135), dr. Müller János; **Pápa:** *Református Gimn.* (–), (1,99), Báros Zoltán; *Türr István Gimn.* (1,205), (–), Bátyay Gyuláné, Spissich László; **Pécs:** *Árpád Fejedelem Ált. Isk.* (–), (1,74), dr. Györpál Eleméné; *Ciszterci Nagy Lajos Gimn.* (1,204), (–), Tornyos Tivadarné; *Janus Pannonius Gimn.* (1,141), (–), Licsár Ágnes, Polcz Katalin; **Putnok:** *Serényi Béla Gimn. és Mezőg. Szki.* (–), (1,79), Szilágyi Istvánné; **Salgótarján:** *Táncsics Mihály Közg. és Ker. Szki.* (–), (1,165), Petróczy Mária; **Siklós:** *Táncsics Mihály Gimn.* (1,112), (–), Uracsné Beck Etelka; **Siófok:** *Perczel Mór Gimn.* (–), (7,630), Hunya Lajos, Schutzbach Mártonné; **Sopron:** *Berzsenyi Dániel Gimn.* (–), (1,148); *Széchenyi István Gimn.* (1,114), (5,646), Lang Ágota, Vass Béla, Vass Béláné; **Szeged:** *Csonka János Szki.* (–), (1,85), Csatáné Konsa Ilona; *Radnóti Miklós Kísérleti Gimn. és Ált. Isk.* (6,1247), (2,183), Kosztolányi József, Mike János, Schultz János, Vincze István; *Ságvári Endre Gyak. Gimn.* (2,349), (–), dr. Dobi János, Kovács István, Tarcsay Tamás; *Tömörkény István Gimn.* (–), (1,136), Rauscher Alexandra; **Szekszárd:** *Garay János Gimn.* (15,2143), (3,432), Kertes Lázár, Pesti Gyula, Varjas Lászlóné; **Szentendre:** *Ferences Gimn.* (–), (2,181); **Szikszó:** *Szepsi Csombor Márton Gimn.* (1,70), (–), Nemes Tamás; **Szolnok:** *Tiszaparti Gimn. és Humán Szki.* (3,206), (–), Szegényné Megyes Ibolya, Topolya Tibor; *Varga Katalin Gimn.* (–), (3,310), Dalmadiné Nagy Ilona, Kovács Anita; **Szombathely:** *Kanizsai Dorottya Gimn.* (1,243), (4,506), Módos Tiborné, Sándor Endre; *Keresk. és Vendégl. Szakkép. Isk.* (–), (1,157), László Sándor; *Nagy Lajos Gimn.* (5,653), (–), Asbóth József, Heigl István, Márton József, Peresztegi László, Pósa Lajos, Takács Zsolt; *Premontrei Szt. Norbert Gimn.* (2,239), (–), Heigl István; **Székesfehérvár:** *József Attila Gimn.* (1,88), (–), Wolkensdorfer János; *Teleki Blanka Gimn.* (4,604), (3,333), Mihályi Gyula, Ponáczné Csuthy Márta, Sipos Imre, Siposné Tóth Krisztina; **Sárvár:** *Tinódi Sebestyén Gimn.* (–), (1,91), Hever Mihályné, Tóth Jánosné; **Tamási:** *Béri Balogh Ádám Gimn.* (–), (1,113), Kurucz Gézáné; **Tapolca:** *Batsányi János Gimn.* (–), (1,131), Szabadvári Miklós; **Tata:** *Eötvös József Gimn.* (1,96), (–), Kovács Mária; **Tatabánya:** *Árpád Gimn.* (6,887), (–), Hajnal Károlyné; **Veszprém:** *Lovassy László*

Gimn. (6,750), (–), Békefi Zsuzsa, Farkas István, Kovács Előd, Varga Vince; **Vác:** *Madách Imre Gimn.* (1,107), (–), Ujhelyi László; **Zalaegerszeg:** *Kölcsey Ferenc Gimn.* (1,117), (–), Henczi Béla; *Ságvári Endre Gimn.* (2,207), (–), Forgács Ferencné; *Zrínyi Miklós Gimn.* (8,838), (1,68), Csiszár Mária, Horváth Attila, Kiss Zsolt, Vadvári Tibor;

Anglia: **London:** (1,46), (–); Ausztria: **Linz:** *Akademisches Gymnasium.* (1,115), (1,102), Josef Holzmann; Kuvait: **Kuwait:** *New English School* (1,349), (–), Joanne L. Atkinson; Németország: **Oberasbach:** *Dietrich-Bonhoeffer Gym.* (–), (1,68), Hr. Paul; Norvégia: **Oslo:** *Lycée Francais René Cassin Gimn.* (1,515), (–), Albert Mistral; Románia: **Sepsiszentgyörgy:** *Székely Mikó Kollégium* (1,151), (1,82), Biró Judit; Svédország: **Avesta:** *Domarhagsskolan* (1,239), (–), Nordin Kerstin; Szlovákia: **Révkomárom:** *Selye János Gimn.* (3,266), (1,79), Horváth Katalin, Keszegh István; **Dunaszerdahely:** *Magyar Tannyelvű Gimn.* (1,290), (–), Németh Mária, Penzinger Iván; Ukrajna: **Beregszász:** *Bethlen Gábor Gimn.* (–), (2,349), Balázsi Borbála.

Levelek – 9 hónap késéssel

Szeptember végén kaptunk néhány levelet, KöMaL-megoldásokkal. Azt gondoltam: év elején néhányan nagyon szorgalmasak, már határidő előtt két héttel készen vannak.

Nem egészen így volt: jobban megvizsgálva kiderült, hogy a leveleket 1997 decemberében(!) adták fel – kideríthetetlen módon most kaptuk meg. Ezért az utólag és *pontversenyen kívül* kijavított dolgozatokért a következőknek járt volna a tanvalyi pontversenyben plusz pont: Veress Máté (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 5 pont; Szalontay Katalin (Debrecen, Fazekas M. Gimn.) 5 pont; Hülbert Árpád (Veszprém, Lovassy L. Gimn.) 9 pont; Tarcsi Károly 21 pont és Bajusz Csaba 30 + 5 pont (mindketten Szeged, Radnóti M. Kísérl. Gimn.).

Ezeket a pontszámokat a fenti összesített eredménybe beszámítottuk. Mivel **Bajusz Csaba** így a gyakorlatok pontversenyében a 10. helyet érte volna el, természetesen ő is a díjazottakéhoz hasonló jutalomban részesül a Téli Ifjúsági Ankéton.

Az érintettektől – mások helyett is – elnézést kér

a Szerk.

Az 1997/98. évi Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny feladatai

KEZDŐK

Első forduló

1. Egy farmon több ló van, mint kacsa. A tehenek száma harmada a lovak és kacsák együttes számának. A kacsák és lovak fejei és lábai számának összege 100. Hány tehén van a farmon?

2. Bizonyítsa be, ha egy derékszögű trapéz szemközti oldalainak összege egyenlő, akkor a merőleges szár: $\dfrac{2ac}{a+c}$, ahol az a és c a trapéz alapjai.

3. Egy 665 oldalú szabályos sokszög oldala 3 cm. Nagyítsuk ezt a sokszöget a középpontjából úgy, hogy a nagyított és az eredeti oldalak távolsága 1 cm legyen! Bizonyítsa be, hogy a két sokszög területének különbsége több mint 1998 cm^2.

4. Ábrázolja közös koordinátarendszerben a valós számok halmazán értelmezett

$$f(x) := \big||x+4| - |x-4|\big| \quad \text{és} \quad g(x) = \big||x| - 2\big|$$

helyettesítési értékű függvények grafikonját, és határozza meg azon sokszöget területének összegét, amelyeknek minden oldala hozzátartozik valamelyik függvény grafikonjához.

5. Milyen tulajdonságú k, m, n, l természetes szám esetén lesz az

$$1^k + 9^m + 9^n + 7^l$$

összeg utolsó számjegye 4?

Második forduló

I. kategória: Szakközépiskolások

1. Egy ABC háromszög BC oldalához hozzáírt kör középpontján át húzzunk párhuzamost a BC oldallal. Metssze ez a párhuzamos az AB oldalegyenest a D, az AC oldalegyenest az E pontban. Bizonyítsa be, hogy $DB + CE = DE$.

2. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet, ahol p valós paramétert jelent: $|x+3| + p \cdot |x-2| = 5$. A p értékétől függően hány megoldása van az egyenletnek?

3. 1998 darab egész szám közül 1997 darab szám négyzetének az összege egyenlő a kimaradó 1998-adik szám négyzetével. Bizonyítsa be, hogy nem lehet mind az 1998 darab szám páratlan.

II. kategória: Nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Megegyezhet-e 1998 darab páratlan egész szám egyikének a négyzete a többi 1997 darab szám négyzetének az összegével?

2. Bizonyítsa be, hogy egy derékszögű háromszögben a beírható kör sugarának és az átfogóhoz tartozó magasságnak a hányadosa 0,4 és 0,5 között van.

3. Bizonyítsa be, hogy nincs olyan minden valós számra értelmezett f függvény, amelyre $f(x^2+x+2) + f(x^2-x+2) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 4$ teljesül minden valós x értékre.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Mekkora lehet egy derékszögű háromszögben a beírható kör sugarának és az átfogóhoz tartozó magasságának a hányadosa?

2. Az a, b, c, n, M, N pozitív számokról a következőket tudjuk: $b=a+c$, $n \geqslant 3$, N (a tízes számrendszerben) n jegyű, N első jegye a, utolsó jegye c, a többi $n-2$ jegye b; N jegyeit fordított sorrendben leírva M-et kapjuk, továbbá $M-nN$ olyan $n-1$ jegyű pozitív egész szám, amelynek minden jegye b. Mi lehet az N?

3. Adjon meg olyan minden valós számra értelmezett f és g, legalább másodfokú polinom függvényeket, amelyekhez nem létezik olyan $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény, hogy

$$h(f(x))+h(g(x))=g(f(x))$$

minden valós x-re teljesüljön.

HALADÓK

Első forduló

I. és II. kategória: Szakközépiskolások és nem speciális tantervű gimnáziumi tanulók

1. Mutassuk meg, hogy ha egy téglalap oldalainak hossza a és $a+1$, akkor a téglalap szögfelezői által határolt síkidom területe független az a értékétől.

2. Mely pozitív egész n számokra osztható n^8-n^2 504-gyel?

3. Egy derékszögű háromszög egyik befogója egységnyi. A másik befogóhoz és az átfogóhoz tartozó súlyvonalak merőlegesek egymásra. Mekkorák a háromszög oldalai?

4. Oldjuk meg az egész számok halmazán a

$$\frac{z-1}{x}+\frac{z+1}{y}=1, \qquad \frac{z+1}{x}-\frac{z-1}{y}=1$$

egyenletrendszert.

5. Egy szabályos százszög csúcsaihoz tetszés szerint 1-et vagy -1-et írunk. Egy „lépésben” bármely három egymást követő csúcshoz írt szám előjelét az ellenkezőjére változtathatjuk. (Például az 1; 1; -1 hármast a -1; -1; 1 hármasra cserélhetjük.)

a) Elérhető-e ilyen „lépésekkel” tetszőleges kiindulási helyzet esetén, hogy a csúcsokhoz írt 100 szám összege 0 legyen?

b) Elérhető-e tetszőleges kiindulási helyzet esetén, hogy mindegyik csúcshoz az 1-es szám tartozzon?

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Melyik az a legkisebb pozitív egész, amelyik nem állítható elő két pozitív racionális szám négyzetének összegeként?

2. Egy paralelogramma kerülete K, az oldalak felezőpontja által meghatározott négyszög kerülete pedig k. Bizonyítsuk be, hogy ha a paralelogramma egyik szöge 60°-os, akkor

$$\frac{k}{K} \geqslant \frac{1+\sqrt{3}}{4}.$$

3. Hány olyan pozitív egész számokból álló (x, y, z) számhármas van, amely kielégíti a $2^x + 2^y + 2^z < 2^k$ egyenlőtlenséget, ahol k egy 2-nél nagyobb pozitív egész szám?

4. Adott a síkban az AB szakasz. Mi azoknak a C pontoknak a halmaza a síkban, amelyekre az ABC háromszög A-hoz tartozó súlyvonala és B-hez tartozó magasságvonala egyenlő hosszú?

Második forduló

I. és II. kategória: Szakközépiskolások és nem speciális tantervű gimnáziumi tanulók

1. Egy adott AB szakasz X belső pontjára teljesül, hogy az AB szakaszra rajzolt AX oldalú szabályos háromszög és az XB oldalú szabályos hatszög területének összege minimális. Hol helyezkedik el ekkor az AB szakaszon az X pont?

