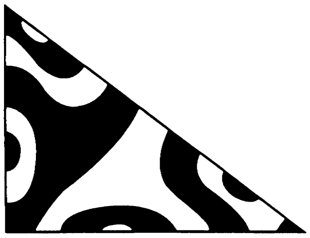
Bizonyára sokan ismerik az éppen 100 éve született M. C. Escher műveit, amelyekben hol lovasok, hol bogarak, gyíkok töltik ki mozaikszerűen (hézagmentesen, egyrétűen) a művészien megtervezett formát, hol szemünk láttára repülő madarak alakulnak át varázslatos módon halakká. Ma már Magyarországon is kapható Escher-album, újra és újra felfedezik művészetét a matematikát kedvelők. Escher maga nem volt matematikus, színes szimmetriáihoz azonban alaposan kellett tanulmányoznia a geometrát. Érdeklődését a mór művészet díszítő motívumai keltették fel. Részletesebben a KöMaL 1978. novemberi számában Nagy Dénes cikke foglalkozott Escherrel. A Pythagoras című holland ifjúsági matematikai lap 1998-as ünnepi különszámában jelent meg a most következő írás, amelyből megtudhatunk valamit Escher munkamódszeréről is.

Escher egy tétele



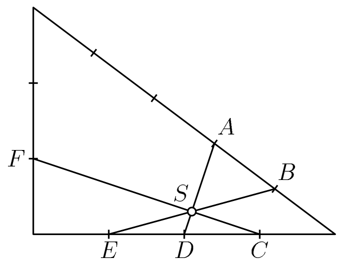
Escher síklefedési kísérletezései során felfedezett egy matematika tételt. Egy derékszögű, 3, 4 és 5 egység oldalú háromszögből elkészítette az itt látható nyomómintát. Ennek segítségével különböző érdekes mintákat kapott, ilyen látható az első borítón.

A háromszög látványos mintáját úgy kapta, hogy felosztotta a megfelelő oldalakat 3, 4, illetve 5 egyenlő részre. A szemközti osztópontokat összekötötte egymással és a csúcsokkal. Esetenként e szakaszok közül három egy pontban metszette egymást.

Ez a felfedezés indította Eschert általános háromszögek szemközti osztópontjait összekötő szakaszok módszeres vizsgálatára.

Mit állít a tétel?

Escher tételét a következő bekezdésben fogalmazzuk meg, ahol mind a 17, egy ponton átmenő szakaszhármast megadjuk. Ezekben az esetekben a három szakasz nemcsak egy ponton megy át, hanem az összekötő szakaszokat a metszéspont „szép” arányban osztja. Az *1. ábra* a 15. esetnek megfelelő felosztást mutatja, ahol a három összekötőszakasz egymást az S pontban metszi, az arányok pedig $AS:SD=3:1$, $BS:SE=1:1$ és $CS:SF=3:7$.



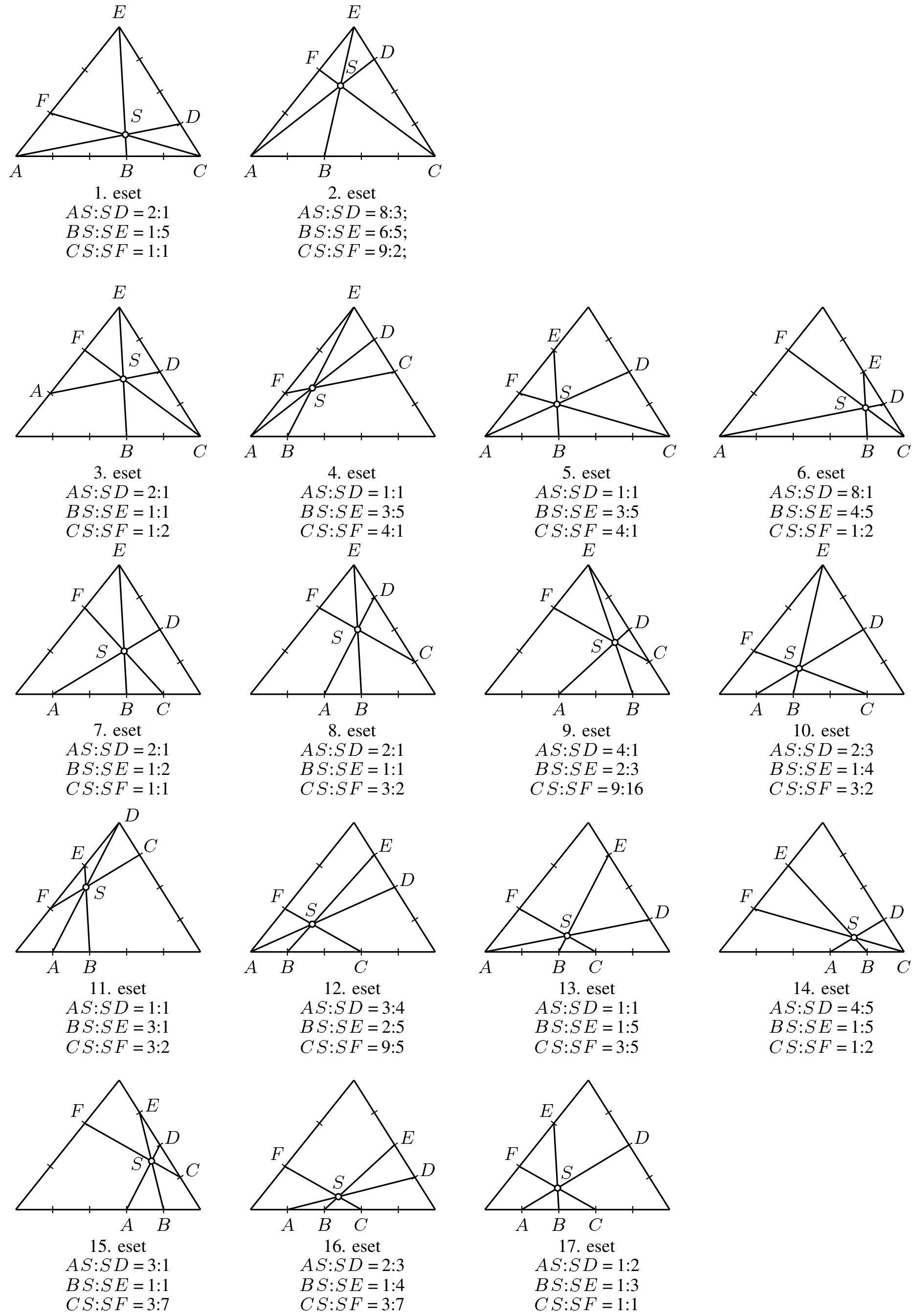
1. ábra

A tétel

Escher eredeti megfogalmazása a következő:

Tétel. *Egy tetszőleges háromszög egy tetszőleges oldalát* 5*, egy másik oldalát* 4*, a harmadik oldalát* 3 *egyenlő részre osztjuk. Az osztópontokat egymással és a csúcsokkal összekötő szakaszok között található* 3 *olyan összekötő szakasz, amely egy ponton megy át, és a metszéspont úgy osztja két részre ezeket a szakaszokat, hogy az osztási arány kis egész számokkal kifejezhető.*

Összesen 17 olyan eset van, amikor 3 szakasz 1 ponton megy át.



2. ábra

Escher tételének 17 esete

I. csoport: (1–2. eset) a 3 szakasz a 3 csúcsból indul.

II. csoport: (3–6. eset) 2 szakasz indul csúcsból.

III. csoport: (7–14. eset) 1 szakasz indul csúcsból.

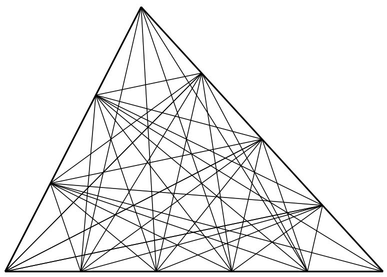
IV. csoport: (15–17. eset) egyik szakasz sem indul csúcsból.

Megjegyzés: a 4., 5., 13. eset metszéspontjai egy egyenesre esnek, amelynek a háromszögbe eső szakaszát 4 egyenlő részre osztják.

Bizonyítás helyett

Így szól Escher megfogalmazásában a tétel. Jó lenne, ha bármely három összekötő szakasz 1 ponton menne át, de ez természetesen nincs így. Escher 17 esetet talált, és ezeket rendre megadta, amint ezt láthattuk.

Hogyan jött rá erre az összefüggésre? Rajzolt egy tetszőleges háromszöget. Berajzolta az *összes* összekötő szakaszt, a vonalak rengetegéből kiszűrte, mely szakaszok mehetnek át egy ponton és melyek nem. Ahogy pontosabban is megrajzolta, látta, mely szakaszok *nem* mennek át egy ponton. De azt, hogy azok, amelyek egy ponton látszanak átmenni, valóban egy ponton mennek is át, Escher nem bizonyította be. (Jan Aarts bizonyítása (15 esetre) megtalálható a Pythagoras című lap honlapján: `www.wins.uva.nl/misc/pythagoras`.)



3. ábra

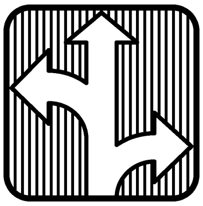
A KöMaL olvasók is megpróbálkozhatnak a bizonyítással.

További kérdések

Ha a háromszög oldalait nem 3, 4, illetve 5 egyenlő részre osztanánk, hanem más arányban (pl. 2, 3 és 5 vagy 2, 4, 5 egyenlő részre), vajon hány szakaszhármas menne át egy ponton? Próbáljuk meg ezeket az eseteket is megvizsgálni.

(*Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy speciálisan a 2, 2, 2 részre való felosztás esetén a súlyvonalakat és a középvonalakat kapjuk.)

Chris Zaal, Pythagoras
(Fordította: Fried Katalin)



Mérőlap felvételire készülőknek I.

A 100 éves szegedi Radnóti Miklós (volt Baross Gábor) Gimnázium tiszteletére, ahol 1936-tól 1940-ig tanultam.

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{x-2}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{x-4}{x-3}+\frac{x+4}{x+3}-\frac{28}{15}.$$

2. Igazolja, hogy minden háromszögben

$$\sin^2\alpha=\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha,$$

ahol α, β, γ a háromszög szögei.

3. Határozza meg az a paraméter értékét úgy, hogy a

$$-2<\frac{x^2+ax-2}{-x^2+x-1}<3$$

egyenlőtlenség minden valós x-re teljesüljön.

4. Az ABC egyenlő szárú háromszög alapja $BC=4{,}8$ egység, a hozzá tartozó magasság $m=AD=4{,}5$ egység. A P pont az AC szár olyan pontja, amelyre az $ABDP$ négyszög húrnégyszög. Számítsa ki az AP szakasz hosszát.

5. Egy számtani sorozat első n, k, illetve $n+k$ elemének összege S_n, S_k, illetve S_{n+k}. Igazolja, hogy

$$(n+k)(S_n-S_k)=(n-k)S_{n+k}.$$

6. Az ABC háromszög két csúcspontja $A(0;5)$ és $B(-4;0)$, a háromszög területe 9 területegység. Számítsa ki az X csúcspont abszcisszáját, ha ordinátája 7.

7. Határozza meg az a paraméter értékét úgy, hogy a

$$2x^2-2(2a+1)x+a(a-1)=0$$

egyenlet egyik gyöke a-nál kisebb, a másik gyöke a-nál nagyobb legyen.

8. Határozza meg az

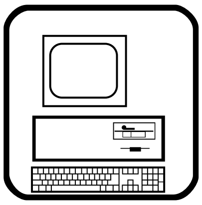
$$x^2-2(\sin\alpha+\cos\alpha)x+1+2\cos^2\alpha=0$$

egyenletben az α paraméter értékét úgy, hogy az egyenletnek

a) két egyenlő,

b) két különböző valós gyöke legyen.

Rábai Imre



Forgalomszabályozás az Interneten

Az Internet egymással összekapcsolt számítógép-hálózatok hálózata. A legfontosabb újítás benne az, hogy egymástól nagyon eltérő megoldások képesek így együttműködni. Vannak bizonyos szabályok (ezt hívják protokollnak), amelyekhez mindenki alkalmazkodik, és a saját számítógépein olyan programokat futtat, amelyek ezeknek megfelelően küldik, illetve fogadják az adatokat.

Az Interneten az adatokat kis darabkákban – csomagokban – küldik el egymásnak a felek, és csak a végpontokban alakítják vissza „folytonos” adatsorrá, például szöveggé, képpé vagy hanggá a csomagokat. Az ilyen jellegű, úgynevezett csomag-kapcsolt hálózatokon szerzett tapasztalatok érlelték ki azt a két legfontosabb protokollt, amely az adatforgalmat szabályozza. Az angol nevük „Transmission Control Protocol", illetve „User Datagram Protocol", amikre általában csak TCP és UDP rövidítéssel szoktak hivatkozni. Manapság gyakorlatilag csak ez a két protokoll játszik szerepet az adatforgalomban.

A különbség köztük dióhéjban annyi, hogy míg az UDP csak egyszerűen megcímezi és elküldi a csomagonként a felhasználótól származó adatokat, addig a TCP vállalja, hogy ellenőrzi az adatok hibátlan megérkezését, és közben igyekszik alkalmazkodni a hálózat terheltségéhez, vagyis ha sokan akarják egyszerre használni a vonalakat, akkor az egyedi számítógépek a TCP előírásainak megfelelően visszafogják a saját adatküldési sebességüket.

A következőkben egy egyszerű feladat segítségével szeretném elmagyarázni a TCP működésének lényegét. Annak érdekében, hogy ne kelljen túlságosan részletekbe menni, most elhanyagoljuk hogy csomag-kapcsolt az adatforgalom, és feltesszük helyette, hogy folytonos. A lényegen ez nem változtat, és a feladat eredménye megfelel a valóságos helyzetnek.

A csatorna átviteli képességének (kapacitásának) minél hatékonyabb felderítése céljából a forrás egy adott alsó határtól kezdve úgy növeli az adás sebességét, hogy a sebesség pillanatnyi megváltozása egyenesen arányos magával a sebességgel. Erre azért van szükség, mert a küldő nem ismeri a kapacitás nagyságát, a gyakorlatban előfordulhatnak nagyságrendi különbségek is. Ilyenkor egy nagyobb csatorna felderítéséhez a sebességet is nagyobb mértékben kell emelni.

Mikor azonban elértük az átviteli sebesség határát, és adatvesztés lép fel, meg kell állítani a növelést, sőt a biztonságos adattovábbítás érdekében érdemes csökkenteni is. Megjegyezzük tehát az elért legnagyobb sebesség felét, és kezdjük el ismét a minimumról növelni az adatküldés sebességét. Tegyük fel, hogy most is minden változatlan, és ugyanakkora sebességnél lép fel ismét adatvesztés! Ezúttal abbahagyjuk a sebesség fent leírt növelését, mikor elérjük az előbb megjegyzett értéket, tehát az elért legnagyobb sebesség felét.

Ettől kezdve óvatosabbak leszünk. A maximálisnál kisebb sebességen megállni persze nem helyes, mert ilyenkor kihasználatlan kapacitás maradna a csatornán, viszont a maximális sebességen adni sem helyes, mert ebben az esetben, ha bárki más is használni akarja a csatornát, felesleges adatvesztés léphet fel a másik félnél, és nálunk is. Ebben az esetben a középutat az jelenti, hogy az adás sebességét az eltelt idővel egyenesen arányosan növeljük.

Tegyük fel, hogy továbbra is zavartalanul használhatjuk a csatornát! Ekkor előbb-utóbb ismét elérjük az elérhető legnagyobb sebességet, és adatvesztés lép fel. Ekkor a sebességet a felére csökkentjük, és az előző bekezdésben leírtak szerint növeljük ismét az adás sebességét. A feladatban leírt adatvesztéseket elhanyagoljuk, azaz úgy vesszük, hogy nem kell ismételten elküldeni az elveszett adatokat.

A feladat az, hogy számítsuk ki:

– Adott mennyiségű adatot mennyi idő alatt tudunk továbbítani zavartalanul?

– Hosszú távon átlagosan mekkora az átviteli sebesség, ha ismét feltesszük, hogy külső tényezők nem befolyásolnak?

A paraméterek a következők:

adatmennyiség mértékegysége: bit
adási sebesség mértékegysége: bit/másodperc

A felderítési szakaszban leírt arányossági tényező: 0,6931 1/másodperc. Az üzenetküldési szakasz arányossági tényezője: 12000 bit/másodperc^2. Az elérhető legnagyobb adási sebesség: 26400 bit/másodperc. A továbbítandó adatmennyiség: 800 000 bit.

A feladatot helyesen beküldők ismét pályázhatnak az Ericsson különdíjaira!

Éltető Tamás
Ericsson Traffic Lab

A VII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny feladatai*

9. osztály

1. Ismeretes, hogy

$$35! = 10333147966386144929ab66513375232000000000$$

Milyen számjegyek állnak az a és b helyén?

Szabó Magda, Szabadka

2. Az AFE hegyesszögű háromszög ED és FB magasságvonalai a C pontban metszik egymást. Az M, N, P, Q pontok rendre az FC, EC, AE és AF szakaszok felezőpontjai. Bizonyítsuk be, hogy az $MNPQ$ négyszög téglalap.

