## Az 1997–98-as tanévi matematika pontverseny állása a szeptember–februári feladatok feldolgozása közben

### Gyakorlatok

**Az eddig feldolgozott feladatok:** a szeptemberi–decemberi szám feladatai, kivéve a Gy. 3164; továbbá Gy. 3175., Gy. 3177., Gy. 3178., Gy. 3179., Gy. 3180., Gy. 3188.

Feladatonként egy helyes megoldással elérhető: 185 pont.

**Legfeljebb 8. osztályosok**

**1.** *Harangi Viktor* 8. o. t. 174 pont; **2.** *Kunszenti-Kovács Dávid* 7. o. t. 153 pont; **3.** *Tran Thanh Long* 8. o. t. 145 pont; **4.** *Gerencsér Balázs* 8. o. t. 135 pont; **5.** *Kovács Erika Renáta* 8. o. t. 127 pont; **6.** *Csikvári Péter* 8. o. t. 111 pont; **7.** *Birkner Tamás* 5. o. t. 103 pont; **8–9.** *Csóka Endre* 7. o. t., *Kerékfy Péter* 8. o. t. 100 pont; **10–11.** *Hamar Gergő* 8. o. t., *Tóth 370 Ágnes* 8. o. t. 99 pont; **12.** *Béky Bence* 8. o. t. 97 pont; **13.** *Dombi 870 Tímea* 8. o. t. 96 pont; **14.** *Pallos Péter* 8. o. t. 82 pont; **15.** *Erdei Zsuzsa* 8. o. t. 75 pont; **16.** *Devecsery Ágnes* 8. o. t. 54 pont; **17.** *Csernenszky András* 8. o. t. 43 pont; **18–21.** *Csordás Hunor* 8. o. t., *Horváth Illés* 8. o. t. 42 pont; **20–22.** *Bíró Ádám* 8. o. t., *Kőrösi Attila* 8. o. t., *Nagy 725 János* 8. o. t. 38 pont; **23.** *Farkas Melinda* 8. o. t. 33 pont; **24–26.** *Spanczér Ilona* 8. o. t., *Wittner Lilla* 8. o. t., *Zsbán Ambrus* 8. o. t. 29 pont; **27.** *Siroki László* 8. o. t. 28 pont; **28–30.** *Jesch Dávid* 8. o. t., *Nagy 625 Tibor* 7. o. t., *Szalay Zsófia* 8. o. t. 25 pont; **31.** *Szerényi Zita* 9. o. t. 23 pont; **32–33.** *Lang Péter* 7. o. t., *Pszota Zsolt* 8. o. t. 22 pont; **34.** *Rischák Rózsa* 8. o. t. 21 pont; **35.** *Farkas Ágnes* 8. o. t. 20 pont; **36–37.** *Morvai Krisztina* 8. o. t., *Veres Tímea* 6. o. t. 18 pont; **38.** *Kalcsú Áron* 7. o. t. 17 pont; **39.** *Kovács 625 Erika* 8. o. t. 16 pont; **40–41.** *Nyul Balázs* 7. o. t., *Sipos Szabó Eszter* 8. o. t. 15 pont; **42–43.** *Aczél Márton* 8. o. t., *Lánczi Levente* 8. o. t. 13 pont; **44–45.** *Mészáros Zsolt* 7. o. t., *Számadó István* 8. o. t. 12 pont. Kevesebb pontja van 60 versenyzőnek.

**9. osztályosok**

**1–2.** *Csirmaz Előd*, *Gelencsér Gábor* 167 pont; **3.** *Pogátsa Attila* 149 pont; **4.** *Deli Lajos* 143 pont; **5.** *Lovrics Anna* 139 pont; **6–7.** *Leipold Diána*, *Reviczky Ádám* 133 pont; **8–9.** *Babos Attila*, *Horváth 713 György* 131 pont; **10.** *Szilágyi Tamás* 125 pont; **11.** *Ambrus Gergely* 123 pont; **12.** *Lovrics Klára* 122 pont; **13.** *Szilasi Zoltán* 117 pont; **14–16.** *Árvay Eszter*, *Boros M. Mátyás*, *Schlanger Judit* 116 pont; **17.** *Varjú Péter* 115 pont; **18.** *Zalán Péter* 110 pont; **19.** *Dőrr Zsuzsanna* 106 pont; **20.** *Pesti Gábor* 104 pont; **21.** *Kisfügedi Viktória* 102 pont; **22–23.** *Breuer János*, *Soós 740 Károly* 101 pont; **24–25.** *Andrássy Zoltán*, *Nagy Tamás* 99 pont; **26.** *Bohák András* 96 pont; **27–28.** *Kramer Zsófia*, *Nagy Gergely* 95 pont; **29–30.** *Horváth Balázs*, *Nagy 314 Ádám* 92 pont; **31.** *Szűcs 702 Zsófia* 90 pont; **32.** *Fenyvesi Zsuzsanna* 89 pont; **33–34.** *Fodor 133 Gyula*, *Tokodi Tünde* 85 pont; **35.** *Toka László* 84 pont; **36.** *Molnár 947 Zoltán* 83 pont; **37.** *Paksa Tamás* 82 pont; **38.** *Görföl Tamás* 80 pont; **39.** *Poór Veronika* 79 pont; **40.** *Forgács Gergely* 77 pont; **41.** *Kiss 414 Norbert* 74 pont; **42–45.** *Erdős János*, *Fellegi Zoltán*, *Kazinczi Csaba*, *Tormási Imre György* 73 pont; **46–47.** *Bóna Péter*, *Legány Csaba* 72 pont; **48.** *Kerekes Attila* 70 pont; **49.** *Hegedűs Vera* 69 pont; **50.** *Fehér Gergely* 68 pont; **51.** *Arató Orsolya* 67 pont; **52.** *Ádám Zoltán* 66 pont; **53–56.** *Bicskei László*, *Koch Dénes*, *Pozsonyi Tamás*, *Schmidt 414 András* 65 pont; **57.** *Darabos József* 63 pont; **58–60.** *Horváth Dénes*, *Ráfael Balázs*, *Zajdó Csaba* 61 pont; **61–62.** *Győző Miklós*, *Szintai Balázs* 60 pont; **63.** *Nagy 712 Gábor* 59 pont; **64.** *Tóth Adrienn* 57 pont; **65.** *Hegyi Márta* 56 pont; **66.** *Gyurcsek András* 54 pont; **67.** *Bálint Gergely* 52 pont; **68.** *Garai Zsolt* 51 pont; **69–72.** *Bucsy Barnabás*, *Csurgó Krisztina*, *Nagy 729 Dávid*, *Porkoláb Dániel* 50 pont; **73–75.** *Lepcsényi Lilla*, *Merazga Oktávia*, *Roszol László* 49 pont; **76.** *Peresztegi Márton* 48 pont; **77–85.** *Almási Angelika*, *Antal Ágnes*, *Bartha Tamás Árpád*, *Dóra Gábor*, *Kántor Attila*, *Károlyi Gergely*, *Stepán József*, *Szőts Miklós*, *Wéner Balázs* 47 pont; **86–87.** *Vicsek Miklós*, *Vona Gábor* 46 pont; **88.** *Horváth Szilárd* 44 pont; **89–92.** *Földényi Tamás*, *Horváth 303 Bálint*, *Kurcz Éva*, *Nagy 777 Péter* 43 pont; **93–97.** *Bartucz Dorottya*, *Cseresznyés Viola*, *Horváth 724 Zoltán*, *Moldvai Levente*, *Pozsgay Balázs* 42 pont; **98–102.** *Börcsök József*, *Hegedűs Vera*, *Hubai Szabolcs*, *Király Ferenc*, *Medgyesi László* 41 pont; **103–107.** *Börzsönyi Ádám*, *Csereklei Gábor*, *Ekler Márton*, *Lukács Ágnes*, *Várkonyi Dániel* 40 pont; **108–113.** *Baross Gergely*, *Csaszny Tamás*, *Kovács Krisztián*, *Kurucz Endre*, *Paál Csaba*, *Somogyi 555 Tamás* 39 pont; **114–116.** *Molnár Gábor*, *Ritter Ádám*, *Szalontay Luca* 38 pont; **117–121.** *Benedek Éva*, *Bernhardt János*, *Kádár 181 Csaba*, *Szabó 341 Zsolt*, *Velcsov Zsuzsanna* 37 pont; **122–126.** *Balogh Róbert*, *Csapár Tímea*, *Erdei Miklós*, *Harcz Ádám*, *Németh István* 36 pont; **127.** *Csébi Gergely* 35 pont; **128–129.** *Rábel Henrietta*, *Tigyi Árpád* 34 pont; **130–133.** *Feró Dalma*, *Horváth Péter*, *Kurucz Réka*, *Wéber Zoltán* 33 pont; **134–138.** *Baka Nóra*, *Beneda Károly Tamás*, *Horváth 004 Tamás*, *Kiss 111 Péter*, *Szécsi Ákos* 32 pont; **139–142.** *Molnár 318 Veronika*, *Talabos Éva*, *Vértényi Péter*, *Zrínyi Dániel* 31 pont; **143–148.** *Bán Lilla*, *Bodor András*, *Cseri István*, *Horváth Ákos*, *Karácsony Veronika*, *Szabó Géza* 30 pont; **149–152.** *Arany Sándor*, *Bartha Erika*, *Gál Balázs*, *Varga Veronika* 29 pont; **153–159.** *Brehel Enikő*, *Németh 224 Zsófia*, *Pap Tünde*, *Pótó Júlia*, *Rácz Veronika*, *Végh Krisztina*, *Vizy Sándor* 28 pont; **160–162.** *Karácsonyi József Sándor*, *Kocsis András*, *Remete Dániel* 27 pont; **163–165.** *Bogos Bálint*, *Erki Szabolcs*, *Kada Katalin* 26 pont; **166–172.** *Doór Tamás*, *Gérecz Balázs*, *Nagy 376 Balázs*, *Neheli Katalin*, *Németh 829 Balázs*, *Tamás Gábor Zoltán*, *Tóth 314 János Pál* 25 pont; **173–177.** *Bogatin György*, *Gál Katalin*, *Gyenese Mónika*, *Manóczki Csilla*, *Stefán Gábor* 24 pont; **178–188.** *Czímer Balázs*, *Fitos Tamás*, *Kalmár Levente*, *Kelemen Kristóf*, *Lázár Imre*, *Örffy Zsolt*, *Sebestyén Gábor*, *Szerényi Zita*, *Szűcs Vince*, *Varga 313 Eszter*, *Varga 519 Katalin* 23 pont; **189–203.** *Baté Zsuzsanna*, *Bódi Erzsébet*, *Csikós Gábor*, *Dinya Beáta*, *Domonkos Brigitta*, *Gelesz Tamás*, *Gyenese Katalin*, *Jakab Orsolya*, *Kertész Bence*, *Kupó János*, *Németh 917 Júlianna*, *Radó Rózsa*, *Simon 015 Tamás*, *Spielberger Ágnes*, *Szekeres András* 22 pont; **204–211.** *Cser Tamás*, *Frey Dóra*, *Korcsmáros Adél*, *Novits László*, *Oroszlány Zsófia*, *Pásztor Péter*, *Theisler Katalin*, *Ujfalusi Melinda* 21 pont; **212–224.** *Bánsági Tamás*, *Csapó Adelinda*, *Győrki Imre*, *Halasi Tamás*, *Hideg Lóránt*, *Ignácz Melinda*, *Jankó Erika*, *Magyari Zoltán*, *Mahler István*, *Rokob András*, *Simon Győző*, *Takács Gergely Tihamér*, *Zentai Gábor* 20 pont; **225–229.** *Dunai Gábor*, *Görbicz Gergely*, *Hülber Árpád*, *Kolber Adél*, *Tolnay Adrienn* 19 pont; **230–241.** *Ábel Ágnes*, *Csányi*

*Péter, Darabos Éva, Dénes Péter, Gráczi Tekla Etelka, Hevér Gábor, Horváth Katalin, Krenedits Sándor, Laczay Zsolt, Lugossy Zoltán, Péterfi Anna, Szabó 923 Viktor* 18 pont; **242–248.** *Erényi Szabolcs, Gerencsér Norbert, Kapin Anita, Kocsis 313 Zoltán, Rudas Rozália, Vajda Péter, Vitális Anikó* 17 pont; **249–253.** *Biri Orsolya, Erdélyi Róbert, Horváth Zoltán, Hosszú Balázs, Kármán Péter* 16 pont; **254–269.** *Bajnógel Tamás, Enyingi Katalin, Hafner Gábor, Kiss 105 Tímea, Kovács 313 Ilka, Müller László, Novák Zoltán, Pacz Bence Tamás, Palotás Ferenc, Rénes Sándor, Sipos Szabó István, Szabó Nóra, Takács 317 Eszter, Tősér Kinga, Varga Dávid, Visegrádi Norbert* 15 pont; **270–284.** *Balogh Béla, Forgács Gyula, Hargitai Máté, Káli Gábor, Kovács 777 Péter, Lajtha Balázs, Licskai Gergő, Novák Ádám, Pekk Enikő, Szabó Valéria, Tóth 189 Ferenc, Tóth Katalin, Varga 444 Judit, Végh Miklós, Vígh Viktor* 14 pont; **285–296.** *Bernáth Andrea, Csollány László, Czímer Gergő, Dénes Ágnes, Germán Tibor, Havasi Gergely, Kántor András, Kovács 999 Balázs, Siklósi Dávid, Somlai Henrietta, Somogyi György, Szeti Balázs* 13 pont; **297–304.** *Borbély Zsófia, Farkas Ákos, Halmai Judit, Heim Roland, Nusser Gabriella, Orosz Ágnes Hué, Tabajdi Márton, Virányi Anna* 12 pont. Kevesebb pontja van 235 versenyzőnek.

**10. osztályosok**

**1.** *Máthé András* 184 pont; **2.** *Papp Dávid* 178 pont; **3.** *Gyenes Zoltán* 177 pont; **4.** *Zábrádi Gergely* 172 pont; **5.** *Venter György* 161 pont; **6.** *Kiss 345 Gergely* 159 pont; **7.** *Keszegh Balázs* 155 pont; **8.** *Győri Nikolett* 152 pont; **9.** *Baharev Ali* 151 pont; **10.** *Taraza Busra* 149 pont; **11.** *Lábó Eszter* 136 pont; **12.** *Lábó Melinda* 133 pont; **13.** *Ureczky Judit* 132 pont; **14.** *Varga Szilvia* 129 pont; **15–16.** *Péterffy Bálint, Sidó Péter* 127 pont; **17–18.** *Horváth 413 László, Vitéz Ildikó* 123 pont; **19.** *Bárány Zsófi* 122 pont; **20–21.** *Bajusz Csaba, Tolvaj Nándor* 120 pont; **22.** *Szélig Nikoletta* 116 pont; **23–26.** *Besenyei Ádám, Csiszár Gábor, Dezső Balázs, Vizer Máté* 115 pont; **27.** *Zempléni Márton* 110 pont; **28.** *Buruzs Ádám* 109 pont; **29.** *Hegedűs Ákos* 108 pont; **30.** *Bákor Krisztina* 105 pont; **31.** *Somlai Gábor* 104 pont; **32.** *Nagy Máté* 103 pont; **33.** *Jung János* 101 pont; **34–35.** *Gajári Dávid, Sipos Ádám* 100 pont; **36–37.** *Gyarmati-Szabó István, Hámori Tamás* 99 pont; **38.** *Schlotter Ildikó* 98 pont; **39.** *Tarcsi Károly* 97 pont; **40.** *Pozsonyi Gergő* 96 pont; **41–43.** *Bankó Krisztián, Iván Szabolcs, Klausz Ferenc* 95 pont; **44–45.** *Tóth 716 Bence, Tóth Endre* 91 pont; **46.** *Tóth 888 János* 90 pont; **47.** *Varga Balázs* 87 pont; **48.** *Somodi Katalin* 85 pont; **49.** *Németh Lajos* 84 pont; **50–51.** *Takács 272 Zsuzsanna, Tillinkó Zsanett* 82 pont; **52.** *Szekeres Nóra* 80 pont; **53–54.** *Déri Zsolt, Madarász Ádám* 79 pont; **55–56.** *Horváth Gergely, Rozovits Zoltán* 77 pont; **57.** *Hesz Zoltán* 75 pont; **58–60.** *Horváth Hedvig, Hudomiet Péter, Schmeiszer Krisztián* 73 pont; **61.** *Révai Balázs* 72 pont; **62–63.** *Fritz Lilla, Gömöri Péter* 71 pont; **64–67.** *Antal István, Szászi Zsuzsanna, Szentes Szilvia, Vigh Éva* 70 pont; **68.** *Juhász 113 Ágnes* 67 pont; **69–70.** *Pozsár Balázs, Wilfing András* 66 pont; **71.** *Schmeiszer Kornél* 65 pont; **72.** *Kleinheincz Zoltán* 64 pont; **73–76.** *Bokros Krisztián, Papp Eszter, Riecke Katalin, Tóth 587 Viktória* 63 pont; **77.** *Kajtár Márton* 60 pont; **78–79.** *Matécsa 999 Márta, Törőcsik Andrea* 59 pont; **80–81.** *Bíró Márton, Kardos Péter* 58 pont; **82–84.** *Lengyel Zoltán, Matin Tamás, Nagy 201 Zoltán* 56 pont; **85–87.** *Balogh Csaba, Kiss 007 Norbert, Pesti Péter* 55 pont; **88.** *Nátz Eszter* 54 pont; **89–93.** *Gyurcsán Péter, Kiss Attila, Patay Gergely, Powell Pál, Tóth Zsuzsanna* 53 pont; **94–97.** *Botos Péter, Márkus Viktória, Micskei Zoltán, Tóth Balázs* 52 pont; **98–103.** *Geri 144 Péter, Kántor*

*Éva*, *Kiss 360 Sándor*, *Kurucz Keve*, *Menyhért Bálint*, *Simon Viktória* 51 pont; **104.** *Balogh 666 Csaba* 50 pont; **105–107.** *Csathó Csaba*, *Fodor Erika*, *Soltész Noémi* 49 pont; **108–109.** *Hegedűs 512 Ramón*, *Pálvölgyi Dömötör* 47 pont; **110–115.** *Baráth Ákos*, *Benke Noémi*, *Borbíró Levente*, *Nagy 369 László*, *Tóth 013 Zoltán*, *Velcsov Gabi* 46 pont; **116–117.** *Izsák Zoltán*, *Vitos Botond* 45 pont; **118–120.** *Mészáros Albert*, *Mongyi Béla*, *Zelenák Amarilla* 44 pont; **121–126.** *Gáspár Endre*, *Hamar Gábor*, *Inzelt György*, *Kovács Roland*, *Solymossy Endre*, *Sors Erika* 43 pont; **127.** *Simay Csaba* 42 pont; **128–130.** *Jungbauer Alexandra*, *Késmárki Péter*, *Soós István* 41 pont; **131–134.** *Deme 007 Gábor*, *Fehér Katalin*, *Herczeg Zoltán*, *Lódi Edit* 40 pont; **135–141.** *Balogh Tamás*, *Illés Balázs*, *Kovács Gergely*, *Kriston Vízi Gábor*, *Móczó Péter*, *Tölgyesi János*, *Várady Gábor* 39 pont; **142–144.** *Bíró Annamária Mása*, *Fodor Gyula*, *Lőke Tamás* 38 pont; **145–146.** *Durkó Gábor*, *Orosz Dániel* 37 pont; **147–151.** *Hernádi Gergő*, *Kovács Benedek*, *Lemmich Attila*, *Vastag Gábor*, *Zám Katalin* 36 pont; **152–154.** *Ács Zoltán*, *Andó Mária*, *Gyenes Dávid* 35 pont; **155–157.** *Balázs 255 Péter*, *Kasztner Tamás*, *Müncz Márton* 34 pont; **158–162.** *Bocz Péter*, *Jakab Zsolt*, *Jancski Dóra*, *Kubatov Gábor*, *Nagy Bernadett* 33 pont; **163–165.** *Czigány András*, *Nagy 831 Gábor*, *Pálinkás Bence Fábián* 32 pont; **166–168.** *Hardy Vince*, *Pintér Melinda*, *Varga 951 Attila* 31 pont; **169–171.** *Balázsfalvi Gábor*, *Bence Virág*, *Horváth Márton* 30 pont; **172–174.** *Filep Csongor*, *Gaál Zoltán*, *Kovács Anna* 29 pont; **175–177.** *Baranyai Gábor*, *Papp 111 László*, *Vesszős Noémi* 28 pont; **178–180.** *Horváth 613 Krisztina*, *Kövecses András*, *Vértesi Vera* 27 pont; **181–182.** *Geröly Péter*, *Jámbor Árpád* 26 pont; **183–188.** *Kovács Róbert*, *Molnár 478 László Milán*, *Nemeskéri Luca*, *Ringer Norbert*, *Simon Zoltán*, *Szekeres Lilla* 25 pont; **189–194.** *Alvarez Rafael*, *Héder Zoltán*, *Karácsonyi Imre*, *Mauthner András*, *Székely Szilárd*, *Tóth Gábor* 24 pont; **195–201.** *Ács László*, *Berényi Károly*, *Ecseri Péter*, *Galgand Veronika*, *Herczegh Géza*, *Horváth 530 András*, *Sinkovicz Katalin* 23 pont; **202–206.** *Dávid Anita*, *Gyímesi Judit*, *Horváth 317 Eszter*, *Kántor Krisztina*, *Kocsis Tamás* 22 pont; **207–210.** *Cserny Réka*, *Demeter Veronika*, *Kiss 921 Olivér*, *Ludányi Zoltán* 21 pont; **211–220.** *Bacsárdi László*, *Baranyi Gergely*, *Birkás Tamás*, *Faluközy Tamás*, *Kisvári 981 Zsuzsanna*, *Kővári Bence*, *Simon Péter*, *Tőkey Balázs*, *Vajda Ágota*, *Varga 128 Eszter* 20 pont; **221–229.** *Bachraty Gergely*, *Balog Tamás*, *Bosnyák Tamás*, *Ivaskó György*, *Kósa Gabriella*, *Mikó Adrienn*, *Nederman János*, *Szivós Zoltán*, *Végh Zsuzsanna* 19 pont; **230–236.** *Csernus Attila*, *Drén Judit*, *Gyürki István*, *Kegyes Tamás*, *Kulik István*, *Veress Vilmos*, *Vidra Zsolt* 18 pont; **237–240.** *Dankai György*, *Szűcs 981 Jenő*, *Táncos Tamás*, *Tóth 416 Péter* 17 pont; **241–248.** *Bodor Adrienn*, *Herendi Gergely*, *Ivánszki Szilvia*, *Laudisz Balázs*, *Ledniczki Petra*, *Szabó 482 Béla*, *Szever Ádám*, *Takáts Gergely* 16 pont; **249–255.** *Edőcs Eszter*, *Fehér Bálint*, *Fekete Ada*, *Göllner Júlia*, *Horváth 0 Zsolt*, *Jusztin Balázs*, *Megyer László* 15 pont. Kevesebb pontja van 169 versenyzőnek.

