A sorbanállás elmélete

Bizonyára mindenkivel megesett már, hogy valahol sorban kellett állnia. Ha elég hosszú volt a sor, akkor talán olyan kérdéseken is eltöprengett, hogy vajon mennyi ideig fog várhatólag sorban állni, hány embert szolgálnak ki addig (ezt persze, ha egy sor van, meg is számolhatja, de ha már kettő, akkor nem ilyen könnyű eldönteni), vagy hogyha beállítanának még egy kiszolgálót, az mennyire csökkentené a várakozási időt. Ha nagyobb volt a beleérző képessége, akkor az is eszébe juthatott, hogy mennyit kell dolgoznia a kiszolgálónak, milyen hosszúak az egyfolytában foglalt, illetve üres periódusok. Ha pedig a sorbanállónak fejlett az üzleti érzéke, akkor azt is meggondolhatta, hogy megérné-e egy újabb kiszolgálót beállítani: mennyivel több lenne akkor az adott időn belül kiszolgált személyek száma, vagy – ha a sor hossza korlátozott – mennyivel kisebb lenne az esetleg ki nem szolgáltak aránya.

Ilyen és ezekhez hasonló kérdésekkel foglalkozik a *sorbanállás*, más néven *tömegkiszolgálás* elmélete.

1. A tömegkiszolgálási rendszer elemei

Nézzük meg, milyen jellemzői lehetnek egy tömegkiszolgálási rendszernek. A két legfontosabb dolog, amit meg kell vizsgálnunk, az az igények beérkezésének dinamikája és a kiszolgálásuk ideje. Ezek lehetnek előre pontosan meghatározottak, azaz determinisztikusak, illetve részben vagy teljesen véletlentől függőek, azaz sztochasztikusak. Teljesen determinisztikus tömegkiszolgálási rendszer például az a futószalag, ahol 1 percenként érkezik egy munkadarab, amelynek megmunkálása 0,9 percig tart. Érezhető, hogy az ilyen egyszerű rendszerek vizsgálata semmilyen elvi nehézséget nem okoz, és ezek kedvéért nem építettek volna fel egy egész elméletet. Az is látható, hogy ez a modell legtöbbször nem is írja le hűen a valóságot. Honnan tudjuk ugyanis, hogy egy munkadarab megmunkálása pontosan 0,9 percig tart? Általában csak azt tudjuk, hogy például a munka 0,8 percnél hosszabb, de 1 percnél rövidebb ideig tart, továbbá hogy az átlagos megmunkálási idő 0,9 perc. Így el is érkeztünk a sztochasztikus kiszolgálási időhöz. Ezt pontosabban úgy fogalmazhatjuk meg, hogy adva van egy $B(x)$ eloszlás, amely a kiszolgálás idejét írja le; vagyis annak a valószínűsége, hogy a kiszolgálás x-nél rövidebb ideig tart, egyenlő $B(x)$-szel.

Az igények beérkezésének dinamikáját, mint azt az előbbi példában tettük, általában az egymás utáni beérkezések között eltelt idővel írjuk le. Ha ez sztochasztikus, akkor ennek is az eloszlását adjuk meg. Annak a valószínűségét, hogy egy ilyen beérkezési időköz rövidebb, mint egy t időintervallum, $A(t)$-vel jelöljük. Legtöbbször feltesszük, hogy a különböző beérkezési időközök – például az 1. és 2. igény beérkezése között eltelt idő és a 2. és 3. igény beérkezése között eltelt idő – egymástól független és azonos eloszlású valószínűségi változók.

A tömegkiszolgálási rendszer jellemzői még: a maximális lehetséges sorhossz (K), a kiszolgáló egységek száma (n), illetve a kiszolgálási sorrend. Ez utóbbi általában azt az elvet követi – mint ahogy az a valós életben megszokott –, hogy aki korábban érkezik, azt hamarabb kiszolgálják (ezt az elterjedt angol rövidítéssel FIFO, azaz First In First Out elvnek hívják), de lehetnek ettől eltérő kiszolgálási módok is, például ha egynémely igényt soron kívül szolgálnak ki (erre is találhatunk példát az életben). Ha nincs lehetőség várakozásra, azaz $K=0$, akkor *elutasításos rendszerről* beszélünk. Ilyen például egy telefonközpont, ahol ha nem ad vonalat a készülék, akkor újra be kell lépnünk a rendszerbe, vagyis le kell tennünk és újra próbálkozni. Alapesetnek tekintjük, és külön nem is említjük, ha nincs korlátozva a sor hossza ($K=\infty$) és egy kiszolgáló van.

Ha ismerjük a fentebb felsorolt adatokat, akkor számos, a rendszerre jellemző mennyiséget tudunk kiszámolni (legalábbis elvileg). Például megkérdezhetjük, hogy milyen valószínűséggel lesz $0,1,2,\ldots,K$ sorbanálló egy adott pillanatban, vagy mennyi lesz az átlagos sorhossz, és így tovább. Ahhoz, hogy ezekre a kérdésekre választ adjunk, meg kell ismerkedni egy újabb fogalommal.