2. Melyik az a legkisebb pozitív egész, amelyik nem állítható elő két pozitív racionális szám négyzetének összegeként?

3. Tekintsük a csupa 1-es vagy 2-es számjegyet tartalmazó n-jegyű számokat $(n \geqslant 1)$. E számok közül (adott n érték esetén) A_n-nel jelöljük azoknak a számát, amelyek azonos számú 1-es és 2-es számjegyből állnak, B_n pedig legyen azon számok száma, amelyek több 1-est tartalmaznak, mint 2-est. Van-e olyan érték, amelyre $A_n = B_n$?

4. Legyen egy tetszőleges ABC háromszög AB, illetve AC oldalának felezőpontja D, illetve E pont. A DE szakasz F felezőpontján átmenő BF egyenes az AC oldalt a G pontban metszi. Mekkora a $BCEF$ és a $FGAD$ négyszög, illetve a BFD és az FEG háromszögek területének aránya?

Harmadik (döntő) forduló

I. kategória: Szakközépiskolások

1. Melyek azok az egész számokból álló $(x; y)$ számpárok, amelyekre teljesül az $x^2 + y^2 + xy = x - y$ egyenlőség?

2. Egy $2r$ és egy r sugarú kör kívülről érinti egymást. Tekintsük azokat a köröket, amelyek mindkét kört érintik, és középpontjuk a két adott kör egyik közös külső érintőjén van. Mekkora ezek sugarának aránya?

3. Mely k-re lehet egy $k \times k \times k$-as kockát $1 \times 1 \times 1$-es fekete és fehér kis kockákból úgy összeállítani, hogy bármelyik kis kocka mellett pontosan két vele megegyező színű, lapban szomszédos kis kocka legyen?

II. kategória: Nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Ismeretes, hogy az $ax+by=c$ egyenletet kielégítő bármely valós $(x;y)$ számpárra teljesül az $x^2+y^2>1$ egyenlőtlenség, ahol az a, b és c paraméter egy háromszög három oldalának hossza.

(I) Mutassuk meg, hogy az a, b, c oldalú háromszög tompaszögű.

(II) Igazoljuk, hogy $|x|+|y|$ minimuma legfeljebb $\dfrac{c}{\sqrt{ab}}$.

2. Az x és y pozitív egészek mely értékeire lesz a $4^x+4^{x+1}+4^y$ kifejezés értéke négyzetszám?

3. A következő négy szabály szerint kell köröket elhelyezni a síkon:

(I) semelyik három kör se érintse egymást ugyanabban a pontban;

(II) mindegyik kör pontosan négy másikat érintsen;

(III) a lehető legkevesebb kör legyen;

(IV) a lehető legkevesebb különböző sugár legyen.

Hány körből áll egy – a fenti szabályoknak megfelelő – körelrendezés?

Számítsuk is ki egy ilyen körelrendezésben a körök sugarait.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Az x, y és z pozitív egészek mely értékeire lesz a $4^x+4^y+4^z$ kifejezés értéke négyzetszám?

2. Egy tetraéder csúcsainál összeadjuk a csúcsból kiinduló élek egymással bezárt szögeit. Bizonyítsuk be, hogy ha a négy csúcsnál kapott összeg mind egyenlő egymással, akkor a tetraéder lapjainak körülírt körei egyenlő sugarúak.

3. Ketten a következő játékot játsszák. Egy 100 kavicsot tartalmazó halomból felváltva vesznek el, és az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi. Korlátozva van azonban az, hogy hány kavicsot lehet elvenni. A Kezdőnek egy kavicsot kell elvennie, utána a Második elvehet egyet vagy kettőt, ezután újra a Kezdő jön, és egy, két vagy három kavicsot vehet el. Általáan az n-edik lépésben az éppen sorra következő játékos legalább egy, de legfeljebb n kavicsot vehet el.

Kinek van nyerő stratégiája?

Mi a helyzet akkor, ha 1998 kaviccsal játszanak?

Az 1997/98. évi Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny eredményei

KEZDŐK

I. kategória: Szakközépiskolások

I. díj: **Perge István**, Eger, Neumann János Közgazdasági Szki. és Gimn., tanára: Szakaliné Haraszti Éva

II. díj: **Márton Albert**, Eger, Neumann János Közgazdasági Szki. és Gimn., tanára: Szakaliné Haraszti Éva

III. díj: **Molnár Márta**, Eger, Neumann János Közgazdasági Szki. és Gimn., tanára: Szakaliné Haraszti Éva

I. dicséret: 4. *Szentesi Balázs*, Budapest, Puskás Tivadar Távközlési Technikum, tanára: Beregszászi Zoltán; **5.** *Reményi Zsolt*, Cegléd, Közgazdasági és Informatikai Szki., tanára: Bere Lászlóné; **6–7.** *Fábri Tamás*, Budapest, Trefort Ágoston Kéttannyelvű Szki. és Gimn., tanára: Dunajszky Zsuzsa; *Pataki Gergely*, Eger, Neumann János Közgazdasági Szki. és Gimn., tanára: Liptainé Reszegi Ágnes.

II. dicséret: 8–13. *Bujna András*, Sopron, Vas- és Villamosipari Szakképző Iskola, tanára: Némethné Almássy Katalin; *Juhász Dániel*, Budapest, Trefort Ágoston Kéttannyelvű Szki. és Gimn., tanára: Dunajszky Zsuzsa; *Kollár Ádám*, Budapest, Újpesti Műszaki Szki., tanára: Kálmán Ildikó; *Nagy Zsolt*, Budapest, Trefort Ágoston Kéttannyelvű Szki. és Gimn., tanára; Varsóczky Károly; *Novák Ádám*, Eger, Neumann János Közgazdasági Szki. és Gimn., tanára: Farkas Erzsébet; *Zsótér Boglárka*, Békéscsaba, Széchenyi I. Közgazd. és Külker. Szki., tanára: dr. Rókáné Rózsa Anikó.

II. kategória: Nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

I. díj: **Simon Győző**, Győr, Révai Miklós Gimnázium, tanára: Zábrádiné Schmierer Emília

II. díj: **Deli Lajos**, Hajdúszoboszló, Hőgyes Endre Gimnázium, tanárai: Balla Éva és Deli Lajos

Molnár Zoltán, Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimnázium, tanára: Erdős Gábor

Paczári Krisztián, Nyíregyháza, Zrínyi Ilona Gimnázium, tanárai: dr. Kiss Sándor, Palotás Károly, Róka Sándor

III. díj: **Babos Attila**, Budapest, ELTE Radnóti M. Gyak. Gimnázium, tanára: Hegyi Györgyné

Békási Sándor, Budapest, Veres Péter Gimnázium, tanára: Kötél Tamás

Boros M. Mátyás, Budapest, Veres Péter Gimnázium, tanára: Kötél Tamás

Zajdó Csaba, Debrecen, Tóth Árpád Gimnázium, tanára: Kovács Ákos

I. dicséret: 9–15. *Bartha Tamás*, Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimnázium, tanára: Erdős Gábor; *Breuer János*, Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimnázium, tanára: Sparingné Köves Ildikó; *Eördögh Péter*, Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, tanára: Pirkó Béla; *Joó Dániel*, Budapest, ELTE Radnóti M. Gyak. Gimnázium, tanára: dr. Papp Györgyné; *Pesti Gábor*, Nagykanizsa, Batthány Lajos Gimnázium, tanára: Erdős Gábor; *Vörös László*, Győr, Révai Miklós Gimnázium, tanára: Zábrádiné Schmierer Emília; *Zalán Péter*, Budapest, Evangélikus Gimnázium, tanára: Nagy-Baló András.

II. dicséret: 16–21. *Börzsönyi Ádám*, Hódmezővásárhely, Bethlen Gábor Ref. Gimnázium, tanára: Fejes Imréné; *Pálinkó Szabolcs*, Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimnázium, tanára: Sparingné Köves Ildikó; *Pogátsa Attila*, Bonyhád, Petőfi Sándor Gimnázum, tanára: Katz Sándor; *Pozsgay Balázs*, Pécs, Magyar–Német Nyelvű Iskolaközpont, tanára: Lányi Vera; *Toka László*, Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimnázium, tanára: Sparingné Köves Ildikó; *Zentai Gábor*, Budapest, Evangélikus Gimnázium, tanára: Nagy-Baló András.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

I. díj: **Csirmaz Előd**, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium, tanára: Laczkó László

II. díj **Kiss Norbert**, Budapest, Szent István Gimnázium, tanárai: Paróczay József és Rácz János

Somogyi Tamás, Budapest, Szent István Gimnázium, tanárai: Paróczay József és Rácz János

Szeti Balázs, Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimnázium, tanárai: Buday Endre, Mihályi Gyula

III. díj: **Nagy Ádám**, Budapest, Szent István Gimnázium, tanárai: Paróczay József és Rácz János

Rokob András, Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, tanárai: Gulyás Tibor, Ifj. Szabó Kálmán

I. dicséret: 7–11. *Debrődi István*, Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimnázium, tanárai: Buday Endre, Mihályi Gyula; *Horváth György*, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium, tanára: Laczkó László; *Ritter Ádám*, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium, tanára: Laczkó László; *Vígh Viktor*, Szeged, JATE Ságvári Endre Gyak. Gimnázium, tanárai: Konfáné Nagy Klára, dr. Dobi János; *Vona Gábor*, Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium, tanára: Nagy Mária.

II. dicséret: 12–13. *Hank Sándor*, Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium, tanára: Balázs Tivadar; *Harcsa Veronika*, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium, tanára: Laczkó László.

HALADÓK

I. kategória: Szakközépiskolások

I. díj: **Torda Krisztián**, Eger, Neumann János Közgazdasági Szki. és Gimn., tanára: Pótáné Márton Mária

II. díj: **Havran Dániel**, Salgótarján, Táncsics M. Közgazdasági Szki.,
tanára: Jakubocsvicsné Kozma Margit

III. díj: **Barák Róbert**, Békéscsaba, Széchenyi I. Közgazdasági Szki.,
tanára: Dr Szabó Jánosné

I. dicséret: 4–6. *Belicza András*, Budapest, Puskás Tivadar Távközlési Technikum, tanára: Beregszászi Zoltán; *Magyari Máté*, Vác, Boronkay Gy. Műszaki Középiskola és Gimn., tanára: Mindáné Kolostori Nóra; *Hegedűs Zoltán Csaba*, Miskolc, Andrássy Gyula Műszaki Középiskola, tanára: Gonda Gáspár.

II. kategória: Nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

I. díj: **Ivaskó György**, Baja, III. Béla Gimnázium,
tanára: Királyné Nagy Éva

II. díj: **Zábrádi Gergely**, Győr, Révai Miklós Gimnázium,
tanárai: dr. Szíjártó Miklósné, Zsebők Ottó, Pósa Lajos

III. díj: **Máthé András**, Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimnázium,
tanára: Tóth Attila

I. dicséret: 4–6. *Herczeg Géza*, Szolnok, Varga Katalin Gimnázium, tanára: Dalmadiné Nagy Ilona; *Gyenes Zoltán*, Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimnázium, tanára: Drozdy Győzőné dr.; *Iván Szabolcs*, Kecskemét, Bolyai János Gimnázium, tanára: Varga József.