## Feladatok

**Az eddig feldolgozott feladatok:** a szeptemberi–novemberi szám feladatai, valamint F. 3203., F. 3204., F. 3205., F. 3206., F. 3209., F. 3210., F. 3211., F. 3212., F. 3213., F. 3219.

Feladatonként egy helyes megoldással elérhető: 140 pont.

**Legfeljebb 8. osztályosok**

**1.** *Kunszenti-Kovács Dávid* 7. o. t. 97 pont; **2.** *Harangi Viktor* 8. o. t. 74 pont; **3.** *Tran Thanh Long* 8. o. t. 40 pont; **4.** *Birkner Tamás* 5. o. t. 39 pont; **5.** *Csóka Endre* 7. o. t. 33 pont; **6–7.** *Csernenszky András* 8. o. t., *Kovács Erika Renáta* 8. o. t. 10 pont; **8.** *Tóth 370 Ágnes* 8. o. t. 9 pont; **9.** *Erdei Zsuzsa* 8. o. t. 7 pont; **10–22.** *Bein Márton* 8. o. t., *Bíró Ádám* 8. o. t., *Csordás Hunor* 8. o. t., *Devecsery Ágnes* 8. o. t., *Dombi 870 Tímea* 8. o. t., *Horváth Illés* 8. o. t., *Kőrösi Attila* 8. o. t., *Nagy 144 Ferenc* 8. o. t., *Nagy 625 Tibor* 7. o. t., *Nyul Balázs* 7. o. t., *Pallos Péter* 8. o. t., *Szalay Zsófia* 8. o. t., *Zsbán Ambrus* 8. o. t. 5 pont. Kevesebb pontja van 8 versenyzőnek.

**9. osztályosok**

**1.** *Gelencsér Gábor* 66 pont; **2.** *Boros M. Mátyás* 49 pont; **3.** *Deli Lajos* 40 pont; **4.** *Babos Attila* 38 pont; **5.** *Csirmaz Előd* 35 pont; **6.** *Horváth 713 György* 20 pont; **7–8.** *Andrássy Zoltán*, *Markó Péter* 15 pont; **9.** *Nagy 712 Gábor* 12 pont; **10–11.** *Legány Csaba*, *Pásztor Péter* 10 pont; **12.** *Komáromi Hajnalka* 9 pont; **13–14.** *Lovrics Klára*, *Nagy 729 Dávid* 8 pont; **15–16.** *Győző Miklós*, *Somlai Henrietta* 7 pont; **17–19.** *Bozsik Balázs*, *Kovács 135 Klaudia*, *Toka László* 6 pont; **20–57.** *Ábel Ágnes*, *Ádám Zoltán*, *Balogh Béla*, *Balogh Róbert*, *Bóna Péter*, *Bucsy Barnabás*, *Csollák Anna*, *Dóra Gábor*, *Fehér Gergely*, *Földi Júlia*, *Gerő László*, *Gráczi Tekla Etelka*, *Hegyi Márta*, *Horváth Ákos*, *Horváth Anita Xénia*, *Kapin Anita*, *Kelemen Kristóf*, *Kiss 414 Norbert*, *Kővári Ádám*, *Kuti Ákos*, *Lajtha Balázs*, *Lepcsényi Lilla*, *Lovrics Anna*, *Lukács Dávid*, *Nagy 314 Ádám*, *Pesti Gábor*, *Poór Veronika*, *Presér Ágnes Judit*, *Révész Ágnes*, *Roszol László*, *Schmidt 414 András*, *Szabó 341 Zsolt*, *Szabó Géza*, *Szőts Miklós*, *Tóth 314 János Pál*, *Tóth 555 Katalin*, *Tóth Katalin*, *Vajda Péter* 5 pont. Kevesebb pontja van 24 versenyzőnek.

**10. osztályosok**

**1.** *Gyenes Zoltán* 133 pont; **2.** *Zábrádi Gergely* 96 pont; **3.** *Baharev Ali* 89 pont; **4.** *Gáspár Merse Előd* 84 pont; **5–7.** *Keszegh Balázs*, *Taraza Busra*, *Vizer Máté* 82 pont; **8.** *Győri Nikolett* 81 pont; **9.** *Máthé András* 74 pont; **10.** *Papp Dávid* 43 pont; **11.** *Micskei Zoltán* 40 pont; **12.** *Sidó Péter* 39 pont; **13–14.** *Hesz Zoltán*, *Kiss 345 Gergely* 30 pont; **15–16.** *Hegedűs 512 Ramón*, *Móczó Péter* 28 pont; **17.** *Mansur Boase* 26 pont; **18.** *Gajári Dávid* 23 pont; **19.** *Pozsonyi Gergő* 21 pont; **20–21.** *Bajusz Csaba*, *Kajtár Márton* 20 pont; **22.** *Zempléni Márton* 17 pont; **23.** *Tillinkó Zsanett* 16 pont; **24.** *Bíró Márton* 15 pont; **25–29.** *Csornai Gyula*, *Deme 007 Gábor*, *Kiss 007 Norbert*, *Schlotter Ildikó*, *Vitos Botond* 14 pont; **30.** *Bankó Krisztián* 13 pont; **31–36.** *Gulyás Gábor*, *Horváth Hedvig*, *Kiss 360 Sándor*, *Pozsár Balázs*, *Varga Szilvia*, *Vastag Gábor* 10 pont; **37–39.** *Bernád József Zsolt*, *Kovács Benedek*, *Robotka Zsolt* 8 pont. Kevesebb pontja van 34 versenyzőnek.

**11. osztályosok**

Feladatonként egy helyes megoldással elérhető: 175 pont.

További feldolgozott **H**-jelű gyakorlatok: Gy. 3143., Gy. 3147., Gy. 3150., Gy. 3157., Gy. 3168., Gy. 3171., Gy. 3180.

**1.** *Végh A. László* 179 pont; **2.** *Juhász András* 170 pont; **3.** *Terpai Tamás* 166 pont; **4.** *Székelyhidi Gábor* 145 pont; **5.** *Bárány Kristóf* 137 pont; **6.** *Pataki Péter* 134 pont; **7.** *Gueth Krisztián* 131 pont; **8.** *Lukács László* 129 pont; **9–10.** *Horváth 202 Gábor*, *Pap Júlia* 128 pont; **11.** *Patakfalvi Zsolt* 121 pont; **12–14.** *Balogh Attila*, *Mecz Balázs*, *Szabadka Zoltán* 119 pont; **15.** *Hangya Balázs* 118 pont; **16.** *Hegedűs 396 Péter* 117 pont; **17.** *Barát Anna* 104 pont; **18.** *Bíró Zsuzsanna* 103 pont; **19.** *Devecsery András* 102 pont; **20.** *Pál András* 97 pont; **21.** *Horváth 472 András* 95 pont; **22–23.** *Szakács László*, *Szécsi Vajk* 94 pont; **24.** *Vaik István* 88 pont; **25.** *Lovas Róbert* 86 pont; **26.** *Rácz Balázs* 84 pont; **27.** *Gerbicz Róbert* 82 pont; **28.** *Izsák Rudolf* 81 pont; **29.** *Fehér Lajos Károly* 75 pont; **30–31.** *Bujdosó Attila*, *Lengyel Tímea* 74 pont; **32–33.** *Kutalik Péter*, *Poronyi Gábor* 69 pont; **34.** *Szabó 997 Péter* 67 pont; **35.** *Szép László* 66 pont; **36.** *Györey Bernadett* 64 pont; **37.** *Naszódi Gergely* 62 pont; **38.** *Pszota Anikó* 60 pont; **39–40.** *Huszár Péter*, *Vágvölgyi Péter* 59 pont; **41.** *Nagy 333 Kálmán* 58 pont; **42–43.** *Csendes 003 Viktor*, *Hesz Gábor* 57 pont; **44.** *Bíró Anikó* 52 pont; **45.** *Varga 577 István* 51 pont; **46.** *Dési Balázs* 49 pont; **47.** *Katona Gergely* 44 pont; **48–51.** *Farkas Claudia*, *Stoll Péter*, *Szilágyi Zoltán*, *Takács Gábor* 43 pont; **52.** *Krescarek Máté* 42 pont; **53–54.** *Benedek Csaba*, *Csikvári Gábor* 41 pont; **55.** *Dancsó Zsuzsanna* 40 pont; **56.** *Simon Zoltán* 37 pont; **57–58.** *Hegyi Péter*, *Szokolóczi Dorottya* 34 pont; **59–60.** *Förhécz András*, *Kis-Tóth Ágnes* 33 pont; **61–62.** *Bosznay Tamás*, *Kitlei Róbert* 31 pont; **63–64.** *Gál Tamás*, *Németh 214 András* 30 pont; **65–67.** *Balogh Ferenc*, *Bordás Róbert*, *Felszeghy Bálint* 29 pont; **68.** *Zalán Eszter* 28 pont; **69–70.** *Garamszegi Zoltán*, *Németh 330 Gábor* 27 pont; **71.** *Miklós Levente* 26 pont; **72–74.** *Kósa Botond*, *Moór Csaba*, *Rakonczai Pál* 25 pont; **75.** *Szabó 111 János* 24 pont; **76.** *Gulyás Zoltán* 22 pont; **77–78.** *Papp Mária*, *Schmidt Ákos* 21 pont; **79.** *Zeke András* 20 pont; **80.** *Röst János* 19 pont; **81–84.** *Biró Dániel*, *Nagy 512 Marianna*, *Szép Imre*, *Udvari Zsolt* 18 pont; **85–87.** *Berencsi Sándor*, *Haskó Gabriella*, *Szirányi Zsófia* 16 pont; **88.** *Tóth 768 Bálint* 15 pont; **89–92.** *Csernyu Adrienn*, *Kiss 540 Balázs*, *Soós Tamás*, *Tóth Zsuzsanna* 14 pont; **93–97.** *Bánfi Barnabás*, *Cserkúti Péter*, *Farkas Barnabás*, *Kundráth Péter*, *Kustán Ildikó* 13 pont; **98–101.** *Lovics Gábor*, *Molnár Kristóf*, *Pongrácz Anita*, *Samu Axel* 12 pont; **102–103.** *Lenk Sándor*, *Szilvási Krisztina* 11 pont; **104–109.** *Labuda Orsika*, *Lakatos Veronika*, *Lerchner István*, *Lovrencsics Lilla*, *Savanya Judit*, *Telcs Borbála* 10 pont; **110–114.** *Bognár Zsuzsanna*, *Boldog Ilona*, *Ravasz Mária-Magdolna*, *Sindely 576 Dániel*, *Tóth 161 Szilvia* 9 pont; **115–122.** *Balogh Judit*, *Erényi Csaba*, *Lénárd András*, *Majzik Róbert*, *Mészáros András*, *Tordai Bence*, *Udvardy Gergely*, *Varga Lajos* 8 pont. Kevesebb pontja van 55 versenyzőnek.

**12. osztályosok**

Feladatonként egy helyes megoldással elérhető: 140 pont.

**1.** *Lippner Gábor* 140 pont; **2.** *Pogány Ádám* 130 pont; **3.** *Páles Csaba* 125 pont; **4.** *Zawadowski Ádám* 110 pont; **5.** *Léka Zoltán* 109 pont; **6.** *Sarlós Ferenc* 93 pont; **7.** *Hermann György* 91 pont; **8.** *Katona Zsolt* 88 pont; **9.** *Szilágyi Judit* 86 pont; **10.** *Hartmann Miklós* 85 pont; **11.** *Less Áron* 82 pont; **12.** *Puskás Péter* 81 pont; **13–14.** *Gáli Gergely*, *Tóth 235 Ádám* 80 pont; **15.** *Oláh 407 Szabolcs* 77 pont; **16.** *Dályay Virág* 74 pont; **17.** *Vidor Anna* 73 pont; **18.** *Tisch Dávid* 72 pont; **19.** *Zombori Tamás* 71 pont; **20.** *Vaik Zsuzsanna* 68 pont; **21.** *Terék Zsolt* 67 pont; **22.** *Csikvári András*

66 pont; **23.** *Kiss András Péter* 65 pont; **24.** *Szabó 130 Gábor* 61 pont; **25.** *Homolya Dániel* 58 pont; **26.** *Benke András* 53 pont; **27.** *Sipos András* 50 pont; **28–29.** *Kőműves Balázs*, *Várady Gergő* 48 pont; **30.** *Györkei Györgyi* 46 pont; **31.** *Méder Áron* 45 pont; **32.** *Farkas 496 Norbert* 42 pont; **33–34.** *Gazda Kinga*, *Hegyi Veronika* 40 pont; **35.** *Gregorich Zsuzsa* 39 pont; **36.** *Nyul Gábor* 37 pont; **37.** *Biener Péter* 35 pont; **38.** *Szigel Gábor* 33 pont; **39–41.** *Barta Ágnes*, *Héjjas Péter*, *Kőhalmi Dóra* 32 pont; **42.** *Kurucz Ádám* 30 pont; **43–45.** *Boja Bence*, *Hajdufi Péter*, *Salamon Éva* 29 pont; **46.** *Németh 245 Ádám* 27 pont; **47.** *Serény András* 25 pont; **48–49.** *Koscsó Orsolya*, *Lázár Zsófia* 24 pont; **50–51.** *Dedinszky Zsófia*, *Mizda Roland* 23 pont; **52.** *Perényi Áron* 20 pont; **53–56.** *Csizmadia Zsolt*, *Föglein Anna*, *Kürthy Gábor*, *Mátyási István* 19 pont; **57.** *Szarvas György* 18 pont; **58.** *Kiss Ágnes* 17 pont; **59.** *Varga Attila* 16 pont; **60–62.** *Fehér Dóra*, *Harangozó Szabolcs*, *Horváth János* 15 pont; **63–65.** *Csizmadia László*, *Füstös Melinda*, *Vincze László* 14 pont; **66.** *Dargó Eszter* 13 pont; **67.** *Onodi András* 12 pont; **68–70.** *Fodor Bea*, *Gaál Gábor*, *Nagy Elemér Károly* 11 pont; **71–77.** *Csökmei Krisztina*, *Horváth 286 József*, *Szabó 555 Krisztián*, *Szilágyi Dalma*, *Taraza Abir*, *Tóth László Tamás*, *Turkus Előd Barna* 10 pont; **78–79.** *Papp Eszter*, *Steinbach Gábor* 9 pont; **80–84.** *Balázs Erzsébet*, *Faddi Gábor*, *Merétey Vida Zsolt*, *Szekeres Dóra*, *Vámos Lénárd* 8 pont. Kevesebb pontja van 31 versenyzőnek.

## Nehezebb feladatok

**Az eddig feldolgozott feladatok:** a szeptembertől januárig megjelent feladatok.

Feladatonként egy helyes megoldással elérhető: 95 pont.

**1.** *Bérczi Gergely* 12. o. t. 83 pont; **2.** *Lukács László* 11. o. t. 70 pont; **3.** *Kun Gábor* 12. o. t. 67 pont; **4.** *Lippner Gábor* 12. o. t. 64 pont; **5.** *Végh A. László* 11. o. t. 59 pont; **6.** *Juhász András* 11. o. t. 43 pont; **7.** *Gyenes Zoltán* 10. o. t. 39 pont; **8.** *Terpai Tamás* 11. o. t. 36 pont; **9.** *Gerbicz Róbert* 11. o. t. 29 pont; **10.** *Horváth 202 Gábor* 11. o. t. 28 pont; **11.** *Székelyhidi Gábor* 11. o. t. 20 pont; **12.** *Pap Júlia* 11. o. t. 19 pont; **13.** *Pataki Péter* 11. o. t. 16 pont; **14.** *Mecz Balázs* 11. o. t. 15 pont; **15–17.** *Hegedűs 396 Péter* 11. o. t., *Naszódi Gergely* 11. o. t., *Szűcs Gábor* 12. o. t. 14 pont; **18–19.** *Devecsery András* 11. o. t., *Léka Zoltán* 12. o. t. 13 pont; **20.** *Katona Zsolt* 12. o. t. 12 pont; **21–24.** *Hubenkó Elemér* 11. o. t., *Kiss 246 Tamás* 12. o. t., *Tóth 235 Ádám* 12. o. t., *Zábrádi Gergely* 10. o. t. 10 pont; **25.** *Baharev Ali* 10. o. t. 9 pont; **26–29.** *Felföldi Zsolt* 11. o. t., *Gueth Krisztián* 11. o. t., *Máthé András* 10. o. t., *Szabó 997 Péter* 11. o. t. 7 pont; **30–31.** *Barát Anna* 11. o. t., *Papp Dávid* 10. o. t. 6 pont; **32–36.** *Boros M. Mátyás* 9. o. t., *Bujdosó Attila* 11. o. t., *Hesz Zoltán* 10. o. t., *Szigel Gábor* 12. o. t., *Zawadowski Ádám* 12. o. t. 5 pont. Kevesebb pontja van 28 versenyzőnek.

## C jelű gyakorlatok, legfeljebb 10. osztályosok

**Az eddig feldolgozott feladatok:** a szeptember–decemberi szám feladatai, valamint C. 489., C. 490., C. 491., C. 494.

Feladatonként egy helyes megoldással elérhető: 100 pont.