2. Születési-halálozási folyamatok

Tegyük fel, hogy elefántokat tenyésztünk, amelyek születnek és meghalnak az idő folyamán úgy – ahogy az az elefántoknál szokásos –, hogy egyszerre csak egy elefántbébi születik, az is eléggé ritkán, szinte soha nem fordul elő, hogy nagyon rövid időn belül két elefánt születne. Cserébe a halálozások is ugyanilyen ritkák. Az is természetes, hogy az elefántok születési, illetve halálozási intenzitása (az, hogy mennyi elefánt születik, illetve hal meg egységnyi idő alatt) függ az állatok számától. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy elég hosszú idő múlva milyen valószínűséggel lesz 0, 1, 2, ... elefántunk, vagyis milyen lesz az állatok számának az eloszlása.

Ezt a problémát általánosítva, és matematikailag kezelhető módon a következőképpen fogalmazhatjuk meg: Adott egy populáció, lehetséges nagysága $k=0, 1, 2, \ldots$. Minden k-hoz meg van adva egy λ_k születési és egy μ_k halálozási intenzitás. A populáció nagysága egyesével változhat, azaz ha valamikor ez az érték k, és egy másik időpillanatban $k+2$, akkor kell lennie olyan pillanatnak a kettő között, amikor a populáció nagysága $k+1$ volt. Ezen kívül teljesülnek az alábbi feltételek:

$$P(\text{pontosan 1 születés történik a } (t,t+h) \text{ időintervallumban, feltéve, hogy } k \text{ tagú a populáció } t\text{-ben}) = \lambda_k h + o(h)^*,$$

$$P(\text{pontosan 1 halálozás történik a } (t,t+h) \text{ időintervallumban, feltéve, hogy } k \text{ tagú a populáció } t\text{-ben}) = \mu_k h + o(h),$$

$$P(\text{pontosan 0 születés történik a } (t,t+h) \text{ időintervallumban, feltéve, hogy } k \text{ tagú a populáció } t\text{-ben}) = 1-\lambda_k h + o(h),$$

$$P(\text{pontosan 0 halálozás történik a } (t,t+h) \text{ időintervallumban, feltéve, hogy } k \text{ tagú a populáció } t\text{-ben}) = 1-\mu_k h + o(h).$$

---

* $P(A)$ jelöli egy A esemény bekövetkezésének valószínűségét, értéke 0 és 1 közötti.
Az $o(h)$ (kiolvasva: kis ordó h) egy szokásos matematikai jelölés, egy olyan h-tól függő mennyiséget jelöl, amely h-hoz képest nagyon kicsi, azaz h-val osztva és h-val tartva 0-hoz a hányados értéke 0-hoz tart.

Ezekből már az is következik, hogy több halálozás, több születés vagy születés és halálozás egyszerre egy kis h idő alatt lehetetlen, abban az értelemben, hogy az ilyen típusú események valószínűsége $o(h)$ nagyságrendű.

A fenti feltételeket teljesítő populáció nagyságát az időben leíró folyamatot *születési-halálozási folyamatnak* nevezzük. Ha $\mu_k=0$ minden k-ra, akkor *tiszta születési folyamatról*, ha $\lambda_k=0$ minden k-ra, akkor *tiszta halálozási folyamatról* beszélünk.

Legyen $P_k(t)$ annak a valószínűsége, hogy a t időpillanatban (természetesen $t\geqslant 0$) a populáció nagysága, vagyis az elefántok száma k. Először vizsgáljuk meg ezeket a mennyiségeket. A $P_0(t+h)$ annak az eseménynek a valószínűségét méri, hogy a $t+h$ időpontban 0 elefántunk van. Nézzük, hogy fordulhat ez elő. Háromféleképpen:

- t-ben is 0 volt, és h idő alatt nem született egy elefánt sem;
- t-ben 1 elefánt volt, és h idő alatt nem született egy sem, de az az egy meghalt;
- bárhogy máshogy.

A harmadik eset elég furcsán hangzik, de megmagyarázza az a tény, hogy minden ebben foglalt lehetőség együttes valószínűsége a feltételeink szerint $o(h)$. Az első eset valószínűsége:

$$P_0(t)[1-\lambda_0 h+o(h)],$$

a másodiké

$$P_1(t)[1-\lambda_1 h+o(h)][\mu_1 h+o(h)].$$

Ezeket összegezve megkapjuk $P_0(t+h)$-t:

$$\begin{aligned}P_0(t+h)&=P_0(t)[1-\lambda_0 h+o(h)]+P_1(t)[1-\lambda_1 h+o(h)][\mu_1 h+o(h)]+o(h)\\&=P_0(t)-P_0(t)\lambda_0 h+P_1(t)\mu_1 h+o(h)\end{aligned}$$