II. dicséret: 7–10. *Madarász Ádám*, Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimnázium, tanára: Falta Zoltán; *Antók Péter*, Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyak. Gimnázium, tanára: Marcsek Gábor; *Tóth János*, Paks, Vak Bottyán Gimnázium, tanára: dr. Müller János; *Molnár László Milán*, Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, tanárai: Kovács Attiláné, Gulyás Tibor.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

I. díj: **Vizer Máté**, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium,
tanárai: Surányi László, Beleznay Ferenc

II. díj: **Dezső Balázs**, Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimnázium,
tanárai: Ponáczné Csuthy Márta, Sipos Imre

III. díj: **Papp Dávid**, Budapest, Szent István Gimnázium,
tanárai: Juhász István, Rácz János

I. dicséret: 4. *Gáspár Merse Előd*, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium, tanárai: Surányi László, Beleznay Ferenc; **5.** *Bárány Zsófia Luca*, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium, tanárai: Surányi László, Beleznay Ferenc; **6.** *Keszegh Balázs*, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium, tanárai: Surányi László, Beleznay Ferenc; **7.** *Tillinkó Zsanett*, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium, tanárai: Surányi László, Beleznay Ferenc; **8.** *Nagy Máté*, Budapest, Árpád Gimnázium, tanárai: Mikusi Imre, Gyimesi Róbert; **9.** *Győri Nikolett*, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium, tanárai: Surányi László, Beleznay Ferenc; **10.** *Hudomiet Péter*, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium, tanárai: Surányi László, Beleznay Ferenc;

II. dicséret: 11. *Kiss Gergely*, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium, tanárai: Surányi László, Beleznay Ferenc; **12.** *Schlotter Ildikó*, Budapest, Szent

István Gimnázium, tanárai: Juhász István, Rácz János; **13.** *Herczeg Zoltán*, Szeged, Radnóti Miklós Gimnázium, tanárai: Vincze István, Schultz János; **14.** *Lábó Eszter*, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium, tanárai: Surányi László, Beleznay Ferenc; **15.** *Pozsonyi Gergő*, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium, tanárai: Surányi László, Beleznay Ferenc; **16.** *Hesz Zoltán*, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium, tanárai: Surányi László, Beleznay Ferenc; **17.** *Kajtár Márton*, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium, tanárai: Surányi László, Beleznay Ferenc; **18.** *Lábó Melinda*, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium, tanárai: Surányi László, Beleznay Ferenc; **19.** *Pálvölgyi Dömötör*, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium, tanárai: Surányi László, Beleznay Ferenc; **20.** *Venter György*, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium, tanárai: Surányi László, Beleznay Ferenc; **21.** *Flach Attila*, Szeged, JATE Ságvári E. Gyak. Iskola, tanárai: Vargáné dr. Nádházi Ágnes, dr. Némethné Varga Éva; **22.** *Péterffy Bálint*, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium, tanárai: Surányi László, Beleznay Ferenc; **23.** *Vértesi Vera*, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium, tanárai: Surányi László, Beleznay Ferenc; **24.** *Bachraty Gergely*, Budapest, Szent István Gimnázium, tanárai: Juhász István, Rácz János; **25.** *Bajusz Csaba*, Szeged, Radnóti Miklós Gimnázium, tanárai: Vincze István, Schultz János; **26.** *Csík László*, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium, tanárai: Surányi László, Beleznay Ferenc.

Az 1997/98. évi Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny feladatai

I. kategória: Szakközépiskolák

Első (iskolai) forduló

1. Az $ABCD$ négyzet belsejében úgy jelöljük ki a P pontot, hogy a $PAB\sphericalangle = PBA\sphericalangle = 15^\circ$ legyen. Igazolja, hogy ekkor a PCD háromszög szabályos háromszög.

2. Oldja meg a természetes számok halmazán az $y^2+48=x^2y$ egyenletet.

3. Az a_0, a_1, $\ldots$, a_n, $\ldots$ egész számokból álló sorozatot a következőképpen definiáljuk:

d) $a_1=1$,

e) minden $n\in\mathbf{Z}^+$-ra $a_{n-1}\cdot a_{n+1}=a_n+1$,

f) $a_2>a_1$.

Számítsa ki a sorozat első 1997 elemének az összegét, azaz az $a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{1996}$ összeget.

4. Az ABC hegyesszögű háromszög AB oldalának felezőpontját jelölje F_1. Az AC és a BC oldalak fölé, kifelé megrajzoljuk az ACB_1 és a BCA_1 egyenlő szárú derékszögű háromszögeket (a derékszög B_1-ben, illetve A_1-ben van). Bizonyítsa be, hogy az $F_1A_1B_1$ háromszög egyenlő szárú és derékszögű.

5. Oldja meg a $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ intervallumon a $\sin^2 x+\sin^2 2x>\sin^2 3x$ egyenlőtlenséget.

6. Legyenek x és y pozitív valós számok. Milyen kapcsolat áll fenn x és y között, ha az

$$\frac{x^{16}}{y^{16}}+\frac{y^{16}}{x^{16}}-\frac{x^8}{y^8}-\frac{y^8}{y^8}+\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}-\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

kifejezés a legkisebb értékét veszi fel? Határozza meg ezt a legkisebb értéket.

Második forduló

1. Az $\{a_n\}: a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ számtani sorozat különbsége 3. A $\{b_n\}$ számtani sorozat első eleme 2-vel kisebb a_1-nél, a különbsége 4, és minden eleme pozitív. Határozza meg, hogy a két sorozatnak legfeljebb hány közös eleme lehet az 1997-nél kisebb számok között?

2. Igazolja, hogy minden n egész számra az

$$\frac{n^5}{120}+\frac{n^3}{8}+\frac{n^2}{2}+\frac{11n}{30}$$

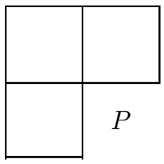
kifejezés egész szám.

3. Határozza meg azokat az x, y, z valós számokat, amelyek gyökei az

$$x+y+(z^2-8z+14)\sqrt{x+y-2}=1,$$
$$2x+5y+\sqrt{xy+z}=3$$

egyenletrendszernek.

4. Egy téglalap szomszédos oldalai a cm és b cm hosszúak, ahol a és b 1-nél nagyobb egész számok. A téglalap területe T cm^2, és T osztható 6-tal. A P sokszöget úgy származtatjuk, hogy a 2 cm oldalú négyzet egyik csúcsánál levágunk egy 1 cm oldalú négyzetet úgy, ahogyan az ábrán látható. Igazolja, hogy a fenti tulajdonságú téglalapok egyrétűen és hézagmentesen lefedhetők a P-vel egybevágó sokszögekkel.



5. A nem egyenlő szárú ABC háromszögbe írt kör középpontját jelöljük K-val. Az AB és az AC oldalegyeneseket és az a hosszúságú BC oldalt kívülről érintő kör középpontját jelöljük K_a-val. Bizonyítsa be, hogy ha $AK=\frac{1}{2}AK_a$, akkor $a^2>\frac{8T}{9}$, ahol T az ABC háromszög területének mérőszáma.

Harmadik (döntő) forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n-hez található olyan $2n+1$ darab közvetlenül egymás után álló természetes szám, hogy ezek közül az első $n+1$ darab négyzetének az összege egyenlő az ezek közül való utolsó n darab négyzetének az összegével.

2. Az ABC háromszög AB oldalán úgy helyezkednek el a C_1 és C_2 pontok, a BC oldalán az A_1 és A_2 pontok, végül a CA oldalán a B_1 és B_2 pontok, hogy

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}=k \quad \text{és} \quad \frac{AC_2}{C_2B}=\frac{BA_2}{A_2C}=\frac{CB_2}{B_2A}=m$$

egyszerre teljesül, ahol k és m különböző pozitív egész számok.

Legyen az $A_1B_1C_1$ háromszög területe t_1, az $A_2B_2C_2$ háromszög területe t_2, végül az ABC háromszög területe t. Lehetséges-e, hogy a t_1, t_2 és t számok ebben a sorrendben egy számtani sorozat egymás után következő, szomszédos tagjai?

3. Bizonyítsa be, hogy az a, b, c oldalú háromszögben az a és b oldalakkal szemben fekvő α és β szögekre akkor és csak akkor teljesül az $\alpha=3\beta$ egyenlőség, ha

$$c=(a-b)\sqrt{1+\frac{a}{b}}.$$

II. kategória: Nem speciális tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Egy tízes számrendszerben felírt pozitív egész szám számjegyeit fordított sorrendben is felírjuk, és az így kapott számot hozzáadjuk az eredetihez.

a) Kaphatunk-e így csupa 9-esből álló 1997 jegyű számot?

b) Kaphatunk-e így csupa 9-esből álló 1998 jegyű számot?

2. Egy derékszögű háromszög befogóira mint átmérőkre kifelé félköröket szerkesztünk. Bizonyítsuk be, hogy annak a négyzetnek a területe, amelynek oldala a két félkör közös érintőszakasza, a derékszögű háromszög területével egyenlő. (A közös érintőszakasz: a két félkör közös érintőjén az érintési pontokat összekötő szakasz.)

3. Bizonyítsuk be, hogy ha p 3-nál nagyobb prímszám, akkor bármely p darab egymást követő egész szám négyzetének az összege osztható p-vel.

4. 32 település között telefonvonalakat építenek ki. Egy telefonvonal pontosan két települést köt össze, és két település között legfeljebb egy közvetlen vonal épül. Bizonyítsuk be, hogy ha már 466 vonalat kiépítettek, akkor bármely településről bármely településre lehet telefonálni vagy közvetlen vonalon, vagy több, már kiépített vonal összekapcsolásával.

5. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ pozitív tagú sorozatban a_1 és a_2 relatív prím egészek, és $1<a_1<a_2$. Ha $n\geqslant 1$, a sorozat tagjait az

$$a_n^2\cdot a_{n+2}=a_{n+1}^3$$

képlettel adjuk meg. Bizonyítsuk be, hogy a sorozatnak nincs olyan tagja, amely másik két tagjának az összegével egyenlő.

Második forduló

1. Egy 3×3-as táblázat minden mezőjére ráírunk egy egész számot úgy, hogy a beírt számok között legyen páros is és páratlan is. Ezután a táblázatból egy újabb (második) táblázatot készítünk a következő módon: az eredeti táblázat egy M mezőjével szomszédos mezőkre írt számokat összeadjuk, és ezt a számot írjuk az új táblázatba az M-nek megfelelő helyre, és ezt mind a kilenc mezőre elvégezzük. Kérdéseink: ennek az eljárásnak megismétlésével egy tetszőleges táblázatból kiindulva eljuthatunk-e olyan táblázathoz, amelyben

a) minden mezőn páratlan szám áll;

b) minden mezőn páros szám áll?

(Két mező akkor szomszédos, ha van közös oldaluk.)
Egy példa az új táblázat szerkesztésére:

3	−1	0
9	7	2
1	3	6

$\Rightarrow$

8	10	1
11	13	13
12	14	5

2. Az ABC háromszög beírt köre az AB, BC, CA oldalakat rendre a C_1, A_1, B_1 pontokban érinti. Az ABC háromszög köré írt kör C-t nem tartalmazó AB ívének a felezőpontja legyen C_2, az A-t nem tartalmazó BC ív felezőpontja A_2, a B-t nem tartalmazó ív felezőpontja pedig B_2. Bizonyítsuk be, hogy az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egyenesek egy ponton mennek át.

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$x+y+(z^2-8z+14)\sqrt{x+y-2}=1,$$
$$2x+5y+\sqrt{xy+z}=3.$$

4. Bizonyítsuk be, hogy az

$$a_n=5\frac{10^n-1}{9}+1 \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

sorozat nem tartalmaz négyzetszámot.

Harmadik (döntő) forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy a

$$2\sin 2^\circ,\ 4\sin 4^\circ,\ 6\sin 6^\circ,\ \ldots,\ 2k\sin(2k)^\circ,\ \ldots,\ 180\sin 180^\circ$$

számok számtani közepe ctg 1°-kal egyenlő.

2. Legyen P, Q, R rendre az ABC háromszög AB, BC, CA oldalának, A', B', C' pedig rendre a PQR háromszög PR, QP, RQ oldalának egy-egy olyan pontja, amelyekre teljesül, hogy az AB és $A'B'$, BC és $B'C'$, CA és $C'A'$ szakaszok páronként párhuzamosak egymással. Bizonyítsuk be, hogy az ABC és $A'B'C$ háromszögek párhuzamos oldalainak az aránya egyenlő a PQR és az $A'B'C'$ háromszögek területeinek arányával.

3. x, y és n olyan pozitív egészek, amelyekre teljesül, hogy $x \leqslant y$, legnagyobb közös osztójuk; $(x,y) = 1998$ és legkisebb közös többszörösük: $[x,y] = n!$.

a) n milyen értéke esetén létezik a fenti feltételeket kielégítő x, y számpár?

b) n milyen értéke esetén lesz ezeknek a számpároknak a száma 1998-nál kisebb?

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok

Első forduló

1. Lássuk be, hogy 99 szomszédos egész szám négyzetének az összege nem lehet teljes hatvány (azaz egy egész szám egynél nagyobb, egész kitevőjű hatványa).

2. Az ABC hegyesszögű háromszögben a C csúcsnál lévő szög γ. Legyen P az AB szakasz belső pontja. Vegyük fel az AC félegyenesen (azaz az AC oldalon vagy annak a C csúcson túli meghosszabbításán) a B_1, a BC félegyenesen pedig az A_1 pontot úgy, hogy a B_1PA szög is és az A_1PB szög is γ legyen. Legyen továbbá k_1 az APB_1 háromszög, k_2 pedig a BPA_1 háromszög körülírt köre, és jelölje M a k_1 és k_2 körök P-től különböző metszéspontját. Milyen ponthalmazt alkotnak az M pontok, ha P végigfut az AB szakasz belső pontjain?

3. Egy középpontosan szimmetrikus konvex hatszögben minden második oldalszakaszon vegyünk fel egy-egy pontot. Mutassuk meg, hogy az ezek által alkotott háromszög területe legfeljebb a hatszög területének a fele.