Kórizs Júlia, Bácskatopolya

3. Határozzuk meg a következő egyenlőtlenségrendszer összes megoldását a pozitív valós számok halmazán:

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{x_2} &\leqslant 2,\\ x_2 + \frac{1}{x_3} &\leqslant 2,\\ &\vdots\\ x_{1997} + \frac{1}{x_{1998}} &\leqslant 2,\\ x_{1998} + \frac{1}{x_1} &\leqslant 2. \end{aligned}$$

Oláh György, Révkomárom

4. Az $A_1A_2\dots A_n$ és $B_1B_2\dots B_n$ szabályos n-szögek úgy metszik egymást, hogy az A_1A_2 és B_nB_1 oldalak közös pontja K_1, az A_1A_2 és B_1B_2 közös pontja K_2, az A_2A_3

* A versenybeszámoló szeptemberi számunkban jelent meg.

és B_1B_2 közös pontja K_3, A_2A_3 és B_2B_3 közös pontja K_4, $\ldots$, A_nA_1 és $B_{n-1}B_n$ közös pontja K_{2n-1}, az A_nA_1 és B_nB_1 közös pontja K_{2n}. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{A_1K_1}{B_1K_1}\cdot\frac{B_1K_2}{A_2K_2}\cdot\frac{A_2K_3}{B_2K_3}\cdot\frac{B_2K_4}{A_3K_4}\cdot\ldots\cdot\frac{A_nK_{2n-1}}{B_nK_{2n-1}}\cdot\frac{B_nK_{2n}}{A_1K_{2n}}=1.$$

(A K_i pontok az oldalak belső pontjai, $i=1, 2, \ldots, 2n$.)

Bencze Mihály, Brassó

5. Egy négyzet alakú 1998×1998 egybevágó négyzet alakú mezőből álló táblán 1997 mezőt már befestettek. Befesthető minden olyan, eddig még be nem festett mező, amelynek legalább két szomszédja már be van festve. Két mezőt akkor tekintünk szomszédosnak, ha van közös oldaluk. Bizonyítsuk be, hogy az egész táblát nem lehet befesteni.

Balázsi Borbála, Beregszász

6. Nevezzük „szépnek” az a^2+2b^2 alakú számokat, ahol a és b pozitív egész számokat jelöl. Bizonyítsuk be, hogy az így értelmezett „szép” számok közül akárhányat összeszorozva újra „szép” számot kapunk.

Kiss Sándor, Nyíregyháza

10. osztály

1. Oldjuk meg a pozitív egész számok körében a következő egyenletet:

$$\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}=a+b\sqrt{2}.$$

Kórizs Júlia, Bácskatopolya

2. Igazoljuk, hogy ha n egész szám, akkor az

$$\frac{n^4+4n^2+3}{n^4+10n^2+16}$$

tört nem egyszerűsíthető.

Balázsi Borbála, Beregszász

3. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész x, y, z számokból álló számhármast, amelyre teljesül a következő két egyenlet:

$$x^3+3y^3+z^5+z=1998,$$
$$y^2z=x.$$

Oláh György, Révkomárom

4. Legyen d egy A kezdőpontú félegyenes, és α egy olyan változó szög, amely 0° és 90° között minden értéket felvesz. A d félegyenesen úgy választjuk ki a B pontot, hogy $AB=\operatorname{tg}\alpha$ teljesüljön, és úgy szerkesztjük meg AB fölé az ABC háromszöget, hogy $BAC\sphericalangle=\alpha$, $AC=\sin\alpha$ teljesüljön. Mit írnak le a C pontok, ha α minden lehetséges értéket felvesz?

Kovács Béla, Szatmárnémeti

5. Egy háromszög oldalainak a, b, c mértékszámai egész számok, és tudjuk, hogy az egyik magassága a másik két magasság összegével egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy $a^2+b^2+c^2$ négyzetszám.

Katz Sándor, Bonyhád

6. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$n^{4(x_1^2+x_2)}+n^{4(x_2^2+x_3)}+\ldots+n^{4(x_n^2+x_1)}=1,$$

ahol $n \geqslant 2$ egész szám.

Bencze Mihály, Brassó

11. osztály

1. Adottak az a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_{37}, b_1, b_2, b_3, $\ldots$, b_{37}, c_1, c_2, c_3, $\ldots$, c_{37} egész számok. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan i, j, k egész szám, hogy $i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$, $1 \leqslant i, j, k \leqslant 37$, továbbá

$$\frac{a_i+a_j+a_k}{3}, \qquad \frac{b_i+b_j+b_k}{3}, \quad \text{valamint} \quad \frac{c_i+c_j+c_k}{3}$$

is egész.

Kiss Sándor, Nyíregyháza

2. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben érvényes a

$$\frac{bc}{\varrho_a^2}+\frac{ac}{\varrho_b^2}+\frac{ab}{\varrho_c^2} \geqslant \frac{abc}{2\varrho T}$$

egyenlőtlenség, ahol a, b, c a háromszög oldalai, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c a megfelelő oldalakhoz hozzáírt körök sugarai, ϱ a háromszögbe írható kör sugara, T pedig a háromszög területe.

Oláh György, Révkomárom

4. Adottak az a, $a+d$, $a+2d$, $\ldots$, $a+(n-1)d$ pozitív egész számok ($n>1$ egész). Igazoljuk, hogy ha az adott számok egyike sem osztható n-nel, akkor n és d nem relatív prímek.

Zolnai Irén, Újvidék

4. Egy derékszögű koordináta-rendszerben úgy helyeztünk el végtelen sok téglalapot, hogy mindegyiknek az egyik oldala az x, egy másik oldala az y tengelyre illeszkedjék. A téglalapok origóval szemközti csúcsának koordinátái egész számok. Mutassuk meg, hogy van a téglalapok között két olyan, amelyek közül az egyik tartalmazza a másikat.

Bogdán Zoltán, Cegléd

5. Legyenek $k \geqslant 1$, $n \geqslant 2$ adott egész számok. Számítsuk ki

$$\left(\sqrt[n]{k}-\sqrt[n]{k+1}+\sqrt[n]{k+2}\right)^n$$

egész részét (egy x szám egész része az a legnagyobb egész szám, amely nem nagyobb x-nél).

Bencze Mihály, Brassó

6. Adottak a 2, 3, 4, ..., 1998, 1999 számok és a belőlük képzett összes különböző tényezőkből álló két, három, ..., 1998 tényezős szorzat (összesen $2^{1998}-1$ szám.) Mutassuk meg, hogy ezen számok reciprokainak összege egész szám.

Katz Sándor, Bonyhád

12. osztály

1. Melyek azok a valós számokon értelmezett, valós értékű f függvények, amelyek minden x, $y \in \mathbf{R}$ esetén kielégítik az

$$x \cdot f(y) = y \cdot f(x)$$

egyenletet?

Árokszállási Tibor, Paks

2. Oldjuk meg az

$$\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}+\frac{1}{6z}=\frac{1}{\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}},$$
$$x+y^2+z^3=14$$

egyenletrendszert a pozitív valós számok halmazán.

Neubauer Ferenc, Munkács

3. Bizonyítsuk be, hogy ha az $x^3+ax^2+bx+c=0$ egyenlet összes gyöke valós szám, akkor $a^2 \geqslant 3b$ (a, b, c adott valós számok).

Oláh György, Révkomárom

4. Egy szabályos négyoldalú gúla beírt gömbjének sugara r, köré írható gömbjének sugara R. Igazoljuk, hogy

$$\frac{R}{r} \geqslant \sqrt{2}+1.$$

Szabó Magda, Szabadka

5. Az (a_n) valós számsorozatot a következőképpen értelmezzük:

$$a_1=a_2=2 \qquad \text{és} \qquad a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n^2-a_n+1}, \qquad \text{ha } n \geqslant 2.$$

Igazoljuk, hogy bármely $k \geqslant 1$ esetén

$$a_1+a_2+\ldots+a_k=a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_k.$$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

6. Oldjuk meg a pozitív valós számok halmazán az

$$x+y+z=xyz,$$
$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

egyenletrendszert.

Bencze Mihály, Brassó

A VII. Horvátországi Országos Matematika Verseny

Az Adriai-tenger partján Kraljevicán május 7. és 10. között rendezték meg Horvátországban a hetedik országos matematika versenyt. A versenyen középiskolások és az általános iskola 7. és 8. osztályos diákjai szerepeltek. Az országos döntőbe meghívásos alapon évfolyamonként 25–30 legjobb diák vehetett részt. Az iskolai versenyeket általában február végén tartják. A legjobbak indulhatnak a községi versenyen. Ezután következik a megyei erőpróba, ahol évenként kb. 900–1000 tanuló szerepel.

Az országos döntő egyben jutalomkirándulás is az ott résztvevőknek. Alkalom nyílik a házigazda város és környéke nevezetességeinek megismerésére.

A versenypéldákat a Horvátországi Matematika Társulat bizottsága állítja össze. Évfolyamonként négy-négy feladatot tűznek ki, megoldásukra a versenyzőknek négy óra áll a rendelkezésre. A döntő legjobbjai alkotják Horvátország válogatottját a matematikai diákolimpián.

Az 1997/98-as év feladatai:

I. évfolyam

1. Melyik tört a nagyobb:

$$A=\frac{2{,}00\ldots004}{(1{,}00\ldots004)^2+2{,}00\ldots004}\quad\text{vagy}\quad B=\frac{2{,}00\ldots002}{(1{,}00\ldots002)^2+2{,}00\ldots002},$$

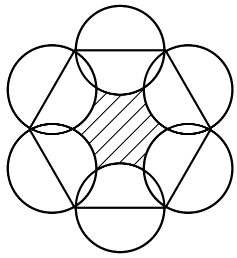
ha tudjuk, hogy a számlálóban és a nevezőben megadott minden számban 1998 nulla szerepel?

2. Határozzuk meg mindazokat az m és n természetes számokat, amelyek kielégítik a következő egyenletet:

$$10(m+n)=mn.$$

3. Iván és Krešo együtt indult el Crkvenicáról Kraljevica felé, míg Márkó velük egyidőben Kraljevicáról Crkvenica felé. A két város közötti távolság 15 km. Hármuknak egy kerékpárja volt. Az úton gyalog 5 km/h, míg kerékpárral 15 km/h sebességgel haladtak. Iván gyalog indult el, míg Krešo a kerékpárt hajtotta, amíg nem találkozott Márkóval. Akkor Krešo odaadta a kerékpárt Márkónak és gyalog folytatta az utat Kraljevica felé, míg Márkó kerékpáron haladt tovább Crkvenica felé. Amikor találkozott Ivánnal odaadta neki a járművet és gyalog érkezett Crkvenicára, míg Iván kerékpáron érkezett Kraljevicára. Melyik fiú mennyi ideig volt úton, mennyi ideig gyalogolt, valamint mennyi ideig kerékpározott?

4. Legyen a szabályos hatszög oldalának hossza a. Határozzuk meg a besatírozott területet.



II. évfolyam

1. Oldjuk meg a következő egyenletet

$$2z^3-(5+6i)z^2+9iz+1-3i=0,$$

ha tudjuk, hogy az egyenlet egyik gyöke valós.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $a\geqslant 0$ és $b\geqslant 0$ két tetszőleges valós szám, akkor

$$\frac{a+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}+b}{4}\leqslant\frac{a+\sqrt{ab}+b}{3}.$$

3. Az $ABCD$ négyzet $\overline{AB}$ és $\overline{BC}$ oldalán úgy adott egy-egy pont, E és F, ebben a sorrendben, hogy teljesül $|BE|=|BF|$. Legyen a $\overline{BN}$ a BCE háromszög magassága. Bizonyítsuk be, hogy a DNF háromszög derékszögű.

4. Legyen m és n természetes szám, valamint $a=(n+1)^m-n$ és $b=(n+1)^{m+3}-n$.

a) Igazoljuk, hogy ha m nem osztható hárommal, akkor a és b relatív prímek.

b) Határozzuk meg mindazokat az m és n számokat, amelyekre az a és b számoknak van közös osztójuk.

III. évfolyam

1. Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögre teljesül a szokásos jelölésekkel:

$$\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\cos\alpha+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\cos\beta+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\cos\gamma=3.$$

2. Egy kúpba félgömböt írunk úgy, hogy alapköreik egybeessenek. Legyen a kúp felületének (az alappal együtt) és a félgömb felületének (az alaplap nélkül) az aránya $k=\frac{18}{5}$. Határozzuk meg a kúp csúcsánál lévő szög nagyságát.

3. Legyenek az ABC háromszög magasságvonalai $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ és teljesüljön a követlező vektoregyenlet:

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}.$$

Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög egyenlő oldalú.

4. Bizonyítsuk be, hogy bármely 79 egymást követő természetes szám között található legalább egy olyan szám, amelyben a számjegyek összege osztható 13-mal.

Találjunk olyan 78 egymást követő természetes számból álló sorozatot, amelynek minden tagjára érvényes, hogy számjegyeik összege nem osztható 13-mal.

IV. évfolyam

1. Bizonyítsuk be, hogy az $y^2=4ax$ parabola minden olyan húrja, amelyik egyben átfogója egy derékszögű háromszögnek, amelynek derékszögű csúcsa egybeesik a koordinátarendszer középpontjával, egy pontban metszi egymást.

2. Legyenek a és m természetes számok, és p olyan páratlan prímszám, amelyre teljesül $p^m \nmid a-1$ és $p^{m+1} \nmid a-1$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor:

a) $p^{m+n} \mid a^{p^n}-1$ minden $n\in \mathbf{N}$ esetén,

b) $p^{m+n+1} \nmid a^{p^n}-1$ minden $n\in \mathbf{N}$ esetén.

3. Legyen $A=\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$, és definiáljuk a $g: A\to A$ függvényt a következőképpen: $g(k)=2n-k+1$. Létezik-e olyan $f: A\to A$ függvény, amelyre teljesül, hogy $f(k)\neq g(k)$ minden $k\in A$ és $f(f(f(k)))=g(k)$ minden $k\in A$ esetén, ha

a) $n=999$, b) $n=1000$?

4. Elhelyeztünk nyolc villanykörtét egy kör mentén. Bármely égő felkapcsolható vagy lekapcsolható. Egy átállításkor egyszerre változtatjuk meg minden égő állapotát, a következő szabály szerint: az az égő, amelynek egyik szomszédja világít, míg a másik nem, a következő állapotban nem fog világítani, viszont az az égő, amelynek mindkét szomszédja egyszerre világít vagy egyszerre nem világít, az átállítás után világítani fog.

Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb négy átállítás után minden égő világítani fog.

Horváth Vilmos
Horváth Bokor Rózsa

C gyakorlatok megoldása

C. 490. *Bizonyítsuk be, hogy két páratlan négyzetszám különbsége osztható* 8*-cal.*

I. megoldás. Legyen a két páratlan szám $2x+1$, illetve $2y+1$. $(2x+1>2y+1)$ Négyzetük különbsége:

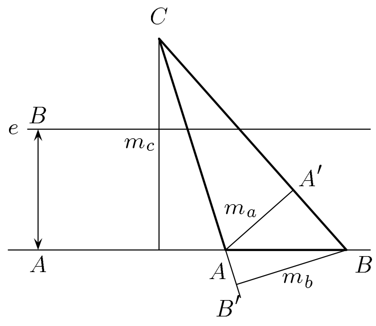
$$(2x+1)^2-(2y+1)^2=(4x^2+4x+1)-(4y^2+4y+1)=$$
$$=4(x^2-y^2)-4(x-y)=4(x-y)(x+y+1).$$

Ez a szorzat pedig mindig osztható 8-cal. Ha ugyanis x és y páros, akkor a különbségük is páros, és így osztható 2-vel. Ugyanez igaz, ha mindkettő páratlan. Ha viszont az egyik páros, a másik páratlan, akkor az $(x+y-1)$ tényező osztható 2-vel.

II. megoldás. A páratlan számok 8-cal osztva 1, 3, 5 vagy 7 maradékot adnak. Ezek négyzete pedig 8-cal osztva mindig 1 maradékot ad, így kettőjük különbsége mindig osztható 8-cal.

422 dolgozat érkezett. 7 pontos Müncz Márton megoldása. 6 pontot kapott Ábrány Miklós, Babos Attila, Bákor Krisztina, Bankó Krisztián, Boros M. Mátyás, Führer Lívia, Kormos Márton, Orbán Viktor, Zalán Péter és Závodi Attila. 5 pontos 335, 4 pontos 16, 3 pontos 26, 2 pontos 8, 1 pontos 1, 0 pontos 12 dolgozat, nem versenyszerű 13.

C. 491. *Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben legfeljebb egy olyan oldal van, amely a hozzá tartozó magasságnál kisebb.*



1. ábra

I. megoldás. Rajzoljunk egy ABC háromszöget. Tegyük fel, hogy az AB oldal kisebb, mint a hozzá tartozó magasság.

Húzzuk meg az AB egyenestől AB távolságra haladó, AB-vel párhuzamos e egyenest AB azon felén, amelyiken a C csúcs van. A C csúcs messzebb van AB-től, mint az e egyenes, a feltétel szerint ugyanis $AB < m_c$; ezért $CA > AB$ és $CB > AB$. Tehát AB a háromszög (szigorúan) legkisebb oldala, ilyen oldal a háromszögben nincs több.