**1.** *Boros M. Mátyás* 9. o. t. 101 pont; **2.** *Csató György* 9. o. t. 99 pont; **3.** *Friedl Zita* 10. o. t. 98 pont; **4.** *Gajdos Béla* 10. o. t. 94 pont; **5–6.** *Bákor Krisztina* 10. o. t., *Robotka Zsolt* 10. o. t. 93 pont; **7–8.** *Lengyel Zoltán* 10. o. t., *Szűcs 702 Zsófia* 9. o. t. 92 pont; **9–11.** *Babos Attila* 9. o. t., *Strobl Apolka* 10. o. t., *Zalán Péter* 9. o. t. 89 pont; **12.** *Löki István* 10. o. t. 88 pont; **13–14.** *Bohák András* 9. o. t., *Wilfing András* 10. o. t. 87 pont; **15–18.** *Dombi József Dániel* 10. o. t., *Fehér Gergely* 9. o. t., *Horváth 413 László* 10. o. t., *Pozsonyi Tamás* 9. o. t. 85 pont; **19.** *Bankó Krisztián* 10. o. t. 84 pont; **20.** *Antal István* 10. o. t. 82 pont; **21–23.** *Hegyi Márta* 9. o. t., *Kós Viktória* 9. o. t., *Legány Csaba* 9. o. t. 81 pont; **24–25.** *Börcsök József* 9. o. t., *Müncz Márton* 10. o. t. 80 pont; **26–27.** *Fodor Erzsébet* 10. o. t., *Kriston Vízi Gábor* 10. o. t. 79 pont; **28–29.** *Csóka Endre* 7. o. t., *Sallay 123 Enikő* 10. o. t. 78 pont; **30–31.** *Kasztner Tamás* 10. o. t., *Nagy Máté* 10. o. t. 77 pont; **32–36.** *Árvay Eszter* 9. o. t., *Simon Zoltán* 10. o. t., *Siroki László* 8. o. t., *Veres 618 Dániel* 9. o. t., *Vona Gábor* 9. o. t. 76 pont; **37.** *Szűcs Júlia* 9. o. t. 75 pont; **38.** *Závodi Attila* 10. o. t. 74 pont; **39.** *Vincze-Pap Gergely* 9. o. t. 73 pont; **40.** *Dankai György* 10. o. t. 72 pont; **41–42.** *Harangi Norbert* 10. o. t., *Patay Gergely* 10. o. t. 69 pont; **43–45.** *Bacsárdi László* 10. o. t., *Pap Attila* 9. o. t., *Varga 519 Katalin* 9. o. t. 68 pont; **46–47.** *Bálint Zsuzsanna* 9. o. t., *Békási Sándor* 9. o. t. 66 pont; **48–49.** *Darabos Andrea* 9. o. t., *Hangya Miklós* 6. o. t. 65 pont; **50.** *Péterfalvi Ferenc* 8. o. t. 64 pont; **51.** *Buruzs Ádám* 10. o. t. 62 pont; **52.** *Demián Tamás* 9. o. t. 61 pont; **53–59.** *Birkner Tamás* 5. o. t., *Csaszny Tamás* 9. o. t., *Herczeg Zoltán* 10. o. t., *Jusztin Balázs* 10. o. t., *Kövesárki Péter* 10. o. t., *Sajtos Erika* 9. o. t., *Stefán Gábor* 9. o. t. 60 pont; **60–64.** *Halasi Tamás* 9. o. t., *Kántor Éva* 10. o. t., *Nagy 625 Tibor* 7. o. t., *Soltész Noémi* 10. o. t., *Spanczér Ilona* 8. o. t. 59 pont; **65–67.** *Dőry Magdolna* 7. o. t., *Reményi Zsolt* 9. o. t., *Tóth Adrienn* 9. o. t. 58 pont; **68–74.** *Bán Lilla* 9. o. t., *Benke Noémi* 10. o. t., *Farkas Melinda* 8. o. t., *Ivánszki Szilvia* 10. o. t., *Juhász 113 Ágnes* 10. o. t., *Kiss 360 Sándor* 10. o. t., *Sirokai Levente* 10. o. t. 57 pont; **75–80.** *Csontos Gergő* 10. o. t., *Drén Judit* 10. o. t., *Nátz Eszter* 10. o. t., *Németh Lajos* 10. o. t., *Vicsek Miklós* 9. o. t., *Zsédely Eszter* 10. o. t. 56 pont; **81–85.** *Feró Dalma* 9. o. t., *Horváth Illés* 8. o. t., *Szalay Zsófia* 8. o. t., *Vesszős Noémi* 10. o. t., *Vitos Botond* 10. o. t. 55 pont; **86–88.** *Baross Gergely* 9. o. t., *Németh 829 Balázs* 9. o. t., *Zajdó Csaba* 9. o. t. 54 pont; **89–91.** *Kósa Gabriella* 10. o. t., *Nagy 369 László* 10. o. t., *Pintér Miklós* 9. o. t. 53 pont; **92–97.** *Balogh 666 Csaba* 10. o. t., *Kántor Gergely* 10. o. t., *Lang Péter* 7. o. t., *Pájer Boróka* 9. o. t., *Sinkovicz Katalin* 10. o. t., *Végh Zsuzsanna* 10. o. t. 52 pont; **98–101.** *Berta Andrea* 10. o. t., *Nagy 314 Ádám* 9. o. t., *Sofró Csaba* 9. o. t., *Veres Orsolya* 10. o. t. 51 pont; **102–105.** *Fodor Erika* 10. o. t., *Koch Dénes* 9. o. t., *Nagy 712 Gábor* 9. o. t., *Várady Gábor* 10. o. t. 50 pont; **106–113.** *Bencze Ágnes* 9. o. t., *Bodor András* 9. o. t., *Kádár 181 Csaba* 9. o. t., *Lajtha Balázs* 9. o. t., *Merazga Oktávia* 9. o. t., *Novits László* 9. o. t., *Solymossy Endre* 10. o. t., *Somlai Henrietta* 9. o. t. 49 pont; **114–116.** *Drozdy Árpád* 8. o. t., *Mészáros Albert* 10. o. t., *Soós István* 10. o. t. 48 pont; **117–121.** *Andrássy Zoltán* 9. o. t., *Bíró Márton* 10. o. t., *Csikós Gábor* 9. o. t., *Farkas Ágnes* 8. o. t., *Rischák Rózsa* 8. o. t. 47 pont; **122–126.** *Berényi Károly* 10. o. t., *Fűrész Gábor* 8. o. t., *Kalmár Levente* 9. o. t., *Kovács 211 Béla* 10. o. t., *Vajda Péter* 9. o. t. 46 pont; **127–130.** *Horváth Réka* 8. o. t., *Nagy Bernadett* 10. o. t., *Pótó Júlia* 9. o. t., *Végh Anita* 9. o. t. 45 pont; **131–133.** *Németh 917 Júlianna* 9. o. t., *Varga Szilvia* 10. o. t., *Várszegi Gergely* 10. o. t. 44 pont; **134–139.** *Barics Krisztián János* 10. o. t., *Kiss Judit* 9. o. t., *Lánczi Levente* 8. o. t., *Morvai Krisztina* 8. o. t., *Pásztor Péter* 9. o. t., *Pszota Zsolt* 8. o. t. 43 pont; **140–143.** *Antal Ágnes* 9. o. t., *Jesch Dávid* 8. o. t., *Kleinheincz Zoltán* 10. o.

t., *Ringer Norbert* 10. o. t. 42 pont; **144–147.** *Dobrádi László* 9. o. t., *Enyingi Katalin* 9. o. t., *Soós 740 Károly* 9. o. t., *Varga 951 Attila* 10. o. t. 41 pont; **148–152.** *Horváth 303 Bálint* 9. o. t., *Kegyes Tamás* 10. o. t., *Minárik Gábor* 9. o. t., *Tallián Miklós* 9. o. t., *Urr Beáta* 10. o. t. 40 pont; **153–155.** *Baur Eszter* 8. o. t., *Fekete Ada* 10. o. t., *Péter Szilvia* 9. o. t. 39 pont; **156–160.** *Csapó Melinda* 10. o. t., *Dósa Mariann* 8. o. t., *Havancsák Viktória* 9. o. t., *Vajda Ágota* 10. o. t., *Veréb Tamás* 8. o. t. 38 pont; **161–164.** *Aczél Márton* 8. o. t., *Boros Csaba* 9. o. t., *Enyedi Gábor* 9. o. t., *Szalontay Luca* 9. o. t. 37 pont; **165–166.** *Kada Katalin* 9. o. t., *Szabó Géza* 9. o. t. 36 pont; **167–169.** *Ács László* 10. o. t., *Fitos Tamás* 9. o. t., *Lévai István* 10. o. t. 35 pont; **170–174.** *Csapó Adelinda* 9. o. t., *Csiszár Melinda* 9. o. t., *Pilissy György* 8. o. t., *Radó Rózsa* 9. o. t., *Tóth Katalin* 9. o. t. 34 pont; **175–184.** *Bendzsel Tamás* 10. o. t., *Görbicz Gergely* 9. o. t., *Horváth 820 Mariann* 10. o. t., *Laczay Zsolt* 9. o. t., *Lődör Zoltán* 10. o. t., *Rudas Rozália* 9. o. t., *Szabó 923 Viktor* 9. o. t., *Szekeres Lilla* 10. o. t., *Szerencsi Zsuzsanna* 10. o. t., *Szőts Miklós* 9. o. t. 33 pont; **185–194.** *Buti Tamás* 7. o. t., *Czibere Zsolt* 10. o. t., *Földi Júlia* 9. o. t., *Juhász Gyöngyi* 10. o. t., *Karika Róbert* 10. o. t., *Ludányi Zoltán* 10. o. t., *Mátyási Nóra* 9. o. t., *Németh 224 Zsófia* 9. o. t., *Tolvaj Nóra* 8. o. t., *Vastag Gábor* 10. o. t. 32 pont; **195–201.** *Hegedüs Balázs* 9. o. t., *Kapitány Benedek* 9. o. t., *Kovács 386 János* 10. o. t., *Kuprivecz Katalin* 10. o. t., *Ozogány Katalin* 10. o. t., *Pozsgay Balázs* 9. o. t., *Tamás Gábor Zoltán* 9. o. t. 31 pont; **202–211.** *Bodon Zsófia* 10. o. t., *Hárshegyi Zsuzsa* 9. o. t., *Kiss 111 Péter* 9. o. t., *Komáromi Hajnalka* 9. o. t., *Kovács 999 Balázs* 9. o. t., *Lendvai Péter* 10. o. t., *Márkus Viktória* 10. o. t., *Medgyesi László* 9. o. t., *Szekeres András* 9. o. t., *Tolvaj Vera* 10. o. t. 30 pont; **212–219.** *Bein Márton* 8. o. t., *Gara Zsófia* 10. o. t., *Hoffmann Ágnes* 10. o. t., *Lovas Katalin* 9. o. t., *Minarik Ágnes* 10. o. t., *Nagy 981 Tamás* 10. o. t., *Nyul Balázs* 7. o. t., *Szabó Gyöngyi* 9. o. t. 29 pont; **220–223.** *Barák Róbert* 10. o. t., *Kántor Krisztina* 10. o. t., *Tüske Rita Gabriella* 10. o. t., *Varga Dávid* 9. o. t. 28 pont; **224–232.** *Balázs 232 Enikő* 10. o. t., *Csernenszky András* 8. o. t., *Dombai Gábor* 10. o. t., *Dormán János* 10. o. t., *Gyenese Mónika* 9. o. t., *Hegedűs Vera* 9. o. t., *Keresztes Róbert* 9. o. t., *Makai Krisztián* 10. o. t., *Veress Vilmos* 10. o. t. 27 pont; **233–244.** *Bánsági Tamás* 9. o. t., *Baráthy Enikő* 10. o. t., *Csornai Gyula* 10. o. t., *Czinder Attila* 8. o. t., *Kármán Péter* 9. o. t., *Lükő Sára* 10. o. t., *Magyar Virág* 10. o. t., *Markó Péter* 9. o. t., *Mészáros Zsolt* 7. o. t., *Pap Tünde* 9. o. t., *Sebestyén Hajnalka* 9. o. t., *Vajda Milán* 10. o. t. 26 pont; **245–255.** *Cseri István* 9. o. t., *Háhn Viktor* 9. o. t., *Horváth 317 Eszter* 10. o. t., *Madarász István* 8. o. t., *Nagy 144 Ferenc* 8. o. t., *Németh 278 Andrea* 8. o. t., *Pető Beáta* 9. o. t., *Poór Veronika* 9. o. t., *Révész Máté* 10. o. t., *Soós Péter* 8. o. t., *Takáts Gergely* 10. o. t. 25 pont. Kevesebb pontja van 511 versenyzőnek.

## C jelű gyakorlatok, 11–12. osztályosok

**1.** *Kormos Márton* 12. o. t. 103 pont; **2.** *Sarlós Ferenc* 12. o. t. 102 pont; **3–4.** *Csirmaz Attila* 11. o. t., *Gueth Krisztián* 11. o. t. 101 pont; **5.** *Farkas Milán* 11. o. t. 97 pont; **6–8.** *Bérces Márton* 11. o. t., *Csizmadia Zsolt* 12. o. t., *Fall Zoltán* 11. o. t. 96 pont; **9–10.** *Davidovics Gábor* 11. o. t., *Keller László* 12. o. t. 95 pont; **11–12.** *Ábrány Miklós* 11. o. t., *Kocsis 444 Gábor* 11. o. t. 93 pont; **13.** *Lovas Róbert* 11. o. t. 90 pont; **14–16.** *Fehér 666 Ágnes* 11. o. t., *Kovács 333 Adrienn* 12. o. t., *Orbán Viktor* 11. o. t. 89 pont; **17.** *Csökmei Krisztina* 12. o. t. 86 pont; **18.** *Szőllősi Loránd* 11. o. t. 84

pont; **19.** *Mizda Roland* 12. o. t. 83 pont; **20–21.** *Lakatos Veronika* 11. o. t., *Németh Péter* 11. o. t. 81 pont; **22.** *Biczó Mihály* 11. o. t. 78 pont; **23–24.** *Bakonyi Gábor* 12. o. t., *Führer Lívia* 11. o. t. 77 pont; **25.** *Horváth Anett* 12. o. t. 76 pont; **26–27.** *Hegyi Péter* 11. o. t., *Szigel Gábor* 12. o. t. 75 pont; **28.** *Katona Gergely* 11. o. t. 74 pont; **29–31.** *Huszár Csaba* 12. o. t., *Juhász Júlia* 11. o. t., *Nagy 512 Marianna* 11. o. t. 72 pont; **32.** *Balázs Erzsébet* 12. o. t. 71 pont; **33–36.** *Héger Nóra* 11. o. t., *Juhász Gábor* 11. o. t., *Kiss Marietta* 11. o. t., *Racskó Norbert* 11. o. t. 70 pont; **37–38.** *Baur Edina* 11. o. t., *György László* 12. o. t. 67 pont; **39–40.** *Kardos Dániel* 11. o. t., *Németh 245 Ádám* 12. o. t. 66 pont; **41.** *Kovács Adrián* 11. o. t. 65 pont; **42.** *Ráth Krisztián* 11. o. t. 64 pont; **43–46.** *Jelinek György* 11. o. t., *Pallaghy Kata* 11. o. t., *Váradi 256 Attila* 11. o. t., *Vörös Bernadett* 12. o. t. 63 pont; **47–49.** *Aranyossy Márta* 11. o. t., *Bede István* 11. o. t., *Tóth 111 Gábor* 11. o. t. 60 pont; **50–52.** *Dancsó Zsuzsanna* 11. o. t., *Molnár Csaba* 11. o. t., *Papp Mária* 11. o. t. 59 pont; **53–54.** *Badacsonyi Réka* 12. o. t., *Föglein Anna* 12. o. t. 58 pont; **55.** *Kovács 114 Laura* 12. o. t. 57 pont; **56–58.** *Hegyközi József* 12. o. t., *Pári Csaba* 11. o. t., *Szabó 555 Krisztián* 12. o. t. 55 pont; **59–60.** *Koroknai Sándor* 11. o. t., *Szipola Ágnes* 12. o. t. 54 pont; **61.** *Bacskay Tamás* 11. o. t. 53 pont; **62.** *Varga 249 Zsolt* 11. o. t. 52 pont; **63–65.** *Kálosi Gergely* 11. o. t., *Timár Norbert* 12. o. t., *Víg Diána* 12. o. t. 51 pont; **66–70.** *Győrfi Annamária* 11. o. t., *Keresztély Éva* 11. o. t., *Lakatos Gabriella* 11. o. t., *Leidinger Árpád* 12. o. t., *Verbovszki Andrea* 12. o. t. 50 pont; **71.** *Lovrencsics Lilla* 11. o. t. 49 pont; **72–73.** *Barnácz Brigitta* 11. o. t., *Szekeres Szabolcs* 12. o. t. 48 pont; **74–77.** *Bujtás Anita* 12. o. t., *Pádár Gergely* 11. o. t., *Paukovics Diána* 11. o. t., *Tánczos Tünde* 11. o. t. 47 pont; **78.** *Csuthy Gábor* 11. o. t. 46 pont; **79–84.** *Horti Csilla* 12. o. t., *Mihálovics Lajos* 11. o. t., *Rózsa Tamás* 12. o. t., *Sallay Réka* 11. o. t., *Tarsoly Ágnes* 12. o. t., *Tóth 161 Szilvia* 11. o. t. 45 pont; **85–87.** *Gajdos Dániel* 11. o. t., *Sasi Nagy Júlia* 12. o. t., *Tuska László* 11. o. t. 44 pont; **88.** *Szabados Judit* 12. o. t. 43 pont; **89–92.** *Bóta Adrienn* 12. o. t., *Brulich Ákos* 11. o. t., *Kovács 899 Péter* 11. o. t., *Vajnai 111 Viktória* 11. o. t. 42 pont; **93–97.** *Makó Veronika* 11. o. t., *Sipos Tünde* 11. o. t., *Tóth Éva* 11. o. t., *Vincze Zsuzsanna* 12. o. t., *Vitális Gábor* 11. o. t. 41 pont; **98–103.** *Balázs Gábor* 11. o. t., *Balogh Renáta* 11. o. t., *Borbély Szilárd* 11. o. t., *Dörnyei Mariann* 12. o. t., *Fehér Ágnes* 11. o. t., *Thiry Gábor* 12. o. t. 40 pont; **104.** *Mezei Irén* 11. o. t. 39 pont; **105–106.** *Portschy Szabolcs* 11. o. t., *Tóth Dániel* 11. o. t. 38 pont; **107–109.** *Bosznay Tamás* 11. o. t., *Horák György* 11. o. t., *Miszlai Nikoletta* 12. o. t. 37 pont; **110–113.** *Bella Ildikó* 11. o. t., *Molnár Gábor* 11. o. t., *Petrányi Gábor* 11. o. t., *Szegedi Máté* 11. o. t. 36 pont; **114–117.** *Förhécz András* 11. o. t., *Major Balázs* 12. o. t., *Nagy Elemér Károly* 12. o. t., *Perényi Áron* 12. o. t. 35 pont; **118–121.** *Lobozár Ferenc* 12. o. t., *Mezősi Gábor* 11. o. t., *Spacér Beáta* 11. o. t., *Szabó 111 János* 11. o. t. 34 pont; **122–123.** *Czövek Zoltán* 11. o. t., *Simon Péter* 11. o. t. 33 pont; **124.** *Hermán Zsuzsanna* 12. o. t. 32 pont; **125–127.** *Berengyán Amadé* 12. o. t., *Kondor Bernadett* 11. o. t., *Takács Beáta* 12. o. t. 31 pont; **128–130.** *Novák Péter* 11. o. t., *Oldal Lilla* 11. o. t., *Sipos Nikoletta* 11. o. t. 30 pont; **131–132.** *Kozma Gergely* 11. o. t., *Tamás Erika* 11. o. t. 29 pont; **133–135.** *Gundel Ferenc* 12. o. t., *Harangozó Szabolcs* 12. o. t., *Tóth 556 Ágnes* 12. o. t. 28 pont; **136–138.** *Bányi Donáth* 12. o. t., *Maróti Csilla* 11. o. t., *Molnári 918 Angéla* 11. o. t. 27 pont; **139.** *Galambos András* 12. o. t. 26 pont; **140–144.** *Burján Krisztina* 11. o. t., *Czuczy Noémi* 12. o. t., *Horváth 286 József* 12. o. t., *Juhász 606 Erika* 12. o. t., *Németh Gizella* 11. o. t. 25 pont. Kevesebb pontja van 188 versenyzőnek.

## Beszámoló az IOI'97-ről

A 9. Nemzetközi Informatikai Diákolimpiát Dél-Afrika rendezte 1997. november 30 – december 7. között. A verseny helyszíne Fokváros volt.