4. Egy-egy cédulára felírtuk az 1, 2, 3, illetve 4 számokat. Anna kihúz egy cédulát a négy közül, majd visszateszi a többi közé. Ezután Zsófi húz ki egy cédulát, utána visszateszi, majd ismét Anna következik. A kihúzott számot mindig hozzáadják az addig kihúzott számok összegéhez. Az nyer, akinek a húzása után először lesz az összeg 3-mal osztható. Mennyi a valószínűsége annak, hogy Anna nyer?

5. a) Létezik-e olyan 1998-adfokú egész együtthatós $f(x)$ polinom, hogy végtelen sok valós x-re $f(x) = f(1-x)$ teljesül?

b) Ugyanez a kérdés az $f(x) = f(x-1)$ feltétel mellett.

Második (döntő) forduló

1. Legyenek $a_1, \ldots, a_r$ az $1, 2, \ldots, 1998$ számok közül az 1998-hoz relatív prímek. Milyen k egészekre teljesül, hogy a ka_i számok mind különböző maradékot adnak 1998-cal osztva?

2. Egy városban néhány egyforma létszámú független klub működik. Ez azt jelenti, hogy van egy p arány, amelyre igazak a következők:

(i) Minden klub létszáma a város létszámának p-szerese.

(ii) Bárhogy veszünk ki $r+1$ különböző klubot, $Q_1, \ldots, Q_r$ és Q-t (r is tetszőleges), a $Q_1, \ldots, Q_r$ klubok közös tagjainak pontosan a p-szerese tagja a Q klubnak is.

Tudjuk még, hogy az idei évhez képest tavaly 1-gyel, tavalyelőtt pedig 2-vel kevesebb (de még mindig legalább egy) klub működött a városban. Ennek megfelelően – miközben a fenti feltételrendszer, a p arány és a város lélekszáma nem változott – tavaly 2916-tal, tavalyelőtt pedig 6156-tal kevesebb városlakó volt klubtag (azaz legalább egy klubnak a tagja), mint az idén. Mindez egy másik, nagyobb lélekszámú városról is elmondható. Mennyivel laknak többen a második városban?

3. Tegyük fel, hogy az ABC háromszög AB oldalán a P és Q pontok úgy helyezkednek el, hogy az APC és QBC háromszögek beírt köre egyenlő sugarú. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az AQC és PBC háromszögek beírt köre is egyenlő sugarú.

Az 1997/98. évi Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny eredményei

I. kategória
Szakközépiskolások

I. díj: **Fogl Tamás** 12. o., Veszprém, Ipari Szki. és Általános Gimnázium
Felkészítő tanár: Némedi Lajosné

II. díj: **Spisák Ferenc** 11. o., Eger, Neumann János Közgazdasági Szki. és Gimnázium
Felkészítő tanár: Szakaliné Haraszti Éva

III. díj: **Orosz Tímea** 12. o., Nyíregyháza, Széchenyi István Közgazdasági Szki.
Felkészítő tanár: Kissné Orosz Gyöngyvér

4. **Rózsa Tamás** 12. o., Szolnok, Pálfy J. Műszeripari és Vegyipari Szki.
Felkészítő tanár: Báthori Attiláné

5. **Markó Csaba** 12. o., Paks, Energetikai Szakképzési Int. Műsz. Szki.
Felkészítő tanár: Árokszállási Eszter

6. **Mayr Zoltán** 12. o., Budapest, Kossuth L. Közgazdasági Szki.
Felkészítő tanár: Kollárné Tóth Éva

7. **Ritecz Dániel** 12. o., Kaposvár, Noszlopy Gáspár Közgazdasági Szki.
Felkészítő tanár: Varga Ferenc

8. **Vincicki Norbert** 12. o., Nyírgyháza, Széchenyi István Közgazdasági Szki.
Felkészítő tanár: Kissné Orosz Göngyvér, dr. Kiss Sándor

9. **Hegedűs Miklós** 12. o., Debrecen, Gábor Dénes Elektronikai Műszaki Középiskola; Felkészítő tanár: Gyebnárné Nagy Andrea

10. **Sipos Péter** 12. o., Budapest, Trefort Ágoston Kéttannyelvű Műsz. Középisk.
Felkészítő tanár: Dunajszky Zsuzsa

Miniszteri dicséretben részesült:

11. *Lőrentey Károly* 13. o., Budapest, Trefort Á. Kéttannyelvű Műsz. Szki. és Gimn.; **12.** *Balogh Péter* 11. o., Vác, Boronkay György Műszaki Középiskola; **13.** *Hevesi László* 12. o., Szeged, Kőrösy J. Közgazdasági Szki.; **14.** *Csóka Péter* 12. o., Fehérgyarmat, Petőfi Sándor Közgazdasági Szki.; **15.** *Fertetics Mandy* 12. o., Győr, Deák Ferenc Közgazdasági Szki.; **16.** *Béres Lajos Csaba* 12. o., Békéscsaba, Széchenyi I. Közgazdasági Szki.; **17.** *Ivánfi Zoltán* 12. o., Budapest, Neumann János Számítástechnika Szki.; **18.** *Szerencsi Péter* 12. o., Eger, Közgazdasági Szki.; **19.** *Sárkány Bence* 12. o., Székesfehérvár, Jáky József Műszaki Szki.; **20.** *Barák Tamás* 11. o., Békéscsaba, Széchenyi I. Közgazdasági Szki.; **21.** *Gaál Zoltán* 13. o., Budapest, Trefort Á. Kéttannyelvű Műsz. Szki. és Gimn.; **22.** *Deák László* 12. o., Szeged, Gábor Dénes Gimnázium és Szki.; **23.** *Oláh Gyula Péter* 12. o., Békéscsaba, Széchenyi I. Közgazdasági Szki.; **24.** *Kovács Adrienn* 12. o., Salgótarján, Táncsics Mihály Közgazdasági Szki.; **25.** *Vörös Tibor* 12. o., Budapest, Kalmár László Számítástechnikai Szki.; **26.** *Ungvári Antal* 12. o., Debrecen, Mechwart András Gépip. Műszaki Szki.; **27.** *Szabó Krisztián* 12. o., Békéscsaba, Széchenyi I. Közgazdasági Szki.; **28.** *Keresztes Nagy Katalin* 12. o., Paks, Energetikai Szakképzési Intézet Műsz. Szki.; **29.** *Csökmei Krisztina* 12. o., Békéscsaba, Széchenyi I. Közgazdasági Szki.; **30.** *Rónai András* 12. o., Budapest, Corvin M. Gimn. és Műszaki Középiskola.

II. kategória
Nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

I. díj: **Sarlós Ferenc** 12. o., Baja, III. Béla Gimnázium
Felkészítő tanár: Királyné Nagy Éva

II. díj: **Kun Gábor** 12. o., Budapest, Piarista Gimnázium
Felkészítő tanár: Nyeste Pál

III. díj: **Karádi Richárd** 12. o., Győr, Révai Miklós Gimnázium
Felkészítő tanár: dr. Szíjártó Miklósné, Zsebők Ottó

4. **Hartmann Miklós** 12. o., Bonyhád, Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium
Felkészítő tanár: dr. Katz Sándor

5. **Tisza Gergő** 12. o., Győr, Révai Miklós Gimnázium
Felkészítő tanár: Zsebők Ottó

6. **Jánosi Gergely** 12. o., Budapest, Eötvös József Gimnázium
Felkészítő tanár: Gyengéné Beé Andrea

7. **Bíró Zsuzsanna** 11. o., Szombathely, A Premontrei Rend Szent Norbert Gimnáziuma; Felkészítő tanár: Heigl István

8. **Pál András** 11. o., Budapest, Eötvös József Gimnázium
Felkészítő tanár: Somfai Zsuzsa, Balga Attila

9. **Szakács László** 11. o., Budapest, Jedlik Ányos Gimnázium
Felkészítő tanár: Gudenus Lászlóné, dr. Sebestyén Zoltán

10. **Zombori Tamás** 12. o., Budapest, Toldy Ferenc Gimnázium
Felkészítő tanár: dr. Pelényi Attiláné, Zombori Natasa

Miniszteri dicséretben részesült:

11. *Mecz Balázs* 11. o., Pápa, Türr István Gimnázium; **12.** *Németh Ádám* 12. o.t., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium; **13.** *Lengyel Tímea* 11. o., Kaposvár, Munkácsy M. Gimnázium és Szki.; **14.** *Kiss Gábor Géza* 11. o., Budapest, Szent István Gimnázium; **15.** *Szalontay Mihály* 11. o., Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gyak. Gimnázium; **16.** *Lukács László* 12. o., Kazincbarcika, Ságvári Endre Gimnázium; **17.** *Dancsó Zsuzsanna* 11. o., Budapest, ELTE Trefort Ágoston Gyak. Gimnázium; **18.** *Bújdosó Attlia* 11. o., Budapest, Veres Péter Gimnázium; **19.** *Antal Viktor* 12. o., Budapest, Leővey Klára Gimnázium; **20.** *Gueth Krisztián* 11. o., Szombathely, Kanizsai Dorottya Gimnázium; **21.** *Léka Zoltán* 12. o., Makó, József Attila Gimnázium; **22.** *Pandur Sándor* 11. o., Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gyak. Gimnázium; **23.** *Gál András* 11. o., Kecskemét, Katona József Gimnázium; **24.** *Páles Csaba* 12. o., Debrecen, KLTE Gyakorló Gimnázium; **25.** *Gergely Péter Miklós* 11. o., Budapest, Kölcsey Ferenc Gimnázium; **26.** *Szikszai Boglárka* 12. o., Jászberény, Lehel Vezér Gimnázium; **27.** *Pálfalvy Tamás* 12. o., Győr, Révai Miklós Gimnázium; **28.** *Varga Csilla* 12. o., Budapest, Eötvös József Gimnázium; **29.** *Kovács Ákos* 12. o., Budapest, Piarista Gimnázium; **30.** *Horváth Szabolcs* 12. o., Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gyak. Gimnázium.

III. kategória
Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

I. díj: **Lippner Gábor** 12. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.
Felkészítő tanár: Dobos Sándor, Thiry Imréné, Pósa Lajos

II. díj: **Lukács László** 11. o., Miskolc, Földes Ferenc Gimn.
Felkészítő tanár: ifj. Szabó Kálmán, Gulyás Tibor

III. díj **Kőműves Balázs** 12. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.
Felkészítő tanár: Fazakas Tünde, Dobos Sándor

4. **Patakfalvi Zsolt** 11. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.
Felkészítő tanár: Táborné Vincze Márta, Beleznay Ferenc

5. **Gerbicz Róbert** 11. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.
Felkészítő tanár: Táborné Vincze Márta, Beleznay Ferenc

6. **Végh A. László** 11. o., Debrecen, Fazekas Mihály Gimn.
Felkészítő tanár: Nagy Erzsébet

7. **Fehér Károly** 11. o. Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium
Felkészítő tanár: dr. Szabó Józsefné

8. **Gáli Gergely** 12. o. Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium
Felkészítő tanár: Fazakas Tünde, Dobos Sándor

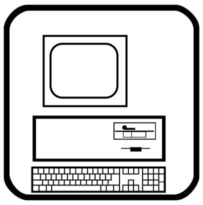
9. **Zawadowski Ádám** 12. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.
Felkészítő tanár: Dobos Sándor, Thiry Imréné

10. **Pogány Ádám** 12. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.
Felkészítő tanár: Dobos Sándor, Thiry Imréné

Miniszteri dicséretben részesült:

11. *Horváth Gábor*, 11. o., Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium; **12.** *Szűcs Gábor* 12. o., Szeged, JATE, Ságvári Endre Gyak. Gimnázium; **13.** *Györey Bernadett* 11. o., Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimnázium; **14.** *Szeles Tamás* 12. o., Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium; **15.** *Szabó Péter* 11. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium; **16.** *Terpai Tamás* 11. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium; **17.** *Devecsery András* 11. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium; **18.** *Tóth Ádám,* 12. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium; **19.** *Less Áron* 12. o., Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium; **20.** *Bérczi Gergely* 12. o., Szeged, JATE Ságvári Endre Gyak. Gimnázium; **21.** *Katona Zsolt* 12. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium; **22.** *Zubcsek Péter Pál* 12. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium; **23.** *Förhécz András* 11. o., Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimnázium; **24.** *Kunszt Árpád* 12. o., Budapest, Árpád Gimnázium; **25.** *Szécsi Vajk* 11. o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium; **26.** *Végh Zoltán* 11. o., Szeged, JATE Ságvári Endre Gyak. Gimnázium.

A Nemes Tihamér OKSzTV 1997/98-as tanévi végeredménye



A Nemes Tihamér Országos Középiskolai Számítástechnikai Versenyen az 1997/98-as tanévben az első fordulóban 6170 tanuló vett részt 400 iskolából, közülük 755-en Erdélyből, 52-en Szlovákiából. A második, regionális fordulót az ország 30 városában rendeztük meg, amelyen 828 tanuló vett részt. A harmadik fordulót, az országos döntőt Budapesten rendeztük meg két helyszínen, amelyen 209 tanuló vett részt.