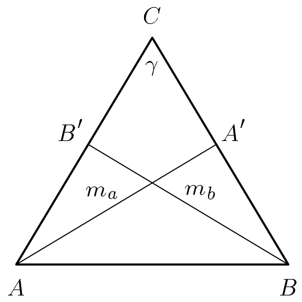
Lovas Róbert (Csongrád, Batsányi J. Gimn., 11. o.t.) megoldása alapján

II. megoldás. Tegyük fel, hogy az ABC háromszögben

(1) $\qquad a < m_a \qquad$ és $\qquad b < m_b.$

Az $AA'C$ derékszögű háromszögből: $m_a = b\sin\gamma$, a $BB'C$ háromszögből: $m_b = a\sin\gamma$.

Helyettesítsük be ezeket (1)-be, és adjuk össze az egyenlőtlenségek megfelelő oldalait; azt kapjuk, hogy $a+b < (a+b)\sin\gamma$; $a+b \neq 0$-val egyszerűsítve a $\sin\gamma > 1$ összefüggést kapjuk, ami ellentmondás. Feltevésünk tehát nem lehet igaz.



2. ábra

Farkas Milán (Budapest, Városmajori Gimn., 11. o.t.)

176 dolgozat érkezett. 6 pontos Babos Attila, Boros M. Mátyás, Csóka Endre és Lovas Róbert megoldása. 5 pontot kapott 63, 4 pontot 57, 3 pontot 4, 2 pontot 7, 1 pontot 11 beküldő. Hibás 4, nem versenyszerű 26 dolgozat.

C. 493. *Keressük meg azokat a négyzetszámokat, amelyeket* 11*-gyel maradékosan osztva a hányados prímszám és a maradék* 4.

Megoldás. Legyen ez a négyzetszám n^2, ahol $n>0$ ($n=0$ nem lehet). A feltétel szerint $n^2=11\cdot p+4$, valamely p prímszámra. Ebből azt kapjuk, hogy $11\cdot p=n^2-4=$ $=(n-2)(n+2)$. Mivel pozitív egész számok körében a prímtényezős felbontás egyértelmű, ezért a jobb oldali szorzatra négy lehetőség állhat fenn: vagy valamelyik tényező 1, vagy a két tényező egyike 11 és a másik tényező a p prímszám.

Mivel $n>0$, ezért az $n+2=1$ eset eleve lehetetlen. Az $n-2=1$ esetben $n+2=$ $=5$, ami nem egyezhet meg $11\cdot p$-vel. Az $n-2=11$ és $n+2=p$ esetben $p=11+4=$ $=15$, ami nem prímszám. Egyetlen lehetőség maradt: $n+2=11$ és $n-2=p$; amiből $p=7$ következik. Most valóban prímszámot kaptunk. (Tényleg: $81=11\cdot 7+4$).

Megjegyzés. A megoldás során prímszámnak csak természetes számokat tekintettünk. Az egész számok körében a prímszámok negatívját is prímszámnak kell tekinteni. Ettől függetlenül, n-et ekkor is vehetjük pozitívnak. Ha $p<0$, akkor a kapott szorzat csak úgy lehet $11\cdot p$, ha a jobb oldalon levő két tényező egyike negatív és a másikuk pozitív. Mivel $n-2<n+2$, ezért csak $n-2<0<n+2$, azaz $-2<n<2$ lehet. Az $n>0$ feltétel alapján viszont csak $n=1$ és $n=2$ jöhetne szóba. Az első esetben $1^2=1$, ezt 11-gyel osztva a maradék nem 4. A második esetben $2^2=4$. Ezt 11-gyel osztva a maradék ugyan 4, de a hányados 0, ami nem prímszám.

290 dolgozat érkezett. 6 pontos Kormos Márton és Zalán Péter megoldása. 5 pontos 205, 4 pontos 10, 3 pontos 4, 2 pontos 3, 1 pontos 1 dolgozat. Hibás 61, nem versenyszerű 4.

C. 494. *A pozitív egész számokat 1-től kezdve sorban leírjuk valamely rögzített n-ig. Alájuk ugyanezeket a számokat írjuk, csak fordított sorrendben. Képezzük az egymás alatt lévő számok különbségének abszolút értékét, majd adjuk össze ezeket. Mi lesz az így kapott összeg?*

Megoldás. Két esetet különböztetünk meg:

a) ha n páros,

b) ha n páratlan.

a) Írjuk fel az egész számokat növekvő sorrendben, majd írjuk alá fordított sorrendben, és képezzük az egymás alá írt számok különbségét:

növekvő sorrend	1	2	3	$\cdots$	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}+1$	$\cdots$	$n-1$	n
fordított sorrend	n	n-1		$\cdots$	$\frac{n}{2}+1$	$\frac{n}{2}$	$\cdots$	2	1
különbség	$1-n$	$3-n$	$5-n$		1	1		$n-3$	$n-1$

A különbségek $\frac{n}{2}$-ig negatívak, de abszolút értékben megegyeznek az $\frac{n}{2}+1$-től n-ig vett különbségekkel, ezért elegendő $\frac{n}{2}$-ig összegezni, és ennek kétszeresét venni. A különbségek számtani sorozatot alkotnak, amelyben $a_1=|1-n|=n-1$, $d=-2$, a tagok száma: $\frac{n}{2}$ és $a_1=1$. A sorozat összege az ismert képlet szerint így írható fel:

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}(n-1+1)=\frac{n^2}{4}.$$

A keresett összeg pedig: $\frac{n^2}{2}$.

b) Ha n páratlan, az előzőkhöz hasonlóan

növekvő sorrend	1	2	3	$\cdots$	$k-1$	k	$k+1$	$\cdots$	$n-1$	n
fordított sorrend	n	n-1		$\cdots$	$k+1$	k	$k-1$	$\cdots$	2	1
különbség	$1-n$	$3-n$	$5-n$		-2	0	2		$n-3$	$n-1$

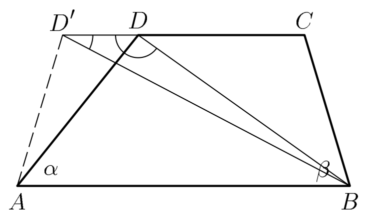
Most a számtani sorozatban a tagok száma változott, mégpedig $k=\dfrac{n+1}{2}$-re, és az utolsó tag $a_n=0$.

Az összeg: $S_n=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n+1}{2}(n-1)=\dfrac{n^2-1}{4}$. A különbségek összege: $\dfrac{n^2-1}{2}$.

Markó József (Miskolc, Földes F. Gimn., 9. o.t.)

259 dolgozat érkezett. 5 pontos 156, 4 pontos 16, 3 pontos 14, 2 pontos 32, 1 pontos 26 dolgozat. Hibás 15.

C. 495. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy trapéz alapján fekvő szögek nem egyenlők, akkor a kisebbik szög csúcsából kiinduló átló hosszabb, mint a másik átló.*



Megoldás. Az alapon fekvő szögek α és β, és legyen $\alpha<\beta$; ekkor azt állítjuk, hogy $AC>BD$. Mérjük fel az A csúcsban a β szöget az *ábra* szerint. Ekkor az $ABCD'$ szimmetrikus trapézt kapjuk, amelyben $BD'=AC$. A $DD'B$ háromszögből

(1) $$D'DB\sphericalangle>DCB\sphericalangle,$$

hiszen $D'DB\sphericalangle$ a DCB háromszög külső szöge, amiről tudjuk, hogy egyenlő a két nem szomszédos belső szög összegével.

(2) $$DCB\sphericalangle=DD'A\sphericalangle,$$

mivel az $ABCD'$ trapéz szimmetrikus. Másrészt

(3) $$DD'A\sphericalangle>DD'B\sphericalangle,$$

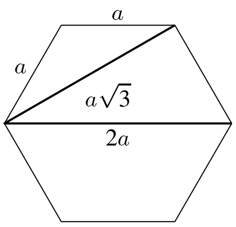
az utóbbi szög ugyanis része az előzőnek. (1), (2) és (3)-ból

$$D'DB\sphericalangle>DCB\sphericalangle=DD'A\sphericalangle>DD'B\sphericalangle.$$

Azaz a $D'DB$ háromszögben $D'DB\sphericalangle>DD'B\sphericalangle$, nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik, ezért $AC=BD'>BD$. Ezt akartuk bizonyítani.

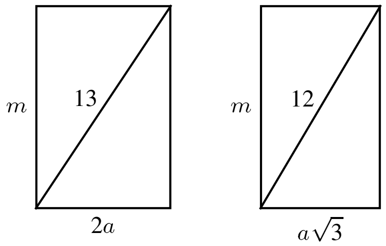
230 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Kovács Adrián és Lovas Róbert, 5 pontot Ábrány Miklós, Antal István, Babos Attila, Bákor Krisztina, Birkner Tamás, Börcsök József, Csató György, Csizmadia Zsolt, Csornai Gyula, Farkas Melinda, Farkas Milán, Gajdos Béla, György László, Kalcsú Áron, Kiss 360 Sándor, Kocsis 444 Gábor, Lengyel Zoltán, Makó Veronika, Németh 245 Ádám, Péterfalvi Ferenc, Pozsonyi Tamás, Sarlós Ferenc, Somlai Henrietta, Szigel Gábor, Szűcs 702 Zsófia, Varga 249 Zsolt, Zalán Péter és Závodi Attila. 4 pontos 73, 3 pontos 47, 2 pontos 30, 1 pontos 12, 0 pontos 20 dolgozat, nem versenyszerű 18.

C. 496. *Egy szabályos hatszög alapú egyenes hasáb testátlóinak hossza* 12 *és* 13. *Mekkora a hasáb térfogata?*



1. ábra

Megoldás. A kétféle testátlót a hasáb két síkmetszetéből határozhatjuk meg. Először a hatszög leghosszabb átlójára illesszünk az alapsíkra merőleges síkot, majd a rövidebbik átlóra. (Több lehetőségünk nincs is, csak 2 különböző hosszúságú testátlója van a hasábnak.) A síkmetszet mindkét esetben téglalap lesz. A téglalap egyik oldalának hossza megegyezik a hasáb magasságával. A téglalap másik oldala az első esetben $2a$, a második esetben $a\sqrt{3}$, ahol a a szabályos hatszög oldalainak a hossza.



2. ábra

Az átlók hosszát Pitagorasz tételének felhasználásával írhatjuk fel:

$$13^2 = (2a)^2 + m^2,$$

illetve

$$12^2 = (a\sqrt{3})^2 + m^2.$$

Az egyenletrendszerből $a = 5$, $m = \sqrt{69}$.

A hasáb térfogata: $V = A_t \cdot m$, ahol $A_t = 6\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, azaz

$$V = 6 \cdot \frac{25\sqrt{3}}{4}\sqrt{69} \approx 539{,}53 \text{ térfogategység.}$$

271 dolgozat érkezett. 5 pontos 224, 4 pontos 34, 3 pontos 5 dolgozat. Hibás 8.

C. 497. *Van-e olyan* n *pozitív egész szám, amelyre* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, *azaz* $n!$ *pontosan* 100 *nullára végződik?*

Megoldás. A feltétel azt jelenti, hogy $n!$ 10-nek pontosan a 100-adik hatványával legyen osztható. Mivel 10-nek a prímtényezős felbontása $2 \cdot 5$, ezért ez pontosan akkor teljesül, ha $n!$ prímtényezős felbontásában a 2 és az 5 egyike pontosan a 100-adik, a másikuk pedig legalább a 100-adik hatványon szerepel. Várható, hogy 5 szerepel kisebb kitevőn, ezért először azt nézzük meg, hogy mikor lesz 5-nek a kitevője 100.

Mivel minden ötödik természetes szám osztható 5-tel, ezért az n-ig fellépő számok szorzata csak úgy lehet pontosan 5^{100}-nal osztható, ha n-ig legfeljebb 100 darab 5-tel osztható szám van, azaz, ha $n \leqslant 500$.

Írjuk fel most n-et „ötös számrendszerben”, azaz $n = a + 5b + 25c + 125d + 625e + \ldots$ alakban, ahol a szereplő „együtthatók” nemnegatív 5-nél kisebb egész számok (ilyen felírás a maradékos osztás alapján minden pozitív n-re létezik). Mivel $n \leqslant 500$, ezért ebben a felírásban csak az első négy tag lehet 0-tól különböző: $n = a + 5b + 25c + 125d$.

Nézzük meg, n-ig hány szám osztható 5-tel, 25-tel és 125-tel. 5-tel minden ötödik, 25-tel minden huszonötödik és 125-tel minden százhuszonötödik. Ezek száma tehát rendre $b + 5c + 25d$, $c + 5d$ és d.

A szorzatban tehát $(b+5c+25d)$-szer lép fel tényezőként az 5, $(c+5d)$-szer egy újabb 5-ös faktor és d-szer még egy 5-ös faktor. Így a fellépő 5-ös faktorok számára:

$$(b+5c+25d)+(c+5d)+d=b+6c+31d=100$$

teljesül.

$d>3$ lehetetlen, mert $31\cdot 4>100$. Mivel b, $c<5$, azért $d<3$ sem lehet, mert $4+$ $+24+62=90<100$. A $d=3$ esetben azt kapjuk, hogy $b+6c=100-93=7$; aminek nyilvánvalóan egyetlen megoldása $b=c=1$. Ebből $n=a+5+25+375=405+a$.

Eszerint a szóbajövő számok $n=405$, 406, 407, 408, 409.

Mivel 405-ig több, mint 200 páros szám van, ezért ezek mindegyikére az $n!$ osztható 2^{100}-nal is. Ezek tehát valóban megfelelnek a feladat követelményeinek. Ha viszont $n>$ >409, akkor még egy 5-ös tényező lép fel; más megoldás tehát nincs.

Megjegyzés. A fenti eljárás 100 helyett bármely k természetes számra elvégezhető. Nem mindig kapunk azonban igenlő választ.

Végződhet-e például $n!$ 5 darab 0-ra? Itt csak $n=a+5b$ lehetséges. Ekkor a szereplő 0-k számára $(a+5b)+b=a+6b=5$ adódik. Ez csak úgy lehetne, ha $b=0$ volna, amiből $a=5$ következik; ellentmondva az $a\leqslant 4$ feltételnek. Hasonlóképpen lehetetlen $5+6b$ számú 0, ahol $0\leqslant b<5$. Eszerint 11, 17, 23 és 29 darab 0 sem állhat $n!$ végén.

Nagyobb n esetén is hasonlóképpen okoskodhatunk; itt azonban még figyelmesebben kell eljárnunk. Ha $n=a+5b+25c$ alakú, akkor az $n!$ „végén” szereplő 0-k száma $k=a+6b+31c$ (itt feltehető, hogy $c>0$). A $k=36$ esetben például csak $c=1$ lehet. Ebből az $a+6b=5$ egyenlőség következne, ami — mint már látjuk — lehetetlen. De lehetetlen a $k=31+30$ eset is. Ez csak úgy lehetne, ha $c=1$ teljesülne. Az ebből következő $a+6b=30$ egyenlőség csak úgy állhatna fenn, ha $b=5$ volna; ami a $b\leqslant 4$ feltételnek mond ellent. A $31\leqslant k<62$ esetben csak $c=1$ lehet, amiből $0\leqslant a+6b<31$ adódik. A $0\leqslant a$, $b\leqslant 4$ feltétel miatt itt ki kell zárni az $5+6b$, valamint az $a+30$ alakú számokat. Ezekre:

$$k=5+31;\ 5+6+31;\ 5+12+31;\ 5+18+31;\ 5+24+31;\ 30+31.$$

(A következő kiírandó szám már nem felel meg a $k<62$ feltételnek.) Ezek szerint $n!$ nem végződhet 36, 42, 48, 54, 60, 61 számú 0-ra sem.

Ugyanígy lehetetlen a

$$k=5+31c;\ 5+6+31c;\ 5+12+31c;\ 5+18+31c;\ 5+24+31c;\ 30+31c$$

számú 0 végződés is $(1<c<5)$.

Az $n\geqslant 625$ esetben még bonyolultabb a kizárandó eseteket megkeresni; bár az eredmény megfogalmazható.

260 dolgozat érkezett. 5 pontos 110, 4 pontos 58, 3 pontos 10, 1 pontos 15, 2 pontos 5, 0 pontos 62.

C. 498. *Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:*

(1) $$x^3+1>x^2+x.$$

Megoldás. Rendezzük át az (1) egyenlőtlenséget, és alakítsuk szorzattá:

$$x^3-x^2-x+1=(x^2-1)(x-1)>0.$$

A szorzat akkor pozitív, ha vagy mindkét tényezője pozitív, vagy mindkét tényezője negatív.

$(x-1)>0$, ha $x>1$, s ekkor $x^2-1>0$ ugyancsak teljesül, most tehát igaz az (1) egyenlőtlenség.

Ha $x=1$, akkor $x-1=0$, ha $x=-1$, akkor $x^2-1=0$, ez nem megoldás.

Ha $-1<x<1$, akkor $x-1<0$ és $x^2-1<0$, és így a szorzatuk pozitív, vagyis teljesül az (1) egyenlőtlenség.

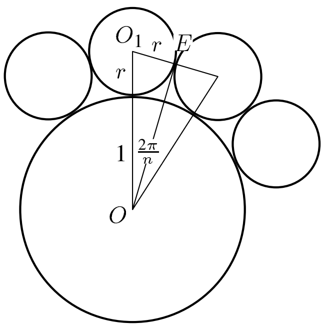
Végül, ha $x<-1$, akkor $x-1<0$ és $x^2-1>0$, tehát nem állhat fenn az (1) egyenlőtlenség.

Összefoglalva az egyenlőtlenség megoldása a $-1<x<1$ és az $x>1$ értékek halmaza.

Czirkos Zoltán (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gimn., 10. o.t.)