A versenyen 61 ország vett részt, közülük 57 ország nevezett összesen 229 versenyzőt. A magyar csapat összetétele:

Csapatvezető: *Dr. Horváth Gyula* (JATE)

Csapatvezető helyettes: *Szlávi Péter* (ELTE)

Versenyzők:

| | |
|---|---|
| *Szabó Viktor* | (Budapest, Leővey Klára Gimnázium) |
| *Marhefka István* | (Miskolc, Avasi Gimnázium) |
| *Tóth László* | (Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium) |
| *Újhelyi Gábor* | (Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium) |

A versenyzőknek mindkét versenynapon 3-3 feladatot kellett megoldani öt óra alatt. A feladatok algoritmikus jellegűek voltak, a megoldó algoritmus hatékonysága fontos szempont volt az értékelésnél. A verseny szakmai színvonala elmaradt a megszokottól, a feladatok megfogalmazásával, értékelésével sok probléma volt. A rendezvényt egyébként nagyon jól szervezték, az ellátás kifogástalan volt.

Az érmek száma és megoszlása az IOI szabályzatnak megfelelően a következő volt: 19 arany, 36 ezüst és 57 bronz érem.

Versenyzőink eredményei (a maximális elérhető pontszám 600):

42. Marhefka István 322 pont, ezüstérem

67. Szabó Viktor 270 pont, bronzérem

93. Tóth László 225 pont, bronzérem

94. Újhelyi Gábor 223 pont, bronzérem

A versenyeredményekre jellemző, hogy az előző évi olimpiához viszonyítva minden ország átlagosan a korábbi pontjai $2/3$-át szerezte meg idén. Ennek oka elsősorban nem a feladatok nehézsége, hanem a pontatlanság, félreértelmezhetőség volt.

A másik feltűnő jelenség az északi országok jó szereplése (Dánia, Svédország, Finnország, Észtország és Lettország is szerzett aranyérmet), valamint a távol-keleti országok viszonylag halványabb eredménye volt.

Magyarország az országok sorrendjében a 12. helyet érte el, de mivel az eddig jól szereplő országok is kissé visszaestek, így az eddigi 9 informatikai diákolimpia összesített pontszáma alapján megőriztük 3. helyünket, sőt még növeltük is előnyünket a közvetlenül mögöttünk levők előtt.

A következő, 10. Nemzetközi Informatikai Diákolimpiát Portugália szervezi Setubal városában 1998. szeptemberében.

**Zsakó László**

## Beszámoló a IX. magyar–izraeli matematikaversenyről

Idén, április 2–10. között Izraelben, Haifában (egészen pontosan: a Technionban, Izrael legrégibb egyetemén) került megrendezésre a IX. magyar-izraeli matematikaverseny. A verseny rendje némileg eltért a korábbi évekétől: (izraeli kérésre) elmaradt a korábban szokásos csapatverseny és két napon (ápr. 6–7.) 4 és fél – 4 és fél óra alatt 3–3 feladatot kellett egyénileg megoldani, a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiákon szokásos feltételek mellett: semmilyen segédeszköz (számológép, könyv, jegyzet) nem használható, minden feladat helyes megoldása 7 pontot ér. Ilymódon minden versenyző maximálisan 42 pontot szerezhetett.

A magyar diákok közül

*Lippner Gábor* (Fővárosi Fazekas Mihály Gyak. Gimn., IV. o.t.) 41 pontot,
*Lukács László* (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., III. o.t.) 31 pontot,
*Zubcsek Péter Pál* (Fővárosi Fazekas Mihály Gyak. Gimn., IV. o.t.) 29 pontot,
*Bérczi Gergely* (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., IV. o.t.) 26 pontot
szerzett.

Így a magyar csapat összpontszáma 127 pont lett. Az izraeli diákok rendre 27, 20, 19 és 13 pontot szereztek, az izraeli csapat összpontszáma tehát 79 pont volt.

Miközben örömmel állapítjuk meg, hogy az eddigi kilenc csapatverseny mindegyikét a magyar diákok nyerték, jóleső érzés látni, hogy az izraeli csapat – talán nem függetlenül ettől a „felkészítő” versenytől – évről-évre javuló teljesítményt nyújt. A magyar csapat vezetője *Pelikán József* (ELTE, Budapest), az izraelié *Shay Gueron* (Technion, Haifa) volt.

Külön szeretnék köszönetet mondani a magyar diákok felkészítését sok éve irányító *Reiman Istvánnak,* valamint *Dobos Sándornak.*

A szorosan vett versenyprogram mellett ápr. 8.-án (szerdán) kisebbfajta tudományos konferenciára került sor, ahol a magyar csapat vezetője és az izraeli csapat helyettes vezetője is tartott egy-egy (angol nyelvű) előadást. Ezenkívül körülnéztünk Haifa városában és múzeumaiban, kirándulásokat tettünk a környékre és még egy jeruzsálemi útra is jutott idő. Esténként pedig a magyar csapat bridzsben többnyire újonc, de igen lelkes tagjai a csapatvezető (sokszoros magyar bajnok és sok évig a magyar bridzs-válogatott kapitánya) irányításával a bridzs-játék fortélyaival ismerkedtek.

### A verseny feladatai

### Első nap

**1.** Egy játékos a következő játékot játssza: ismételten feldob egy szabályos pénzérmét és tippel arra, hogy melyik oldalára esik. Ha eltalálja, 1 pontot kap, ha nem, elveszti az addig esetleg megszerzett pontját. 0 ponttal kezd és akkor fejeződik be a játék, amikor 2 pontja lett.

1.) Mi annak a $p_n$ valószínűsége, hogy a játék pontosan $n$ pénzfeldobás után ér véget?

2.) Mi a várható értéke („átlaga”) a játék befejeződéséig végrehajtott dobások számának?

**2.** Az $ABC$ hegyesszögű háromszög köré írt körének középpontja $O$, sugara $R$. Az $OBC$, $OCA$, $OAB$ háromszögek beírt köreinek sugarai $r_1$, $r_2$, $r_3$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3} \geqslant \frac{1}{R}\left(4\sqrt{3}+6\right).$$

**3.** Legyenek $a$, $b$, $c$, $n$, $k$ pozitív egészek.

Legyen

$$f(x)=ax^2+bx+c.$$

Bizonyítsuk be, hogy található $n$ egymás utáni pozitív egész szám: $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_n$ úgy, hogy az $f(a_1)$, $f(a_2)$, $\ldots$, $f(a_n)$ számok mindegyikének legalább $k$ különböző prímszámosztója van.

**Második nap**

**4.** Határozzuk meg az összes olyan $x$, $y$ pozitív egész számokat, amelyekre

$$5^x-3^y=16.$$

**5.** Az $ABCDEF$ konvex hatszög oldalaira kifelé szabályos háromszögeket szerkesztünk. Bizonyítsuk be, hogy ezek harmadik csúcsai akkor és csak akkor lesznek egy szabályos hatszög csúcsai, ha az eredeti hatszög *affin szabályos.* (Egy hatszög affin szabályos, ha középpontosan szimmetrikus és szemközti oldalai párhuzamosak a maradék két csúcs által meghatározott átlóval.)

**6.** Legyen $n$ pozitív egész szám. Tekintsük $n$ összes partícióinak $\Pi$ halmazát. ($n$ partíciója alatt értjük $n$ egy felbontását pozitív egész számok összegére; két felbontást nem tekintünk különbözőnek, ha csak az összeadandók sorrendjében különböznek.) Ha $\alpha$ $n$ egy partíciója, akkor jelöljük $a_1(\alpha)$, $a_2(\alpha)$, $\ldots$, $a_n(\alpha)$-val az $\alpha$-ban előforduló 1, 2, $\ldots$, $n$ összeadandók számát. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{\alpha\in\Pi}\frac{1}{1^{a_1(\alpha)}\cdot a_1(\alpha)!\cdot 2^{a_2(\alpha)}\cdot a_2(\alpha)!\cdot\ldots\cdot n^{a_n(\alpha)}\cdot a_n(\alpha)!}=1.$$

**Pelikán József**

## A Református Iskolák VI. Országos Matematika Versenye

Az 1998. március 7–8. között megrendezett versenyre 18 városból 83 diák érkezett. A versenyfeladatok megírására szombat délután került sor. A feladatokat a KLTE Matematika Intézet munkatársai állították össze. A zsűri elnöke *Kiss László* főtanácsos, tagjai

*Lajkó Károly* a KLTE docense, *Nagy Erzsébet* középiskolai tanár. A hagyományoktól eltérve az idén a tanároknak továbbképzést is szerveztünk. Az előadók: *Kosztolányi József, Páles Zsolt* és *Horkay György* voltak.

Néhány a verseny feladataiból:

**8. osztály**

**4. feladat.** Egy négyzet alakú sík területet fel akarnak osztani 64 négyzet alakú telekre. Ezek közül 63 egyenlő nagyságú, a hatvannegyedik pedig nagyobb. A nagyobb telek oldala egész számú többszöröse a kis négyzet oldalának. Add meg a felparcellázott terület valamennyi lehetséges térképvázlatát!

**9. osztály**

**5. feladat.** Adottak az $ABCD$ síknégyszög oldalai, valamint az átellenes $AB$ és $CD$ oldalak felezőpontjainak távolsága. Szerkessze meg a négyszöget!

**10. osztály**

**5. feladat.** Egy szobában 9 ember van. Bármely 3 között található kettő olyan, akik ismerik egymást. Mutassa meg, hogy található a szobában négy olyan ember, akik közül bármely kettő ismeri egymást!

**11. osztály**

**4. feladat.** Oldja meg a $\cos(\sin x) - \sin(\cos x) > 0$ egyenlőtlenséget!

**12. osztály**

**2. feladat.** Határozza meg azoknak a köröknek az egyenletét, amelyek érintik a koordináta-tengelyeket és a $4x + 3y = 12$ egyenletű egyenest!

### A Református Iskolák VI. Országos Matematika Versenyének eredményei

7. osztály: **I.** Horváth Katalin, *Kecskemét;*
**II.** Szücs András, *Kunszentmiklós;*
**III.** Pápista Anna, *Budapest,* (Lónyai Utcai Református Gimnázium)

8. osztály: **I.** Szeli Ferenc, *Hódmezővásárhely;*
**II.** Sipos Sz. Eszter, *Kecskemét;*
**III.** Vízkeleti József, *Karcag.*

9. osztály: **I.** Fremde Balázs, *Budapest,* (Baár-Madas Gimnázium)
**II.** Mátyási Nóra, *Kiskunhalas;*
**III.** Sajtos Erika, *Debrecen.*

10. osztály: **I.** Ozogány Katalin, *Pápa;*
**II.** Mezei Zoltán, *Nagykőrös;*
**III.** Kiss Melinda, *Kecskemét.*

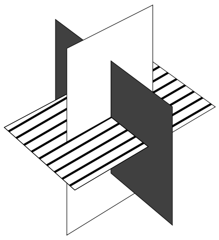
11. osztály: **I.** Udvari Zsolt, *Hódmezővásárhely;*
**II.** Sindely Dániel, *Kiskunhalas;*
**III.** Mag Kornélia, *Kunszentmiklós.*

12. osztály: **I.** Papp Eszter, *Kecskemét;*
**II.** Takács Gábor, *Hódmezővásárhely;*
**III.** Faddi Gábor, *Kiskunhalas.*

A verseny fődíját **Sindely Dániel** nyerte el, második lett Mezei Zoltán.

**Dr. Bajza Istvánné** tanár

## Beszámoló a Gordiusz Matematika Tesztversenyről



A *Gordiusz* kétfordulós, feleletválasztós tesztverseny, amelyen 9–12. évfolyamos tanulók indulhatnak iskolatípustól függetlenül. Minden évfolyamon 30 feladatot kell megoldani 90 perc alatt.

1998. február 26-án az ország 15 megyéjében, Budapesten és Erdélyben közel 6000 diák töltötte ki a Gordiusz Matematika Tesztverseny első fordulójának feladatlapját. Pécsett a Művészeti Szakközépiskolában április 4-én megrendezett országos döntőbe a legjobb 148 diák kapott meghívást. A színvonalas versenyt a kísérő tanárok részére előadás, a szervezőkkel való beszélgetés, a versenyzők részére közös feladatmegoldás, városnézés, mecseki séta és műsoros est egészítette ki. A válaszok számítógépes kiértékelése után az eredményhirdetés április 5-én délelőtt volt. Az eredmények:

9. évfolyam: **1.** *Pesti Gábor*, Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimn.;
**2.** *Molnár Zoltán*, Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimn.;
**3.** *Babos Attila*, Budapest, ELTE Radnóti M. Gyakorlóisk.;
**4.** *Szeti Balázs*, Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimn.;
*Vető Bálint*, Érd, Vörösmarty M. Gimn.;
**6.** *Ráfael Balázs*, Budapest, Jedlik Á. Gimn.

10. évfolyam: **1.** *Molnár László*, Miskolc, Földes F. Gimn.;
**2.** *Iván Szabolcs*, Kecskemét, Bolyai J. Gimn.;
*Ivaskó György*, Baja, III. Béla Gimn.;
**4.** *Soós István*, Szombathely, Kanizsay D. Gimn.;
**5.** *Dezső Balázs*, Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimn.;
**6.** *Sipos Ádám*, Miskolc, Földes F. Gimn.

11. évfolyam: **1.** *Erős Zsolt*, Békéscsaba, Belvárosi Ált. Isk. és Gimn.;
**2.** *Pszota Anikó*, Vác, Madách I. Gimn.;
**3.** *Gueth Krisztián*, Szombathely, Kanizsay D. Gimn.;
**4.** *Poronyi Gábor*, Pécs, Janus Pannonius Gimn.;
**5.** *Lovas Róbert*, Csongrád, Batsányi J. Gimn.;
**6.** *Förhécz András*, Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimn.

12. évfolyam: **1.** *Kovács István*, Debrecen, Tóth Á. Gimn.;
**2.** *Sarlós Ferenc*, Baja, III. Béla Gimn.;
**3.** *Papp Eszter*, Kecskemét, Református Kollégium Gimn.;

**4.** *Lóránd Balázs*, Pécs, Leőwey K. Gimn.;
**5.** *Simon Barna*, Nyíregyháza, Krúdy Gyula Gimn.;
**6.** *Hangya Péter*, Budapest, ELTE Radnóti M. Gyakorlóisk.

A következő évre megyei/területi szervezők jelentkezését várjuk onnan, ahol idén még nem kapcsolódtak be a versenybe. Címünk: MATEK Alapítvány, 7618 Pécs, Pf. 56. Poronyi Gábor (Árpád Fejedelem Gimn., Pécs) a 72/441–012-es telefonon kereshető.

**Poronyi Gábor**

## Megoldásvázlatok, eredmények a IV. mérőlap (1998/3. sz.) feladataihoz

**1.** Rendezzük a következő alakra az egyenletet: $\sqrt{x^2-10x+30}=-x^2+10x-18$. Legyen $x^2-10x+30=y$. Ekkor a $\sqrt{y}=12-y$ egyenletet kell megoldanunuk. Így $0\leqslant y\leqslant 12$, és ekkor a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás. A négyzetre emelés és a rendezés után kapjuk: $y^2-25y+144=0$. Ebből $y_1=9$, $y_2=16$, de a feltételeknek csak a 9 felel meg. Az $x^2-10x+30=9$ egyenletből $x_1=3$, $x_2=7$ adódik.

**2.** Azt láthatjuk, hogy a $CF$ szakasz vízszintes és 3 egység magasan helyezkedik el. Legyenek a függőlegesek megfelelő talppontjai: $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$, $F'$. Ekkor az $AA'D'D$ derékszögű trapézról tudjuk, hogy a párhuzamos oldalai, $AA'=4$, $DD'=6$ egység ($A'D'=20$, de ezt most nem is fogjuk felhasználni). A látszólagos metszéspont az $AD$ felezőpontja, ami jelen esetben a függőlegesen álló középvonal egyik végpontja. A párhuzamos oldalak számtani közepe adja a középvonal hosszát, ezért az $AD$ felezője 5 egység magasan van. Hasonlóan gondolkodhatunk a $BB'E'E$ derékszögű trapézról is. A megfelelő adatokkal kapjuk, hogy $BE$ felezője 4 egység magasan van. Vagyis a valóságban 1-1 egység távolság van függőlegesen a kérdéses egyenesek között a látszólagos metszéspontnál úgy, hogy itt $AD$ van a legmagasabban és $CF$ a legalacsonyabban.

**3.** Mivel $\overline{c}$ prím, azért 2, 3, 5, 7 a lehetséges értékek, de $\overline{bc}$ is prím, ezért a 2, 5 kizárt, vagyis $\overline{c}$ csak 3 vagy 7 lehet. Mivel $\overline{ab}$ prím, azért $b$ csak 1, 3, 7, 9 lehet. Vegyük figyelembe, hogy a számjegyek összege 26, valamint a $c$ lehetséges értékeit is; ekkor $b$ csak 7 vagy 9 lehet, mert a többi kevés lenne. A $\overline{bbc}$ lehetséges értéke ezek alapján 773, 993, 997, de ennek is prímszámnak kell lenni. A 993 osztható 3-mal, a 773, valamint a 997 prímszám (ellenőrizhetjük, vagy nézzük meg a függvénytáblázatban). Mivel a számjegyek összege 26, azért már csak két ilyen számra gondolhatunk: a 9773-ra vagy az 1997-re. Mivel $9773=29\cdot 337$, az 1997-ről pedig megállapíthatjuk, hogy prím, azért csak egy ilyen szám van, az 1997.

*Megjegyzés.* Ha a feltételek között nem szerepelt volna a számjegyek összegére vonatkozó megszorítás, akkor hosszabb, de hasonló vizsgálattal jutottunk volna el a megoldáshoz. Akinek van egy kis türelme, fejezze be így is a vizsgálatot! Biztosan kap új számot, mert így a 4337 is megfelel.

**4.** Mivel $C$ pont az $EF$ szakasz belső pontja, azért $C(c;9-c)$, ahol $0<c<9$ valós szám. A $c$ és az adott pontok segítségével kifejezhetjük a következő pontok koordinátáit:

$$Q\left(\frac{12+c}{3};\frac{9-c}{3}\right),\quad R\left(\frac{2c}{3};\frac{24-2c}{3}\right),\quad M\left(\frac{2c+6}{6};\frac{24-2c}{6}\right),$$
$$N\left(\frac{12+c}{6};\frac{21-c}{6}\right),\quad K\left(\frac{c}{2};\frac{9-c}{2}\right),\quad L(3,3).$$

$$MN=\sqrt{\left(\frac{c-6}{6}\right)^2+\left(\frac{3-c}{6}\right)^2}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{\left(\frac{c-6}{2}\right)^2+\left(\frac{3-c}{2}\right)^2},$$
$$KL=\sqrt{\left(\frac{c-6}{2}\right)^2+\left(\frac{3-c}{2}\right)^2}=3\cdot MN.$$
Vagyis a $c$ értéktől függetlenül a keresett arány $KL:MN=3:1$.

**5.** A megoldandó egyenlet: $2\sin^6 x-3\sin^4 x+\sin^2 x+2\cos^6 x-3\cos^4 x+\cos^2 x=0$, ezt ilyen alakban is írhatjuk: $2\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)-3\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)+\sin^2 x+\cos^2 x=0$. Alkalmazzuk a következő átalakításokat:
$$\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^3-3\sin^2 x\cos^2 x\cdot\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=1-3\sin^2 x\cos^2 x,$$
$$\sin^4 x+\cos^4 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x,\qquad \sin^2 x+\cos^2 x=1.$$
Ekkor a behelyettesítések utáni egyenlet: $2(1-3\sin^2 x\cos^2 x)-3(1-2\sin^2 x\cos^2 x)+1=0$. A beszorzások és összevonások után a bal oldalon is 0 lesz, vagyis azonosságot kaptunk, így minden valós szám megoldása az egyenletnek.