(a $P_0(t)o(h)$, $P_1(t)\lambda_1\mu_1 h^2$ és a többi $o(h)$-t tartalmazó szorzat összege együttesen is csak $o(h)$). Mindkét oldalból kivonva $P_0(t)$-t, osztva h-val, majd h-val tartva 0-hoz, a bal oldalon $P_0(t)$-nek t szerinti deriváltját kapjuk, amelyre tehát ez teljesül:

$$\frac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda_0 P_0(t)+\mu_1 P_1(t). \tag{1}$$

A $P_k(t+h)$ annak az eseménynek a valószínűségét méri, hogy a $(t+h)$ pillanatban k darab elefántunk van ($k\geqslant 1$). Ez a következőképpen fordulhat elő:

- t-ben k elefánt volt, és h idő alatt nem született, és nem halt meg egy elefánt sem;
- t-ben $k-1$ elefánt volt, és h idő alatt egy született de nem halt meg egy sem;
- t-ben $k+1$ elefánt volt, h idő alatt egy meghalt, de egy sem született;
- bárhogy máshogy.

Az előbbi okoskodáshoz hasonlóan kaphatjuk a következőt:

$$\frac{dP_k(t)}{dt}=\lambda_{k-1}P_{k-1}(t)-(\lambda_k+\mu_k)P_k(t)+\mu_{k+1}P_{k+1}(t) \qquad (k\geqslant 1). \tag{2}$$

Innen úgy lehetne továbblépni, hogy megoldanánk az (1)–(2) ún. differenciálegyenlet-rendszert, azaz keresnénk olyan t-változós $P_0(t)$, $P_1(t)$, $\ldots$, $P_k(t)$, $\ldots$ függvényeket, amelyek kielégítik a deriváltakra vonatkozó egyenleteket. Ne ijedjen meg senki, ezt nem fogjuk megtenni, csak egy speciális, ám igen tanulságos esetben.

Legyen $\mu_k=0$ és $\lambda_k=\lambda$ minden k-ra, azaz tekintsük az állandó intenzitású tiszta születési folyamatot. Ekkor a differenciálegyenletek:

$$\frac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t), \tag{3}$$

$$\frac{dP_k(t)}{dt}=\lambda P_{k-1}(t)-\lambda P_k(t) \qquad (k\geqslant 1). \tag{4}$$

Tegyük fel, hogy „a rendszer a 0-ból indul”:

$$P_k(0)=\begin{cases} 1, & \text{ha } k=0\\ 0, & \text{ha } k\neq 0.\end{cases}$$

Ekkor (3)-ból következik, hogy $P_0(t)=e^{-\lambda t}$, és ezt behelyettesítve (4)-be $k=1$ esetén $P_1(t)=\lambda te^{-\lambda t}$ (ezt könnyen lehet ellenőrizni deriválással). Tovább helyettesítve nagyobb k-ra: $P_k(t)=\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$. Ez egy nevezetes eloszlás, az ún. λt-paraméterű *Poisson-eloszlás*, és a folyamat neve λ-paraméterű *Poisson-folyamat*. Könnyen kiszámolhatja az olvasó, hogy egy λ-paraméterű Poisson-folyamat esetén annak a valószínűsége, hogy a populáció nagysága h ideig nem változik, $e^{-\lambda h}$. Ennek az eloszlásnak is van neve, ez az *exponenciális eloszlás*. Az exponenciális eloszlás az egyik leggyakrabban előforduló folytonos eloszlás, definíciója a következő:

Definíció. Legyen x egy úgynevezett *valószínűségi változó*, amelynek lehetséges értékei a nemnegatív valós számok. Az eloszlása λ-exponenciális, ha annak a valószínűsége, hogy x legalább t, megegyezik $e^{-\lambda t}$-vel, azaz $P(x\geqslant t)=e^{-\lambda t}$, ahol természetesen $t\geqslant 0$.

Egy λ-exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értéke $1/\lambda$, azaz egy állandó intenzitású tiszta születési folyamat esetében átlagosan $1/\lambda$ hosszúságú időközönként történik egy születés. Azt is be lehet látni, hogy a Poisson-folyamatok és az exponenciális változatlansági idők közötti kapcsolat kölcsönös: ha exponenciális eloszlású időközönként növekszik eggyel a populáció nagysága, akkor az egy Poisson-folyamat lesz.

Az elefántfarm eseténél azt kérdeztük, hogy mi lesz az elefántok számának eloszlása elég hosszú idő múlva. Ez azért természetes, mert míg az elején nagyon ingadozhat a létszám, joggal várhatjuk, hogy egy idő után a populáció beáll egy stabil állapotba, a kezdeti hullámzások kisimulnak. Természetesen a stabil állapotot nem úgy kell érteni, hogy mindig ugyanannyi elefántunk lesz, hanem hogy az eloszlás nem változik már az idővel, ún. *stacionárius eloszlás* lesz. Tehát azt kérdezzük, hogy létezik-e, és ha igen, akkor mennyi a következő határérték:

$$p_k=\lim_{t\to\infty}P_k(t) \qquad k=0,1,\ldots$$

Szerencsére a mi esetünkben létezik ez a határérték, és meg is tudjuk határozni. Tekintsük az (1)–(2) differenciálegyenletrendszert, és tartsunk t-vel a végtelenbe. Ekkor a deriváltak 0-hoz tartanak, mert p_k nem függ t-től, tehát az egyenletek így alakulnak:

$$0=-\lambda_0p_0+\mu_1p_1, \tag{5}$$

$$0=\lambda_{k-1}p_{k-1}-(\lambda_k+\mu_k)p_k+\mu_{k+1}p_{k+1} \qquad (k\geqslant 1). \tag{6}$$