311 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Ábrány Miklós, Buti Tamás, Csató György, Csirmaz Attila, Czirkos Zoltán, Friedl Zita, Kovács Adrián, Rózsa Tamás, Sarlós Ferenc, Strobl Apolka, Szipola Ágnes és Tóth Adrienn. 5 pontos 158, 4 pontos 42, 3 pontos 36, 2 pontos 20, 1 pontos 17 dolgozat. Hibás 21, nem versenyszerű 5.

C. 499. *Egy egységnyi sugarú kör körül úgy helyezkedik el n darab egyenlő sugarú kör a síkon, hogy mindegyikük kívülről érinti az egységkört és a „koszorúban” lévő két szomszédját. Határozzuk meg a körök sugarát n függvényében. A sugarakat számítsuk is ki négy tizedesjegy pontossággal az n első négy lehetséges értékére.*



Megoldás. Legyen az érintő körök sugara r, két szomszédos érintőkör középpontjának távolsága $2r$, ez a távolság az egység sugarú kör középpontjából $\frac{2\pi}{n}$ szög alatt látszik. Az OO_1E derékszögű háromszögből az *ábra* szerint:

$$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{r}{1+r}, \qquad \text{ahonnan} \qquad r=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}.$$

A törtnek nincs értelme, ha $\sin\frac{\pi}{n}=1$, azaz ha $\frac{\pi}{n}=$ $=90^\circ$, vagyis $n=2$. (Két érintő kört nem tudunk rajzolni úgy, hogy azok egymást és az egység sugarú kört is érintsék.)

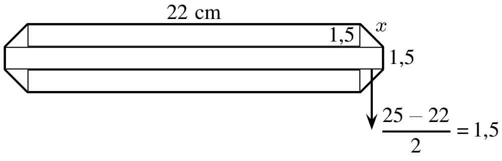
Az r értékei 4 tizedes jegyre számítva:

$n=3$-ra	$r_3=6{,}4641$	$n=4$-re	$r_4=2{,}4142$
$n=5$-re	$r_5=1{,}4259$	$n=6$-ra	$r_6=1$.

165 dolgozat érkezett. 5 pontos 108, 4 pontos 27, 3 pontos 4, 2 pontos 13, 1 pontos 7, 0 pontos 6.

C. 500. *Be lehet-e csúsztatni egy* 28 cm *széles reklámtasakba két* 22 cm *széles művészeti albumot és egy* 25 cm *széles szakácskönyvet, ha mindhárom könyv külön-külön* 1,5 cm *vastag?*

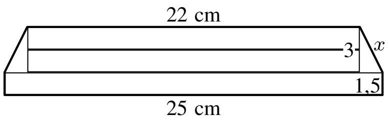
Megoldás. A reklámtáska „szájának” kerülete $2 \cdot 28 = 56$ cm. Ha el tudjuk helyezni a könyveket úgy, hogy „együttesük keresztmetszetének” a kerülete legfeljebb 56 cm legyen, akkor be tudjuk őket csúsztatni a táskába. Tapasztalatból tudjuk, hogy az a jó elrendezés, amikor a legnagyobb könyv középre kerül, az esetünkben a szakácskönyv. A két művészeti könyvet pedig szimmetrikusan helyezzük alá és fölé. Ennek az elrendezésnek az elölnézetét az *1. ábra* mutatja; a kerület pedig: $K = 2 \cdot 22 + 2 \cdot 1{,}5 + 4 \cdot x$, ahol $x = 1{,}5\sqrt{2}$, innen $K = 47 + 6\sqrt{2} \approx 55{,}4853 < 56$.



1. ábra

Ez valóban jó elrendezés.

Ha a művészeti könyveket egymás fölé helyeztük volna, akkor szimmetrikus elrendezés esetén a kerület: $K = 25 + 22 + 3 + 2x$, ahol $x = \sqrt{3^2 + 1{,}5^2} \approx 3{,}3541$, és így $K = 56{,}708 > 56$, vagyis így nem férnek be a könyvek a reklámtáskába.



2. ábra

293 dolgozat érkezett. 6 pontos Bérces Márton, Berta Andrea és Závodi Attila megoldása. 5 pontos 207, 4 pontos 21, 3 pontos 3, 2 pontos 1, 1 pontos 7, 0 pontos 50 dolgozat, nem versenyszerű 1.

C. 502. *Az $x^2 - 2bx + b^2 - c^2 = 0$ egyenlet gyökeit jelölje x_1 és x_2. Mutassuk meg, hogy az*

$$x^2 - 2b(b^2 + 3c^2)x + (b^2 - c^2)^3 = 0$$

egyenlet gyökei x_1^3 és x_2^3.

Megoldás. Az $x^2 - 2bx + b^2 - c^2 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei:

$$x_{1,2} = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4(b^2 - c^2)}}{2} = \frac{2b \pm 2c}{2} = b \pm c,$$

$x_1 = b + c$, $x_2 = b - c$.

y_1 és y_2 pontosan akkor gyökei az $x^2 - 2b(b^2 + 3c^2)x + (b^2 - c^2)^3 = 0$ egyenletnek, ha (a gyökök és együtthatók közti összefüggés szerint) teljesülnek az alábbi egyenlőségek:

$$y_1 + y_2 = 2b(b^2 + 3c^2),$$
$$y_1 y_2 = (b^2 - c^2)^3.$$

Helyettesítsük be x_1 és x_2 fenti értékeit:

$$x_1^3 + x_2^3 = (b + c)^3 + (b - c)^3 = b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3 + b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3 =$$
$$= 2b^3 + 6bc^2 = 2b(b^2 + 3c^2),$$

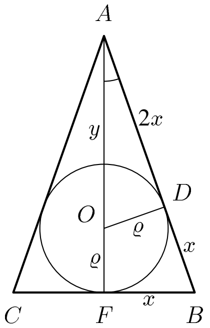
és

$$x_1^3 \cdot x_2^3 = (x_1 \cdot x_2)^3 = [(b + c)(b - c)]^3 = (b^2 - c^2)^3.$$

Tehát valóban teljesülnek az egyenlőségek.

186 dolgozat érkezett. 6 pontos Bákor Krisztina, Bíró Márton, Boros M. Mátyás, Fall Zoltán, Kovács Adrienn és Lovas Róbert megoldása. 5 pontos 157, 3 pontos 2, 0 pontos 14 dolgozat. Nem versenyszerű 7.

C. 503. *Két egyenlő szárú háromszög beírt köre az egyik esetben a szárakat az alaphoz közelebb eső harmadolópontjukban, a másik esetben az alaptól távolabb lévő harmadolópontjukban érinti. Melyik esetben fedi a beírt kör a háromszög területének nagyobb hányadát?*



1. ábra

Megoldás. Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor a beírt kör a szárat az alaphoz közelebb eső harmadolópontban érinti. Jelöljük a háromszög csúcsait A, B, C-vel, ahol $AB = AC$, a beírt kör középpontját O-val, sugarát ϱ-val. A CB oldalhoz tartozó magasságvonal az alapot az F felezőpontban érinti, O-ból az AB-re állított merőleges és AB metszéspontja D, az OA szakasz hosszát jelöljük y-nal. (*1. ábra*)

$BF = BD = x$, külső pontból húzott érintő szakaszok, a feltétel szerint $AD = 2x$.

Az AOD és ABF derékszögű háromszögek hasonlók (az A csúcsnál lévő szögük közös), megfelelő oldalaik aránya:

$$y : 3x = \varrho : x, \qquad \text{innen} \qquad y = 3\varrho.$$

Az AOD derékszögű háromszögből Pitagorasz tétele szerint:

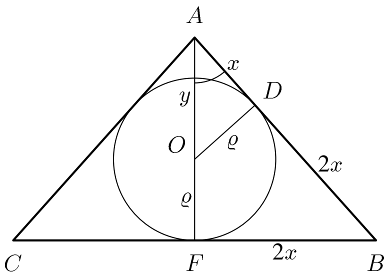
$$\varrho^2 + 4x^2 = 9\varrho^2, \qquad \text{ahonnan} \qquad x = \varrho\sqrt{2}.$$

Az ABC háromszög magassága: $\varrho + y = 4\varrho$. Most már felírhatjuk a területeket:

$$T_\triangle = x \cdot m = \varrho\sqrt{2} \cdot 4\varrho = 4\sqrt{2}\varrho^2, \qquad T_\bigcirc = \varrho^2\pi,$$

ahonnan

$$\frac{T_\triangle}{T_\bigcirc} = \frac{4\sqrt{2}\varrho^2}{\varrho^2\pi} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \approx 1{,}0886.$$



2. ábra

A másik esetben, hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy $y = \frac{3}{2}\varrho$ (az érintőszakaszok hosszát most a *2. ábra* szerint $2x$-szel jelöltük), és $\varrho^2 + x^2 = \frac{9}{4}\varrho^2$, ahonnan $x = \frac{\sqrt{5}}{2}\varrho$.

$$T_\triangle = 2x(\varrho + y) = 5 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}\varrho^2, \quad T_\bigcirc = \varrho^2\pi.$$

A területek aránya most:

$$\frac{T_\triangle}{T_\bigcirc} = \frac{\frac{5\sqrt{5}}{2} \cdot \varrho}{\varrho^2\pi} = \frac{5\sqrt{5}}{2\pi} \approx 1{,}8785.$$

Tehát a *második* esetben fedi a kör a háromszög területének nagyobb hányadát.

170 dolgozat érkezett. 7 pontot kapott Ábrány Miklós, 6 pontot Robotka Zsolt. 5 pontos 87, 4 pontos 30, 3 pontos 19, 2 pontos 17, 1 pontos 8 dolgozat. Hibás 7.

Matematika gyakorlatok megoldásai

Gy. 3154. *Az ABC háromszög oldalait jelöljük a szokásos módon a, b, c-vel. A beírt körhöz az A, B, C csúcsokból húzott érintőszakaszok legyenek rendre x, y és z. Mutassuk meg, hogy ha $a \geqslant b \geqslant c$, akkor*

$$az + by + cx \geqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \geqslant ax + by + cz.$$

Javasolta: *Gerő Tamás Miklós,* Debrecen

Megoldás. Jelölésünk szerint $a = y + z$, $b = x + z$, $c = x + y$; és mivel $a \geqslant b \geqslant c$, azért $z \geqslant y \geqslant x$. A bizonyítandó egyenlőtlenségekbe a, b és c helyére $y + z$-t, $x + z$-t és $x + y$-t helyettesítve kapjuk, hogy

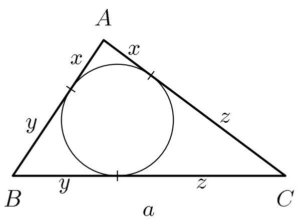
$$(y+z)z + (x+z)y + (x+y)x \geqslant \frac{(y+z)^2 + (x+z)^2 + (x+y)^2}{2} \geqslant (y+z)x + (x+z)y + (x+y)z.$$

Elvégezve a szorzásokat és $(yz + xz + xy)$-t levonva kapjuk, hogy

$$x^2 + z^2 + xy + yz - xz \geqslant x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx.$$

A jobb oldali egyenlőtlenség ismert, közvetlenül adódik a nyilvánvaló $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geqslant 0$ egyenlőtlenség átrendezéséből. A bal oldali egyenlőtlenséget átrendezve:

$$xy + yz - xz - y^2 \geqslant 0, \quad \text{azaz} \quad (z-y)(y-x) \geqslant 0.$$



Esetünkben ez is teljesül, mert $z - y \geqslant 0$ és $y - x \geqslant 0$ feltételünk szerint. Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezzel az eredeti egyenlőtlenséget is beláttuk.

Az is látszik, hogy a jobb oldali egyenlőtlenségben csak szabályos háromszög esetén van egyenlőség, míg a bal oldaliban $y = x$ vagy $z = y$ esetén, azaz ha a háromszög b oldala valamelyik másikkal egyenlő.

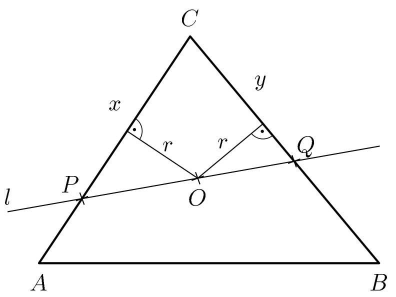
Deli Lajos (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., 9. o.t.) dolgozata alapján

304 dolgozat érkezett. 5 pontos 46, 4 pontos 167, 3 pontos 37, 2 pontos 26, 1 pontos 10, 0 pontos 17, nem versenyszerű 1.

Gy. 3155. *Bizonyítsuk be, hogy a háromszög beírható körének középpontján áthaladó egyenes pontosan akkor felezi a háromszög kerületét, amikor a területét is felezi.*

Javasolta: *Vincze Tímea,* Salgótarján

Megoldás. Jelöljük a háromszög csúcsait A, B, C-vel, oldalait a szokásos módon a, b, c-vel, beírható körének középpontját O-val, sugarát pedig r-rel. Legyen l egy O-ra illeszkedő egyenes. Az ABC háromszög oldalai közül l legalább egyet belső pontban metsz, választhatjuk úgy a betűzést, hogy l a másik két oldal közül az AC-t metszi, esetleg úgy, hogy A-n átmegy. Legyen AC és l metszéspontja P, továbbá $PC=x$ és $QC=y$.



Az ABC háromszög területe

$$T_{ABC}=\frac{1}{2}r(a+b+c),$$

a CPQ háromszög területe pedig (l. az *ábrát*)

$$T_{CPQ}=\frac{1}{2}r(x+y),$$

mert a CPO és a COQ háromszögek O-hoz tartozó magassága r. Az l egyenes pontosan akkor felezi az ABC háromszög területét, ha

$$T_{ABC}=2\cdot T_{CPQ},\qquad \text{azaz ha}\qquad \frac{1}{2}r(a+b+c)=2\cdot\frac{1}{2}r(x+y),$$

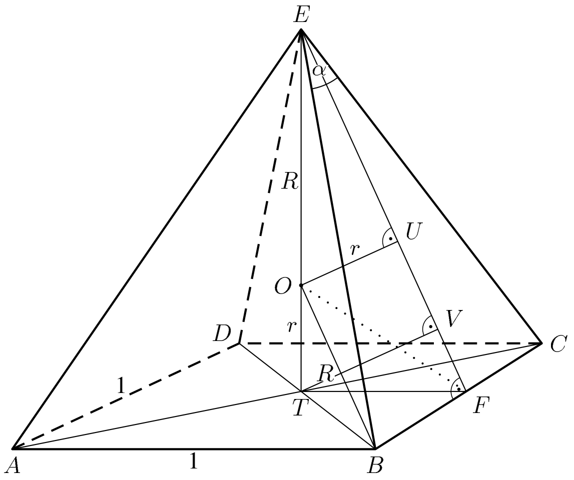
vagyis ha $a+b+c=2(x+y)$. Ez viszont pontosan azt jelenti, hogy l felezi ABC kerületét.

Szilasi Zoltán (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 9. o.t.) dolgozata alapján

257 dolgozat érkezett. 6 pontos Szilasi Zoltán megoldása. 5 pontos 72, 4 pontos 66, 3 pontos 53, 2 pontos 49, 1 pontos 4, 0 pontos 11, nem versenyszerű 1.

Gy. 3181. *Egy szabályos négyoldalú gúla köré írt gömb középpontja egybeesik a beírt gömb középpontjával. Mekkora két szomszédos oldalél szöge?*

I. megoldás. Az *ábrán* O a körülírt és a beírt gömb közös középpontja, R, illetve r a sugarak, és $AB=1$. Az E csúcs alapsíkra való vetülete T, F a BC felezőpontja, U a beírt gömbnek az ABC oldalon vett érintési pontja. Az OTF és OUF derékszö-



gű háromszögek egybevágók, mert megegyeznek két oldalban és a nagyobbal szemközti szögben. Ezért $FU = FT = \frac{1}{2}$. Ugyanígy egybevágóak az OUE és OTB háromszögek, amiért $EU = BT = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ezért $EF = EU + FU = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Az oldalélek szögének a felére: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} - 1$, amiből táblázattal vagy zsebszámológéppel $\frac{\alpha}{2} = 22{,}5^\circ$ és így $\alpha = 45^\circ$. Arra gondolhatunk azonban, hogy a kapott érték nem pontos. Számítsuk ki a pontos α érték megkeresése érdekében a gúla oldalélét:

$$BE = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}.$$

Ezután az EBC háromszögből a koszinusztétel szerint:

$$\cos\alpha = \frac{2\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2} - 1}{2\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

amiből $\alpha = 45^\circ$.

Papp Dávid (Budapest, Szent István Gimn. 10.o.t.)

II. megoldás. Papp Dávid két megoldást is adott erre a feladatra. Az ábra alapján könnyen követhető számításait vázlatosan közöljük. A párhuzamos szelők tétele szerint $TV = \frac{r(R+r)}{R}$. A Pitagorasz-tétel alapján: $EF = \sqrt{(R+r)^2 + \frac{1}{4}}$. Fejezzük ki ezután kétféleképpen az ETF háromszög kétszeres területének négyzetét:

$$\frac{r^2(R+r)^2}{R^2}\cdot\left[(R+r)^2 + \frac{1}{4}\right] = \frac{(R+r)^2}{4}. \tag{1}$$

A BOT háromszögből:

$$R^2 = r^2 + \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenletekből álló egyenletrendszerből $r = \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}$, amivel

$$BE = \sqrt{(R+r)^2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{r^2 + \frac{1}{2}} + r\right)^2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}.$$

Végül ugyanúgy, mint az első megoldásban, $\alpha = 45^\circ$.