**6.** A feladatban szereplő kifejezés értelmezési tartománya: csak pozitív számnak van logaritmusa, ezért $x>0$, továbbá a nevezők nem lehetnek 0-val egyenlők, ezért $x\neq 10^5$, valamint $x\neq 10^{-1}$. Mivel $9{,}8=\frac{98}{10}=\frac{49}{5}=\left(\frac{7}{\sqrt5}\right)^2=\left(\frac{\sqrt5}{7}\right)^{-2}$, így az eredeti egyenlet így írható: $\left(\frac{\sqrt5}{7}\right)^{\frac{2}{-5+\lg x}-\frac{4}{1+\lg x}}=\left(\frac{\sqrt5}{7}\right)^{-2}$. Ebből kapjuk: $\frac{2}{-5+\lg x}-\frac{4}{1+\lg x}=-2$. A közös nevezővel, $(-5+\lg x)(1+\lg x)$-szel szorozhatunk, és $(-2)$-vel oszthatunk: $2(-5+\lg x)-(1+\lg x)=$ $=(-5+\lg x)(1+\lg x)$. A beszorzások és összevonások után kapjuk: $\lg^2 x-5\lg x+6=0$, amiből $\log x_1=2$, $\lg x_2=3$. Így a megoldások: $x_1=100$, $x_2=1000$.

**7.** Legyen a két metszéspont $A$ és $B$. Legyen egy tetszőleges, de a metszéspontoktól különböző pont az egyik körvonalon $C$, a másikon $D$. Mivel a körvonalak nem egy síkban vannak, azért $ABCD$ egy tetraédert határoz meg. Minden tetraéder köré lehet gömböt írni (lásd pl. Geometriai feladatok gyűjteménye, I. 1946. feladat). Az $ABCD$ tetraéder köré írt gömböt az $ABC$ háromszögre illeszkedő síkkal, illetve az $ABD$ háromszögre illeszkedő síkkal metszve a két háromszög köré írt két kör pontosan az eredetileg megadott egymást metsző két kör lesz. Így beláttuk, hogy létezik a keresett gömbfelület.

**8.** Jelöljük $n$-nel annak a napnak a sorszámát, amikor befejezik a munkát. Ha az $n$ értéke 1, 2 vagy 3, akkor nem lehet szétosztani az aranyat, ezt könnyen ellenőrizhetjük. Az $n$-edik napig $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ gramm aranyat ástak ki. A feltétel szerint ennek oszthatónak kell lennie 3-mal, ami azt jelenti, hogy $3\mid n$ vagy $3\mid(n+1)$.

Még azt is meg kell mutatnunk, hogy ha $3\mid n$ vagy $3\mid(n+1)$, akkor a szétosztás valóban elvégezhető.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ha $n=5$, akkor a szétosztás: | $1+4$, | $2+3$, | 5. |
| Ha $n=6$, akkor: | $1+6$, | $2+5$, | $3+4$. |
| Ha $n=8$, akkor: | $1+2+3+6$, | $4+8$, | $5+7$. |
| Ha $n=9$, akkor: | $1+2+3+4+5$, | $6+9$, | $7+8$. |

Egy nagyobb $n$ esetén, amelyre $3\mid n$ vagy $3\mid(n+1)$, a következő módon készíthetünk egy elosztást. Határozzuk meg az $n$ 6-tal való osztási maradékát, ez 5, 0, 2 vagy 3 lehet, ezekhez rendre az első 5, 6, 8 vagy 9 értéket az előbb leírtak alapján mát szétoszthatjuk. Továbbá még 6-tal osztható számú aranyunk van. Itt pedig felhasználjuk, hogy egymást követő hat egész szám esetén $(k+1)+(k+6)=(k+2)+(k+5)=(k+3)+(k+4)$, így a feltételnek eleget tevő minden számra megvalósítható a szétosztás, vagyis minden olyan napon befejezhetik a munkát, amelynek a sorszáma 3-nál nagyobb, és hárommal osztható, vagy hárommal osztva 2-t ad maradékul.

**Számadó László**

Az **Ericsson TrafficLab** kutatólaboratórium által kiírt feladatra (ld. KöMaL 1998/1. sz. 19. o.) *Schumayer Dániel* és *Lukács László* küldött be lényegében jó megoldást. Az Ericsson mindkettőjüket különdíjban részesíti, amelyet a KöMaL szerkesztőségben vehetnek át.

A megoldáshoz felhasználjuk Schumayer Dániel dolgozatát.

A valószínűségszámítás elméletének egyik alapvető tétele a következő:

**Moivre–Laplace tétel:** Ha $A_1, \dots A_n$ független, $p$ valószínűséggel bekövetkező események, és $\eta_n$ az $A_1, \dots A_n$-ek közül bekövetkező események száma, akkor

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leqslant \frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant b\right) = \Phi(b) - \Phi(a), \quad \text{ahol} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Sőt, az is igaz, hogy van olyan $K>0$ ($a$-tól és $b$-től nem függő) konstans, hogy

$$\left| P\left(a \leqslant \frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant b\right) - (\Phi(b) - \Phi(a)) \right| < \frac{K}{\sqrt{n}}.$$

$\Phi(x)$ szigorúan monoton növő (és folytonos) függvény.

Jelölje $C_N$ az $N$-hez tartozó legkisebb megfelelő $C$-t, tehát

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant C_N\right) \geqslant 1-\varepsilon \quad \text{és } \forall\ a>0\text{-ra} \quad P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant C_N - a\right) < 1-\varepsilon.$$

$a=-\infty$, $b=\dfrac{C_N - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}$-vel alkalmazva a Moivre–Laplace tételt kapjuk, hogy $\forall \xi > 0$-ra, ha $N$ elég nagy, akkor

$$-\xi < P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant C_N\right) - \Phi\left(\frac{C-Np}{\sqrt{Np(1-p)}}\right) < \xi.$$

Válasszuk $\xi$-t $\dfrac{1}{2}-\varepsilon$-nak. Ekkor az előző egyenlőtlenségből ha $N$ elég nagy, akkor egyrészt

$$1-\varepsilon-\Phi\left(\frac{C-Np}{\sqrt{Np(1-p)}}\right) < \frac{1}{2}-\varepsilon,$$

amit átrendezve, $\Phi$ monotonitásából

$$\frac{C_N}{N} > \frac{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)} + p = p,$$

mivel $\Phi^{-1}(1/2)=0$. A másik egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$\frac{C_N}{N} < \frac{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)} + \frac{a}{N} + p = p + \frac{a}{N}.$$

Azaz, ha $N$ elég nagy, akkor $p < \frac{C_N}{N} < p + \frac{a}{N}$. Ebből pedig a „rendőr elv” alapján $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{C_N}{N} = p$ adódik.

*Veres András*

## Megjegyzés a C. 485. gyakorlathoz

A feladat a következő volt: *Egy* 100 *sorból és* 100 *oszlopból álló táblázat első oszlopában csupa* 1*-es található,* $k$*-adik sorában pedig olyan számtani sorozat, amelynek differenciája* $k$*. A táblázat bal alsó sarkától jobb felső sarkáig húzódó átlója mentén elhelyezkedő számok közül melyik a legnagyobb?*

*Thiry Gábor* megoldásában (lásd a 278. oldalon) szerepel az, hogy az említett átló mentén elhelyezkedő számok egy parabola pontjaiként ábrázolhatók. Persze ezek a pontok „diszkréten” helyezkednek el. Képzeljük el azonban, hogy a táblázatnak nemcsak egész indexű sorai és oszlopai vannak, hanem az indexek tetszőleges valós értékeket felvehetnek. Eredetileg a táblázat $i$-edik sorában az első helyen 1 áll, és ezután egy $i$ különbségű számtani sorozat. A $j$-edik helyen álló szám tehát $1+i\cdot(j-1)$. Feltevésünk szerint az oszlopindexek tehát nemcsak a $j=1, 2, \ldots, 100$ értéket vehetik fel, hanem bármilyen $x$ valós számot. A sorok indexei pedig nemcsak az $i=1, 2, \ldots, 100$ értéket vehetik fel, hanem itt is tetszőleges valós $y$ számot. Ekkor az $y$-adik sorban egy $y$ differenciájú számtani sorozatnak kellene állni, aminek így természetesen nincsen értelme. Ha viszont a táblázatban szereplő $1+i\cdot(j-1)$ kifejezésben $j$ helyébe $x$-et és $i$ helyébe $y$-t írunk, akkor a $z=1+y\cdot(x-1)$ függvényhez jutunk. Az $x$, $y\in\{1, 2, \ldots, 100\}$ esetben természetesen az eredeti táblázat adódik.

Tekintsük most a térbeli $x$, $y$, $z$ koordinátarendszerben az összes olyan pontot, amelyeknek a koordinátái ezt a feltételt kielégítik. Ez egy geometriai alakzat, amely „nyilván” egy felület. Egy „sor”-nak rögzített $y$ felel meg, ami egy, az $x$, $z$ síkkal párhuzamos egyenesnek az egyenletét adja. Ezt a felületet tehát egy „egyenessereg” „súrolja végig”. Amikor az első oszlopot nézzük, annak az $x=1$ eset felel meg. Ez az egyenlet egy, az $y$, $z$ síkkal párhuzamos síkot jelent. Ekkor eredeti egyenletünkből a $z=1$ egyenlet adódik. Ez is egy egyenes egyenlete; egy olyan egyenesé, amely nem szerepel az előbb felsoroltak között. A „mellékátlón” levő $x$, $y$ koordinátákat az jellemzi, hogy összegük állandó. Az eredeti feladatban ez az összeg 101 volt, de számunkra ez nem lényeges; legyen az összeg $c$. Ebből azt kapjuk, hogy

$$z=1+y\cdot(x-1)=1+(c-x)\cdot(x-1)=-x^2+(c+1)x+1-c,$$

ami valóban egy parabola egyenlete. Ha „meg akarjuk érteni”, hogy milyen felületet kaptunk, akkor célszerű más koordinátarendszert felvenni. Tekintsük azt az $x'$, $y'$, $z'$ koordinátarendszert, amelynek a középpontja az eredeti koordinátarendszer $(1,0,1)$ pontja, és az eredeti koordinátarendszerből annak eltolásával keletkezik. Ez azt jelenti, hogy az új koordinátarendszerben az $x$ irányú és $z$ irányú koordináták az eredetinél 1-gyel kisebbek lesznek, míg az $y$ irányú koordináták nem változnak. Egy $P$ pont $(x',y',z')$ és $(x,y,z)$ koordinátái között tehát az $x'=x-1$, $y'=y$ és $z'=z-1$ kapcsolat áll fenn. Az új koordinátarendszerben a vizsgált felület „egyenlete” tehát $z'=y'\cdot x'$.

Az egyszerűség kedvéért hagyjuk itt el a „vesszőket”; ekkor a $z=y\cdot x$ egyenlethez jutunk. Ezen a felületen kétféle „egyenes-sereg” található. Ha az $x=c$ síkkal metszünk, akkor a $z=cy$ egyenesekhez jutunk. Ha pedig az $y=c$ síkkal metszünk, akkor a $z=cx$ egyeneseket kapjuk.

Az eredeti feladat megoldásánál látott gondolat szerint, ha az $x+y=c$ síkkal metszünk, akkor egy „lefelé álló” parabolát kapunk. Ahhoz, hogy jobban láthassuk a felületet, célszerű ismét egy másik koordinátarendszert felvenni. (Megjegyezzük, hogy a *lineáris algebra* keretein belül minden ilyen esetben megmondható, hogy melyik a célszerű koordinátarendszer; sőt ennek felvétele nélkül is eldönthető a vizsgált alakzat „mineműsége”. Most viszont csak annyit tudunk tenni, hogy megadjuk a „jó” koordinátarendszert.) A koordinátarendszert a $z$-tengely körül forgassuk el 45 fokkal. Mivel a $z$-tengely megmarad, azért elég az egész elforgatást a síkon szemlélni. Egyszerűbb az eljárást úgy végiggondolni, hogy vektorokkal dolgozunk.

Legyenek az $x$- és $y$-tengely irányú egységvektorok, megfelelően **e** és **f**. Legyenek ezeknek pozitív irányban 45 fokkal való megfelelő elfordítottja $\mathbf{e}^*$ és $\mathbf{f}^*$. Ez azt jelenti, hogy

$$(*)\qquad \mathbf{e}^*=\frac{1}{\sqrt2}\mathbf{e}+\frac{1}{\sqrt2}\mathbf{f},\qquad \mathbf{f}^*=-\frac{1}{\sqrt2}\mathbf{e}+\frac{1}{\sqrt2}\mathbf{f}.$$

Ha egy pontnak ebben a koordinátarendszerben a koordinátái $(\xi,\eta)$, az azt jelenti, hogy az origóból a pontba mutató **u** vektorra $\mathbf{u}=\xi\mathbf{e}^*+\eta\mathbf{f}^*$ adódik. A $(*)$ alatti összefüggés alapján tehát

$$\mathbf{u}=\xi\left(\frac{1}{\sqrt2}\mathbf{e}+\frac{1}{\sqrt2}\mathbf{f}\right)+\eta\left(-1/\sqrt2\mathbf{e}+\frac{1}{\sqrt2}\mathbf{f}\right)=\frac{\xi-\eta}{\sqrt2}\mathbf{e}+\frac{\xi+\eta}{\sqrt2}\mathbf{f}.$$

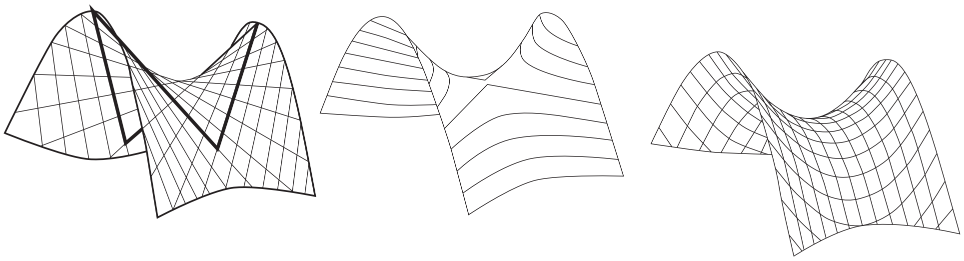
Tekintettel arra, hogy az **u** vektor végpontjának eredeti koordinátája $(x,y)$, ezért $x=\frac{\xi-\eta}{\sqrt2}$ és $y=\frac{\xi+\eta}{\sqrt2}$. Ezt a $z=xy$ összefüggésbe behelyettesítve a $2z=\xi^2-\eta^2$ összefüggéshez jutunk.

Nézzük a fenti összefüggéssel leírt felületet. Ha ezt a felületet „elszeleteljük” a $z$ tengelyre merőleges (tehát „vízszintes”) síkkal, akkor minél nagyobb a $z$, annál „tompább” hiperbolát nyerünk. Ezeknek a hiperboláknak a „csúcsa” a $\xi$-tengelyen van. Ha egyre közelítünk az $x$, $y$ tengelyek síkjához, akkor a csúcs egyre közelebb kerül a $z$-tengelyhez. A tengelyek síkjában a hiperbola metsző egyenespárrá „változik át”. Ezután pedig a csúcs „átkerül” az $\eta$-tengelyre. A fellépő hiperbolák aszimptotapárja mindig a két koordinátatengely. Ez a felület, amelyiknek minden pontján két egyenes haladt át, „tele van” hiperbolákkal.

De hol vannak a már látott parabolák? Ezeket is megtalálhatjuk. Válasszuk $\xi$-t $c$ konstansnak, azaz messük a felületünket a $\xi$-tengelyre merőleges síkokkal. A metszet egyenlete $2z=c^2-\eta^2$. Ez mindig egy „csúcsával felfelé álló” parabola, amelynek „csúcsát” pontosan az $\eta=0$ esetben kapjuk. Ha az $\eta$-tengelyre merőleges síkkal metszünk, akkor a $2z=\xi^2-c^2$ egyenletekhez jutunk; amelyek „csúcsukkal lefelé álló” parabolát adnak. Ezek a csúcsok éppen a $\xi=0$ esetben adódnak. Eszerint a lefelé álló parabolák csúcsai egy fölfelé álló parabolán vannak és viszont.

A fentiek szerint a kapott felületet a következőképpen képzelhetjük el:

Tekintjük a $2z=\xi^2$ parabolát és a „rá merőleges”, de ellentétes irányba nyíló $2z=-\eta^2$ parabolát. Ha az első parabolán párhuzamosan „végigcsúsztatjuk” a másodikat (vagy akár a másodikon az elsőt), akkor éppen a szemügyre vett felületet kapjuk.



És ez a „nagyon görbe” felület „tele van” egyenesekkel!

A kapott felület neve *hiperbolikus paraboloid.* Ezt a nevet nem nagyon kell indokolni. Csak annyit teszünk hozzá, hogy van egy „másik” paraboloid is. Ez, lényegében, a parabola tengelykörüli forgatásából nyert felület, amelyiknek a neve *elliptikus paraboloid.* Az itt bemutatott felületnek van egy másik neve is, *nyeregfelületnek* nevezik, mert igen hasonlít a nyereghez (akár lónyeregre, akár hegynyeregre gondolhatunk). Érdemes megjegyezni, hogy tetszőleges „sima” felület bármely pontjának „kis környezetében”, ha az nem „síkszerű” („hengerszerű”) és nem „gömbszerű”, akkor az olyan, mint egy nyeregfelület.

**Fried Ervin**

## C gyakorlatok megoldása

**C. 481.** *Egy kör alakú asztalnál ülő társaság tagjai felállnak. Amikor visszaülnek, azt veszik észre, hogy mindenkinek mások a szomszédai, mint előzőleg. Hány tagú lehet a társaság?*

Javasolta: *Fried Ervin,* Budapest

**Megoldás.** Szemeljük ki a társaság egyik tagját. Visszaülés után az eredeti ülésrendhez képest két másik szomszédja lett, így a társaság legalább öttagú volt. Megmutatjuk, hogy ha a társaság legalább öttagú, akkor lehetséges a feladatban megfogalmazott módon le tudnak ülni egy kerek asztal köré.

Legyen a társaság létszáma $2n+1$, illetve $2n+2$, attól függően, hogy páratlan vagy páros sokan vannak. Jelöljük a tagokat az eredeti ülésrendben a következőképpen:

$$b_n,\ b_{n-1},\ \ldots,\ b_1,\ b_1,\ a,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{n-1},\ c_n,\ (d)$$

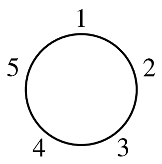
ahol $a$ a kiszemelt tag és $d$ akkor szerepel, ha a létszám páros. Amikor visszaülnek, azaz $a$ leül valahova, legyenek a szomszédai $b_2$ és $c_2$. Ezek után rendre (az $a$-tól távolodó sorrendben) $b_i$ mellé üljön $c_{i+1}$, és $c_i$ mellé üljön $b_{i+1}$ ($i=2,\ 3,\ \ldots,\ n+1$). Most az ülésrend:

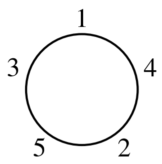
$$\ldots,\ b_n,\ \ldots,\ b_4,\ c_3,\ b_2,\ a,\ c_2,\ b_3,\ c_4,\ \ldots,\ c_n,\ \ldots$$

Amikor a sor végére érünk, $c_n$ mellé üljön $b_1$, és $b_n$ mellé $c_1$. Ha $d$ nem szerepel, akkor ezzel befejeztük az ültetést, egyébként $d$-t $b_1$ és $c_1$ közé ültetjük.

Most $a$-nak és $d$-nek is más szomszédai vannak, mint előbb. A továbbiakban még a $b_i$-k, illetve $c_i$-k szomszédait kell megnézni. A szimmetria miatt elegendő az egyikükét, pl. a $b_i$-ket. Eredetileg az ő szomszédai: $b_{i-1}$ és $b_{i+1}$, vagy (ha $i=n$ és a társaság létszáma páratlan, akkor) $c_n$ voltak. Visszaülés után viszont $b_i$ szomszédjai $c_{i-1}$ és $c_{i+1}$ (vagy ha $i=n$ és a társaság létszáma páratlan) $c_1$ lesznek. Tehát a visszaülésnél valóban mindenkinek más szomszédai lesznek.

$n=5$ esetben könnyű megadni az ülésrendeket.

Az első esetben pl. 

a második esetben: 


*Megjegyzés.* A megoldás során mi megkonstruáltunk egy megfelelő ülésrendet, s ezzel beláttuk, hogy lehetséges volt az, hogy a társaság tagjai véletlenül éppen úgy ültek le, ahogy azt a feladat szövege elmondta.

401 dolgozat érkezett. 5 pontos 78, 4 pontos 28, 3 pontos 253, 2 pontos 18, 1 pontos 9 dolgozat. Hibás 15.