A (6)-ot átrendezve:

$$(7)\qquad -\lambda_{k-1}p_{k-1}+\mu_k p_k=-\lambda_k p_k+\mu_{k+1}p_{k+1}\qquad (k\geqslant 1).$$

Az (5)-öt és (7)-et egybevetve, azonnal következik, hogy

$$(7a)\qquad \lambda_{k-1}p_{k-1}=\mu_k p_k\qquad (k\geqslant 0).$$

Ebből pedig rekurzióval

$$(8)\qquad p_k=\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}p_{k-1}=\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\frac{\lambda_{k-2}}{\mu_{k-1}}p_{k-2}=p_0\prod_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}.$$

Ha pedig tudjuk azt is, hogy a $\{p_k,\ k\geqslant 0\}$ mennyiségek eloszlást alkotnak, vagyis $\sum_{k=0}^{\infty}p_k=1$, akkor meg tudjuk határozni p_0-t, és így a p_k-kat is.

3. A teljesen exponenciális tömegkiszolgálási rendszer

Teljesen exponenciális tömegkiszolgálási rendszer alatt a következőt értjük: a beérkezési időközök eloszlása λ-exponenciális, a kiszolgálási idő eloszlása pedig μ-exponenciális. Vagyis $A(t)=1-e^{-\lambda t}$, $B(x)=1-e^{-\mu x}$. Ez azt is jelenti, hogy átlagosan $1/\lambda$ hosszúságú időközönként érkeznek be az igények, és ha van kit kiszolgálni, akkor átlagosan $1/\mu$ hosszúságú időközönként távoznak.

Nézzük, hogyan változik a rendszerben lévő igények száma. Feltehetjük, hogy kezdetben egy igény sincs, ez nem változtat a lényegen, de a szemléletünknek sokkal kedvezőbb. Amikor beérkezik egy igény – ez λ-exponenciális eloszlású időközönként történik –, akkor a rendszerben lévő igények száma 1-gyel nő; amikor egy igényt kiszolgálnak, és távozik – ez az első kiszolgálás kezdete után, amíg van kit kiszolgálni, μ-exponenciális időközönként történik –, akkor 1-gyel csökken. Az, hogy egyszerre két igény jelenjen meg, vagy ugyanakkor jelenjen meg egy igény, amikor egy másikat éppen kiszolgáltak, elhanyagolható valószínűségű. Be lehet tehát látni, hogy a rendszerben lévő igények száma születési-halálozási folyamatot követ. Ha egy kiszolgáló van, és nincs korlátozva a sorhossz, akkor a a folyamat paraméterei a következők: $\lambda_k=\lambda$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, $\mu_k=\mu$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$.

Vagyis az előző részben kifejtettek alapján a rendszerben lévő igények számának stacionárius eloszlása:

$$p_k=p_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k=p_0\varrho^k,$$

ha bevezetjük a $\varrho=\lambda/\mu$ jelölést. Ez a mennyiség olyan fontos szerepet játszik a tömegkiszolgálási rendszerek vizsgálatában, hogy külön nevet adtak neki: a rendszer *terhelése*. Be lehet látni, hogy a p_k-k akkor és csak akkor alkotnak tényleg eloszlást (vagyis akkor teljesül, hogy az összegük 1), ha $\varrho<1$. Ez részben eléggé kézenfekvő, mert ha $\varrho>1$, azaz $\lambda>\mu$, a rendszerbe nagyobb intenzitással érkeznek az igények, mint ahogy kiszolgálják őket, akkor egyre több és több várakozó igény lesz, a sor hossza egyre nagyobb lesz, nem alakul ki stacionárius eloszlás. Tegyük ezért fel, hogy a rendszer terhelése kisebb, mint 1. Ekkor egy végtelen mértani sor összegzésével ki tudjuk számolni p_0-t:

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \varrho^k = p_0 \frac{1}{1-\varrho},$$

azaz $p_0 = 1 - \varrho$, és így $p_k = (1-\varrho)\varrho^k$.

Ezek segítségével ki tudjuk számolni például a rendszerben tartózkodó igények várható értékét:

$$\overline{N} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = (1-\varrho) \sum_{k=0}^{\infty} k \varrho^k.$$

A végtelen sorok összegképletével könnyen kiszámolható, hogy $\overline{N} = \dfrac{\varrho}{1-\varrho}$.