I. kategória

1. *Micskó Viktor*, 8. o.t., Oroszlány, Lengyel József Gimnázium; **2.** *Siroki László*, 8. o.t., Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium; *Pszota Zsolt*, 8. o.t., Vác, Petőfi Sándor Általános Iskola; és *Szatmári Zsolt*, 7. o.t. Jászberény, Lehel Vezér Gimnázium; **5.** *Balogh János*, 8. o.t., Kaposvár, Kinizsi Lkt-i Általános Iskola; **6.** *Sztupák Szilárd*, 6. o.t., Miskolc, Hermann Ottó Gimnázium; **7.** *Béky Bence*, 8. o.t., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium; **8.** *Juhász Sándor*, 8. o.t., Hajdúböszörmény, Bocskai István Általános Iskola; és *Szeredi Dániel*, 8. o.t., Budapest, Veres Péter Gimnázium; **10.** *Hargitai Gábor*, 8. o.t., Ócsa, Bolyai János Gimnázium.

II. kategória

1. *Rokob András*, 9. o.t., Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium; **2.** *Sáfár Szilveszter*, 10. o.t., Szeged, Ságvári Endre Gimnázium; **3.** *Varga Kornél*, 10. o.t., Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium; **4.** *Soós István*, 10. o.t., Szombathely, Kanizsai Dorottya Gimnázium;

5. *Ritter Ádám*, 9. o.t., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium; **6.** *Csillag Kristóf*, 10. o.t., Püspökladány, Karacs Ferenc Gimnázium; **7.** *Nagy Zsombor*, 10. o.t., Tata, Eötvös József Gimnázium; és *Csirmaz Előd*, 9. o.t., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium; **9.** *Flach Attila*, 10. o.t., Szeged, Ságvári Endre Gimnázium; és *Pollák Gergely*, 9. o.t., Szeged, Ságvári Endre Gimnázium.

III. kategória

1. *Szabó Viktor*, 12. o.t., Budapest, Leövey Klára Gimnázium; **2.** *Kőműves Balázs*, 12. o.t., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium; **3.** *Marhefka István*, 12. o.t, Miskolc, Avas Gimnázium; **4.** *Balogh András*, 11. o.t., Veszprém, Lovassy László Gimnázium; **5.** *Nagy András*, 12. o.t., Pécs, Löwey Klára Gimnázium; és *Németh András*, 11. o.t., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium; **7.** *Felföldi Zsolt*, 11. o.t., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium; **8.** *Förhércz András*, 11. o.t., Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimnázium; és *Pintér Lóránt*, 11. o.t., Kaposvár, Táncsics Mihály Gimnázium; **10.** *Kopiás Péter*, 12. o.t., Budapest, Neumann János Szki.; és *Varga Péter*, 12. o.t, Szombathely, Premontrei Rendi Szent Norbert Gimnázium; **12.** *Pálfalvi Tamás*, 12. o.t, Győr, Révai Miklós Gimnázium; és *Szabó Gábor*, 12. o.t., Budapest, Leövey Klára Gimnázium; **14.** *Várkonyi Dániel*, 12. o.t., Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimnázium; **15.** *Rácz Balázs*, 11. o.t., Budapest, Veres Péter Gimnázium; és *Ágó Péter*, 12. o.t., Budapest, Petri Lajos Szki.; **17.** *Pósta Zoltán*, 12. o.t., Budapest, Leövey Klára Gimnázium; **18.** *Berki Lukács*, 12. o.t., Győr, Révai Miklós Gimnázium; **18.** *Szamonek Zoltán* 12. o.t., Budapest, Bolyai János MüSzki.; **20.** *Hesz Gábor*, 11. o.t., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium; és *Balogh Krisztián*, 11. o.t., Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium.

A III. kategória 1–10. helyezettje jogosult az érettségi, illetve felvételi kedvezményes igénybevételére (egyes intézményekben az 1–20. helyezett).

A II–III. kategória 10–11. osztályosai közül a legjobb 13 helyezett számára olimpiai válogatóversenyt rendeztünk, amelynek eredményeképpen kiválasztottuk az idei Közép-Európai Informatikai Diákolimpián, Zadarban (Horvátországban) résztvevő magyar csapat tagjait, akik a következők:

Felföldi Zsolt, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimnázium;

Förhércz András, Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimnázium;

Rácz Balázs, Budapest, Veres Péter Gimnázium;

Rokob András, Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium.

A Közép-Európai Informatikai Diákolimpián a magyar csapat a 11 résztvevő ország közül a 4. helyet érte el, versenyzőink eredménye:

Förhércz András: ezüstérem; Rokob András: ezüstérem; Felföldi Zsolt: bronzérem; Rácz Balázs: bronzérem.

A Nemes Tihamér OKSzTV III. kategóriájának 1–21. helyezettje számára olimpiai válogatóversenyt rendeztünk, amelynek alapján kiválasztottuk a Nemzetközi Informatikai Diákolimpián szereplő csapatot.

10. Nemzetközi Informatikai Diákolimpia

IOI'98 – Setúbal, 1998. szeptember 5–12.

A magyar olimpiai csapat vezetői: dr. Horváth Gyula (JATE), dr. Zsakó László (ELTE).

Magyarország képviselője a Nemzetközi Olimpiai Bizottságban: Hanák Péter (OMFB).

A csapat tagjai:

Ágó Péter, Budapest, Petrik Lajos Szki., tanára: Szabó András;

Felföldi Zsolt, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium;

Marhefka István, Miskolc, Avas Gimnázium, tanára: Nagy György;

Várkonyi Dániel, Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimnázium, tanára: Varga Margit.

A diákolimpián 66 ország vett részt, közülük 61 indított csapatot. A magyar csapat felkészítését végző tanárok: Gulyás László (ELTE), Horváth Gyula (JATE), Szlávi Péter (ELTE), Zsakó László (ELTE).

A versenyt az IOI szabályainak megfelelően bonyolították le. A versenyzőknek mindkét versenynapon 3-3 feladatot kellett megoldani öt óra alatt. A szervezők színvonalas, érdekes feladatokat állítottak össze. Jó eredményt a hegyományosan erős csapatok (Kína, Lengyelország, Oroszország, Románia, Szlovákia, USA) értek el.

Csapatunk a nem hivatalos éremtáblázat szerint a kilencedik helyen végzett, eredménye:

Felföldi Zsolt: aranyérem, Marhefka István: ezüstérem, Várkonyi Dániel: bronzérem, Ágó Péter: bronzérem.

Zsakó László

Az 1998/99-es tanévi Nemes Tihamér Országos Középiskolai Számítástechnikai Tanulmányi verseny

3 korcsoport részére (I.: 5–8. o., II.: 9–10. o., III.: 11–12. o.) ismét három fordulós lesz:

Első (iskolai) forduló:	1998. november 17.
Második (területi) forduló:	1999. január 16.
Harmadik (döntő) forduló:	1999. március 20.

A diákolimpiai válógatóversenyeket 1999. április 23–24-én rendezik.

További információ: az INSPIRÁCIÓ c. folyóiratban, a `http://www.njszt.iif.hu` címen, illetve e-mailen: `nttv@inf.bme.hu`.

Matematika Határok Nélkül | Mathématiques Sans Frontieres

Versenyfelhívás '99

Az 1998–99-es tanévben is meghirdetjük a „Mathématiques Sans Frontieres – Matematika Határok Nélkül" nemzetközi vetélkedő magyarországi fordulóját budapesti, Békés megyei, Borsod-Abaúj-Zemplén megyei és Hajdú-Bihar megyei
középiskolák első osztályai (9. évfolyam) számára.

A verseny szülőhazája a franciaországi Elzász tartomány. A fokozatosan nemzetközivé terebélyesedő erőpróbán tavaly már 23 ország, köztük hazánk 220 budapesti, Békés megyei és Hajdú-Bihar megyei középiskolai osztállyal, mintegy 6200 tanulóval vett részt.

A „Matematika Határok Nélkül" osztályok közötti erőpróba, ezért csak teljes osztályok jelentkezését várjuk. A feladatokat az osztályok csoportmunkában oldhatják meg, tevékenységüket önállóan szervezve.

A feladatok jellege, szövegezése lehetővé teszi, hogy a matematikában kevésbé eredményes tanulók is hatékonyan hozzájáruljanak osztályuk teljesítményéhez.

A feladatok közül az egyik idegen nyelven – angol, német, francia, olasz, spanyol – fogalmazódik meg, s a megoldást is a választott nyelven kell megadni. Természetesen a többi feladat szövege magyar nyelvű, és a megoldást is magyar nyelven várjuk.

A verseny felügyeletét a versenyző osztályok tanárai látják el egy konkurens osztálynál. Ezért csak olyan jelentkezést fogadunk el, ahol a tanár – vagy az általa felkért kollégája – vállalja az egyszeri ügyeletet.

A verseny időpontja : 1999. március 11. 15 órától 16 óra 30 percig.

A versenyt december folyamán megelőzi egy próba-forduló. Ennek eredménye nem számít a végeredménybe, kizárólag az osztály felkészülését szolgálja, megszervezése az osztály szaktanárának feladata. (A próba-forduló feladatait a szükséges példányszámban a jelentkezők rendelkezésére bocsátjuk.)

A jelentkezéseket az alábbi címre kérjük:

Budapesten: „Matematika Határok Nélkül", Berzsenyi Dániel Gimnázium, 1133 Budapest, Kárpát u. 49–53. msf@s2.berzsenyi.isk.tvnet.hu

Békés megyében: Szabó Zsófia, Rózsa Ferenc Gimnázium, Békéscsaba Andrássy út 56.

Borsod-Abaúj-Zemplén megyében: (Miskolc kivételével) Kiss István, Ságvári Endre Gimnázium Kazincbarcika, Jószerencsét út 2.

Miskolc: Héjj Márta, Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc Hősök tere 7.

Hajdú-Bihar megyében: Berzi Imre, Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen, Hatvan utca 44.

A jelentkezési lapon a következő adatokat kérjük feltüntetni:

- Iskola neve, címe, típusa
- osztály jele, létszáma, 4, 6 vagy 8 osztályos képzésben vesz részt az osztály
- matematika heti óraszáma, a matematika tanár neve
- a verseny alatt ügyeletet vállaló tanár neve

A jelentkezési határidő: 1998. november 15.

További felvilágosításért a következő tanárokhoz fordulhatnak:

dr. Gerőcs László, Gombos Éva, Kovács Károly,	ELTE Trefort Gimn.	tel: 266 42 12
Kévés Rita, dr. Ökördi Péterné, Somogyi László,	Berzsenyi Gimn.	tel: 359 16 13
Kovács Károlyné	Városmajori Gimn.	tel: 255 69 81

Matematika Határok Nélkül Alapítvány

Megoldásvázlatok, eredmények az I. mérőlap (1998/7. sz.)* feladataihoz

1. A bal, illetve a jobb oldalon álló két-két törtkifejezés összeadása után a

$$\frac{2x^2-4}{x^2-1}=\frac{2x^2-24}{x^2-9}-\frac{28}{15}$$

egyenletet kapjuk. Rendezés után $7x^4-55x^2+108=0$, ahonnan $x^2=4$ vagy $x^2=\frac{27}{7}$. Az egyenletnek négy megoldása van: $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=3\sqrt{\frac{3}{7}}$, $x_4=-3\sqrt{\frac{3}{7}}$.

2. Az ismert $a=2r\sin\alpha$, $b=2r\sin\beta$, $c=2r\sin\gamma$ összefüggések alkalmazásával, ahol r a háromszög köré írható kör sugara,

$$\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha=\frac{b^2}{4r^2}+\frac{c^2}{4r^2}-2\cdot\frac{b}{2r}\cdot\frac{c}{2r}\cdot\cos\alpha=$$
$$=\frac{1}{4r^2}(b^2+c^2-2bc\cos\alpha)=\frac{a^2}{4r^2}=\sin^2\alpha.$$

3. Mivel $-x^2+x-1=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$ minden valós x-re negatív, ezért a két egyenlőtlenséggel ekvivalens:

$$-3x^2+3x-3<x^2+ax-2<2x^2-2x+2,$$

tehát a

$$4x^2+(a-3)x+1>0 \qquad \text{és az} \qquad x^2-(a+2)x+4>0$$

minden valós x-re. Ezért mindkét másodfokú kifejezésnek negatív lesz a diszkriminánsa.

$$\begin{array}{ccc} (a-3)^2-16<0, & \text{és az} & (a+2)^2-16<0,\\ -4<a-3<4 & \text{és} & -4<a+2<4,\\ -1<a<7 & \text{és} & -6<a<2. \end{array}$$

Az egyenlőtlenség $-1<a<2$ esetén teljesül minden valós x-re.