**C. 485.** *Egy* 100 *sorból és* 100 *oszlopból álló táblázat első oszlopában csupa* 1-*es található,* $k$*-adik sorában pedig olyan számtani sorozat, amelynek differenciája* $k$*. A táblázat bal alsó sarkától jobb felső sarkáig húzódó átlója mentén elhelyezkedő számok közül melyik a legnagyobb?*

**Megoldás.** A táblázat bal alsó sarkában 1-es áll. Az átló a felette álló sor 2. számán halad keresztül. Ez egy olyan számtani sorozat 2. eleme, amelynek első eleme 1, differenciája 99, a szám tehát $1+1\cdot 99=100$. A következő sorban a 3. helyen álló számon megy át az átló, amely $1+2\cdot 98=199$ és így tovább.

Általában tekintsünk egy $n\times n$-es táblázatot, amelyet hasonlóképpen töltöttünk ki. Az említett átló a $k$-adik sor $(n-k+1)$-edik helyén álló számon fog áthaladni ($k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$), amely

$$a_k=1+(n-k+1-1)k=1+nk-k^2=-\left(k-\frac{n}{2}\right)^2+\frac{n^2}{4}+1$$

alakban írható fel. Ezen számok közül keressük a legnagyobbat. A $k$-ra másodfokú kifejezésben $k^2$ együtthatója (a főegyüttható) negatív, a parabola lefele szélesedő, tehát van maximuma. Maximumhelye: $k=\frac{n}{2}$. Ha $n$ páros, akkor $k=\frac{n}{2}$ a megoldás. Esetünkben $n=100$, és így $k=50$, $a_k=2501$ a keresett (egyetlen) legnagyobb érték, amelyen az átló áthalad.

Ha $n$ páratlan, $\frac{n}{2}$ nem egész, ezért a maximumhelyét a hozzá legközelebb eső egész értékek között kell keresni; a korábbi átalakításokból látható, hogy mind $\left[\frac{n}{2}\right]$, mind $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ megfelelő, azaz ilyenkor két legnagyobb érték van.

*Thiry Gábor* (Érd, Horváth A. Gimn., 12. évf.)

298 dolgozat érkezett. 6 pontos Antal István és Thiry Gábor megoldása. 5 pontos 203, 4 pontos 10, 3 pontos 22, 2 pontos 12, 1 pontos 12 dolgozat. Hibás 19, nem versenyszerű 18.

**C. 487.** *Bizonyítsuk be, hogy ha* $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, *akkor*

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)>5.$$

**Megoldás.**

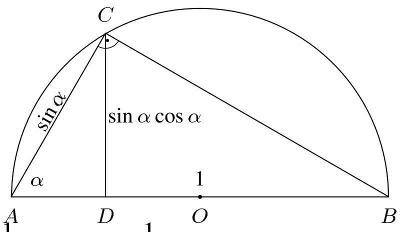
(1) $$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)=1+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Tudjuk, hogy

(2) $$\frac{1}{\sin\alpha}>1 \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{\cos\alpha}>1,$$

mivel a feltétel szerint $0^\circ<\alpha<90^\circ$.

Mivel $\alpha$ hegyesszög, létezik olyan $ABC$ derékszögű háromszög, amelynek egyik hegyesszöge $\alpha$, átfogója, $AB$, legyen egységnyi. Ekkor $AC=\sin\alpha$ és az $ABC$ és $ACD$ háromszögek hasonlóságából $DCB\sphericalangle=\alpha$ és $CD=\sin\alpha\cos\alpha$. Tudjuk, hogy az átfogóhoz tartozó magasság legfeljebb akkora lehet, mint a Thálesz-kör sugara, azaz $\frac{1}{2}$. Innen $\sin\alpha\cos\alpha\leqslant\frac{1}{2}$, azaz $\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\geqslant 2$.




Ebből és (2)-ből következik a feladat állítása.

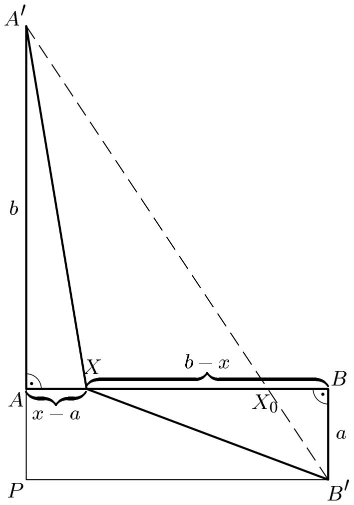
*Szűcs Zsófia* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. évf.)

233 dolgozat érkezett. 7 pontot kapott Babos Attila és Sarlós Ferenc. 6 pontos Ábrány Miklós, Biró Márton, Csóka Endre, Friedl Zita, Gueth Krisztián, Koch Dénes, Kormos Márton, Major Balázs, Simon Zoltán, Zám Katalin és Závodi Attila megoldása. 5 pontos 164, 4 pontos 7, 3 pontos 15, 2 pontos 8, 1 pontos 4, 0 pontos 10, nem versenyszerű 12 dolgozat.

# Matematika gyakorlatok megoldásai

**Gy. 3153.** *Mennyi a* $K=\sqrt{(x-a)^2+b^2}+\sqrt{(x-b)^2+a^2}$ *kifejezés minimuma, ahol* $a$ *és* $b$ *pozitív állandók?*

Javasolta: *Czirok Levente,* Szekszárd




**Megoldás.** Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $b\geqslant a$. Mérjük fel a számegyenesre az $O$ kezdőponttól jobbra az $A$, $B$ és $X$ pontokat úgy, hogy ezeknek az $O$-tól mért távolsága rendre $a$, $b$ és $x$ legyen. (Negatív $x$ esetén az $X$ az $O$-tól balra volna; ábránkon az $a<x<b$ eset szerepel.) Vegyük fel az $A'$ és $B'$ pontokat az $AB$ egyenes különböző oldalain úgy, hogy $AA'$ is és $BB'$ is merőleges legyen $AB$-re, továbbá az $\overline{AA'}$ távolság $b$, a $\overline{BB'}$ távolság $a$ legyen. Ekkor az *ábra* jelöléseit használva $\overline{A'X}=\sqrt{(x-a)^2+b^2}$ és $\overline{XB'}=$ $=\sqrt{(x-b)^2+a^2}$; azaz $K=\overline{A'X}+\overline{XB'}$.

$P$ a $B'$ ponton át az $AB$-vel húzott párhuzamos és az $AA'$ metszéspontja. Az $A'B'$ egyenes az $AB$-t messe az $X_0$ pontban. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján:

$$K=\overline{A'X}+\overline{XB'}\geqslant\overline{A'B'}=\sqrt{\overline{A'P}^2+\overline{PB'}^2}=\sqrt{(a+b)^2+(b-a)^2}=\sqrt{2a^2+2b^2}.$$

$K$-nak a minimuma tehát $\sqrt{2a^2+2b^2}$. Ezt az értéket valóban fel is veszi az $X_0$ pontban. Ez az $x_0$ érték az $X_0$ pontnak a kezdőponttól mért távolsága. Az $A'AX_0$ és $BB'X_0$ háromszögek hasonlósága alapján:

$$\frac{x_0-a}{b}=\frac{b-x_0}{a},\qquad \text{ahonnan}\qquad x_0=\frac{a^2+b^2}{a+b}\qquad \text{adódik.}$$

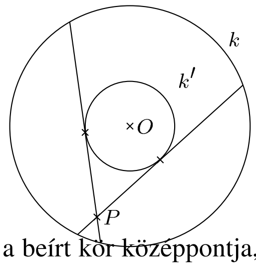
194 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Kunszenti-Kovács Dávid. 5 pontos 81, 4 pontos 31, 3 pontos 9, 2 pontos 9, 1 pontos 20, 0 pontos 43 dolgozat.

**Gy. 3156.** *Egy háromszögről tudjuk, hogy súlyvonalainak a beírt körbe eső szakaszai egyenlő hosszúak. Következik-e ebből, hogy a háromszög szabályos?*

Javasolta: *Róka Sándor,* Nyíregyháza

**Megoldás.** Megmutatjuk, hogy a feltételekből következik a feladat állítása.

Egy $O$ középpontú $k$ kör $O$-tól különböző belső $P$ pontján át legfeljebb két egyenlő hosszúságú húr rajzolható. Ez következik abból, hogy a $k$-ba írt egyenlő hosszúságú húrok felezőpontjainak mértani helye egy a $k$-val koncentrikus $k'$ kör, amelynek a húrok érintői. Márpedig egy külső pontból egy körhöz legfeljebb két érintő húzható.




Feladatunkban a háromszögbe írt körben három egyenlő hosszúságú húr van adva, amelyek egy közös ponton (az $S$ súlyponton) mennek át. Ez csak úgy lehetséges, ha a közös pont a beírt kör középpontja, Tudjuk, hogy a háromszögbe írt kör $O$ középpontja a szögfelezők metszéspontja, ami azt jelenti, hogy a súlyvonalak egyben szögfelezők is, vagyis a szögfelező felezi a szemközti oldalt, azaz a háromszög egyenlő szárú. De mivel ez mindhárom szögfelezőre igaz, a háromszög egyenlő oldalú is.

Ezzel állításunkat igazoltuk.

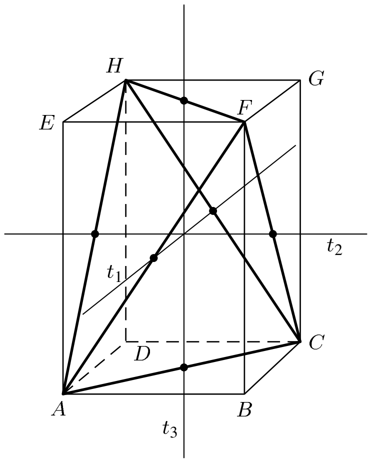
204 dolgozat érkezett. 5 pontos Babos Attila, Bákor Krisztina, Bárány Zsófi, Besenyei Ádám, Borbíró Levente, Boros M. Mátyás, Breuer János, Buruzs Ádám, Csirmaz Előd, Déri Zsolt, Fellegi Zoltán, Gelencsér Gábor, Gyarmati-Szabó István, Gyenes Zoltán, Hegedűs Ákos, Horváth 713 György, Kardos Péter, Klausz Ferenc, Kovács Roland, Nagy 314 Ádám, Reviczky Ádám, Somodi Katalin, Szilasi Zoltán, Taraza Busra, Tolvaj Nándor, Varga Balázs, Varga Szilvia, Vígh Éva és Vizer Máté megoldása. 4 pontot kapott 20, 3 pontot 66, 2 pontot 28, 1 pontot 32, 0 pontot 29 beküldő.

**Gy. 3157.** *Egy tetraéderről tudjuk, hogy súlyvonalainak a beírt gömbbe eső szakaszai egyenlő hosszúak. Következik-e ebből, hogy a tetraéder szabályos?* (**H**)

Javasolta: *Róka Sándor,* Nyíregyháza

**Megoldás.** Példát adunk olyan nem szabályos tetraéderre, amely teljesíti a feladat feltételeit.

Legyen $ABCDEFGH$ egy olyan négyzet alapú egyenes hasáb, amelyik nem kocka (lásd az *ábrát*). Ekkor az $ACFH$ tetraéder nem szabályos, mert pl. $AC \neq AH$. Viszont a hasáb szemközti lapjainak középpontjait összekötő $t_1$, $t_2$ és $t_3$ egyenesekre vonatkozó tükrözések a tetraédert önmagába viszik, sőt e tükrözések segítségével tetszőleges csúcsot tetszőleges másikba átvihetünk ($A \overset{t_3}{\to} C \overset{t_2}{\to} F \overset{t_3}{\to} H \overset{t_2}{\to} A$). Mivel ezen tükrözésnél súlyvonal képe súlyvonal, azért így tetszőleges súlyvonalat tetszőleges másikba átvihetünk. A tükrözéseknél a tetraéder beírt gömbjének a képe önmaga, mert a tetraéder képe is önmaga. Ez viszont azt jelenti, hogy a súlyvonalak beírt gömbbe eső szakaszai is egymásba átvihetők a tükrözések segítségével, vagyis egyenlő hosszúak.




Tehát a feladat kérdésére a válasz: nem.

*Pataki Péter* (Miskolc, Földes F. Gimn., 11. évf.)

*Megjegyzés.* A szabályos háromszögek síkbeli tulajdonságai közül sok térbeli megfelelőjével nemcsak a szabályos tetraéderek, hanem az ún. *egyenlő oldalú tetraéderek*, azaz az olyan tetraéderek is rendelkeznek, amelyeknek a lapjai egybevágó háromszögek. Ilyen tulajdonság pl. a súlypont és a beírható gömb középpontjának egybeesése. Az egyenlő oldalú tetraéderekről részletes leírás található pl. *Reiman István:* A geometria és határterületei c. könyvének 85–90. oldalán.

80 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Bíró Annamária Mása, Csirmaz Előd, Devecsery András, Gelencsér Gábor, Gyenes Zoltán, Harangi Viktor, Horváth 713 György, Mecz Balázs, Patakfalvi Zsolt és Pataki Péter. 4 pontos 13, 3 pontos 5, 2 pontos 5, 1 pontos 6, 0 pontos 41 dolgozat.

**Gy. 3158.** *Bizonyítsuk be, hogy ha a tízes számrendszerben felírt $\overline{abc}$ szám osztható 7-tel, akkor a $\frac{\overline{bc}+16a}{\overline{bc}-61a}$ tört egyszerűsíthető 7-tel.*

**Megoldás.** Mivel $\overline{abc}=100a+10b+c$, azért

$$\overline{bc}+16a=100a+\overline{bc}-84a=\overline{abc}-7\cdot 12a,$$

tehát osztható 7-tel.

Hasonlóan $\overline{bc}-61a=100a+\overline{bc}-161a=\overline{abc}-7\cdot 23a$, ami szintén osztható 7-tel. Tehát a számláló és a nevező is osztható 7-tel, vagyis a tört valóban 7-tel egyszerűsíthető.

*Több megoldás alapján*

538 dolgozat érkezett. 7 pontos Kiss 345 Gergely és Máthé András, 6 pontos Bákor Krisztina, Dőry Magdolna, Gerencsér Balázs, Hegedűs Vera, Oroszlány Zsófia, Pálvölgyi Dömötör, Pozsgay Balázs, Taraza Busra, Varga Szilvia, Varjú Péter és Vitális Anikó megoldása. 5 pontot kapott 515, 4 pontot 2, 3 pontot 4, 2 pontot 2, 1 pontot 1, 0 pontot 1 beküldő.

**Gy. 3160.** *Van-e olyan különböző pozitív egészekből álló végtelen hosszú számtani sorozat, amelyben a jegyek összege is számtani sorozatot alkot?*

*Angol versenyfeladat*

**Megoldás.** Legyen a sorozat első eleme $a_0$, különbsége $d$. Ekkor az $n$-edik elem $a_n=a_0+(n-1)d$.

Ha az $a_0$ $k$ jegyű, akkor válasszunk egy $m>k$ számot, és tekintsük az

$$a_{10^m}=a_0+10^m d=d\underbrace{00\ldots}_{m-k\text{ db}}a_0$$

tagot a sorozatban. Jegyeinek összege megegyezik $a_0$ jegyösszegének és $d$ jegyösszegének összegével. Így $a_{10^{m_1}}$ és $a_{10^{m_2}}$ jegyeinek összege megegyezik minden $m_1$, $m_2>k$-ra, vagyis a számjegyek összegéből alkotott számtani sorozat különbsége csak 0 lehet.

De a feladat feltételei alapján $d\neq 0$, így $a_0$ jegyeinek összege nem egyezik meg $a_{10^m}$ jegyeinek összegével.

Tehát a számjegyek összege nem alkothat számtani sorozatot.

*Bárány Zsófi* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. évf.)

117 dolgozat érkezett. 7 pontos Kiss 345 Gergely és Máthé András, 6 pontos Vizer Máté megoldása. 5 pontos Ambrus Gergely, Babos Attila, Baharev Ali, Bálint Gergely, Bárány Zsófi,

Bartha Tamás Árpád, Birkner Tamás, Csirmaz Előd, Csiszár Gábor, Darabos József, Dezső Balázs, Gelencsér Gábor, Gerencsér Balázs, Gyarmati-Szabó István, Gyenes Zoltán, Harangi Viktor, Hegedűs Ákos, Kajtár Márton, Kazinczi Csaba, Klausz Ferenc, Kovács Erika Renáta, Kunszenti-Kovács Dávid, Lábó Eszter, Lábó Melinda, Leipold Diána, Papp Dávid, Pogátsa Attila, Poór Veronika, Schlanger Judit, Sidó Péter, Szilágyi Tamás, Szűcs 702 Zsófia, Taraza Busra, Tran Thanh Long, Varjú Péter, Vértesi Vera, Vitéz Ildikó és Zábrádi Gergely megoldása. 4 pontot kapott 17, 3 pontot 8, 2 pontot 5, 1 pontot 22, 0 pontot 21 beküldő. Nem versenyszerű 3 dolgozat.

**Gy. 3161.** *Egy összejövetelre $n$ meghívott érkezett, közöttük Balogh úr. Rajtuk kívül ott van egy újságíró, aki Balogh úrral szeretne beszélni. Tudja, hogy Balogh urat senki sem ismeri, Balogh úr viszont mindenkit ismer. Az újságíró a meghívottak közül bárkihez odamehet, és bármelyik másikra rámutatva megkérdezheti tőle, ismeri-e.*

a) *Biztosan megtalálhatja-e Balogh urat $n$-nél kevesebb kérdéssel?*

b) *Hány kérdésre van szüksége, hogy megtalálja Balogh urat, ha szerencséje van?*

**Megoldás.** Az újságíró rámutatva valakire (legyen ő $X$) megkérdezi egy másiktól ($Y$-tól), hogy ismeri-e őt. Ha azt a választ kapja, hogy IGEN, akkor $X$ nem lehet Balogh úr, mivel őt senki sem ismeri. Ha azt a választ kapja, hogy NEM, akkor $Y$ nem lehet Balogh úr, mivel ő mindenkit ismer. Tehát minden kérdésnél kiesik éppen egy ember, és a végén $n-1$ kérdés után csak egy ember marad, Balogh úr. Tehát biztosan megtalálhatja $n-1$ kérdéssel.

Akkor van szerencséje, ha minél kevesebb kérdéssel találja meg Balogh urat. De akárhogy jár el, csak $n-1$ ember kizárása után találhatja meg, és egy kérdéssel mindig csak 1 embert tud kizárni, vagyis mindenképpen szüksége van $n-1$ kérdésre.

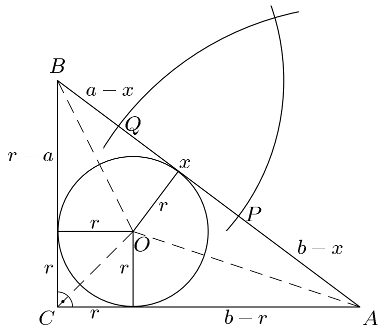
*Kurucz Keve* (Révkomárom, Selye J. Gimn., 10. évf.)

321 dolgozat érkezett. 5 pontos 160, 4 pontos 26, 3 pontos 8, 2 pontos 6, 1 pontos 44, 0 pontos 77 dolgozat.

**Gy. 3162.** *Az $a$, $b$ befogójú derékszögű háromszög átfogójának egyik végpontja köré $a$, a másik végpontja köré $b$ sugarú kört rajzolunk. Bizonyítsuk be, hogy az átfogónak a két kör közös részébe eső szakasza ugyanolyan hosszú, mint a háromszögbe írt kör átmérője.*

**I. megoldás.** Az $a$, illetve $b$ sugarú kör az átfogót a $P$ és $Q$ pontokban metszi (lásd az *ábrát*). Az $x=PQ$ jelöléssel $a-x+x+b-x=$ $=c$, amiből

(1) $$x=a+b-c.$$




A beírt körhöz az $A$ és $B$ pontokból húzott érintőszakaszok $a-r$ és $b-r$, ezért $a-r+b-$ $-r=c$, rendezve az egyenletet

(2) $$2r=a+b-c.$$

(1) és (2)-ből következik a feladat állítása.

*Rischák Rózsa* (Hódmezővásárhely, Kertvárosi Ált. Isk., 8. o.t.)