95 dolgozat érkezett. 6 pontos Papp Dávid megoldása. 5 pontot kapott 46, 4 pontot 20, 3 pontot 4, 2 pontot 2, 1 pontot 4, 0 pontot 14, nem versenyszerű 4 dolgozat.

Gy. 3195. *Egy derékszögű háromszögbe írt kör középpontján át mindegyik oldallal párhuzamost húzunk. A három egyenes a háromszög mindegyik oldalát három szakaszra osztja. Bizonyítsuk be, hogy az átfogón kapott középső szakasz hossza egyenlő a befogókon keletkezett középső szakaszok hosszának összegével.*

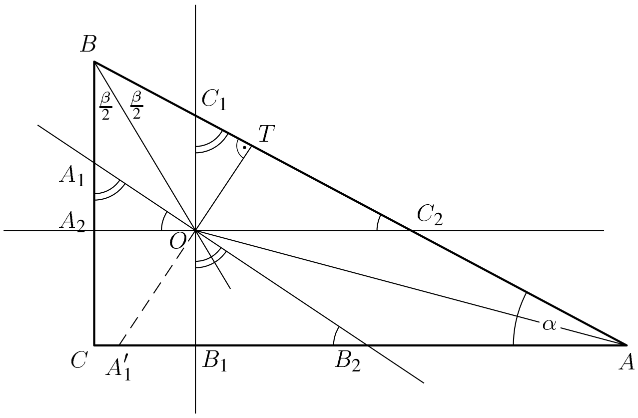
I. megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. Azt kell bizonyítanunk, hogy $C_1C_2 = A_1A_2 + B_1B_2$. Az ábrán $\frac{\beta}{2}$-vel jelölt szögek egyenlők, hiszen BO szögfelező. $BOC_1\sphericalangle = BOA_1\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$, mert ezek a szögek a $\frac{\beta}{2}$-vel jelölt szögek váltószögei. Ezért a BOC_1 és BOA_1 háromszögek egyenlő szárú, egybevágó háromszögek, amiért a BA_1OC_1 négyszög rombusz. A körhöz egy külső pontból húzott érintőszakaszok hossza egyenlő, tehát $BT = BA_2$, amely szakaszból kivonva az előbbi rombusz oldalát:

(1) $$C_1T = A_1A_2.$$

Ugyanígy megmutatható, hogy

(2) $$TC_2 = B_1B_2.$$

Az (1) és (2) egyenlőségeket összeadva a feladat állítását kapjuk.



Árvay Eszter (Szekszárd, Garay J. Gimn., 9. o.t.)
Börcsök József (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 9. o.t.)

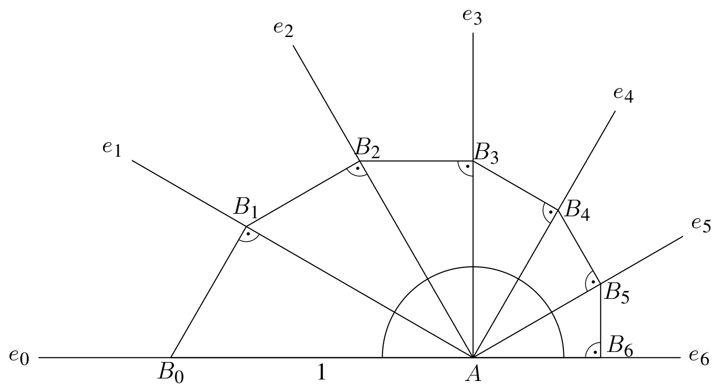
II. megoldás. Az *ábra* egy ívvel jelölt szögei α-val, a két ívvel jelöltek β-val egyállású szögek. Az ABC háromszög derékszögű, ezért $\alpha + \beta = 90^\circ$. Forgassuk el az OA_1A_2 háromszöget O körül +90°-kal. A forgatás tulajdonságaiból következik, hogy A_2 képe B_1, az A_1 pont A_1' képe pedig illeszkedik AC-re. A szögekre tett észrevételeink szerint az $A_1'B_2O$ háromszög derékszögű és egybevágó a C_1C_2O háromszöggel, ugyanis megegyeznek az átfogóhoz tartozó magasságukban és szögeikben. Ezért $C_1C_2 = A_1'B_2 = A_1'B_1 + B_1B_2 = A_1A_2 + B_1B_2$.

Ekler Márton (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., 9. o.t.)

296 dolgozat érkezett 6 pontos Deli Lajos, Gérecz Balázs és Máthé András megoldása. 5 pontot kapott 225, 4 pontot 38, 3 pontot 14, 2 pontot 5, 0 pontot 7, nem versenyszerű 4.

Gy. 3196. *A sík A pontjából kiinduló $e_0, e_1, \ldots, e_6$ félegyenesei közül e_1 az e_0-lal és minden következő az előzővel 30°-os szöget zár be. Vetítsük merőlegesen az e_0 A-tól egységnyi távolságra lévő B_0 pontját az e_1-re, a vetület legyen B_1. Vetítsük hasonlóan B_1-et az e_2-re, a vetület legyen B_2 és így tovább. Számítsuk ki a $B_0B_1 \ldots B_6$ töröttvonal hosszát, és a $B_0B_1 \ldots B_6$ sokszög területét.*

Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. Az AB_1, AB_2, $\ldots$, AB_6 szakaszok rendre $\cos 30^\circ$, $\cos^2 30^\circ$, $\ldots$, $\cos^6 30^\circ$. Ezért a B_0B_1, B_1B_2, $\ldots$, B_5B_6 rendre $\sin 30^\circ$, $\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ$, $\ldots$, $\sin 30^\circ \cdot \cos^5 30^\circ$.



A töröttvonal L hosszúsága:

$$L = \sin 30^\circ (1 + \cos 30^\circ + \cos^2 30^\circ + \ldots + \cos^5 30^\circ) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5\right] = \frac{37(2+\sqrt{3})}{64}.$$

A sokszög T területét az azt alkotó háromszögek területének összegeként határozzuk meg.

$$T = \frac{1}{2}\left(\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos^3 30^\circ + \ldots + \sin 30^\circ \cdot \cos^{11} 30^\circ\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ \left(1 + \cos^2 30^\circ + \cos^4 30^\circ + \ldots + \cos^{10} 30^\circ\right) = \frac{3367\sqrt{3}}{8192}.$$

Juhász Ágnes (Miskolc, Avasi Gimn., 10. o.t.)

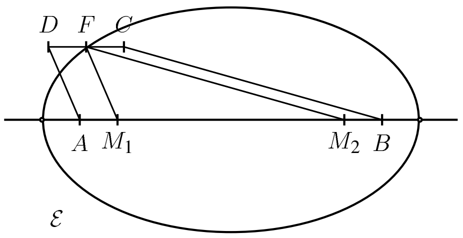
Megjegyzés. Máthé András (Bp., Apáczai Cs. J. Gimn., 10. o.t.) általánosította a feladatot $n+1$ olyan félegyenesre, amelyek közül bármelyik két szomszédos $\frac{\pi}{n}$ szöget zár be. Ekkor $\alpha = \frac{\pi}{n}$ jelöléssel

$$L = \sin\alpha \frac{1-\cos^n \alpha}{1-\cos\alpha}, \qquad T = \frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha \frac{1-\cos^{2n}\alpha}{1-\cos^2\alpha}.$$

215 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Máthé András. 5 pontos 88, 4 pontos 31, 3 pontos 30, 2 pontos 17, 1 pontos 25, 0 pontos 23 dolgozat.

Matematika feladatok megoldásai

F. 3200. *Adottak az AB és a CD szakaszok. AB-t rögzítjük, CD-t pedig úgy mozgatjuk AB-vel párhuzamosan, hogy az $ABCD$ négyszög mindig érintőtrapéz legyen. Milyen pályát ír le a mozgás során a CD szakasz felezőpontja?*



Megoldás. Jelöljük CD felezőpontját F-fel. Az F-en átmenő, AD-vel, illetve BC-vel párhuzamos egyenesek és az AB egyenes metszéspontja legyen M_1, illetve M_2. Mivel CD párhuzamos AB-vel, az AM_1FD és a $BCFM_2$ négyszögek paralelogrammák, azaz $AM_1=DF=\frac{CD}{2}=FC=M_2B$. Vagyis CD mozgása során az M_1 és az M_2 pontok nem mozognak, mert A-tól, illetve B-től való távolságuk állandó.

Megmutatjuk, hogy CD mozgása során F egy olyan ellipszisen mozog, amelynek fókuszai M_1 és M_2. Mivel $ABCD$ érintőtrapéz, a szemközti oldalainak összege egyenlő, azaz $AD+BC=AB+CD=$ állandó. De $AD=M_1F$ és $BC=M_2F$, tehát F valóban mindig rajta van egy M_1 és M_2 fókuszú, $AB+CD$ nagytengelyű $\mathcal{E}$ ellipszisen. Ha Q az $\mathcal{E}$ egy olyan pontja, amely nincs rajta az AB egyenesen, akkor a Q-n átmenő AB-vel párhuzamos egyenesre Q-ból mindkét irányban felmérve a $\frac{CD}{2}$ távolságot, olyan C_1 és D_1 pontokat kapunk, amelyekre az ABC_1D_1 négyszög nyilván érintőtrapéz.

Tehát a mozgás során CD felezőpontja egy ellipszist ír le, kivéve az ellipszis nagytengelyének két végpontját (az $\mathcal{E}$ ellipszis és az AB egyenes metszéspontjait).

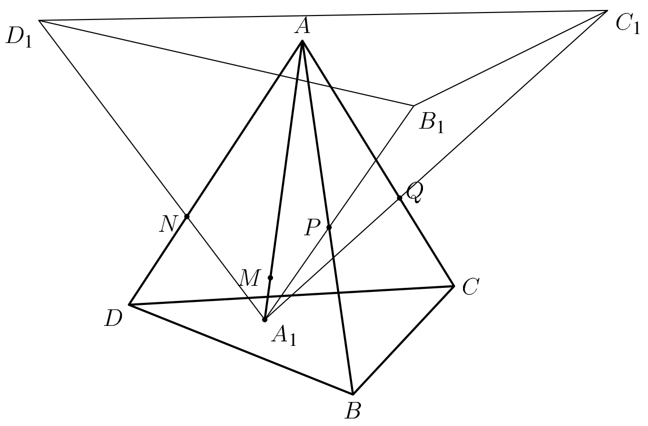
Tisch Dávid (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

93 dolgozat érkezett. 6 pontos Fehér Lajos Károly megoldása. 5 pontot kapott Andrássy Zoltán, Babos Attila, Barát Anna, Bujdosó Attila, Dályay Virág, Gajári Dávid, Gáli Gergely, Gáspár Merse Előd, Gerbicz Róbert, Gueth Krisztián, Harangi Viktor, Hartmann Miklós, Kiss András Péter, Léka Zoltán, Mecz Balázs, Páles Csaba, Pap Júlia, Pataki Péter, Poronyi Gábor, Pszota Anikó, Rácz Balázs, Sidó Péter, Terék Zsolt, Terpai Tamás, Tisch Dávid, Vágvölgyi Péter, Vaik István, Vaik Zsuzsanna, Végh A. László, Zalán Eszter és Zombori Tamás. 4 pontos 44, 3 pontos 7, 2 pontos 5, 0 pontos 5 dolgozat.

F. 3201. *Legyen M az $ABCD$ tetraéder egy tetszőleges belső pontja. Jelöljék rendre N, P, Q és A_1 a BCM, CDM, BDM, BCD síkoknak az AD, AB, AC, AM egyenesekkel való döféspontját. Végül messék az A-n átmenő, a BCD síkkal párhuzamos síkot az A_1N, A_1P és A_1Q egyenesek a D_1, B_1 és C_1 pontokban. Mutassuk meg,* *hogy a $B_1C_1D_1$ háromszög súlypontja A.*

Javasolta: *András Szilárd,* Kolozsvár

Megoldás. Az A_1, B_1, C_1, D_1 pontok definíciójából következik, hogy A_1 a BCD; A pedig a $B_1C_1D_1$ háromszög belső pontja. Ezért léteznek olyan b, c, d, b_1, c_1, d_1 pozitív valós számok, amelyekre



$$b\cdot\overrightarrow{A_1B}+c\cdot\overrightarrow{A_1C}+d\cdot\overrightarrow{A_1D}=\mathbf{0}\qquad\text{és}\tag{1}$$

$$b_1\cdot\overrightarrow{AB_1}+c_1\cdot\overrightarrow{AC_1}+d_1\cdot\overrightarrow{AD_1}=\mathbf{0}.\tag{2}$$

Ezekről a valós számokról még azt is feltehetjük, hogy

$$\frac{A_1M}{MA}=\frac{b_1+c_1+d_1}{b+c+d},\tag{3}$$

mert ha egy számhármas kielégíti (1)-et vagy (2)-t, akkor mindhárom tagját ugyanazzal a (pozitív) konstanssal szorozva ismét a feltételt kielégítő számhármast kapunk. (Az (1)–(3) feltételek azt jelentik, hogy az ABC és az $A_1B_1C_1$ háromszögek csúcsaiba megfelelő súlyokat helyezve a súlyozott pontrendszer súlypontja M, a két súlyozott háromszög súlypontja pedig A_1, illetve A.)

A (3) feltételből következik, hogy $\overrightarrow{MA}(b_1+c_1+d_1)+\overrightarrow{MA_1}(b+c+d)=\mathbf{0}$. Ezt az (1) egyenlethez adva és rendezve:

$$\begin{aligned}\mathbf{0}&=\overrightarrow{MA}(b_1+c_1+d_1)+\overrightarrow{MA_1}(b+c+d)+\overrightarrow{A_1B}\cdot b+\overrightarrow{A_1C}\cdot c+\overrightarrow{A_1D}\cdot d=\\&=\overrightarrow{MA}(b_1+c_1+d_1)+\overrightarrow{MB}\cdot b+\overrightarrow{MC}\cdot c+\overrightarrow{MD}\cdot d.\end{aligned}\tag{4}$$

Legyen N' az AD szakasznak az a pontja, amelyre

$$\frac{DN'}{N'A}=\frac{b_1+c_1+d_1}{d}$$

teljesül. Ekkor $\overrightarrow{AN'}(b_1+c_1+d_1)+\overrightarrow{DN'}\cdot d=\mathbf{0}$, amit (4)-hez adva és rendezve:

$$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN'})(b_1+c_1+d_1)+\overrightarrow{MB}\cdot b+\overrightarrow{MC}\cdot c+(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DN'})\cdot d=\mathbf{0},\quad \text{azaz}$$
$$\overrightarrow{MN'}(b_1+c_1+d_1+d)+\overrightarrow{MB}\cdot b+\overrightarrow{MC}\cdot c=\mathbf{0}.$$

Ez viszont csak akkor teljesülhet, ha az $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ és $\overrightarrow{MN'}$ egy síkban van, azaz ha N' benne van az MBC síkban. Az MBC sík és az AD egyenes döféspontja viszont N, ezért $N'\equiv N$. Tehát N az AD szakaszt $d:(b_1+c_1+d_1)$ arányban osztja. Teljesen hasonló számolással látható be, hogy

$$\frac{AP}{PB}=\frac{b}{b_1+c_1+d_1}\qquad \text{és}\qquad \frac{AQ}{QC}=\frac{c}{b_1+c_1+d_1}.$$

Mivel a BCD és a $B_1C_1D_1$ síkok párhuzamosak, azért az A_1DN háromszög hasonló a D_1NA háromszöghöz, tehát $\dfrac{AD_1}{A_1D}=\dfrac{AN}{ND}=\dfrac{d}{b_1+c_1+d_1}$, s ezért

$$\overrightarrow{AD_1}=\frac{d}{b_1+c_1+d_1}\cdot\overrightarrow{A_1D}.$$

Hasonló okoskodással kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{AB_1}=\frac{b}{b_1+c_1+d_1}\cdot\overrightarrow{A_1B}\qquad \text{és}\qquad \overrightarrow{AC_1}=\frac{c}{b_1+c_1+d_1}\cdot\overrightarrow{A_1C}.$$

Az utolsó három egyenlőséget összeadva és (1)-et felhasználva:

$$\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{AD_1}=\frac{1}{b_1+c_1+d_1}\left(d\cdot\overrightarrow{A_1D}+b\cdot\overrightarrow{A_1B}+c\cdot\overrightarrow{A_1C}\right)=\mathbf{0}.$$

Ez viszont csak akkor teljesül, ha az A pont a $B_1C_1D_1$ háromszög súlypontja, ami éppen a bizonyítandó állítás.