4. Az $APDB$ húrnégyszög köré írt kör két szelője CA, illetve CB.

A szelőtétel szerint $CP\cdot CA=CD\cdot CB$. Mivel $CA^2=2{,}4^2+4{,}5^2=5{,}1^2$, ezért $CA=5{,}1$. Legyen $AP=y$. Most $5{,}1\cdot(5{,}1-y)=2{,}4\cdot4{,}8$, ahonnan $y=5{,}1-\frac{2{,}4-4{,}8}{5{,}1}$, $y=AP\approx2{,}84$ egység.

---

* *Helyesbítés.* Októberi számunkban a mérőlap ajánlásában szereplő szegedi Radnóti Miklós Gimnázium korábban Klauzál Gábor nevét viselte. A 6. feladatban C helyett X-et írtunk.

A feladat hasonlóság, területszámítás és trigonometria alkalmazásával is megoldható.

5. Mivel (a szokásos jelölésekkel)

$$(n+k)(S_n-S_k)=(n+k)\cdot\frac{n}{2}\left((2a_1+(n-1)d)-\frac{k}{2}(2a_1+(k-1)d)\right)=$$
$$=\frac{n+k}{2}\cdot(n-k)(2a_1+(n+k-1)d),$$

és $(n-k)S_{n+k}=(n-k)\cdot\dfrac{n+k}{2}\cdot(2a_1+(n+k-1)d)$, ezért igaz az állítás.

6. Mivel $AB^2=16+25=41$, $AB=\sqrt{41}$, ezért a C ponthoz tartozó m magasság (a C pont távolsága az AB egyenestől) $m=\dfrac{18}{\sqrt{41}}$, hiszen $9=\dfrac{\sqrt{41}\cdot m}{2}$.

Az AB egyenes egyenlete: $5x-4y+20=0$. A $C(x;7)$ pont távolsága ettől az egyenestől $\dfrac{18}{\sqrt{41}}$ egység, tehát $\dfrac{|5x-4\cdot7+20|}{\sqrt{41}}=\dfrac{18}{\sqrt{41}}$, azaz

$$5x-8=18, \qquad \text{vagy} \qquad 5x-8=-18$$
$$x_1=\frac{26}{5} \qquad \text{vagy} \qquad x_2=-2.$$
$$C_1\left(\frac{26}{5};7\right), \qquad C_2(-2;7).$$

7. Mivel az x^2 együtthatója pozitív, ezért $x_1<a<x_2$ pontosan akkor teljesül, ha a másodfokú kifejezés az $x=a$ helyen negatív, azaz

$$2a^2-2(2a+1)\cdot a+a(a-1)<0,$$
$$-a^2-3a<0.$$

Ez akkor teljesül, ha $a<-3$ vagy $a>0$. Ezekre az a értékekre az eredeti egyenlet diszkriminánsa pozitív, tehát létezik két (valós) gyöke.

8. a) Az egyenletnek pontosan akkor van két egyenlő valós gyöke, ha az egyenlet diszkriminánsa nulla.

$$D=4(1+2\sin\alpha\cos\alpha)-4(1+2\cos\alpha).$$

$D=0$, ha $\cos\alpha\cdot(\sin\alpha-\cos\alpha)=0$, azaz ha $\alpha=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ vagy $\alpha=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

(Az egyenlet ekkor: $(x-1)^2=0$, $(x+1)^2=0$, $(x-\sqrt{2})^2=0$, $(x+\sqrt{2})^2=0$.)

b) Az egyenletnek két különböző valós gyöke akkor van, ha a diszkriminánsa pozitív.

Mivel $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\right)=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$, azért

$$\cos\alpha\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)>0$$

kell teljesüljön. Ez akkor teljesül, ha $\cos\alpha > 0$ *és* $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) > 0$ vagy $\cos\alpha < 0$ és $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) < 0$, tehát

$$-\frac{\pi}{2} + 2n\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2n\pi \text{ és } 2k\pi < \alpha - \frac{\pi}{4} < \pi + 2k\pi \ (k,\, n \in \mathbf{Z})$$

vagy $\frac{\pi}{2} + 2n\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$ és $\pi + 2k\pi < \alpha - \frac{\pi}{4} < 2\pi + 2k\pi$, $(n,\, k \in \mathbf{Z})$,

azaz $\frac{\pi}{4} + 2m\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2m\pi$ vagy $\frac{5\pi}{4} + 2l\pi < \alpha < \frac{3\pi}{6} + 2l\pi$ esetén $(m,\, l \in \mathbf{Z})$.

Rábai Imre

Novemberi szakköri feladatok*

Pogány János, a budapesti Piarista gimnázium kiváló matematika tanára emlékére.

1. Állapítsa meg, hogy az m valós paraméter mely értékeire lesznek a

$$2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 2m = 0$$

egyenlet gyökei valósak, és állapítsa meg ezekre az m értékekre az

$$f(m) = x_1 + x_2 + 4x_1x_2$$

kifejezés legnagyobb és legkisebb értékét, ahol x_1 és x_2 az adott egyenlet megoldásai.

2. a) Igazolja, hogy minden háromszögben

$$\varrho \cdot r = \frac{abc}{4s},$$

ahol a, b, c a háromszög oldalai, $a+b+c = 2s$, ϱ a háromszögbe, r a háromszög köré írt kör sugara.

b) Tekintsük azokat a háromszögeket, amelyekben az egyik oldal hossza 2 egység, a másik két oldal összege 4 egység. Határozza meg a háromszögbe és a háromszög köré írható körök területei szorzatának a legnagyobb értékét.

3. Igazolja, hogy az

$$f(x) = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2} \qquad (a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0;\ a_2x^2 + b_2x + c_2 \neq 0)$$

kifejezés értéke pontosan akkor (akkor és csak akkor) állandó (azaz értéke független x-től), ha van olyan $k \in \mathbf{R}$, hogy $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$, $c_1 = kc_2$.

4. Az (a_n) $(n \in \mathbf{N}^+)$ sorozatban $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ és $n \geqslant 3$ esetén $a_n = 2a_{n-2} - a_{n-1}$.

Írja fel a_n-et, majd S_n-et $(S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ n függvényeként.

Rábai Imre

---

* Ezt a feladatsort szakköri feldolgozásra ajánljuk.

C. 503. HELYESBÍTÉS

A KöMaL 1998/7. számában megjelent példa megoldásába a 404. oldalon több értelemzavaró sajtóhiba is bekerült. Közöljük a javítást:

Az első esetben

$$\frac{T_{\triangle}}{T_{\bigcirc}}=\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\approx 1{,}8006,$$

illetve a második esetben

$$\frac{T_{\triangle}}{T_{\bigcirc}}=\frac{\frac{5\sqrt{5}}{2}\varrho^2}{\varrho^2\pi}=\frac{5\sqrt{5}}{2\pi}\approx 1{,}7794,$$

tehát ez utóbbi arány a kisebb, ezért fedi a beírt kör ebben az esetben a háromszög területének nagyobb hányadát.

Matematika gyakorlatok megoldásai

Gy. 3163. *Legalább hány egyenest határoz meg a síkon n különböző, nem egy egyenesen fekvő pont?*

Megoldás. A feladat feltételeiből következik, hogy $n \geqslant 3$. Az $n=3$ esetben a három nem egy egyenesen lévő pont meghatároz egy háromszöget, tehát az egyenesek száma is három. Teljes indukcióval bebizonyítsuk, hogy n pont legalább n egyenest határoz meg. Tegyük fel, hogy a feladat állítása $n-1$, a feltételeknek megfelelő pontra igaz. Tekintsünk a síkon n különböző nem egy egyenesen lévő pontot, és vegyünk ki közülük $(n-1)$-et. Két eset lehetséges:

1. A kivett pontok egy egyenesre illeszkednek. Kössük össze az $n-1$ pont mindegyikét az n-edikkel. Így kapunk $n-1$ különböző egyenest, ami a kivett pontok egyenesével együtt pontosan n egyenest jelent.

2. Az $n-1$ pont nincs egy egyenesen. Ekkor az indukciós feltevés szerint meghatároznak legalább $n-1$ egyenest. Feltehetjük, hogy pontosan $n-1$ egyenest határoznak (csak) meg, ugyanis máskülönben az indukciós lépésben nem lenne mit bizonyítanunk. Ez az $n-1$ egyenes nem tartozhat egy sugársorhoz, mert akkor mindegyik egyenes az $n-1$ pont egyikére illeszkedne, ezért az egyenesek száma legfeljebb $n-2$ lenne. Tekintsünk most egy, az eddigiektől különböző n-edik pontot. Ez nem lehet rajta az $n-1$ pont meghatározta legalább $n-1$ különböző egyenes mindegyikén, mert akkor azok egy sugársorhoz tartoznának, ez pedig, mint láttuk, nem lehetséges. Ezért lesz olyan pont az előbbi $n-1$ között, amelyik az n-edikkel egy újabb egyenest határoz meg. Tehát legalább n egyenes jön létre.

Spanczér Ilona (Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimn., 8. o.t.)

Megjegyzések. 1. A sík (vagy a tér) egy pontján átmenő egyenesek halmazát sugársornak nevezzük.

2. A teljes indukcióval való bizonyítás módszerét nem ismerő olvasóink nehezen érthetik meg a leírt megoldást. Számukra azt ajánljuk, hogy az $n=3$ esetből induljanak ki. Vegyenek föl egy negyedik pontot, és igazolják, hogy legalább négy egyenes létrejön. Ezt tudva mutassák meg, hogy öt nem egy egyenesen lévő pont meghatároz legalább öt egyenest és így tovább.

362 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Gyenes Zoltán. 5 pontot Bákor Krisztina, Birkner Tamás, Csirmaz Előd, Csóka Endre, Deli Lajos, Frey Dóra, Gajári Dávid, Hesz Zoltán, Horváth Dénes, Kerékfy Péter, Keszegh Balázs, Kovács Erika Renáta, Lábó Eszter, Lábó Melinda, Leipold Diána, Lovrics Anna, Papp Dávid, Papp Eszter, Pozsonyi Gergő, Reviczky Ádám, Schlotter Ildikó, Sidó Péter, Spanczér Ilona, Szilasi Zoltán, Venter György, Vértesi Vera, Zábrádi Gergely. 4 pontos 18, 3 pontos 66, 2 pontos 129, 1 pontos 32, 0 pontos 74 dolgozat. Nem versenyszerű 15.

Gy. 3164. *Egy háromszög súlypontja S, magasságpontja M, beírt körének középpontja O, körülírt körének középpontja K. Ezen pontok közül valamely kettő egybeesik. Mely esetekben következik ebből, hogy a háromszög szabályos?* (**H**)

Javasolta: *Róka Sándor,* Nyíregyháza

Megoldás. A feladat megoldását négy esetre bontjuk.

1. K és M egybeesik.

Az ABC háromszögben ez csak úgy lehetséges, ha pl. a C-ből húzott magasságvonal az AB oldalfelező merőlegese is. De akkor $CA=CB$. Hasonlóan következik, hogy $AB=AC$, tehát a háromszög szabályos. Ugyanilyen gondolatmenettel megmutatható, hogy a háromszög akkor is szabályos, ha M és S, vagy S és K esik egybe.

2. O és M egybeesik.

Ekkor az ugyanabból a csúcsból induló szögfelező és magasság egybeesik, mert van két (különböző) közös pontjuk. Tehát mindhárom szögfelező merőleges a szemközti oldalra, ezért a háromszög oldalai páronként egyenlők, így az most is szabályos.

3. O és S egybeesik.

Ekkor ugyanabból a csúcsból induló szögfelező és súlyvonal egybeesik, mert van két (különböző) közös pontjuk. Mivel a súlyvonal felezi a szemközti oldalt, a szögfelező pedig ezt az oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja, azért a háromszög oldalai páronként egyenlők, azaz a háromszög szabályos.

4. O és K egybeesik.

Vegyük figyelembe, hogy pl. a C-ből induló szögfelező felezi a körülírt kör (egyik) AB ívét, és a felezőponton AB felezőmerőlegese is átmegy. Ezért a c-ből húzott szögfelező és az AB oldalfelező merőlegese egybeesik. A 2. esetben elmondottak szerint a háromszög most is szabályos.

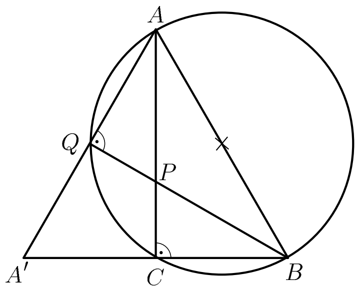
Tehát, ha az S, M, O, K pontok közül kettő egybeesik, akkor a háromszög szabályos.