*Megjegyzés.* A bizonyítás szempontjából teljesen mindegy, hogy melyik végpontból rajzoltuk meg az $a$, illetve $b$ sugarú kört, azok helyzetére vonatkozóan semmit nem használtunk fel. A bizonyítás során csak $b-x$, illetve $a-x$ helyzete cserélődik fel.

**II. megoldás.** Az *ábrán* a $PB=a$ és $QA=b$ szakaszok úgy fedik le a $c$ átfogót, hogy a $PQ$ szakasz kétszeresen van lefedve, ezért $c=a+b-x$, így $x=a+b-c$.

Az $ABC$ derékszögű háromszög $\dfrac{a\cdot b}{2}$ területe három $O$ csúcsú háromszög területének összege, így

$$\frac{a\cdot b}{2}=\frac{a\cdot r}{2}+\frac{b\cdot r}{2}+\frac{c\cdot r}{2},$$

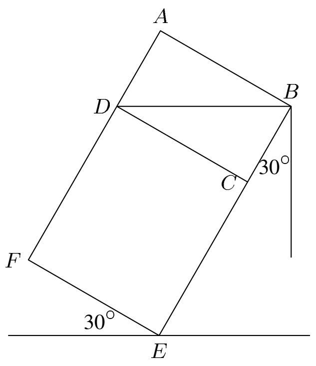
amiből $2r=\dfrac{2ab}{a+b+c}$. A feladat állításához azt kell bizonyítanunk, hogy $x=2r$, azaz $a+b-c=\dfrac{2ab}{a+b+c}$. Rendezve: azzal, hogy $(a+b)^2-c^2=2ab$, ahonnan $a^2+b^2=c^2$. Ez a Pitagorasz-tétel alapján igaz, amiből visszafelé következtetve a feladat állítását kapjuk.

*Börzsönyi Ádám* (Hódmezővásárhely, Bethlen G. Ref. Gimn., 9. évf.) és
*Harangi Viktor* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.)

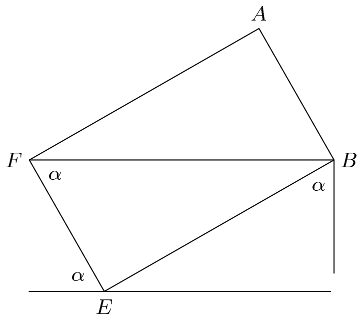
407 dolgozat érkezett. 7 pontos Börzsönyi Ádám és Harangi Viktor, 6 pontos Máthé András, Tóth 370 Ágnes és Varga Szilvi megoldása. 5 pontot kapott 130, 4 pontot 131, 3 pontot 56, 2 pontot 34, 1 pontot 17, 0 pontot 14. Nem versenyszerű 20 dolgozat.

**Gy. 3172.** *Egy függőleges tengelyű, felül nyitott egyenes körhenger alakú, vízzel színültig tele edényt* $30^\circ$*-kal megdöntünk. Mennyi víz folyik ki az edényből, ha a henger sugara* 10 cm, *magassága* 25 cm*? Szerkesszük meg azt a szöget, amellyel az edényt megdöntve, az eredetileg benne lévő víz fele folyik ki.*

**Megoldás.** Az *1. ábrán* a megdöntött hengert elölnézetben rajzoltuk le. A henger fedőlapjának képe az $AB$ szakasz, a víz kiömlése után kialakuló vízszintes vízfelszín




*1. ábra*




*2. ábra*

képe $BD$. Messük el a hengert a tengelyére merőleges, a $DC$ átmérőt tartalmazó síkkal. Az így levágott henger térfogata kétszerese a kiömlött víz térfogatának, hiszen az a két test, amelyek képe a rajzon $ABD$, illetve $CDB$, a $DB$ átmérő felezőpontjára középpontosan szimmetrikus. Az $ABD$ derékszögű háromszögből $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{AD}{AB}$, ahonnan $AD = \frac{20}{\sqrt{3}}$, ezért a kiömlött víz köbtartalma

$$\frac{1}{2} \cdot 10^2 \pi \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{10^3 \pi}{\sqrt{3}} \approx 1813{,}8 \text{ cm}^3.$$

A víz fele akkor folyik ki, ha az *1. ábrán* lerajzolt helyzetből tovább döntjük az edényt mindaddig, amíg az $FB$ felület képe vízszintes nem lesz (*2. ábra*). Ekkor az ábrán $\alpha$-val jelölt szögek egyenlők. Az $\alpha$ szöget úgy szerkesztjük meg, hogy meghúzzuk egy $20 \times 25$-ös téglalap átlóját, és $\alpha$ lesz az a szög, amelyet a téglalap átlója a rövidebbik oldallal zár be.

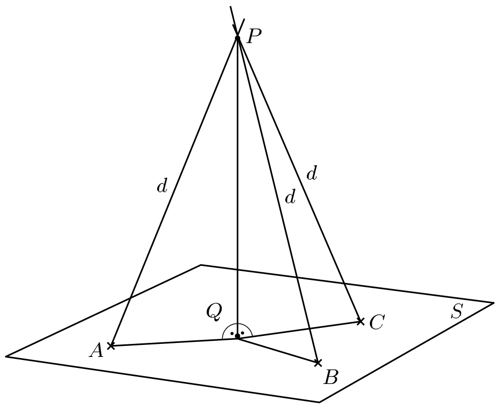
*Megjegyzés.* Az $\alpha$ értéke közelítőleg $51{,}3^\circ$. Ha azt kérdeznénk, hogy az edényt $60^\circ$-kal megdöntve mennyi víz folyik ki, a leírt módszerrel nem tudnánk választ adni, mert ekkor a kifolyó víz térfogata több, mint a henger térfogatának a fele. Ilyenkor úgy járunk el, hogy a henger magasságát egy alkalmas pozitív számmal megszorozva, egy „hosszabb" hengerre alkalmazzuk a fenti módszert.

*Lőke Tamás* (Pápa, Türr István Gimn., 10. évf.) és
*Papp Dávid* (Budapest, Szent István Gimn., 10. évf.)

294 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Boros M. Mátyás, Csirmaz Előd, Csóka Endre, Csurgó Krisztina, Fehér Gergely, Gelencsér Gábor, Gyenes Zoltán, Harangi Viktor, Hegedűs Ákos, Illés Balázs, Kardos Péter, Kelemen Kristóf, Kerékfy Péter, Kunszenti-Kovács Dávid, Lábó Eszter, Matin Tamás, Nagy 314 Ádám, Papp Dávid, Tran Thanh Long, Venter György és Zempléni Márton. 4 pontos 38, 3 pontos 31, 2 pontos 61, 1 pontos 82, 0 pontos 50, nem versenyszerű 11 dolgozat.

**Gy. 3173.** *A tér egy $P$ pontján át három egyenes halad. Szerkesszünk $P$-n át olyan síkot, amely mindegyik egyenessel ugyanakkora szöget zár be.*

**Megoldás.** Először egy olyan $S$ síkot szerkesztünk, amely mindegyik egyenessel ugyanakkora szöget zár be, de nem megy át a $P$ ponton. Ha ezt a síkot úgy toljuk el, hogy illeszkedjen $P$-re, a kívánt síkot kapjuk.




Tegyük fel, hogy a három egyenes nincs egy síkban. Mérjünk rá mindegyik egyenesre $P$-től valamelyik irányba egy adott $d$ szakaszt (*ábra*). A szakaszok $P$-től különböző végpontja legyen $A$, $B$ és $C$. Belátjuk, hogy az $A$, $B$, $C$ pontok által meghatározott $S$ sík mindegyik egyenessel ugyanakkora szöget zár be. Legyen $P$ merőleges vetülete az $S$ síkon $Q$. A $PQA$, $PQB$ és $PQC$ háromszögek egybevágók, mert megegyeznek két oldalunkban és a nagyobbikkal szemközti szögben. Ezért a $PA$, $PB$, $PC$ egyenesek $S$-sel ugyanakkora szöget zárnak be. A $d$ távolságot a három egyenesre összesen $2\cdot 2\cdot 2=8$-féleképpen mérhetjük fel; az $s$-re kapott 8 sík párosával tükrös helyzetű $P$-re, ezért a feladatnak általában $\frac{8}{2}=4$ megoldása van.

Ha a három egyenes egy síkban van, akkor ez az egyetlen olyan sík, amellyel mindegyik egyenes ugyanakkora (nulla fokos) szöget zár be.

*Máthé András* (Budapest, Apáczai Cs. János Gimn., 10. évf.)

130 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Gyenes Zoltán, Harangi Viktor, Máthé András, Szilasi Zoltán, Varga Balázs, Varjú Péter, Venter György, Vitéz Ildikó és Zábrádi Gergely. 4 pontos 16, 3 pontos 43, 2 pontos 17, 1 pontos 18, 0 pontos 20, nem versenyszerű 7 dolgozat.

## Matematika feladatok megoldásai

**F. 3190.** *Van-e olyan $1$-nél nagyobb $x$ valós szám, amely nem egész, és teljesül rá a következő egyenlőtlenség?*

$$\{x\}+\{x^3\}+\{x^5\}+\ldots+\{x^{99}\}<\frac{1}{2^{99}}$$

**Megoldás.** Keressük $x$-et $n^{99}+\frac{1}{n}$ alakban, ahol $n$ 1-nél nagyobb egész. Ekkor

$$\{x^{2k+1}\}=\left\{\left(n^{99}+\frac{1}{n}\right)^{2k+1}\right\}=\left\{(n^{99})^{2k+1}+\binom{2k+1}{1}(n^{99})^{2k}\cdot\frac{1}{n}+\right.$$
$$\left.+\binom{2k+1}{2}(n^{99})^{2k-1}\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots+\binom{2k+1}{2k}n^{99}\cdot\frac{1}{n^{2k}}+\frac{1}{n^{2k+1}}\right\}=$$
$$=\left\{\sum_{i=0}^{2k+1}\binom{2k+1}{i}n^{198k-100i+99}\right\}.$$

Ha $0\leqslant k\leqslant 49$ és $0\leqslant i\leqslant 2k$, akkor $198k-100i+99>0$ egész. Tehát ebben az esetben

$$\{x^{2k+1}\}=\left\{\binom{2k+1}{2k+1}n^{198k-100(2k+1)+99}\right\}=\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{2k+1}\right\}=\left(\frac{1}{n}\right)^{2k+1}.$$

Így
$$\{x\}+\{x^3\}+\ldots+\{x^{99}\}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{1}{n^{99}}=$$
$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{n^2}\right)^{50}}{1-\frac{1}{n^2}}<\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}=\frac{n}{n^2-1}<\frac{n+1}{n^2-1}=\frac{1}{n-1}.$$

Azaz, ha $n > 2^{99} + 1$, úgy $x = n^{99} + \frac{1}{n}$ választása mellett

$$\{x\} + \{x^3\} + \ldots + \{x^{99}\} < \frac{1}{n-1} \leqslant \frac{1}{2^{99}}.$$

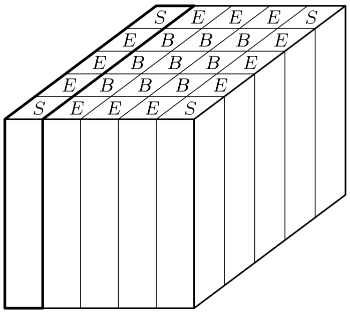
*Sarlós Ferenc* (Baja, III. Béla Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

147 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Benke András, Homolya Dániel, Horváth 472 András, Lippner Gábor, Máthé András, Nyul Gábor, Pataki Péter és Szabadka Zoltán. 5 pontos 94, 4 pontos 24, 3 pontos 8, 2 pontos 5, 1 pontos 3, 0 pontos 5 dolgozat.

**F. 3195.** *Egy kocka alakú torta teljes felülete (az alja is) csokoládéval van bevonva. A tortát $K$ ember között szeretnénk szétosztani úgy, hogy mindenki ugyanannyi tésztát és ugyanannyi csokoládébevonatot kapjon. Ezt úgy kívánjuk megvalósítani, hogy $N \times N \times N$ egyforma kis kockára osztjuk a tortát, és mindenkinek ugyanannyi darabot adunk, ügyelve arra is, hogy a kapott részek csokis oldalainak együttes területe megegyezzen. Megtehető-e ez tetszőleges $K$-ra? Legalább hány részre kell felvágni a tortát, ha $K = 1997$?*

Javasolta: *Blázsik Zoltán,* Szeged

**Megoldás.** A tortát $K$ ember között kell elosztani, egy ember $\frac{N^3}{K}$ kis kockát kap, és $\frac{6N^2}{K}$ darab $1 \times 1$-es csokoládébevonatot. Ezeknek a törteknek egész számoknak kell lenniük, ezért ha $K$ prím, akkor $K$ osztója lesz $N$-nek.




Először megmutatjuk, hogy a kívánt felosztás minden $K \geqslant 2$ természetes számra elvégezhető. Tegyük fel egyelőre, hogy $K \geqslant 4$, és legyen $K = N$. Vágjuk fel a tortát függőleges síkokkal $L$ darab „függőleges szeletre”. Az *ábra* bal oldalán lévő ilyen szeletet vastag vonallal rajzoltuk meg. A két szélső szelet $4K + K^2$, a többi (belső) szelet $4K$ bevonatot tartalmaz. Minden „függőleges szelet” $K$ darab függőleges oszlopra vágható szét. Ezeket az oszlopokat három csoportba oszthatjuk: sarokoszlopok, fedőlapjukon $S$ jelöléssel, élközép-oszlopok, fedőlapjukon $E$ jellel; belső oszlopok $B$ jelöléssel. Egy $E$ jelű oszlopon $K$-val több bevonat van, mint egy $B$ jelűn, egy $S$ jelű oszlopon pedig $K$-val több, mint egy $E$ jelűn. Ezután a tortát a $K$ ember között úgy osztjuk el, hogy mindenki kap egy „függőleges szeletet”, és az a kettő, aki szélső szeletet kapott, a neki jutó $K-2$ darab $E$ jelű oszlopot elcseréli $B$ jelűre azokkal, akik belső szeletet kaptak, vigyázva arra, hogy minden belső szeletben két oszlop cserélődjön ki. A csere lehetséges, mert $K \geqslant 4$ miatt $K-2$ belső szelet van, és minden belső szeletben legalább két $B$ jelű oszlop van. A cserék után a bevonatok száma mindegyik osztozkodónál $6K$ lesz. Ugyanis a két szélső szeletnél a bevonatok száma $K(K-2)$-vel csökkent, a belső szeleteknél pedig $2K$-val növekedett.

Ha $K = 2$, a tortát 8 kis kockára vágva mindketten 4 ugyanolyan darabot kapnak. Könnyen megoldható a $K = 3$ eset is.

Mivel 1997 prím, és mint fent megállapítottuk, $K$ osztója $N$-nek, a $K=1997$ esetben legalább $1997^3$ részre kell vágni a tortát.

*Birkner Tamás* (Budapest, Deutsche Schule, 5. évf.)

113 dolgozat érkezett. 5 pontos Balogh Attila, Birkner Tamás, Csikvári András, Csirmaz Előd, Csóka Endre, Dályay Virág, Devecsery András, Fehér Lajos Károly, Gáspár Merse Előd, Gerbicz Róbert, Gyenes Zoltán, Hartmann Miklós, Horváth 202 Gábor, Juhász András, Keszegh Balázs, Kőműves Balázs, Kutalik Péter, Léka Zoltán, Lengyel Tímea, Less Áron, Lippner Gábor, Lovas Róbert, Lukács László, Mátyási István, Méder Áron, Micskei Zoltán, Patakfalvi Zsolt, Pataki Péter, Pogány Ádám, Szabadka Zoltán, Szilágyi Judit, Taraza Busra, Terék Zsolt, Vaik István, Végh A. László és Zawadowski Ádám megoldása. 4 pontot kapott 12, 3 pontot 11, 2 pontot 20, 1 pontot 21, 0 pontot 13 beküldő.

**F. 3198.** *Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok különböző pozitív egészek. Bizonyítsuk be, hogy*

$$\left(a_1^7+a_2^7+\ldots+a_n^7\right)+\left(a_1^5+a_2^5+\ldots+a_n^5\right)\geqslant 2\left(a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3\right)^2.$$

**Megoldás.** Mivel az $a_i$-k különbözőek, feltehetjük, hogy $a_1<a_2<\ldots<a_n$. A feladatot az $n$-re vonatkozó teljes indukcióval fogjuk megoldani.

Ha $n=1$, akkor $a_1^5+a_1^7\geqslant 2a_1^6$ bizonyítandó. Ezt $a_1^3$-nal osztva $a_1^2+a_1^4\geqslant 2a_1^3$ adódik, amivel ekvivalens a következő: $(a_1^2-a_1)^2\geqslant 0$. Ez utóbbi nyilvánvaló; egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $a_1=1$.

Tegyük fel ezután, hogy valamely $n$-re teljesül a feladat állítása, majd mutassuk meg, hogy ekkor teljesül a következő is: (tetszőleges $a_1<a_2<\ldots<a_{n+1}$ pozitív egészekre):

$$a_1^5+\ldots+a_n^5+a_{n+1}^5+a_1^7+\ldots+a_n^7+a_{n+1}^7\geqslant 2(a_1^3+\ldots+a_n^3+a_{n+1}^3)^2,$$

azaz

$$\begin{gathered}(a_1^5+\ldots+a_n^5)+(a_1^7+\ldots+a_n^7)+a_{n+1}^5+a_{n+1}^7\geqslant\\ \geqslant 2(a_1^3+\ldots+a_n^3)^2+2(a_{n+1}^6+2a_1^3a_{n+1}^3+\ldots+2a_n^3a_{n+1}^3).\end{gathered}$$

Az indukciós feltevés következtében a bal oldalon lévő két zárójeles kifejezés összege nem kisebb, mint a jobb oldal első tagja, ezért elegendő azt bizonyítani, hogy

$$a_{n+1}^5+a_{n+1}^7\geqslant 2(a_{n+1}^6+2a_1^3a_{n+1}^3+\ldots+2a_n^3a_{n+1}^3).$$

Osszuk el mindkét oldalt $a_{n+1}^3$-nel, és rendezzük a következőképpen:

$$a_{n+1}^4+a_{n+1}^2-2a_{n+1}^3\geqslant 4(a_1^3+\ldots+a_n^3),$$

majd 4-gyel osztva

$$\left(\frac{(a_{n+1}-1)a_{n+1}}{2}\right)^2\geqslant a_1^3+\ldots+a_n^3. \tag{1}$$

A megoldás utolsó lépésében felhasználjuk az

$$(2)\qquad 1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

összefüggést, amelyet könnyen beláthatunk (az $n$ szerinti) teljes indukcióval.

Most $(a_{n+1}-1)$-et írva $n$ helyébe (2)-ben:

$$(3)\qquad 1^3+2^3+\ldots+(a_{n+1}-1)^3=\left(\frac{(a_{n+1}-1)a_{n+1}}{2}\right)^2.$$

Ezután (1)-ben a bal oldal helyébe beírjuk (3) bal oldalát:

$$1^3+2^3+\ldots+(a_{n+1}-1)^3\geqslant a_1^3+\ldots+a_n^3.$$

Mivel $a_1<a_2<\ldots<a_{n+1}$, az állítás nyilvánvalóan igaz. Egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha $a_i=i$.

Ezzel a feladatot megoldottuk.

*Megjegyzés.* A megoldó felhasználta *Bogdán Zoltán:* Matematika feladatok – ötletek – megoldások c. könyvének II. 69. oldal 42. feladatát.

*Balogh Attila* (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., 11. évf.)

67 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Baharev Ali, Balogh Attila, Bárány Kristóf, Barát Anna, Csikvári András, Dályai Virág, Gelencsér Gábor, Gerbicz Róbert, Gueth Krisztián, Hartmann Miklós, Juhász András, Léka Zoltán, Lippner Gábor, Lukács László, Mansur Boase, Moór Csaba, Oláh 407 Szabolcs, Páles Csaba, Pataki Péter, Szabó 130 Gábor, Székelyhidi Gábor, Terpai Tamás, Vaik István, Végh A. László, Vidor Anna, Zábrádi Gergely és Zawadowski Ádám. 4 pontos 23, 3 pontos 7, 2 pontos 1, 1 pontos 5, 0 pontos 4 dolgozat.

**F. 3203.** *Bizonyítsuk be, hogy egy* 15 *elemű halmaznak létezik* 15 *darab olyan* 6 *elemű részhalmaza, amelyek közül bármely két különböző metszetének elemszáma* 1 *vagy* 3.