Juhász András (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

19 dolgozat érkezett. 5 pontos Baharev Ali, Gyenes Zoltán, Hegedűs 396 Péter, Juhász András, Lippner Gábor, Lukács László, Mecz Balázs, Páles Csaba, Pogány Ádám, Szabadka Zoltán, Székelyhidi Gábor, Terék Zsolt, Terpai Tamás és Végh A. László megoldása. 4 pontot kapott 2, 0 pontot 2 beküldő. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

F. 3205. *Igazoljuk, hogy egy tetszőleges háromszögben:*

$$\left(\frac{a}{m_a}\right)^2+\left(\frac{b}{m_b}\right)^2+\left(\frac{c}{m_c}\right)^2\geqslant 4, \tag{3}$$

ahol a, b, c *a háromszög oldalainak,* m_a, m_b, m_c *a megfelelő magasságainak hosszát jelöli.*

Javasolta: *Árokszállási Eszter,* Paks

Megoldás. Jelöljük a háromszög területét T-vel. Tudjuk, hogy $2T=am_a=bm_b=$ $=cm_c$, azaz $m_a=\dfrac{2T}{a}$, $m_b=\dfrac{2T}{b}$ és $m_c=\dfrac{2T}{c}$. Ezeket a bizonyítandó egyenlőtlenségbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\frac{a^4}{4T^2}+\frac{b^4}{4T^2}+\frac{c^4}{4T^2}\geqslant 4,\quad \text{azaz}\quad a^4+b^4+c^4\geqslant 16T^2.$$

A Héron-képlet szerint $16T^2=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$, vagyis a bizonyítandó egyenlőség:

$$a^4+b^4+c^4\geqslant (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

A jobb oldalon elvégezve a szorzásokat, majd rendezve az egyenlőtlenséget:

$$a^4+b^4+c^4\geqslant \left[(b+c)^2-a^2\right]\left[a^2-(b-c)^2\right],$$

$$a^4+b^4+c^4\geqslant -a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2,$$

$$2a^4+2b^4+2c^2-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2\geqslant 0,$$

$$(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\geqslant 0.$$

Az utolsó egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül, s mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, a bizonyítandó egyenlőség is igaz. Az is látszik, hogy egyenlőség pontosan akkor van, ha $a=b=c$, azaz ha a háromszög szabályos.

Deme Gábor (Nagykanizsa, Battyhány L. Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján

127 dolgozat érkezett. 6 pontos Gáli Gergely, Hegedűs 396 Péter, Léka Zoltán, Máthé András, Mecz Balázs, Pataki Péter és Szilágyi Judit megoldása. 5 pontot kapott 99, 4 pontot 8, 3 pontot 2, 2 pontot 6, 1 pontot 1, 0 pontot 4 beküldő.

F. 3210. *Lehet-e egy kétváltozós valós együtthatós polinom értékkészlete a nyílt* $(0,+\infty)$ *intervallum?*

Megoldás. Megmutatjuk, hogy az $(1-xy)^2+x^2$ polinom értékkészlete a $(0,+\infty)$ intervallum. Nyilván $(1-xy)^2+x^2\geqslant 0$. Másrészt $(1-xy)^2+x^2=0$ csak akkor teljesülhetne, ha $1-xy=0$ és $x=0$. Viszont $x=0$ esetén $1-xy=1$. Tehát $(1-xy)^2+x^2>$ >0. Végül belátjuk, hogy minden $k>0$ valós számhoz létezik olyan x, y számpár, amelyre $(1-xy)^2+x^2=k$. Legyen ugyanis $x=\sqrt{k}$ és $y=\dfrac{1}{\sqrt{k}}$. Ekkor $(1-xy)^2+x^2=$ $=\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{k}\right)^2+\left(\sqrt{k}\right)^2=k$. Ezzel állításunkat beláttuk.

Juhász András (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.)

Megjegyzés. A jó megoldások mindegyike konstruktív volt, összesen 5-féle különböző polinomot mutattak a beküldők. A többiek a kétváltozós függvényekre helytelenül alkalmazták a felsőbb analízis eszközeit.

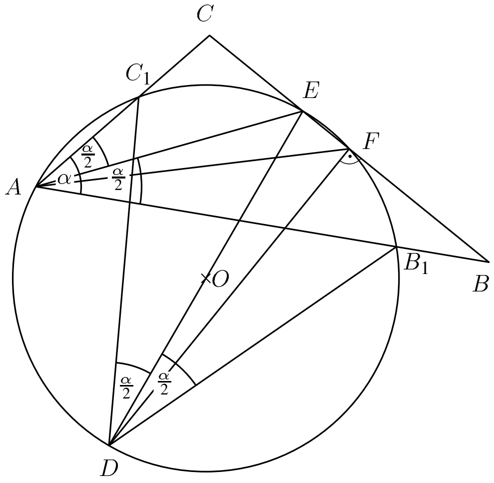
37 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Juhász András, 5 pontot Füstös Melinda, Gyenes Zoltán, Lippner Gábor, Páles Csaba, Terpai Tamás és Végh A. László. 0 pontos 28 dolgozat. Nem versenyszerű 2.

F. 3212. *Az* ABC *háromszög* BC *oldalának felezőpontja* F*, az* A*-hoz tartozó belső szögfelező és* BC *metszéspontja* E*, az* AFE *háromszög köré írt körének és az* AB*,* *valamint az AC oldalaknak A-tól különböző metszéspontja pedig B_1 és C_1. Mutassuk meg, hogy $BB_1=CC_1$.*

I. megoldás. Jelöljük az AEF háromszög köré írható kör középpontját O-val, az E pont O-ra vonatkozó tükörképét pedig D-vel (*1. ábra*). Ekkor Thalész tétele miatt $EFD\sphericalangle=90^\circ$, vagyis a B pont FD egyenesre vonatkozó tükörképe C, tehát $CD=DB$. Felhasználva a kerületi szögek tételét és azt, hogy AE szögfelező a CAB háromszögben, kapjuk, hogy

$$C_1DE\sphericalangle=C_1AE\sphericalangle=EAB_1\sphericalangle=EDB_1\sphericalangle. \tag{1}$$

Mivel ED átmérője a körnek, azért $C_1D=B_1D$.



1. ábra

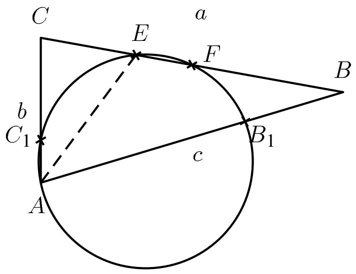
Forgassuk el az AC egyenest D körül $CAB\sphericalangle$-gel. Az (1) szögegyenlőségekből következik, hogy $C_1DB_1\sphericalangle=CAB\sphericalangle$, s így $C_1D=B_1D$ miatt C_1 képe a forgatásnál B_1 lesz, az AC egyenes képe pedig az AB egyenes. Mivel $CD=BD$ és az $ABD\sphericalangle$ is, valamint az $ACD\sphericalangle$ is hegyesszög, azért C képe a forgatásnál csak B lehet. Ez viszont azt jelenti, hogy a forgatásnál a C_1C szakasz képe B_1B, tehát felhasználva, hogy a forgatás egybevágósági transzformáció, kapjuk, hogy $BB_1=CC_1$.

Pap Júlia

(Debrecen, Fazekas M. Gimn., 11. o.t.)

II. megoldás. Jelöljük az ABC háromszög oldalait a szokásos módon a, b, c-vel, az AEF háromszög köré írt kört pedig k-val. F a BC oldal felezőpontja, ezért

$$CF=BF=\frac{a}{2}.$$



2. ábra

A szögfelezőtétel szerint $\frac{CE}{EB}=\frac{b}{c}$, továbbá $CE+EB=a$. Így

$$CE=\frac{b\cdot a}{b+c} \qquad \text{és} \qquad BE=\frac{c\cdot a}{b+c}.$$

A C pont k-ra vonatkozó hatványát kétféleképpen felírva:

$$CC_1\cdot CA=CE\cdot CF, \qquad \text{amiből} \qquad CC_1=\frac{CE\cdot CF}{CA}=\frac{\frac{b\cdot a}{b+c}\cdot\frac{a}{2}}{b}=\frac{a^2}{2(b+c)}.$$

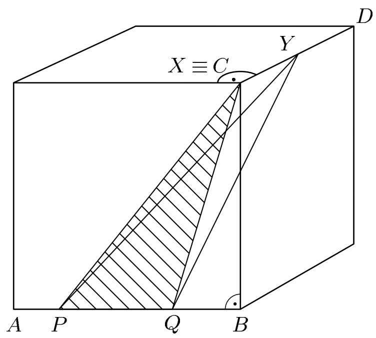
A B pont k-ra vonatkozó hatványát hasonlóan felírva:

$$BB_1 \cdot BA = BF \cdot BE, \qquad \text{amiből} \qquad BB_1 = \frac{BF \cdot BE}{BA} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{c \cdot a}{b+c}}{c} = \frac{a^2}{2(b+c)}.$$

Ezzel megmutattuk, hogy $BB_1 = CC_1 = \dfrac{a^2}{2(b+c)}$.

96 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Homolya Dániel, Juhász András és Less Áron. 5 pontos 83, 4 pontos 7, 3 pontos 2, 2 pontos 1 dolgozat.

F. 3213. *Egy kocka két kitérő élegyenesén mozog egy-egy egységnyi hosszúságú szakasz. A szakaszok melyik helyzetében lesz a végpontjaik által meghatározott tetraéder térfogata maximális?*



Megoldás. Legyen a kocka éle a hosszúságú, és legyen a kocka két kitérő éle AB és CD (a B és C csúcsok vannak egymás felett). Továbbá legyen a két egységnyi hosszúságú szakasz PQ (az AB élen) és XY (a CD élen). Vizsgáljuk meg, hogy mi történik, ha a PQ szakaszt mozgatjuk AB-n és XY-t rögzítjük. A PQX háromszög magassága a PQ egyenes és az X pont távolsága, ami ugyanaz, mint az AB egyenes és az X pont távolsága, tehát állandó. Ehhez a magassághoz tartozó alap is nyilván állandó (egységnyi), tehát a PQX háromszög területe állandó. A PQX háromszög mindig ugyanabban a síkban (az ABX síkban) van, és mivel a $PQXY$ tetraéder magassága ennek a síknak és Y-nak a távolsága, ezért a tetraéder magassága állandó. Már beláttuk, hogy a tetraéder alapterülete sem változik, ezért a tetraéder térfogata is állandó.

Ugyanígy járhatunk el, ha PQ-t rögzítjük és XY-t mozgatjuk. Tehát ha a két szakasz tetszőleges helyzetéből indulunk ki, akkor előbb PQ-t, utána XY-t mozgatva eljutunk egy azonos térfogatú tetraéderhez, amelyben P egybeesik B-vel, és X egybeesik C-vel. A tetraéder PQX alapterülete $a/2$ és a magassága 1 (az XY szakasz hossza). Ebből következik, hogy a tetraéder térfogata a szakaszok tetszőleges helyzetében $a/6$.

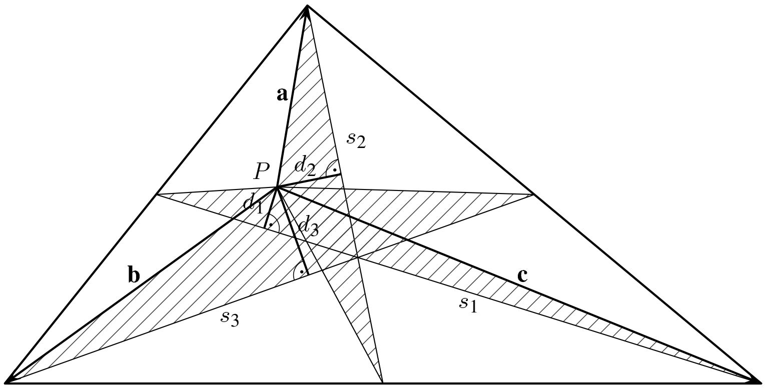
Székelyhidi Gábor (Kuwait, New English School, 11. o.t.)

80 dolgozat érkezett. 6 pontos Baharev Ali, Gáspár Merse Előd, Hegedűs 396 Péter, Homolya Dániel, Horváth 202 Gábor, Juhász András, Less Áron, Máthé András, Pap Júlia, Taraza Busra, Végh A. László és Vidor András megoldása. 5 pontos 60, 4 pontos 4, 3 pontos 2, 0 pontos 2 dolgozat.

F. 3217. *Egy háromszög súlyvonalainak hossza s_1, s_2 és s_3, egy P pontnak a súlyvonalaktól való távolsága pedig rendre d_1, d_2 és d_3. Mutassuk meg, hogy az s_1d_1, s_2d_2 és s_3d_3 szorzatok közül a legnagyobb egyenlő a másik kettő összegével.*

Javasolta: *Kiss János,* Budapest

Megoldás. A feladatban szereplő $s_i d_i$ szorzatok éppen azon háromszögek területeinek kétszeresei, amely háromszögek egyik csúcsa P, azzal szemközti oldaluk pedig a kiindulási háromszög egyik súlyvonala. Tulajdonképpen azt kell megmutatnunk, hogy e három területet előjelezhetjük úgy, hogy az előjeles összegük 0 legyen.



Jelöljük a P-ből az eredeti háromszög csúcsaiba mutató vektorokat $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$-vel. Ekkor az oldalfelező pontokba mutató vektorok $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$, $\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$ és $\frac{\mathbf{c}+\mathbf{a}}{2}$, s így $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}\times\mathbf{c}$, $\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}\times\mathbf{a}$ és $\frac{\mathbf{c}+\mathbf{a}}{2}\times\mathbf{b}$ olyan egymással párhuzamos vektorok, amelyek hossza valamilyen sorrendben s_1d_1, s_2d_2 és s_3d_3. Mivel bármilyen $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorokra igaz, hogy $\mathbf{x}\times\mathbf{y}+\mathbf{y}\times\mathbf{x}=\mathbf{0}$, ezért

$$\left(\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}\times\mathbf{c}\right)+\left(\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}\times\mathbf{a}\right)+\left(\frac{\mathbf{c}+\mathbf{a}}{2}\times\mathbf{b}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{0}.$$

Ez viszont éppen azt jelenti, hogy az s_1d_1, s_2d_2 és s_3d_3 szorzatok közül a legnagyobb egyenlő a másik kettő összegével.

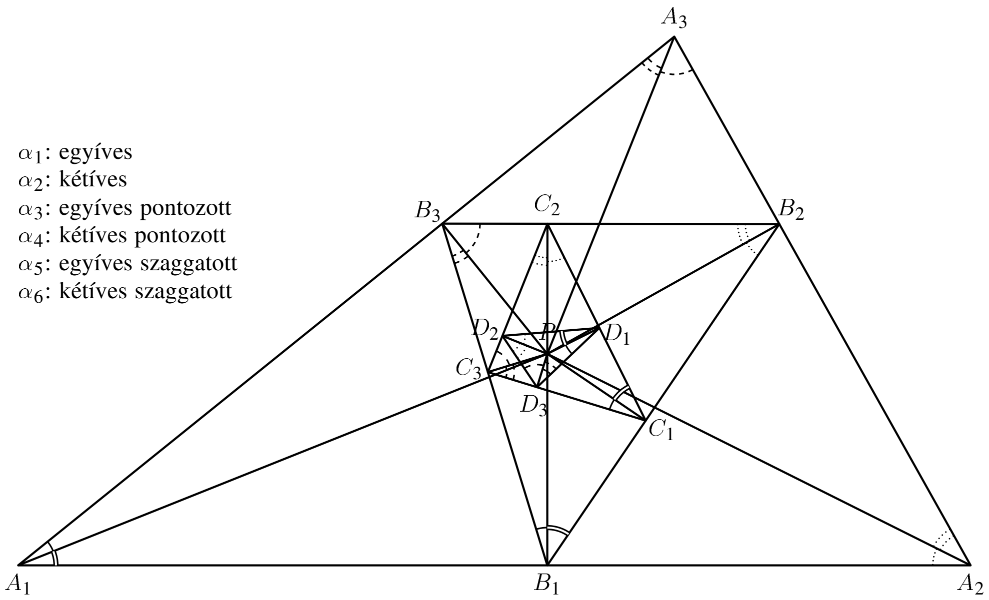
Naszódi Gergely (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

70 dolgozat érkezett. 7 pontos Barát Anna és Gyenes Zoltán, 6 pontos Juhász András megoldása. 5 pontot kapott 51, 4 pontot 7, 3 pontot 4, 2 pontot 3, 1 pontot 2 beküldő.