Ha $\varrho = 1$, az azt jelenti, hogy a rendszer kapacitása teljesen ki van használva, a beérkezések és a távozások egyensúlyban vannak. Azt várnánk tehát, hogy ha egyre jobban közelítünk alulról ϱ-val 1-hez (de persze nem érjük el, mert akkor nem létezne már a stacionárius eloszlás), akkor egyre hatékonyabb lesz a rendszer. Ez azonban nem így van, mert ilyenkor $\overline{N}$ a végtelenbe tart, vagyis egyre hosszabb időt kell eltöltenie egy igénynek a rendszerben. Ez azért van így, mert a véletlen ingadozás miatt a forgalom időnként nagyon megugorhat, és a feszített kiszolgálás már nem tudja ezt ledolgozni.

Most nézzünk példákat olyan teljesen exponenciális rendszerekre, ahol az alapesettől eltérően $K < \infty$, illetve $n > 1$ (azaz 1-nél több kiszolgáló van, és a sor hossza korlátozott).

1. példa

Képzeljünk el egy telefonközpontot, ahol n vonal, vagyis kiszolgáló egység van, és nincs várakozás, azaz elutasításos a rendszer. Így a rendszerben tartózkodó igények száma 0, 1, 2, ..., n lehet, és természetesen születési-halálozási folyamatot követ. A születési (beérkezési) intenzitás nem függ a kiszolgálástól, tehát $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda$ és $\lambda_k = 0$ ha $k > n$; a halálozási (távozási) intenzitás pedig annál nagyobb, minél több kiszolgálás folyik, ez pedig megegyezik avval, ahányan a rendszerben vannak, tehát $\mu_k = k\mu$ ha $k = 1, 2, \dots, n$ és $\mu_k = 0$, ha $k > n$. A stacionárius eloszlás (amely ebben az esetben mindig létezik, nem csak $\varrho < 1$ esetén, mert ilyenkor $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$ véges összeg):

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} p_0 = \frac{\varrho^k}{k!} p_0.$$

Eszerint

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\varrho^k}{k!}} \qquad \text{és} \qquad p_k = \frac{\frac{\varrho^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\varrho^k}{k!}} \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

A p_n-nek külön jelentősége van, ez a visszautasítás valószínűsége, vagyis azé, hogy nem ad vonalat a központ.

$$p_n = \frac{\varrho^n}{n!\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\varrho^k}{k!}}.$$

Tegyük fel, hogy egy egészen kicsi központunk van 4 vonallal ($n=4$). Percenként 3 hívás érkezik ($\lambda=3$), és egy beszélgetés hossza átlagosan 2 perc ($1/\mu=2$, azaz $\mu=0{,}5$). Ekkor a visszautasítás valószínűsége:

$$p_4 = \frac{6^4}{4!\sum\limits_{k=0}^{4}\frac{6^k}{k!}} \approx 0{,}47 \qquad \text{és} \qquad p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{4}\frac{6^k}{k!}} \approx 0{,}009,$$

vagyis az esetek kb. felében a központ nem ad vonalat, az pedig, hogy éppen senki nem telefonál, szinte soha nem fordul elő. Egy telefontársaság számára érdekes kérdés lehet, hogy ha növeljük a vonalak számát, akkor mennyire javul a központ teljesítménye, és ez milyen arányban van a plusz vonalak telepítési költségével. Ilyen problémát vizsgálunk a következő példában.

2. példa

Nézzünk egy autószervízt, ahol n szerelő dolgozik (ők a kiszolgáló egységek), és a garázson kívül, a szervíz udvarán m autó várakozhat ($K=m$). Ekkor a rendszerben 0, 1, 2, …, $n+m$ igény lehet, a beérkezési, illetve távozási paraméterek pedig $\lambda_k=\lambda$, ha $k=0,\ 1,\ \dots,\ n+m$, $\lambda_k=0$ különben; $\mu_k=k\mu$, ha $k=1,\ 2,\ \dots,\ n$; $\mu_k=n\mu$, ha $k=n+1$, …, $n+m$ és $\mu_k=0$ különben. A stacionárius eloszlás:

$$p_k = \frac{\frac{\varrho^k}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\varrho^k}{k!}+\frac{\varrho^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{m}\left(\frac{\varrho}{n}\right)^s} \qquad k=0,1,\dots,n$$

és

$$p_{n+s} = \frac{\frac{\varrho^n}{n!}\left(\frac{\varrho}{n}\right)^s}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\varrho^k}{k!}+\frac{\varrho^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{m}\left(\frac{\varrho}{n}\right)^s} \qquad s=1,2,\dots,m.$$