Javasolta: *Dr. Spissich László,* Pápa

**Megoldás.** A 15 elemű halmazt képzeljük el egy 6 csúcsú teljes gráf éleiként. A feladatban szereplő 6 elemű részhalmazok legyenek a gráf 4 csúcsú teljes részgráfjai. Ez megfelelő lesz, mert minden ilyen részgráfnak 6 éle van, és összesen $\binom{6}{4}=15$ darab van belőlük. Már csak azt kell belátni, hogy bármely két különböző 4 csúcsú teljes gráfnak 1 vagy 3 közös éle van. Két 4 csúcsú teljes gráfnak vagy 2, vagy 3 közös csúcsa lehet. Az első esetben 1 közös élük van, a második esetben pedig 3. Így az állítást beláttuk.

*Pap Júlia* (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

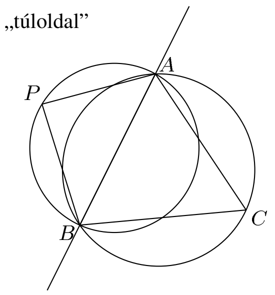
*Megjegyzés.* Sokan bizonyítás helyett egy $15\times 15$-ös táblázatot küldtek be, ha ez helyes volt, 4 pontot kaptak.

28 dolgozat érkezett. 5 pontot kaptak: Gyenes Zoltán, Lippner Gábor, Pap Júlia, Pogány Ádám, Sarlós Ferenc és Végh A. László. 4 pontos 13, 0 pontos 6 dolgozat. Nem versenyszerű 3.

## Nehezebb matematika feladatok megoldása

**N. 159.** *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges konvex $n$-szöget háromszögekre lehet bontani $n-3$ egymást nem metsző átlójával úgy, hogy a sokszögnek egy csúcsa se szerepeljen valamelyik háromszög körülírt körének belsejében.*

**Megoldás.** Először tekintsük az $n$-szög egyik oldalát. Válasszuk ehhez a sokszög (egyik) olyan csúcsát, amelyből ez az oldal a legnagyobb szögben látszik. Ha az oldal végpontjait összekötjük ezzel a csúccsal, akkor egy megfelelő háromszöget kapunk.



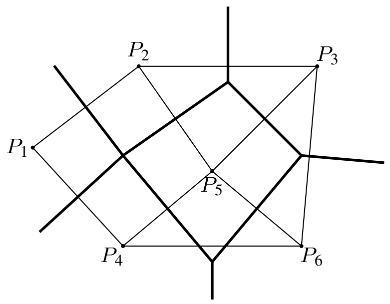

*1. ábra*

Tegyük fel, hogy eljutottunk a háromszögek konstrukciójával egy $ABC$ háromszögig úgy, hogy eddig minden háromszög „jó”, azaz egyik köré írt kör sem tartalmazza belsejében a sokszög semelyik csúcsát és az $ABC$ háromszög $AB$ oldalán túl még nincs kijelölve egyetlen háromszög sem. Most jelöljük ki az $ABP$ háromszöget is, amire $P$ az $AB$ egyenes túloldalán van, és belőle $AB$ a lehető legnagyobb szögben látszik. Az nyilvánvaló, hogy $k_{ABP}$ nem tartalmaz „túloldali” csúcsot. A $C$ felőli oldalon sem tartalmaz csúcspontot, mert $k_{ABP}$-nek ez a része $k_{ABC}$ belsejében van (hiszen a túloldali $P$ $k_{ABC}$-n kívül van) és a $k_{ABC}$-ről feltettük, hogy jó.

Ezzel egy megfelelő háromszöggel bővítettük az ábrát. Amikor már nem lehet folytatni az eljárást, akkor a háromszögek lefedik az $n$-szöget. Az is világos, hogy $n-3$ átlót húztunk be, és ezek nem metszik egymást.

*Pap Júlia* (Debrecen, Fazekas M. Gimn., III. o.t.)

*Megjegyzések.* 1. Végh A. László úgy adta meg a háromszögeket, hogy a köréírt köreik sugarainak összege minimális legyen.




*2. ábra*

2. Bérczi Gergely az ún. Voronoi-mozaik segítségével azt is belátta, hogy az állítás akkor is igaz, ha a pontok nem alkotnak konvex sokszöget, és a „háromszögelés” lényegében egyértelmű. (Azaz ha pl. nincs négy pont egy körön, akkor egyértelmű.)

A Voronoi-mozaik a következő: adott a sík $n$ pontja, minden ponthoz rendeljük hozzá az $n$ pont közül a legközelebbit. Így $n$ tartományra esik szét a sík, mind az $n$ ponthoz tartozik egy-egy.

Két pontot akkor kössünk össze, ha szomszédos tartományban fekszenek. Így már majdnem felbontottuk háromszögekre a pontok konvex burkát: ha maradt több csúcsú sokszög, akkor az a $P_1P_2P_5P_4$ húrnégyszöghöz hasonlóan helyezkedik el. Az ilyen húrsokszögeket tetszőlegesen felbonthatjuk.

12 dolgozat érkezett. 6 pontos Bérczi Gergely, 5 pontos Juhász András, Kun Gábor, Lippner Gábor, Lukács László, Pap Júlia és Végh A. László megoldása. 4 pontot kapott 2, 3 pontot 3 beküldő.

**N. 161.** *Legyenek a* $p$ *polinom együtthatói legfeljebb* 1998 *abszolút értékű egész számok, és* $p(2000)$ *prímszám. Igazoljuk, hogy* $p$ *nem bontható fel két, legalább elsőfokú egész együtthatós polinom szorzatára.*

Javasolta: *Pap Gyula,* Debrecen*, Braun Gábor,* Budapest

**Megoldás.** Először lássuk be, hogy $p$ komplex gyökei 1999-nél kisebb abszolút értékűek. Tegyük fel, hogy ezzel ellentétben $|x| \geqslant 1999$, $x \in \mathbf{C}$-re

$$p(x) = a_n x^2 + \ldots + a_0 = 0 \qquad (a_n \neq 0).$$

Ekkor a feladat feltételeit kihasználva:

$$|x^n| \leqslant |a_n x^n| = |a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0| \leqslant$$
$$\leqslant |a_{n-1}x^{n-1}| + \ldots + |a_0| \leqslant 1998 \cdot \left(|x|^{n-1} + \ldots + 1\right) =$$
$$1998 \cdot \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1} \leqslant 1998 \cdot \frac{|x^n| - 1}{1999 - 1} = |x^n| - 1.$$

Ez ellentmondás, tehát $p(x) = a_n(x - x_1)\ldots(x - x_n)$, ahol $|x_i| < 1999$.

Tegyük fel, hogy a feladat állítása hamis, azaz $p = 9 \cdot h$, ahol $g$ és $h$ egész együtthatós polinomok. Így $p(2000) = g(2000) \cdot h(2000)$ prím, azaz valamelyik tényező 1 abszolút értékű. Legyen például $|g(2000)| = 1$. Nyilván

$$g(x) = b \cdot (x - x_{i_1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i_k})$$

(ahol $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$ és $b \neq 0$ egész), hiszen $g \mid p$. Ezért

$$1 = |g(2000)| = |b| \cdot |2000 - x_{i_1}| \cdot \ldots \cdot |2000 - x_{i_k}|.$$

Ez viszont ellentmondás, mert a jobb oldali szorzat 1-nél nagyobb abszolút értékű $|x_i| <$ $< 1999$ miatt.

*Megjegyzés.* Az állítás és a bizonyítás is helyes marad, ha 2000 helyére nagyobb egészt írunk.

5 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Bérczi Gergely, Lukács László és Pataki Péter, 4 pontot Hegedűs 396 Péter. 0 pontos 1 dolgozat.

## A pontversenyben kitűzött C gyakorlatok (505–508.)

**C. 505.** Egy naptári hetet nevezzünk párosnak vagy páratlannak aszerint, hogy a benne szereplő napok hónapon belüli sorszámainak összege páros, illetve páratlan. Az első januári hétfőtől kezdődő 52 egymás utáni hét közül hány lehet páros?

**C. 506.** Határozzuk meg mindazokat az $m$ és $n$ egész számokat, amelyek esetén a következő egyenlet gyökei ugyancsak egész számok:

$$(2m-3)(n-1)x^2+(2m-3)(n-1)(m-n-4)x-2(2m-3)(n-1)(m-n-2)-1=0.$$

**C. 507.** Mi az $y=x^2+tx+1$ egyenletű parabolák tengelypontjainak (csúcspontjainak) mértani helye? ($t$ valós paraméter.)

**C. 508.** Egyenes pályán 26 m/s sebességgel haladó vonat ablakából kitekintve a távolban egy henger alakú gabonatárolót látunk. 5 másodperc alatt a tárolóhoz állandóan közeledve távolságunk a tárolótól 100 m-rel csökken, miközben a tároló látszólag $5^\circ$-kal elfordul. Mennyi ideig közeledünk még a tárolóhoz?

❄

**Beküldési határidő: 1998. június 15.**
**Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)**
**Budapest, Pf. 47. 1255**

❄

## A pontversenyben kitűzött gyakorlatok (3206–3213.) és feladatok (3232–3237.)

**Gy. 3206.** Egy egyenesen adott $2n$ különböző pont. Közülük az $A_1, A_2, \dots, A_n$ piros színű és a $B_1, B_2, \dots, B_n$ kék színű. E pontok által meghatározott szakaszok mint átmérők fölé köröket rajzolunk. A körvonalakat pirossal vagy kékkel színezzük aszerint, hogy az átmérőjük végpontjai azonos vagy különböző színűek. Mutassuk meg, hogy a kék körvonalak összhossza legalább akkora, mint a pirosaké.

**Gy. 3207.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy szám felírható $3a^2+32b^2$ alakban, ahol $a$ és $b$ természetes számok, akkor a 97-szerese is felírható ilyen alakban.

*Litván versenyfeladat*

**Gy. 3208.** Oldjuk meg az egész számok halmazán az

$$x(x-y)+y(y-z)+z(z-x)=1$$

egyenletet.

**Gy. 3209.** Mely $p(x)$ polinomra teljesül az

$$(x-16)p(2x)=16(x-1)p(x)$$

egyenlőség? (**H**)

*Ír versenyfeladat*

---

Általános iskolások részére javasolt példák: **C. 505., Gy. 3206., Gy. 3207., Gy. 3210.**

**Gy. 3210.** A húrtrapézt két átlója négy háromszögre bontja. Bizonyítsuk be, hogy bármelyik háromszög köré írt kör középpontja rajta van az átlók metszéspontjából a trapéz oldalaira állított merőleges egyenesek valamelyikén.

**Gy. 3211.** Végtelen sok téglalapot úgy helyeztünk el egy derékszögű koordinátarendszerben, hogy mindegyiknek egyik oldala az $x$, egy másik oldala az $y$ tengelyre illeszkedik. A téglalapok origóval szemközti csúcsának koordinátái pozitív egész számok. Bizonyítsuk be, hogy van a téglalapok között két olyan, amelyek közül az egyik tartalmazza a másikat.

**Gy. 3212.** A sík 6 adott pontja közül semelyik három nincs egy egyenesen. A pontpárokat összekötő szakaszok közül hányat kell meghúzni ahhoz, hogy biztosan legyen olyan háromszög, amelynek csúcsai az adott pontok közül valók?

**Gy. 3213.** Adott egy konvex ötszög kerületén egy $P$ pont. Szerkesszünk olyan $P$-n átmenő egyenest, amely felezi az ötszög területét. (**H**)

❄

**Beküldési határidő: 1998. június 15.**
**Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)**
**Budapest, Pf. 433. 1371**

❄

**F. 3232.** Keressük meg az

$$\frac{x}{y}=\frac{\left(x^2-y^2\right)^{\frac{y}{x}}+1}{\left(x^2-y^2\right)^{\frac{y}{x}}-1}$$

egyenlet pozitív egész megoldásait.

Javasolta: *Bencze Mihály,* Brassó

**F. 3233.** Jelölje $b(n)$ a $k+\frac{n}{k}$ kifejezés minimumát, ahol $k$ a pozitív egészeken fut végig. Bizonyítsuk be, hogy ha $n$ természetes szám, akkor $[b(n)]=\left[\sqrt{4n+1}\right]$.

**F. 3234.** Egy körmérkőzéses bajnokságon 23 csapat vett részt. Minden csapat az összes többivel pontosan egyszer játszott. Azt mondjuk, hogy 3 csapat körbeverte egymást, ha csak az egymás közötti játékot nézve, mindegyikük pontosan egyszer nyert. Legfeljebb hány körbeverés történhetett a bajnokság alatt?

Amerikai vizsgafeladat

**F. 3235.** Két 1998-szög oldalfelező pontjai egybeesnek. Igaz-e, hogy egyenlő a területük?

**F. 3236.** Adott egy $K$ konvex sokszög és a belsejében a $P$ pont. Mutassuk meg, hogy van olyan irány, hogy az azzal párhuzamos egyenesek közül a $P$-n átmenőnek esik a leghosszabb darabja $K$ belsejébe.

**F. 3237.** Mutassuk meg, hogy ha egy négyszög alapú hasáb testátlói egy ponton mennek át, akkor a hasáb paralelepipedon.

## A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (175–178.)

**N. 175.** Egy kör kerületére $n$ darab természetes számot írtunk. Egy lépés során minden szomszédos számpár közé beírjuk a különbségük abszolút értékét, majd az eredeti számokat kitöröljük. Mely $n$-ekre biztos az, hogy véges sok lépés után már csupa nulla marad a körön?

**N. 176.** Egy $n\times n$-es táblázaton egy bábu fel, le, balra, jobbra tud egyet-egyet lépni. Elindul a bal felső sarokból, és bejár minden mezőt pontosan egyszer. Ezt a bábu $t_n$-féle útvonalon tudja megtenni. Bizonyítsuk be, hogy elég nagy $n$-re

$$1{,}25<\sqrt[n^2]{t_n}<2.$$

Adható-e jobb felső becslés?

**N. 177.** Egy kártyakeverő gép a következő keverési lépést bármely $n$-re el tudja végezni:

$$(1,2,3,\ldots,2n)\to(2n,1,2n-1,\ldots,n+1,n).$$

Van 1998 db különböző lapunk. Ezeket kiegészítjük $2n-1998$ új lap hozzávételével, majd ezt a $2n$ lapból álló csomagot valamilyen sorrendbe rendezve a gépbe helyezzük. Elérhető-e (az $n$ és a kezdeti sorrend alkalmas megválasztásával), hogy az 1998 lap egymáshoz képest minden lehetséges sorrendben előforduljon véges sok keverési lépés után?

**N. 178.** Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pozitív egész $n$-re létezik olyan valós számokból álló, $n$ elemű halmaz, amelynek bármely három különböző $x$, $y$ és $z$ elemére

$$\text{vagy}\qquad |x-y|>\left(1+\frac{1}{n^{1,6}}\right)|x-z|,\qquad \text{vagy}\qquad |x-z|>\left(1+\frac{1}{n^{1,6}}\right)|x-y|$$

teljesül.

❄

## MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
## (Volume 48. No. 5. May 1998)

**New exercises for practice** (see page 291): **C. 505.** Let us call a calendar week even or odd according to the parity of the sum of the numbers of the days in the seven dates making up that week. How many even weeks can there be among any 52 consecutive weeks that counted from the first Monday in January? **C. 506.** Find all pairs of integers $m$ and $n$ for which the equation

$$(2m-3)(n-1)x^2+(2m-3)(n-1)(m-n-4)x-2(2m-3)(n-1)(m-n-2)-1=0$$

has integer solutions. **C. 507.** Find the locus of the vertex of the parabola $y=x^2+tx+1$, where $t$ varies through the real numbers. **C. 508.** Our train travels on a straight railway track at a constant velocity of 26 m/s. Looking out of the window, we notice a cylindrical grain silo. As we approach the silo for 5 seconds, our distance from the silo is reduced by 100 m, while the silo seems to turn through an angle of $5^\circ$. How much longer do we continue to get closer to the silo?

**New exercieses: Gy. 3206.** Given $2n$ distinct points on a line; points $A_1$, $A_2$, $\ldots$, $A_n$ are red and points $B_1$, $B_2$, $\ldots$, $B_n$ are blue. Consider all segments determined by the given points, and draw circles with these segments as diameters. A circle is then coloured red if the endpoints of its diameter are of the same colour. The other circles are coloured blue. Prove that the total length of the perimeters of the blue circles is at least as large as that of the red circles. **Gy. 3207.** A certain number can be written in the form $3a^2+32b^2$, where $a$ and $b$ are natural numbers. Multiply the number by 97. Prove that the new number can be expressed in that form too. **Gy. 3208.** Solve the equation $x(x-y)+y(y-z)+z(z-x)=1$ in the set of integers. **Gy. 3209.** Which polynomials $p(x)$ satisfy the following equality: $(x-16)p(2x)=16(x-1)p(x)$? **Gy. 3210.** An inscribed trapezium is divided by its two diagonals into four triangles. Prove that each triangle has a circumcentre lying on one of the perpendicular lines dropped from the intersection point of the diagonals onto the sides of the trapezium. **Gy. 3211.** There are given infinitely many rectangles in a Cartesian coordinate system such that each rectangle has an edge lying on the $x$ axis and another one lying on the $y$ axis. Moreover, the vertices of the rectangles opposite to the origin have integer coordinates. Prove that there are two rectangles such that one is contained in the other. **Gy. 3212.** There are given 6 points in the plane, no three collinear. A few pairs of the given points are connected with line segments. At least how many segments must be drawn so that there should always be a triangle formed with its vertices being three of the given points? **Gy. 3213.** Given a convex pentagon and a point $P$ on its boundary, construct a line passing through $P$ that halves the area of the pentagon.

**New problems: F. 3232.** Find all positive integer solutions to the equation $\frac{x}{y}=$ $=\frac{\left(x^2-y^2\right)^{\frac{y}{x}}+1}{\left(x^2-y^2\right)^{\frac{y}{x}}-1}$. **F. 3233.** Let $b(n)$ denote the minimum value of expression $k+\frac{n}{k}$, where $k$ is a positive integer. Prove that for any natural number $n$, $[b(n)]=[\sqrt{4n+1}]$. **F. 3234.** In an all-aginst-all tournament, three teams are said to 'beat around' each other if each of them wins exactly once when only games among those three teams are considered. At most how many beat-arounds may happen in a tournament with 23 participating teams? **F. 3235.** Two 1998-gons are drawn in the plane such that the midpoints of their sides coincide. Does it imply that the polygons have equal areas? **F. 3236.** Given a convex polygon $K$ and a point $P$ inside the polygon, prove that there exists a direction such that of all lines parallel to it, the one passing through $P$ has the longest segment in $K$. **F. 3237.** The diagonals of a certain four-sided prism pass through a common point. Prove that the prism is a parallelopiped.

**New advanced problems: N. 175.** There are $n$ natural numbers written along a circle. We write the absolute value of their difference between every two consecutive numbers, and then erase the original numbers. We may repeat this procedure a finite number of times. Determine those values of $n$ for which all numbers along the circle will be eventually zero, regardless of the particular choice of the original numbers. **N. 176.** A piece is moving on an $n\times n$ board, its moves are restricted to one horizontal or one vertical step at a time. It starts at the upper left corner of the board and visits each field of the board exactly once. Let $t_n$ denote the number of different possible routes of the piece. Prove that $1.25<\sqrt[n^2]{t_n}<2$, if $n$ is large enough. Is it possible to improve upon the upper bound? **N. 177.** An automatic card shuffler is designed to shuffle, for any positive integer $n$, a deck of $2n$ cards according to the following rule: $(1,2,3,\ldots,2n)\to(2n,1,2n-1,\ldots \ldots,n+1,n)$. We start with 1998 different cards. We complete the deck by adding $2n-1998$ new cards to it, and feed the deck of $2n$ cards, in some order, to the machine. Is it possible to choose $n$ and the order of the cards in such a way that every permutation of the original 1998 cards should occur in some finite number of shuffles? **N. 178.** Let $n$ denote any positive integer. Prove that there exists a set of $n$ real numbers in which any three distinct elements $x$, $y$, $z$ satisfy either $|x-y|>\left(1+\frac{1}{n^{1,6}}\right)|x-z|$ or $|x-z|>\left(1+\frac{1}{n^{1,6}}\right)|x-y|$.