F. 3218. *Az $A_1A_2A_3$ háromszög egy P belső pontjából az A_iA_{i+1} oldalegyenesre bocsátott merőleges talppontja B_i ($i=1, 2, 3$, az indexeket modulo 3 értjük). A $B_1B_2B_3$ háromszögből hasonlóan képezzük a $C_1C_2C_3$, majd abból a $D_1D_2D_3$ háromszöget. Mutassuk meg, hogy a $D_1D_2D_3$ háromszög hasonló az $A_1A_2A_3$ háromszöghöz.*

Megoldás. Legyen $B_{i-1}A_iP\sphericalangle=\alpha_{2i-1}$ és $PA_iB_i\sphericalangle=\alpha_{2i}$ (l. az *ábrát*; az indexeket most is és a továbbiakban is modulo 3 értjük). A $PB_iA_iB_{i-1}$ négyszög húrnégyszög, mert $PB_{i-1}A_i\sphericalangle=PB_iA_i\sphericalangle=90^\circ$. Ezért a kerületi szögek tétele szerint:

(1) $$PB_iB_{i-1}\sphericalangle=PA_iB_{i-1}\sphericalangle=\alpha_{2i-1} \quad\text{és}\quad PB_{i-1}B_i\sphericalangle=PA_iB_i\sphericalangle=\alpha_{2i}.$$



(Az *ábrán* B_i az A_iA_{i-1} szakasz belső pontja, könnyen látható azonban, hogy az (1) összefüggések akkor is igazak, ha B_{i-1} és B_i közül az egyik nem belső pontja az $A_{i-1}A_i$, illetve az A_iA_{i+1} szakaszoknak. B_{i-1} és B_i viszont egyszerre nem lehetnek az említett szakaszokon kívül, mert akkor P nem lenne belső pontja az $A_1A_2A_3$ háromszögnek.) A $B_1B_2B_3$ háromszög szögei az (1) összefüggések alapján tehát

$$B_3B_1B_2\sphericalangle = PB_1B_3\sphericalangle + PB_1B_2\sphericalangle = \alpha_1 + \alpha_4,$$
$$B_1B_2B_3\sphericalangle = PB_2B_1\sphericalangle + PB_2B_3\sphericalangle = \alpha_3 + \alpha_6,$$
$$B_2B_3B_1\sphericalangle = PB_3B_2\sphericalangle + PB_3B_1\sphericalangle = \alpha_5 + \alpha_2.$$

Ezután a $B_1B_2B_3$ háromszögből kiindulva ugyanúgy kapjuk a $C_1C_2C_3$ háromszög szögeit:

$$C_3C_1C_2\sphericalangle = \alpha_1 + \alpha_6, \qquad C_1C_2C_3\sphericalangle = \alpha_3 + \alpha_2 \quad \text{és} \quad C_2C_3C_1\sphericalangle = \alpha_5 + \alpha_4;$$

majd pedig a $C_1C_2C_3$ háromszögre alkalmazva az eljárást, a $D_1D_2D_3$ háromszög szögeit:

$$D_3D_1D_2\sphericalangle = \alpha_1 + \alpha_2, \qquad D_1D_2D_3\sphericalangle = \alpha_3 + \alpha_4 \quad \text{és} \quad D_2D_3D_1\sphericalangle = \alpha_5 + \alpha_6.$$

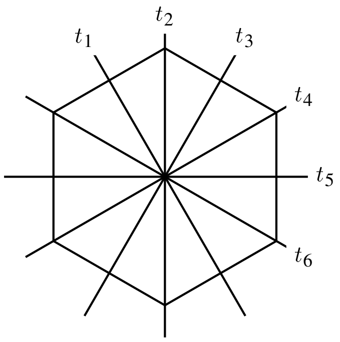
Tehát a $D_1D_2D_3$ háromszög szögei megegyeznek az $A_1A_2A_3$ háromszög szögeivel, vagyis a két háromszög hasonló.

Megjegyzés. Az állítás megfelelője tetszőleges konvex n-szögre is igaz, akkor n lépés után kapunk az eredetihez hasonló n-szöget. A szögek egyenlőségét ebben az esetben is a megoldásban leírt módon láthatjuk be, a sokszögek hasonlósága azonban nem következik a szögek egyenlőségéből, ehhez még azt is meg kell mutatnunk, hogy P-nek a két sokszög megfelelő oldalegyeneseitől való távolságának aránya állandó.

Végh A. László (Debrecen, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

63 dolgozat érkezett. 7 pontos Végh A. László megoldása. 6 pontot kapott Hegedűs 396 Péter, Homolya Dániel, Less Áron, Mecz Balázs, Pataki Péter és Terpai Tamás. 5 pontot kapott Baharev Ali, Bíró Anikó, Bíró Márton, Bíró Zsuzsanna, Bosznay Tamás, Bujdosó Attila, Devecsery Ágnes, Gazda Kinga, Gelencsér Gábor, Gueth Krisztián, Gyenes Zoltán, Hangya Balázs, Harangi Viktor, Hartmann Miklós, Hermann György, Horváth 202 Gábor, Horváth 713 György, Horváth Dénes, Juhász András, Kunszenti-Kovács Dávid, Kurucz Ádám, Kutalik Péter, Legány Csaba, Léka Zoltán, Lippner Gábor, Lovas Róbert, Markó Péter, Naszódi Gergely, Németh 245 Ádám, Páles Csaba, Pap Júlia, Puskás Péter, Rácz Balázs, Sarlós Ferenc, Szabadka Zoltán, Szakács László, Tisch Dávid, Tran Thanh Long, Zawadowski Ádám és Zombori Tamás. 4 pontos 14, 2 pontos 1, 0 pontos 1 dolgozat.

F. 3223. *Hány oldala lehet egy olyan sokszögnek, amelynek pontosan n darab szimmetriatengelye van?*

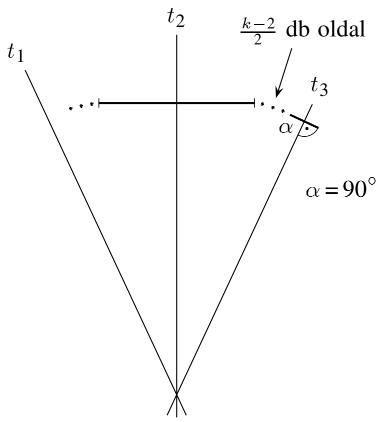


1. ábra

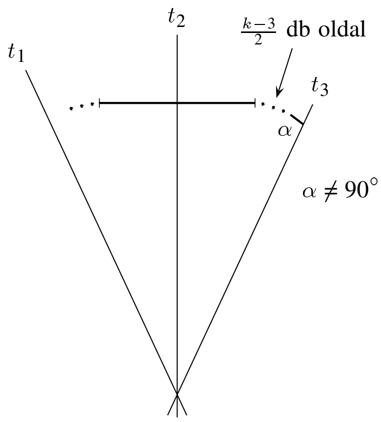
Megoldás. Megmutatjuk, hogy a sokszög oldalainak száma n-nek egész számú többszöröse.

Tudjuk, hogy szimmetriatengelyt szimmetriatengelyre tükrözve ismét szimmetriatengelyt kapunk (mert az alakzat első tengelyre vonatkozó tükörképe szimmetrikus a második tengely tükörképére). Ezért az n darab szimmetriatengelynek egy ponton kell átmennie, mert ha valamelyik három egy háromszöget alkotna, akkor ezt a háromszöget az oldalaira tükrözve, majd az így kapott háromszögek oldalegyeneseit akárhányszor továbbtükrözve végtelen sok szimmetriatengelyt kapnánk, ami ellentmondás. Ugyanezen okból következik az is, hogy az n szimmetriatengely $2n$ darab egyenlő szögtartományra bontja a síkot.

Egy szimmetriatengely a sokszög kerületét csak annak valamelyik csúcsában vagy valamelyik oldalának felezőpontjában metszheti, mert egyébként az elmetszett oldalt a metsző tengelyre tükrözve nem kaphatnánk meg a sokszög egyik oldalát sem (hiszen



2. ábra



3. ábra

azok nem metszik egymást belső pontban). Viszont a tengelyek által meghatározott $2n$ tartomány mindegyike ugyanannyi „féloldalt” tartalmaz, ezért e tartományok tükrözésekkel egymásba vihetők. Így, ha az egyik tartományban k darab „féloldal” van, akkor a sokszögnek összesen $2n \cdot \frac{k}{2} = n \cdot k$ oldala van.

Másrészt egy szabályos n-szögből kiindulva – aminek pontosan n darab szimmetriatengelye van – könnyen konstruálhatunk minden k pozitív egészhez olyan $k \cdot n$ oldalú sokszöget, aminek pontosan n szimmetriatengelye van. Ha k páros, akkor a *2.*, ha pedig k páratlan, akkor a *3. ábrán* látható, hogyan képezhető egy-egy megfelelő sokszög.

Terpai Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

62 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Baharev Ali, Balogh Attila, Bánfi Barnabás, Bankó Krisztián, Bárány Kristóf, Barát Anna, Bosznay Tamás, Börcsök József, Bujdosó Attila, Csóka Endre, Csornai Gyula, Devecsery András, Gueth Krisztián, Gyenes Zoltán, Győri Nikolett, Hangya Balázs, Hegedűs 396 Péter, Hermann György, Horváth 202 Gábor, Juhász András, Kajtár Márton, Katona Zsolt, Keszegh Balázs, Kunszenti-Kovács Dávid, Léka Zoltán, Less Áron, Lippner Gábor, Lovas Róbert, Máthé András, Mecz Balázs, Naszódi Gergely, Németh 330 Gábor, Páles Csaba, Pap Júlia, Papp Dávid, Pataki Péter, Pogány Ádám, Puskás Péter, Szabadka Zoltán, Székelyhidi Gábor, Terpai Tamás, Tisch Dávid, Vágvölgyi Péter és Végh A. László. 3 pontos 3, 2 pontos 1, 1 pontos 1, 0 pontos 13 dolgozat.

F. 3224. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex poliéder minden lapja középpontosan szimmetrikus, akkor legalább hat lapja paralelogramma.*

Javasolta: *Rudolf Gábor,* Budapest

Megoldás. Jelöljük a poliéder csúcsainak, lapjainak és éleinek számát c, l és $é$-vel, a lapok közül a paralelogrammák számát p-vel. Mivel a poliéder minden csúcsában legalább 3 él találkozik, és minden él pontosan két csúcsot köt össze, azért

$$2é \geqslant 3c, \qquad \text{vagyis} \qquad c \leqslant \frac{2}{3}é.$$

Az Euler-féle poliédertétel szerint $c + l = é + 2$. Ezt összevetve az előző egyenlőtlenséggel, kapjuk, hogy

$$\frac{2}{3}é + l \geqslant é + 2, \qquad \text{azaz} \qquad 2é \leqslant 6l - 12. \tag{1}$$

A poliéder minden éle két lapon van rajta, ezért az élek számának kétszeresét megkapjuk, ha összeadjuk a lapsokszögek oldalainak számát. Egy középpontosan szimmetrikus sokszögnek páros sok oldala van. Ha az oldalak száma 4, akkor a sokszög paralelogramma, ha pedig az oldalak száma ennél nagyobb, akkor legalább 6. Ezért

$$2é \geqslant 4p + 6(l - p).$$

Ebből és az (1) egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$4p + 6(l - p) \leqslant 6l - 12,$$

vagyis $6 \leqslant p$, ami éppen a bizonyítandó volt.

Végh A. László (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

40 dolgozat érkezett. 7 pontos Léka Zoltán, 6 pontos Harangi Viktor és Végh A. László megoldása. 5 pontot kapott Baharev Ali, Balogh Attila, Barát Anna, Gáspár Merse Előd, Gueth Krisztián, Gyenes Zoltán, Győri Nikolett, Hangya Balázs, Horváth 202 Gábor, Juhász András, Katona Zsolt, Keszegh Balázs, Kiss András Péter, Kunszenti-Kovács Dávid, Lippner Gábor, Máthé András, Naszódi Gergely, Oláh 407 Szabolcs, Pál András, Páles Csaba, Papp Dávid, Pogány Ádám, Poronyi Gábor, Puskás Péter, Robotka Zsolt, Sarlós Ferenc, Szabadka Zoltán, Szabó 997 Péter, Terpai Tamás, Tisch Dávid, Tóth 235 Ádám és Vágvölgyi Péter 4 pontos 3, 1 pontos 1, 0 pontos 1 dolgozat.

F. 3225. *Adjunk meg a térben olyan ponthalmazt, amelynek bármely síkon van legalább egy, de legfeljebb öt pontja.*

Megoldás. Vegyünk fel a térben egy derékszögű koordinátarendszert, és tekintsük azt a H halmazt, amelyet azok az $(x;y;z)$ koordinátájú pontok alkotnak, amelyekre $y=x^3$ és $z=x^5$. Megmutatjuk, hogy H eleget tesz a feladat feltételeinek.

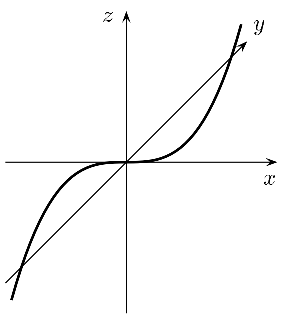
A térben egy tetszőleges sík egyenlete $Ax+By+Cz+D=0$ alakú, ahol az A, B, C számok nem mindegyike 0. Ennek a síknak pontosan annyi közös pontja van H-val, ahány valós megoldása az

$$Ax+Bx^3+Cx^5+D=0$$

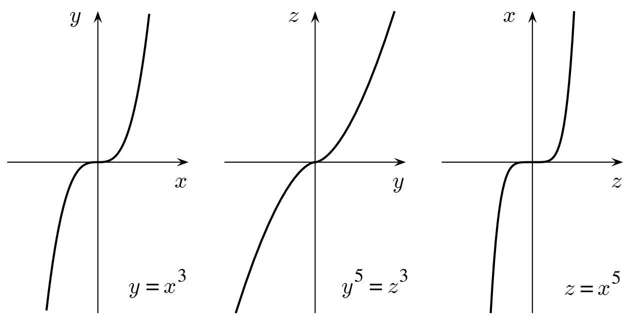
egyenletnek van. Tudjuk, hogy egy páratlan fokú polinomnak mindig van legalább egy valós gyöke, s nyilván legfeljebb annyi gyöke van, mint az egyenlet fokszáma (A, B és C egyszerre nem 0, tehát a polinom fokszáma legalább 1 és legfeljebb 5). Így H-nak minden síkon legalább egy, de legfeljebb öt pontja van.

Juhász András (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.)

Megjegyzés. A H ponthalmaz egy olyan görbe, amelynek a koordinátasíkok által meghatározott 8 térrész közül 2-ben vannak pontjai (*1. ábra*). A görbének a koordinátasíkokon lévő vetületei a *2. ábrán* láthatók.



1. ábra



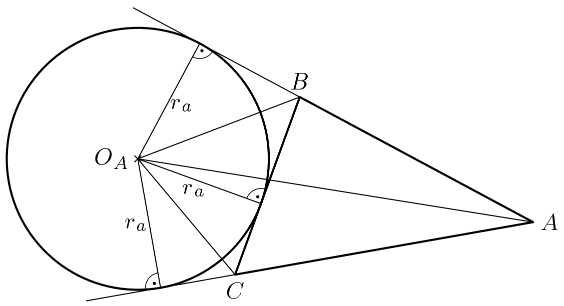
2. ábra

49 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Juhász András. 5 pontos Baharev Ali, Balogh Attila, Bárány Kristóf, Csikvári András, Dancsó Zsuzsanna, Devecsery András, Gáspár Merse Előd, Gyenes Zoltán, Hangya Balázs, Harangi Viktor, Hermann György, Horváth 202 Gábor, Horváth 472 András, Katona Zsolt, Keszegh Balázs, Kiss András Péter, Léka Zoltán, Lippner Gábor, Máthé András, Oláh 407 Szabolcs, Pál András, Pogány Ádám, Puskás Péter, Szabadka Zoltán, Székelyhidi Gábor, Terpai Tamás, Vaik István, Végh A. László, Vidor Anna és Vizer Máté megoldása. 4 pontot kapott 5, 3 pontot 3, 2 pontot 3, 1 pontot 3, 0 pontot 4 beküldő.

F. 3229. *Fejezzük ki a háromszög c oldalát az a és b oldalak segítségével, ha tudjuk, hogy a c oldalhoz hozzáírt kör sugara mértani közepe az a és b oldalakhoz hozzáírt körök sugarának?*

Javasolta: *Bodrogi Klára,* Hódmezővásárhely

Megoldás. Jelöljük a háromszög csúcsait a szokásos módon A, B, C-vel, a hozzáírt körök sugarait r_a, r_b, r_c-vel, az a oldalhoz hozzáírt kör középpontját pedig O_A-val.



Az ABC háromszög területét megkapjuk, ha az O_AAB és az O_AAC háromszögek területének összegéből levonjuk az O_ABC háromszög területét. E háromszögek mindegyikében az O_A-hoz tartozó magasság r_a, tehát

(1) $$T_{ABC}=\frac{r_ac}{2}+\frac{r_ab}{2}-\frac{r_aa}{2}.$$

Ugyanígy kapjuk, hogy

(2) $$T_{ABC}=\frac{r_bc}{2}+\frac{r_ba}{2}-\frac{r_bb}{2}\qquad\text{és}$$

(3) $$T_{ABC}=\frac{r_ca}{2}+\frac{r_cb}{2}-\frac{r_cc}{2}.$$

Az (1) és (2) egyenletek jobb oldalának szorzata megegyezik a (3) egyenlet jobb oldalának négyzetével, azaz

$$\left[\frac{r_a}{2}(c+b-a)\right]\left[\frac{r_b}{2}(c+a-b)\right]=\left[\frac{r_c}{2}(a+b-c)\right]^2.$$

Felhasználva, hogy r_a és r_b mértani közepe r_c, vagyis $r_ar_b=r_c^2$:

$$(c+b-a)(c+a-b)=(a+b-c)^2.$$

Ebből adódik a feladat megoldása: $c=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$.

Csendes Viktor (Kaposvár, Táncsics M. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

85 dolgozat érkezett. 5 pontos 78, 4 pontos 2, 3 pontos 1, 0 pontos 4.

Nehezebb matematika feladatok megoldása

N. 160. *Definiáljuk az* (a_n) *sorozatot a következőképpen:* $a_0 = a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+3} = a_{n+1} + 1998a_n$. *Mutassuk meg, hogy tetszőleges pozitív egész* n*-re:*

$$a_{2n-1} = 2a_n a_{n+1} + 1998a_{n-1}^2.$$

Megoldás. Jelölje G_n azt az irányított gráfot, amelynek a csúcsai $A_0, A_1, \ldots, A_n$, az élei pedig: A_i-ből A_{i+2}-be megy egy él, A_i-ből A_{i+3}-ba pedig 1998 darab él megy, minden szóbajövő i esetére. Jelölje az $\overrightarrow{A_0A_n}$ irányított utak számát b_n.