Ha például kétóránként érkezik egy autó ($\lambda=0{,}5$), az átlagos javítási idő szintén két óra ($\mu=0{,}5$), egy szerelő van ($n=1$), és 3 hely az udvaron ($m=3$), akkor annak a valószínűsége, hogy egy javításra hozott autót el kell utasítani, illetve annak, hogy a szerelőnek nincs munkája:

$$p_4=0{,}2\,, \qquad \text{illetve} \qquad p_0=0{,}2,$$

vagyis minden ötödik autót el kell utasítani. A főnök ezt soknak tartja, ezért felvesz egy másik szerelőt is. Nézzük, hogyan változnak akkor a valószínűségek:

$$p_5\approx 0{,}021 \qquad \text{és} \qquad p_0\approx 0{,}34.$$

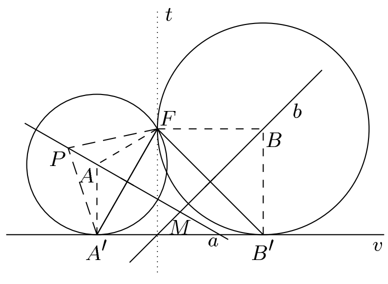
Azaz ilyenkor már csak minden ötvenedik autót kell elutasítani, cserébe viszont a szerelők az idejük harmadában nem dolgoznak.

Az eddigiekkel talán be tudtuk mutatni, hogy milyen egyszerűbb alkalmazásai lehetnek a sorbanállás elméletének. Természetesen ennél jóval bonyolultabb rendszerek is léteznek. Aki mélyebb részletekre kíváncsi, az olvassa el L. Kleinrock *Sorbanállás, kiszolgálás (Bevezetés a tömegkiszolgálási rendszerek elméletébe)* című könyvét (megjelent a Műszaki Kiadónál 1979-ben).

Kotnyek Balázs

Arkhimédész és a parabola

Simonyi Károly: *A fizika kultúrtörténete* és Sain Márton *Nincsen királyi út* című könyvében is megtalálható Arkhimédész gyönyörű gondolatmenete a parabolaszelet területének meghatározásáról: Arkhimédész be akarta bizonyítani, hogy egy „parabola szegment” területe egyenlő a beírt háromszög területének 4/3-adszorosával. Ehhez a parabola néhány tulajdonságának ismeretére volt szüksége. A fenti művekben néhány tétel igazolásánál koordináta-geometriai levezetések szerepelnek. Ebben a cikkben a párhuzamos szelők tételének és háromszögek hasonlóságának segítségével fogjuk az egyik tételt belátni. Közben a parabola (és a többi másodrendű görbe) elemi tulajdonságainak bizonyításához alkalmas módszert is láthatunk.



1. ábra

Tudjuk, hogy a parabola a sík azon pontjainak halmaza, amelyek a sík egy egyenesétől, a vezéregyenestől (v) és egy – nem az egyenesen lévő – pontjától, a fókusztól (F) egyenlő távolságra vannak.

Fogalmazzuk át a fenti definíciót: *Parabola azon körök középpontjainak halmaza, amely körök átmennek a fókuszon és érintik a vezéregyenest.*

Az *1. ábrán* az A és a B az F fókuszú, v vezéregyenesű parabola pontjai. A definícióból rögtön kitűnik, hogy a parabola szimmetrikus az F-en átmenő, a v-re merőleges t egyenesre (tengely).

Ennek ismeretében tudunk parabolapontot szerkeszteni: Felveszünk a vezéregyenesen egy A' pontot, ezen át párhuzamost húzunk t-vel, majd ezt az $\overline{A'F}$ felezőmerőlegesével (a) messük el, az így kapott A pont pontja a parabolának.

Lássuk be, hogy a-nak csak egy közös pontja van a parabolával.

Legyen $P \in a$, $P \neq A$. Ekkor $\overline{PF} = \overline{PA'}$, és ez nagyobb, mint P-nek a v-től való távolsága. Azt is beláttuk itt, hogy az a összes pontja, A-t kivéve, távolabb van F-től, mint v-től, azaz *külső pont* (*1. ábra*).

Azt sem nehéz megmutatni, hogy az A-n átmenő összes egyenes közül egyedül az a-nak van meg a fenti tulajdonsága. Joggal nevezzük a-t a parabola A-beli érintőjének. (Vegyünk egy, az A-n átmenő, a-tól különböző, v-re nem merőleges e egyenest, tükrözzük erre F-et: képe F', majd az F'-n átmenő, t-vel párhuzamos egyenesnek és e-nek a metszéspontjáról lássuk be, hogy közelebb van F-hez, mint v-hez, azaz *belső pont.* Ha viszont e merőleges v-re, akkor az A „fölötti” pontok lesznek a parabola belső pontjai.)