Vaik István (Budapest, Kaffka M. Gimn., 11. o.t.)

328 dolgozat érkezett. 6 pontos Baharev Ali, Máthé András és Terpai Tamás megoldása. 5 pontot kapott 80, 4 pontot 57, 3 pontot 44, 2 pontot 46, 1 pontot 43, 0 pontot 54 beküldő. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

Gy. 3170. *Az ABC háromszög C-nél levő szöge derékszög. A B csúcsból induló szögfelező az AC oldalt a P, a háromszög köré írt kört a Q pontban metszi. Mekkorák a háromszög szögei, ha $BP=2PQ$?*

Javasolta: *Czirok Levente,* Szekszárd



Megoldás. Tükrözzük az ABC háromszöget a BP egyenesre. Használjuk az *ábra* jelöléseit. Mivel BP szögfelező, A tükörképe, A' illeszkedik BC-re. Thalész tétele szerint $AQB\sphericalangle = 90^\circ$, a tükrözés révén pedig Q az AA' szakasz felezőpontja. Ezért BQ az $AA'B$ háromszög súlyvonala, és a $BP = 2PQ$ feltételből következően P e háromszög súlypontja. Ezért az $AA'B$ háromszögnek BQ is, AC is szimmetriatengelye, és így $AB = A'B = A'A$, tehát a háromszög szabályos. Ebből következik, hogy az $ABCD$ háromszög szögei: 30°, 60° és 90°.

Kurcz Éva (Szolnok, Tiszaparti Gimn. és Humán SZKI., 9. o.t.)

284 dolgozat érkezett. 5 pontos 136, 4 pontos 61, 3 pontos 5, 2 pontos 39, 1 pontos 29, 0 pontos 14.

Gy. 3178. *Legalább milyen hosszú egy egységnyi területű háromszög második legnagyobb oldala?*

Megoldás. Legyenek a háromszög oldalai a, b, c. Tegyük fel, hogy $a \leqslant b \leqslant c$. Felírhatjuk a háromszög területét a szokásos jelölésekkel $\frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ alakban, ahonnan

$$\frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} \leqslant \frac{a \cdot b}{2} \leqslant \frac{b^2}{2}. \tag{1}$$

A területre szóló feltétel szerint $\frac{b^2}{2} \geqslant 1$, és így $b \geqslant \sqrt{2}$. A második legnagyobb oldal tehát legalább $\sqrt{2}$.

A $b \geqslant \sqrt{2}$ összefüggésben pontosan akkor lesz egyenlőség, ha (1)-ben mindenütt egyenlőség áll. Ez pontosan azt jelenti, hogy $a = b$ és $\gamma = 90^\circ$, azaz $a = b = \sqrt{2}$ és $c = 2$.

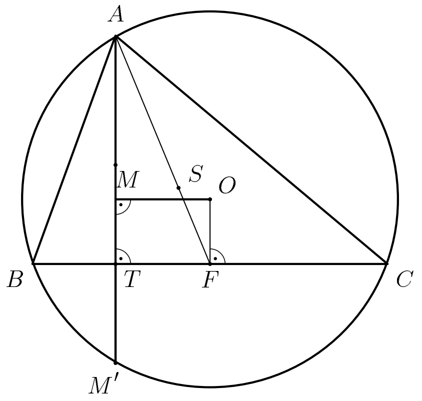
Gyenes Zoltán (Bp., Apáczai Csere J. Gimn., 10. o.t.)

147 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 42, 4 pontot 37, 3 pontot 27, 2 pontot 10, 1 pontot 11, 0 pontot 20 beküldő

Gy. 3186. *Szerkesszünk háromszöget egyik csúcsából induló magasságának és súlyvonalának hosszából, ha ismerjük a csúcs és a magasságpont távolságát is.*

I. megoldás. Legyen az A csúcsból húzott magasság, m és súlyvonal, s adott. Használjuk az *ábra* további jelöléseit is. Ismeretes, hogy bármely háromszög M magasságpontjának egy oldalra vonatkozó M' tükörképe a körülírt körre illeszkedik. Az ábra ATF (esetleg elfajuló) derékszögű háromszöge az $m \leqslant s$ feltétel mellett mindig megszerkeszthető. Mivel AM' a körülírt kör egy húrja, ennek felező merőlegese és a TF egyenesre F-ben állított merőleges a kör O középpontjában metszik egymást. Az O körüli AO sugarú kör a TF egyenesből kimetszi a B, C csúcsokat. A TF egyenes akkor is egyértelműen létezik, ha $T \equiv F$.

Diszkusszió: Már megállapítottuk, hogy $m \leqslant s$ szükséges. Ha $0 < AM \leqslant m$, akkor két megoldás lehet, ugyanis M elhelyezkedhet az AT szakaszon vagy annak A-n túli meghosszabbításán. Ha M az AT szakasz belső pontja, akkor az egyik megoldás hegyesszögű háromszög (ha $M \equiv T$, akkor derékszögű). A másik megoldás nyilván tompaszögű háromszög. Ha $AM > m$, akkor csak egy megoldás lesz, a tompaszögű. Megállapításaink az $m = s$ esetben is érvényesek, amikor is a megoldás(ok) egyenlő szárú háromszög(ek).



Hátravan még annak igazolása, hogy a B és C metszéspontok az $m \leqslant s$ feltétel esetén mindig létrejönnek. Az SAM és SFO háromszögek 2 : 1 arányú hasonlósága révén $AM = 2 \cdot FO$ (lásd még a II. megoldást). Ebből látható, hogy hegyesszögű és derékszögű háromszög megoldás esetén $AO > \frac{1}{2}AM' \geqslant \geqslant \frac{1}{2}AM = FO$, tehát az O körüli AO sugarú kör valóban metszi a TF egyenest. A tompaszögű megoldás esetén ez a metszés még nyilvánvalóbb, hiszen akkor O és A a TF más-más félsíkjában van. Végül belátjuk, hogy az $A \equiv M$ esetben $O \equiv F$, és most is egy (derékszögű) megoldás van.

Andrássy Zoltán (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.)

II. megoldás. Tudjuk, hogy az M, S, O pontok egy egyenesre illeszkednek (Euler-egyenes), és $MS : SO = 2 : 1$. Szerkesszük meg az ATF háromszöget, majd ennek AF oldalán az S pontot. Ezután a fenti arány alapján kapjuk az O pontot. Az O körüli AO sugarú kör és a TF egyenes közös pontjai a hiányzó csúcsok.

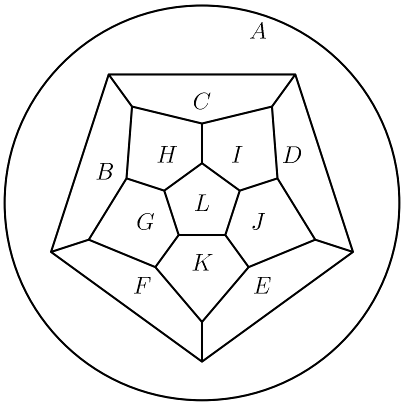
Harangi Viktor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.)

255 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Andrássy Zoltán, Horváth Dénes, Horváth Szilárd és Pozsár Balázs. 5 pontot Bárány Zsófi, Börcsök József, Buruzs Ádám, Csíkvári Péter, Gelencsér Gábor, Gyenes Zoltán, Harangi Viktor, Horváth 713 György, Horváth Hedvig, Kiss 007 Norbert, Lovrics Klára, Máthé András, Szászi Zsuzsanna, Szekeres Nóra, Varga Balázs, Wittner Lilla és Zábrádi Gergely. 4 pontos 87, 3 pontos 116, 2 pontos 15, 1 pontos 12, 0 pontos 4 dolgozat.

Matematika feladatok megoldásai

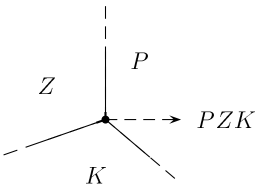
F. 3219. *Egy szabályos dodekaéder lapjait kiszíneztük pirossal, kékkel, sárgával és zölddel úgy, hogy bármelyik két szomszédos lap színe különböző. Hány olyan éle van a dodekaédernek, amelyhez csatlakozó két lap közül az egyik kék, a másik pedig zöld?*

Megoldás. A dodekaéder 12 lapja közül mindegyik pontosan 5 másikkal szomszédos. A lapokat A-tól L-ig megbetűzzük úgy, hogy a dodekaéder két lapja pontosan akkor legyen szomszédos, amikor az *1. ábrán* a megfelelő betűvel jelölt tartományok szomszédosak (az 1. ábrát úgy kaphatjuk, hogy a dodekaédert egy, az A jelű lap „fölött” lévő pontból az L jelű lap síkjára vetítjük.)



1. ábra

Tegyük fel, hogy A piros. Ekkor B, C, D, E és F nem piros. Ha L piros, akkor G, H, I, J és K nem lehet piros, ha pedig L nem piros, akkor G, H, I, J és K közül legfeljebb kettő lehet piros. Azaz az A-val megegyező színű lapokból – A-t is beleszámítva – legfeljebb három van. A dodekaéder szimmetriái miatt ezt nyilván minden lapjáról elmondhatjuk. Vagyis mind a négy szín legfeljebb három lapon fordul elő; viszont összesen 12 lapunk van, ezért mind a négy színnel pontosan három lap van befestve.



2. ábra

Írjuk minden csúcshoz oda azt a három színt, amilyen színű lapok a csúcsban találkozhatnak. Mivel azonos színű lapoknak nincs közös csúcsuk, és minden színű lapból három van, azért minden színt összesen $5 \cdot 3 = 15$ csúcshoz írtuk oda, és így $20 - 15 = 5$ csúcshoz nem írtunk színt. Kék és zöld lapot összekötő él nyilván minden olyan csúcsból pontosan egy indul, ahol vagy a piros vagy a sárga szín nem szerepel. Ez összesen $2 \cdot 5 = 10$ csúcs, de mivel minden élnek két vége van, azért összesen 5 olyan él van, amelyhez csatlakozó két lap közül az egyik kék, a másik pedig zöld.

Lippner Gábor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A dodekaédert többféleképpen is kiszínezhetjük a feltételeknek megfelelő módon – egy lehetséges színezés látható a hátsó borítón –, minden színezésre igaz lesz, hogy bármely két színhez pontosan 5 olyan éle lesz a dodekaédernek, amelyhez az adott két színű lap csatlakozik.

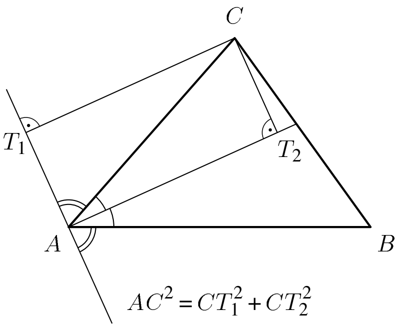
84 dolgozat érkezett. 5 pontos Bárány Kristóf, Barát Anna, Bíró Zsuzsanna, Csirmaz Előd, Csóka Endre, Devecsery András, Gáspár Merse Előd, Gueth Krisztián, Gyenes Zoltán, Győri Nikolett, Harangi Viktor, Hegedűs 396 Péter, Juhász András, Kunszenti-Kovács Dávid, Lippner Gábor, Máthé András, Pap Júlia, Patakfalvi Zsolt, Sarlós Ferenc, Terpai Tamás, Vágvölgyi Péter, Végh A. László és Zawadowski Ádám megoldása. 4 pontot kapott 13, 3 pontot 8, 2 pontot 5, 1 pontot 7, 0 pontot 25 dolgozat. Nem versenyszerű 3.

F. 3230. *Legyen az ABC háromszög súlypontja S. A háromszög minden csúcsából bocsássunk merőlegeseket a másik két csúcshoz tartozó külső és belső szögfelezőkre. Bizonyítsuk be, hogy a kapott merőleges szakaszok négyzetének összege*

$$6(SA^2 + SB^2 + SC^2).$$

Javasolta: *Bíró Bálint,* Eger

Megoldás. Ismert, hogy egy háromszög ugyanazon csúcsához tartozó belső és külső szögfelező egyenesek merőlegesek egymásra (*ábra*). Ezért Pitagorasz tételéből következik, hogy egy háromszög egyik csúcsából egy másik csúcshoz tartozó külső és belső szögfelezőkre bocsátott merőleges szakaszok négyzetének összege megegyezik a két csúcsot összekötő oldal négyzetével. Vagyis a bizonyítandó állításunk



$$6(SA^2 + SB^2 + SC^2) = 2(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

alakba írható.