Látható, hogy $a_2 = b_0 = 1$, $a_3 = b_1 = 0$, $a_4 = b_2 = 1$. Legyen a továbbiakban $n \geqslant 3$. Ekkor A_n-be el lehet jutni (irányított út mentén) A_{n-2}-ből egyféleképpen, A_{n-3}-ból pedig 1998-féleképpen. Mivel minden $\overrightarrow{A_0A_n}$ útnak érintenie kell A_{n-2}-t vagy A_{n-3}-at, így $b_n = b_{n-2} + 1998b_{n-3}$; tehát $b_n = a_{n+2}$. Ezek szerint a $b_{2n-3} = 2b_{n-1}b_{n-2} + 1998b_{n-3}^2$ összefüggést kell igazolni.

Az A_{2n-3}-ba vezető utak a következők lehetnek:

a) A_{n-1}-en keresztül menő;

b) A_{n-2}-n keresztül menő;

c) sem A_{n-1}-et, sem A_{n-2}-t nem érintő.

Nyilván minden út e három fajta közül pontosan az egyikbe tartozik. Az a), ill. b) típus nyilván $b_{n-1}b_{n-2}$, ill. $b_{n-2}b_{n-1}$ utat tartalmaz. Ha egy út c)-típusú, akkor át kell haladnia A_{n-3}-on és A_n-en is; az ilyen utak száma ezért $b_{n-3} \cdot 1998 \cdot b_{n-3}$. Tehát $b_{2n-3} = b_{n-1}b_{n-2} + b_{n-2}b_{n-1} + b_{n-3} \cdot 1998 \cdot b_{n-3}$, ami éppen a feladat állítása.

Kun Gábor (Bp., Piarista Gimn., 12. o.t.)
Lukács László (Miskolc, Földes F. Gimn., 11. o.t.)

11 dolgozat érkezett. 5 pontos Bérczi Gergely, Gyenes Zoltán, Horváth 202 Gábor, Kun Gábor, Lippner Gábor, Lukács László, Mecz Balázs és Végh A. László megoldása. 2 pontos 1, 1 pontos 1, 0 pontos 1 dolgozat.

N. 164. *Van-e olyan eleme a Fibonacci-sorozatnak, amelynek tízes számrendszerbeli alakja* 6 *darab* 9*-es számjegyre végződik?*

Megoldás. Jelölje f_i a Fibonacci-sorozat i-edik elemét, azaz $f_0 = f_1 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

A Fibonacci-sorozat értelemszerűen kiterjeszthető negatív indexekre is ($f_{-1} = 0$, $f_{-2} = 1$, $f_{-3} = -1$ stb).

Bebizonyítjuk a következőt: (f_n) m szerint vett maradékai periodikusak (minden $m > 1$-re).

Tekintsük ugyanis az (f_i, f_{i+1}) $(i \in \mathbf{Z})$ rendezett párokat modulo m. Közülük véges sok, legfeljebb m^2 különböző lehetséges, így létezik olyan $i < j$, amelyre $f_i \equiv f_j$

és $f_{i+1} \equiv f_{j+1} \pmod{m}$. Innen nyilván $f_{i-1} \equiv f_{j-1}$ és $f_{i+2} \equiv f_{j+2}$ adódik a rekurzióból, ezért teljes indukcióval azt kapjuk, hogy (f_n) az m szerint vett maradékra nézve periodikus (mindkét irányban!) a $j-i$ periódussal.

Ekkor végtelen sok pozitív j van, amelyre $-1 = f_{-3} \equiv f_j$ (mod 1 000 000), és $j > 0$ esetén $f_j > 0$; vagyis f_j a 10-es számrendszerben felírva 6 darab 9-esre végződik.

23 dolgozat érkezett. 5 pontos Baharev Ali, Bérczi Gergely, Csóka Endre, Gerbicz Róbert, Gyenes Zoltán, Győri Nikolett, Hegedűs 396 Péter, Horváth 202 Gábor, Juhász András, Kun Gábor, Lippner Gábor, Lukács László, Mecz Balázs, Naszódi Gergely, Pataki Péter, Székelyhidi Gábor, Végh A. László és Zábrádi Gergely megoldása. 4 pontot kapott 4, 0 pontot 1 beküldő.

N. 165. *$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k$ egy $4n$-elemű halmaz $2n$-elemű részhalmazai. Igazoljuk, hogy közülük valamelyik kettő metszetének elemszáma legalább* $\left(1-\dfrac{1}{k}\right)n$.

Javasolta: *Babai László,* Chicago

Megoldás. Legyenek $A_0, \ldots, A_k$ $2n$ elemű részei az $\{1, 2, \ldots, 4n\}$ halmaznak. Mindegyik A_i-hez rendeljük hozzá azt az $\mathbf{a}_i$ vektort, amelynek j-edik koordinátája 0, ill. 1 attól függően, hogy $j \notin A_i$ vagy $j \in A_i$. Nyilván $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j = |A_i \cap A_j|$, így például $\mathbf{a}_i^2 = 2n$. Tegyük fel, hogy a feladat állítása hamis, azaz $\forall\ i \neq j$ esetén $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j < \left(1-\dfrac{1}{k}\right)n$. Ekkor

$$\mathbf{b}^2 = (\mathbf{a}_0 + \ldots + \mathbf{a}_k)^2 = \sum_{i=0}^{k} \mathbf{a}_i^2 + \sum_{i<j} 2\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j < (k+1)\cdot 2n + 2\binom{k}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)n \leqslant n(k+1)^2.$$

Viszont $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_{4n})$ koordinátáinak összege egyenlő $\sum |A_i| = (k+1)\cdot 2n$-nel, így

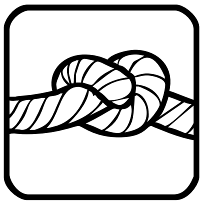
$$\mathbf{b}^2 = b_1^2 + \ldots + b_{4n}^2 \geqslant \frac{1}{4n}(b_1 + \ldots + b_{4n})^2 = n(k+1)^2,$$

a számtani és a négyzetes közepek közötti egyenlőtlenség szerint. Ezt összevetve az utóbbival, ellentmondást kapunk, ami bizonyítja a feladat állítását.

Lukács László (Miskolc, Földes F. Gimn., 11. o.t.)
Lippner Gábor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

10 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Bérczi Gergely, Gerbicz Róbert, Gyenes Zoltán, Juhász András, Kun Gábor, Lippner Gábor, Lukács László, Székelyhidi Gábor, Terpai Tamás és Végh A. László.

A pontversenyben kitűzött C gyakorlatok (513–516.)



C. 513. Egy 25 méter hosszú feltekercselt vezetéket 2 és 3 méteres darabokra vágunk fel. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha a különböző méretű darabok sorrendje is számít?

C. 514. Jelölje S_n a $(2^n, 2^{n+1})$ intervallumba eső egész számok összegét. Bizonyítsuk be, hogy S_n minden pozitív egész n szám esetén osztható 3-mal. Milyen pozitív egész n-ekre osztható S_n 9-cel?

C. 515. Egy kockát felosztottunk 27 egybevágó kis kockára. Legfeljebb hány kis kockát döfhet át egy egyenes?

C. 516. Igazoljuk, hogy minden tetraédernek van olyan magassága, amely legalább akkora, mint a tetraéderbe írható gömb átmérőjének kétszerese.

❄

Beküldési határidő: 1998. november 16.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest, Pf. 47. 1255

❄

A pontversenyben kitűzött gyakorlatok (3222–3229.) és feladatok (3244–3249.)

Gy. 3222. Legyenek A és B 9-jegyű számok. Tegyük fel, hogy A bármelyik számjegyét B-nek megfelelő (ugyanolyan helyiértéken álló) számjegyével helyettesítve 7-tel osztható számot kapunk. Mutassuk meg, hogy akkor ez megfordítva is teljesül, azaz B egy tetszőleges számjegyét A megfelelő jegyével helyettesítve, ugyancsak 7-tel osztható számot kapunk.

Gy. 3223. Legyenek x, y, z pozitív valós számok. Igaz-e, hogy

a) ha $x+y+z \geqslant 3$, akkor $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqslant 3$?

b) ha $x+y+z \leqslant 3$, akkor $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geqslant 3$?

Angol versenyfeladat

Gy. 3224. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a pozitív egészek körében:

$$n+k=(n,k)^2$$
$$k+m=(k,m)^2$$
$$m+n=(m,n)^2,$$

ahol (a,b) az a és b legnagyobb közös osztóját jelöli. (**H**)

Gy. 3225. Az (a_i) sorozatot a következőképpen definiáljuk:

$$a_1=1, \qquad a_n=\frac{n+1}{n-1}(a_1+\ldots+a_{n-1}).$$

Határozzuk meg a_{1998} értékét.

Általános iskolások részére javasolt példák: **C. 513., C. 515., Gy. 3222., Gy. 3226., Gy. 3227.**

Gy. 3226. A k_1 és k_2 körök közös pontjai A és B. A k_1 kör A pontbeli érintője k_2-t a C pontban, a k_2 B pontbeli érintője a k_1 kört a D pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $BD^2 \cdot BC = AC^2 \cdot AD$.

Gy. 3227. Egy körbe két alakzatot írunk. Egy trapézt, amely a kör egyik átmérőjén nyugszik, és egy egyenlő szárú háromszöget, amelynek szárai párhuzamosak a trapéz száraival. Bizonyítsuk be, hogy a két alakzat területe egyenlő.

Gy. 3228. Egy húrnégyszög oldalai rendre 2, 3, 4, 6 egységnyiek. Milyen arányban osztják egymást az átlók?

Bodó Boglárka (Budapest) javaslata alapján

Gy. 3229. Bizonyítsuk be, hogy egybevágó szabályos tetraéderekkel, és velük egyező élű szabályos oktaéderekkel a tér hézag és átfedés nélkül kitölthető. (**H**)

❄

Beküldési határidő: 1998. november 16.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

❄

F. 3244. Határozzuk meg az összes pozitív x számot, amely megoldása valamely

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots+\cfrac{1}{x}}} = x$$

alakú egyenletnek.

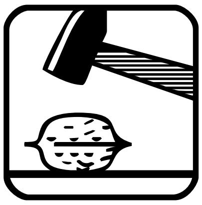
F. 3245. Egy mókus mogyorót gyűjtött télire. Első nap megevett 1 szemet és a maradék $\frac{1}{100}$-ad részét, a másodikon 2 szemet és a maradék $\frac{1}{100}$-ad részét, és így tovább. Végül az utolsó, n-edik napon megette a megmaradt n mogyorót. Hány szem mogyorót gyűjtött a mókus?

F. 3246. Legyen x_1 pozitív, 1-nél kisebb szám. Ebből kiindulva képezzük az $x_{k+1} = x_k - x_k^2$ előírással meghatározott sorozatot. Mutassuk meg, hogy n bármekkora, $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < 1$.

F. 3247. Az $ABCD$ négyszög A-ból induló oldalainak mértani közepét A-ból felmérve az AB és az AD félegyenesekre, kapjuk a K és az L pontokat, a C-ből induló oldalainak mértani közepét C-ből felmérve a CB és a CD félegyenesekre pedig az M és az N pontokat. Milyen feltétel mellett teljesül, hogy $KL = MN$?

F. 3248. Egy 5 lányból és 5 fiúból álló társaság azonos nemű tagjai nem ismerik egymást, továbbá nincs két olyan lány, akinek lenne két közös fiúismerőse. Legfeljebb hány ismeretség van a társaság tagjai között? Hogyan módosul a válasz, ha a társaságban 7 lány és 7 fiú van?

F. 3249. Egy konvex poliéder minden lapja páratlan oldalú sokszög, és minden csúcsában páratlan sok él találkozik. Lehetséges-e, hogy a háromszöglapok számának és a három élre illeszkedő csúcsok számának az összege 9?



A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (183–186.)

N. 183. Az $y=x^2$ egyenletű parabolát „csúszásmentesen elgurítjuk” az x tengelyen. Milyen messzire távolodhat el a parabola az y tengelytől?

N. 184. Egy végtelen fagráf minden éle két olyan rácspontot köt össze, amelyek távolsága legfeljebb 1998. A sík minden rácspontja csúcsa a gráfnak. Bizonyítsuk be, hogy van két egységnyi távolságra lévő pont a síkon, amelyeket a fagráfban legalább 10^{1998} hosszúságú út köt össze.

N. 185. Adjunk meg olyan, az egész számokon értelmezett többváltozós, egész együtthatós polinomot, amelynek értékkészlete bizonyos negatív számokból és az $\left\lceil \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^n \right\rceil$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ alakú számokból áll.

N. 186. Igaz-e, hogy ha valamely x valós számra és n pozitív egészre $\cos nx$ és $\cos(n+1)x$ racionális, akkor $\cos x$ is racionális?

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS (Volume 48. No. 7. October 1998)

New exercises for practice (see page 423): **C. 513.** A 25 meter long wound cable is cut into 2 and 3 meter long pieces. How many different ways can this be done if also the order of pieces of different lengths is taken into account? **C. 514.** Let S_n denote the sum of integers contained in the open interval $(2^n, 2^{n+1})$. Prove that S_n is divisible by 3 for every positive integer n. Determine those values of n for which S_n is divisible by 9. **C. 515.** A cube is divided into 27 pairwise congruent smaller cubes. Find the maximum number of small cubes that can be stabbed by a straight line. **C. 516.** Prove that any tetrahedron has an altitude which is at least twice as large as the diameter of the sphere inscribed in the tetrahedron.

New exercises: Gy. 3222. Let A and B denote 9-digit numbers. Assume that, upon replacing any digit of A by the corresponding digit of B (that is, the digit of B of the same place value), we obtain a number divisible by 7. Prove that this is also true in the other way around, that is, upon replacing any digit of B by the corresponding digit of A, we get a multiple of 7. **Gy. 3223.** Let x, y, z denote positive real numbers. Prove or disprove the following statements. a) If $x+y+z \geqslant 3$, then $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqslant 3$. b) If $x+y+z \leqslant 3$, then $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geqslant 3$. (*English competition problem*)

Gy. 3224. Determine all solutions in positive integers k, m, n of the system of equations

$$n+k=(n,k)^2 \qquad k+m=(k,m)^2 \qquad m+n=(m,n)^2,$$

where (a,b) stands for the greatest common divisor of a and b. **Gy. 3225.** A sequence (a_i) is defined by $a_1=1$ and

$$a_n=\frac{n+1}{n-1}(a_1+\ldots+a_{n-1}) \ .$$

Determine a_{1998}. **Gy. 3226.** Two circles k_1 and k_2 intersect each other at points A and B. The line tangent to k_1 at A intersects k_2 at a point C, the line tangent to k_2 at B intersects k_1 at a point D. Prove that $BD^2\cdot BC=AC^2\cdot AD$. **Gy. 3227.** Two figures are inscribed in a circle. One is a trapezium based on a diameter of the circle, the other is an isosceles triangle whose legs are parallel to the legs of the trapezium, respectively. Prove that the two polygons have equal areas. **Gy. 3228.** A cyclic quadrilateral has sides of length 2, 3, 4 and 6, in this order. Determine the two ratios in which the diagonals divide each other. (*Bodó Boglárka* (Budapest)) **Gy. 3229.** Prove that the space can be tiled by congruent copies of regular tetrahedra and congruent copies of regular octahedra of the same length of edge.

New problems: F. 3244. Find all positive numbers x that are solutions to some equation of the form

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots+\cfrac{1}{x}}}=x.$$

F. 3245. A squirrel hoarded hazel-nuts for the winter. On the first day of the winter he ate 1 nut and 1 percent of the remaining ones. On the second day he ate 2 nuts plus 1 percent of the rest, and so on, until the nth, last day of the winter, when he ate the last n nuts that remained. How many nuts did the squirrel gathered for the winter? **F. 3246.** Let x_1 denote a positive number less than 1, and consider the sequence defined recursively by the rule $x_{k+1}=x_k-x_k^2$. Prove that $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2<1$, no matter how large n is. **F. 3247.** Given a quadrilateral $ABCD$, point K (L) is obtained as the intersection of ray AB (AD) with the circle centered at A whose radius is the geometric mean of the sides of the quadrilateral starting at vertex A. Similarly, points M and N are obtained as the intersections of rays CB and CD, respectively, with the circle centered at C whose radius is the geometric mean of the sides starting at vertex C. Find the right condition which guarantees that $KL=MN$. **F. 3248.** There are 5 girls and 5 boys at a party. Participants who belong to the same sex do not know each other. Moreover, there cannot be found two girls who know the same two boys. At most how many acquaintances can be among the participants of the party? How will the answer change if there are 7 girls and 7 boys at the party? **F. 3249.** In a convex polyhedron, every face has an odd number of sides and every vertex has an odd valence (that is an odd number of attached edges). Is it possible that the number of triangle faces and the number of vertices of valence 3 sum up to 9?

New advanced problems: N. 183. The parabola $y=x^2$ is rolled, without slipping, along the x-axis. How far away can the parabola move from the y-axis? **N. 184.** An infinite tree graph is given in the plane such that every lattice point is a vertex of the graph, and every edge of the graph connects two lattice points whose (Euclidean) distance is at most 1998. Prove that there exist two points in the plane, a unit distance apart, such that the path which connects them in the tree is at least 10^{1998} long. **N. 185.** Find a polynomial of several integer variables with integer coefficients whose range consists of certain negative numbers and the numbers $\left\lceil \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^n \right\rceil$ ($n=0$, 1, 2, …). **N. 186.** For a certain real number x and a positive integer n, both $\cos nx$ and $\cos(n+1)x$ are rational numbers. Does it follow that $\cos x$, too, is a rational number?