Igaz tehát a következő **1. állítás:** *A vezéregyenes bármely pontját a fókusszal összekötő szakasz felező merőlegese a parabola érintője annak a pont „fölötti” pontjában.*

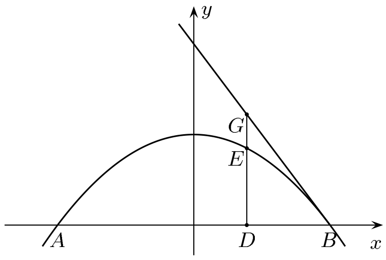
Két érintő metszéspontja (az *1. ábrán* M) viszont éppen $A'B'$ felező merőlegesén van rajta, hiszen az $A'B'F$ háromszögben M két oldal felező merőlegesének metszéspontja. Ezért igaz az alábbi:

2. állítás. *A parabola két pontját (A-t és B-t) összekötő szakasz felezőpontja és a pontokban húzott érintők metszéspontja egy, a t-vel párhuzamos egyenest határoz meg.*

Az Arkimédész által kimondott tétel (ld. Simonyi Károly: A fizika kultúrtörténete c. könyv 75–78. oldalán) a következő:

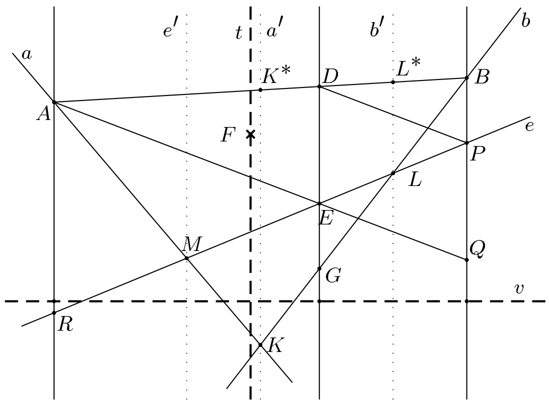
Tétel. *„Húzzuk meg a parabola egy tetszés szerinti abszcisszájához tartozó ordinátát” (2. ábra: most a parabola tengelye az y tengely). Ennek talppontja D, metszéspontja a parabolával E. a B ponthoz tartozó érintővel G. Bárhol is vettük fel a D pontot, érvényes a következő:*

$$\frac{AB}{AD} = \frac{DG}{DE}.$$



2. ábra

Ezt fogjuk bizonyítani a parabola tetszőleges AB húrján levő D pontra.



3. ábra

Bizonyítás. A *3. ábrán* AB a parabola húrja, ezen van a D pont. Az A, B, E parabolapontokhoz húzott érintők a, b és e. A 2. állítás szerint az A-ban és B-ben húzott érintők K metszéspotja és az AB szakasz K^* felezőpontja egy, a tengellyel párhuzamos a' egyenest határoz meg. Hasonlóan az AE szakasz felezőpontja és az a és e érintők metszéspontja, M a tengellyel párhuzamos e' egyenest határozza meg. A BG szakasz felezőpontja és a b és e érintők L metszéspontja a tengellyel párhuzamos b' egyenest határozza meg, ennek AB-vel való metszéspontja L^*.

Előbb belátjuk, hogy DP párhuzamos AE-vel, ahol P a B-n átmenő, tengellyel párhuzamos egyenesnek az e érintővel való metszéspontja.

$$\frac{BD}{BA} = \left(\frac{BD}{2} : \frac{BA}{2}\right) = \frac{BL^*}{BK^*} = \frac{BL}{BK}$$

(a párhuzamos szelők tétele szerint), amiért $a = AK \parallel DL$.

Így az AMR és DLE párhuzamos állású háromszögek, ahol R az e érintő és az A-n keresztül a R tengellyel párhuzamosan húzott egyenes metszéspontja. Mivel az RE szakasz felezőpontja M, az EP felezőpontja az L, így az ARE és DEP háromszögek is hasonlók. Tehát valóban $AE \parallel DP$.

Használjuk ki, hogy $PQ = DE$, ahol Q az AE és BP egyenesek metszéspontja, és $EG = PB$ miatt $DG = BQ$.

A párhuzamos szelők tételéből következik, hogy

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BQ}{PQ},$$

és a fenti egyenlőségek miatt ez utóbbi egyenlő $\frac{DG}{DE}$-vel, tehát $\frac{AB}{AD} = \frac{DG}{DE}$, és ezt akartuk bizonyítani.

Megjegyzés. Láthatunk most egy olyan feladatot, amely igen egyszerű, és látszólag semmi köze a fentiekhez:

Az O középpontú λ arányú, O^{λ}=val jelölt középpontos hasonlóságnál az $ABCD$ paralelogramma képe az $A'B'C'D'$. A paralelorgamma átlinak metszéspontja K, a K képe a K', azaz $K' = O^{\lambda}(K)$. Legyen az O tükörképe a K-ra a P és a K'-re a P'. Ekkor igaz, hogy $P' = O^{\lambda}(P)$, és például $PD \parallel BB'$, illetve $C'P \parallel AA'$, valamint PP' átmegy K-n, O-n és O'-n.

Mi köze ennek a fenti parabolás feladathoz?

Bohner Géza, tanár

Kossuth L. Gimn., Cegléd

Mérőlap felvételire készülőknek IV.

1. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{x^2 - 10x + 30} + x^2 = 10x - 18.$$

2. Felülnézetben egy $ABCDEF$ 10-egység oldalú szabályos hatszöget látunk, de a valóságban a csúcsok a vízszintes talajhoz képest rendre 4, 6, 3, 6, 2, 3 egység magasan vannak. Az AD, BE, valamint CF egyenesek felülnézetben látszólag egy pontban metszik egymást. A valóságban milyen távolság van függőlegesen ezen egyenesek között a látszólagos metszéspontnál?