Legyen $\overrightarrow{SA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{SB} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{SC} = \mathbf{c}$. Tudjuk, hogy ekkor $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Ezért $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2 = 0$, azaz

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 = -2(\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca}). \tag{1}$$

Másrészt viszont $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, tehát $AB^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{ab}$; és hasonlóképpen $BC^2 = \mathbf{c}^2 + \mathbf{b}^2 - 2\mathbf{bc}$, $CA^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{c}^2 - 2\mathbf{ac}$. Ezeket összeadva:

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 2(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2) - 2(\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca}).$$

Vagyis (1)-et felhasználva:

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2) = 3(SA^2 + SB^2 + SC^2).$$

Ezt 2-vel szorozva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

Székelyhidi Gábor (Kuwait, New English School, 11. o.t.) dolgozata alapján

75 dolgozat érkezett. 6 pontos Naszódi Gergely megoldása. 5 pontot kapott Babos Attila, Baharev Ali, Bárány Kristóf, Bíró Anikó, Bujdosó Attila, Csikvári András, Devecsery András, Farkas 496 Norbert, Gáspár Merse Előd, Gelencsér Gábor, Hangya Balázs, Harangi Viktor, Hartmann Miklós, Hegedűs 396 Péter, Hermann György, Homolya Dániel, Horváth 713 György, Juhász András, Keszegh Balázs, Kunszenti-Kovács Dávid, Kutalik Péter, Legány Csaba, Less Áron, Lippner Gábor, Lovas Róbert, Mansur Boase, Pál András, Páles Csaba, Pataki Péter, Poronyi Gábor, Puskás Péter, Sarlós Ferenc, Szabadka Zoltán, Szakács László, Székelyhidi Gábor, Szép László, Taraza Busra, Tisch Dávid, Vágvölgyi Péter, Végh A. László és Zábrádi Gergely. 4 pontos 32, 3 pontos 1 dolgozat.

A pontversenyben kitűzött C gyakorlatok (517–520.)

C. 517. Átlagosan hányszor kell egy szabályos dobókockával dobni ahhoz, hogy a kapott számok összege legalább 3 legyen?

C. 518. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$x^2+yz=0, \qquad v^2+yz=0, \qquad (x+v)y=2, \qquad (x+v)z=-2.$$

C. 519. Egység sugarú körhöz szerkesszünk olyan négyzetet, amelynek két szomszédos csúcsa a körön van, a másik két csúcsot összekötő oldal pedig érinti a kört. Számítsuk ki a négyzet oldalait!

Fried Katalin (Budapest) javaslata alapján

C. 520. Térbeli derékszögű koordinátarendszerben egy origó középpontú gömb sugara 3 egység. Hány rácspont esik a gömb felületére?

❄

Beküldési határidő: 1998. december 15.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest, Pf. 47. 1255

❄

A pontversenyben kitűzött gyakorlatok (3230–3237.) és feladatok (3250–3255.)

Gy. 3230. Van-e olyan természetes számokból álló $a_1, a_2, \ldots$ sorozat, hogy tetszőleges k természetes számra az $a_1+k, a_2+k, a_3+k, \ldots$ sorozat csak véges sok prímet tartalmaz?

Gy. 3231. Vannak-e olyan a, b, c egész számok, amelyekre az

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \text{és az} \qquad (a+1)x^2+(b+1)x+(c+1)=0$$

egyenletnek két-két egész gyöke van?

Orosz versenyfeladat

Gy. 3232. Hány olyan 100 jegyű természetes szám van, amelynek minden jegye páros és bármely két szomszédos jegyének a különbsége 2?

Gy. 3233. Bizonyítsuk be, hogy akárhogyan adunk meg 100 különböző pozitív egész számot, mindig kiválasztható közülük 98, amelyeknek az összege nem osztható a megmaradó kettő összegével. (**H**)

Gy. 3234. Vágjunk fel egy téglalapot 9 téglalapra úgy, hogy semelyik két téglalapot se lehessen összetenni egy újabb téglalappá.

Általános iskolások részére javasolt példák: **C. 518., C. 519., Gy. 3230., Gy. 3234., Gy. 3237.**

Gy. 3235. Az AB és CD szakaszok egy síkban vannak. Szerkesszünk ebben a síkban olyan P pontot, amelyre az APB és CPD háromszögek hasonlóak, és P-nél levő szögük egyenlő.

Gy. 3236. Az ABC hegyesszögű háromszögben az A csúcsból húzott magasság talppontja T_a. Hasonlóan értelmezzük a T_b és T_c talppontokat. Bizonyítsuk be, hogy a $T_aC+T_bA+T_cB$ szakaszok összege legalább akkora, mint a $T_aT_bT_c$ háromszög kerülete. (**H**)

Árokszállási Tibor (Paks) javaslata alapján

Gy. 3237. Lehet-e egy kocka síkmetszete a) szabályos ötszög b) szabályos hatszög?

❄

Beküldési határidő: 1998. december 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

❄

F. 3250. Határozzuk meg azokat az $f:(0,1)\to\mathbf{R}$ függvényeket, amelyekre:

$$f(x\cdot y)=x\cdot f(x)+y\cdot f(y).$$

F. 3251. Egy ping-pong versenyen bármely két versenyző pontosan egyszer játszott egymással. Egy A versenyző akkor kapott díjat, ha bármely másik B résztvevőt vagy legyőzött, vagy legyőzött valakit, aki B-t megverte. Mutassuk meg, hogy ha pontosan egy játékos kapott díjat, akkor ő mindenkit legyőzött.

Kínai versenyfeladat

F. 3252. Hányféleképpen lehet sorbarakni az $1, 2, \ldots, n$ számokat úgy, hogy az első helyen álló szám kivételével mindegyiket megelőzze legalább az egyik (eredeti sorrend szerinti) szomszédja?

F. 3253. Adott a k körvonal és rajta a P pont. Szerkesszük meg a k P-beli érintőjét egy darab egyélű vonalzó segítségével.*

F. 3254. Egy transzformáció a sík $P(x;y)$ pontjához $|x|\neq|y|$ esetén a

$$P'\left(\frac{x}{x^2-y^2};\frac{y}{x^2-y^2}\right)$$

pontot rendeli, $|x|=|y|$ esetén pedig önmagát. Határozzuk meg a sík egyeneseinek a transzformációval kapott képét.

F. 3255. Egy egységsugarú gömbfelszín négy pontja köré egymást páronként nem metsző gömböket rajzoltunk. Mutassuk meg, hogy ha e gömbök sugarainak összege 2, akkor az egységgömb felszínének legalább a negyedét lefedik.

---

* A feladat megoldásához ajánljuk a 450. oldalon kezdődő cikk elolvasását.

A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (187–190.)

N. 187. Adottak egy gömb felszínén az egymástól és egymás átellenes pontjaitól különböző A, B, C és M pontok. Bizonyítsuk be, hogy ha az AM és BM főkörök merőlegesek a BC, illetve AC főkörökre, akkor a CM főkör is merőleges az AB főkörre.

N. 188. Egy fagráfot p^n típusúnak nevezünk, ha gyökerén kívül további n szintje van, és a legfelső szintjét kivéve minden csúcsban p-felé ágazik.

a) Egy 4^n típusú gráf „leveleit” (legfelső csúcsait) kiszíneztük $3k$ színnel. Mutassuk meg, hogy a gráf tartalmaz olyan 2^n típusú részgráfot, amelynek levelei legfeljebb k színnel vannak színezve.

b) Tetszőleges k pozitív egészhez mutassunk példát olyan 4^n típusú gráfra, amelynek levelei kiszínezhetők $3k+1$ színnel úgy, hogy bármelyik 2^n típusú részgráfjának levelein legalább $k+1$ szín szerepeljen.

Javasolta: *Keleti Tamás,* London

N. 189. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a_1, \ldots, a_n$ pozitív egészekre

$$a_1+\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}+\frac{3}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}}+\ldots+\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}<2(a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

N. 190. Bizonyítsuk be, hogy ha a p polinom foka legfeljebb $n-10\sqrt{n}$, akkor

$$|p(0)| \leqslant \frac{1}{10}\left(\binom{n}{1}|p(1)|+\binom{n}{2}|p(2)|+\ldots+\binom{n}{n}|p(n)|\right).$$

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS (Volume 48. No. 8. November 1998)

New exercises for practice (see page 487): **C. 517.** A fair dice is thrown until a total score of 3 or more is obtained. How many times, on the average, has the dice to be thrown? **C. 518.** Solve the following system of equations:

$$x^2+yz=0, \qquad v^2+yz=0, \qquad (x+v)y=2, \qquad (x+v)z=-2.$$

C. 519. Given a circle of unit radius, construct a square such that two consecutive vertices of the square lie on the circle, and the side connecting the other two vertices is tangent to the circle. Determine the length of the side of the square. (*Fried Katalin* (Budapest)) **C. 520.** In three dimensional Euclidean space, consider the sphere of radius 3 centered at the origin. Find the number of lattice points (points with integer coordinates) that lie on the sphere.

New exercises: Gy. 3230. Is there any sequence $a_1, a_2, \dots$ of natural numbers such that, for every natural number k, the sequence $a_1+k, a_2+k, a_3+k, \dots$ contains only a finite number of primes? **Gy. 3231.** Do there exist integer numbers a, b, c such that each of the equations

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \text{and} \qquad (a+1)x^2+(b+1)x+(c+1)=0$$

has two real solutions? (*Russian contest problem*) **Gy. 3232.** How many hundred-digit natural numbers can be formed such that only even digits are used and any two consecutive digits differ by 2? **Gy. 3233.** Given 100 different positive integers, prove that some 98 of them can be selected such that their sum is not divisible by the sum of the two remaining numbers. **Gy. 3234.** Partition a rectangle into 9 rectangular pieces such that no two pieces can be arranged to form an other rectangle. **Gy. 3235.** There are given in the plane two segments AB and CD. Construct a point P such that triangles APB and CPD are similar, having equal angles at vertex P. **Gy. 3236.** In an acute-angled triangle ABC, T_a denotes the foot of the altitude dropped from vertex A. Points T_b and T_c are defined in a similar way. Prove that the sum $T_aC+T_bA+T_cB$ is at least as large as the perimeter of triangle $T_aT_bT_c$. (*Árokszállási Tibor* (Paks)) **Gy. 3237.** Is it possible to intersect a cube by a plane in a) a regular pentagon b) a regular hexagon?

New problems: F. 3250. Find all functions $f:(0,1)\to\mathbf{R}$ that satisfy

$$f(x\cdot y)=x\cdot f(x)+y\cdot f(y).$$

F. 3251. At a ping-pong contest, each player played one game with each of the other players. A player A won a prize if, for any other player B, either A won against B, or A beat someone who won against B. Prove that if exactly one contestant won a prize, then he won against each of the other players. (*Chinese contest problem*) **F. 3252.** How many different ways are there to arrange the numbers $1,2,\dots,n$ in a single row such that every number, except the number which occurs first, is preceded by at least one of its original neighbours? **F. 3253.** Given a circle k and a point P that lies on the circle, construct the line tangent to k at P, using a straight-edge alone. **F. 3254.** A transformation of the plane maps the point $P(x;y)$ onto $P'\left(\dfrac{x}{x^2-y^2};\dfrac{y}{x^2-y^2}\right)$ if $|x|\neq|y|$, and onto itself if $|x|=|y|$. Describe the images of all straight lines under the above transformation. **F. 3255.** There are given a sphere of unit radius and four pairwise nonintersecting balls whose centres lie on the sphere. The sum of the radii of the balls equals 2. Prove that at least one quarter of the surface area of the sphere is covered by the balls.

New advanced problems: N. 187. Four distinct points A, B, C and M are given on a sphere, none of which is opposite to any other. Prove that if the great circles AM and BM are orthogonal to great circles BC and AC, respectively, then also the great circle CM is orthogonal to great circle AB. **N. 188.** A tree graph is said to be of type p^n if it has n levels in addition to its root, and at every vertex, with the exception of the vertices of the topmost level, branches out into p directions. a) The leaves (topmost vertices) of a graph of type 4^n are coloured by $3k$ colours. Prove that the graph has a subgraph of type 2^n whose leaves bear at most k different colours. b) Show, for each positive integer k, a graph of type 4^n whose leaves can be coloured by $3k+1$ colours such that any of its subgraphs of type 2^n has $k+1$ leaves which bear different colours. (*Keleti Tamás* (London)) **N. 189.** Prove that arbitrary positive integers $a_1, \dots, a_n$ satisfy the following inequality:

$$a_1+\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}+\frac{3}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}}+\dots+\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}}<2(a_1+a_2+\dots+a_n).$$

N. 190. A polynomial p has degree at most $n-10\sqrt{n}$. Prove that

$$|p(0)|\leqslant\frac{1}{10}\left(\binom{n}{1}|p(1)|+\binom{n}{2}|p(2)|+\dots+\binom{n}{n}|p(n)|\right).$$