3. Az $\overline{abbc}$ alakú tízes számrendszerbeli négyjegyű szám prímszám. A különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek. A négy számjegy összege 26. Ha a számot egy vágással kétfelé vágjuk, akkor a keletkezett lehetséges számok közül $\overline{abb}$, $\overline{c}$, $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, valamint $\overline{bbc}$ is prímszámok. Adjuk meg az összes ilyen tulajdonságú négyjegyű számot.

4. A derékszögű koordinátarendszerben adottak a következő pontok: $A(0;0)$, $B(6;0)$, $D(0;6)$ $P(2;0)$, $S(0;4)$, $E(9;0)$, $F(0;9)$. Tudjuk továbbá, hogy a C pont az EF szakasz belső pontja. A CD szakasz C-hez közelebbi harmadolópontja R, a BC

szakasz B-hez közelebbi harmadolópontja pedig Q. Az AC, BD, PR, QS szakaszok felezőpontjai legyenek rendre K, L, M, N. Határozzuk meg C pont koordinátáinak függvényében a $KL:MN$ arányt.

5. A valós számokon értelmezett f függvény hozzárendelési szabálya: $f(a)=2a^3-3a^2+a$. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$f\left(\sin^2 x\right)+f\left(\cos^2 x\right)=0.$$

6. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{7}\right)^{\frac{2}{-5+\lg x}-\frac{4}{1+\lg x}}=9{,}8.$$

7. Adott két, egymást két pontban metsző, nem egy síkban fekvő körvonal. Mutassuk meg, hogy mindig létezik olyan gömbfelület, amelyre a két körvonal illeszkedik.

8. Három aranyásó minden nap annyi grammos aranyrögöt talált, ahányadik napja dolgoztak. Hányadik napon tudnak először egyenlően osztozkodni az aranyakon, ha a talált rögöket nem akarják feldarabolni?

Számadó László

Egy hagyományos amerikai matematikaverseny

A William Lowell Putnam nevét viselő matematikaverseny 1938-ban indult. Az Egyesült Államok és Kanada főiskoláin és egyetemein minden évben megrendezik. A névadó az egykori harvardi diák 1921-ben cikket írt az iskola folyóiratába, amelyben egy főiskolák közötti szellemi vetélkedés előnyeire hívta fel a figyelmet. Halála után özvegye hozta létre a William Lowell Putnam főiskolák közötti emlékalapítványt. Az első versenyt angol nyelvből rendezték, és csak pár évvel később indult matematikából. Az özvegy 1935-ben bekövetkezett halála óta az Amerikai Matematikai Társulat szervezi a vetélkedőt.

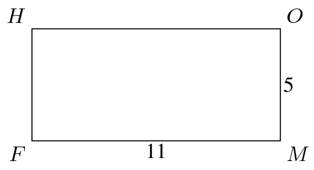
Résztvevő lehet minden Egyesült Államokbeli és kanadai egyetemi és főiskolai hallgató, aki még nem szerezte meg a diplomáját, de minden diák összesen csak négy alkalommal vehet részt ezen a versenyen.

Érdekes a verseny lebonyolításának rendje: Három fős csapatok indulnak, de minden versenyző egyénileg írja a dolgozatát. Két részből áll a verseny, mindkettő három órás, közötte két óra szünettel. Minden városban egyszerre kell megírni, ezért a kontinens időeltolódásait is figyelembe vevő általános időbeosztást készítettek. A tavaly december 6-án megrendezett Putnam versenyen Magyarországon tanuló amerikai diákok is résztvettek a szigorú szabályoknak megfelelően.

A legutóbbi tíz évben a Harvard és a Duke Egyetem csapatai felváltva nyertek. A tavalyi versenyen az első öt helyzett a Harvard, a Duke, a Princeton, a Massachusetts és a Washington egyetem volt. Az első helyezett csapat díja 25 000 dollár és minden csapattag külön 1000 dollárt kap.

A múlt évi versenyen egy Amerikában tanuló magyar diák, a KöMaL matematika és fizika pontversenyeiből már jól ismert Katz Sándor dicséretben részesült.

Az 58. William Lowell Putnam matematikaverseny feladatai, 1997. december 6.



A1. A $HOMF$ téglalapban $HO = 11$ egység, $OM = 5$ egység. Egy ABC háromszögben a magasságvonalak metszéspontja a H, a körülírt körének középpontja az O, a BC szakasz felezőpontja az M, az A-ból húzott magasság talppontja az F. Milyen hosszú a BC szakasz?

A2. Egy kerek asztal körül n játékos ül, mindegyiknek van 1 pénzérméje. Az első játékos átad 1 pénzérmét a második játékosnak, aki ezután átad 2 érmét a harmadiknak. A harmadik játékos ismét 1 érmét ad a negyediknek, aki megint 2-t ad az ötödiknek. És így tovább, a játékosok felváltva 1 vagy 2 érmét adnak át a következő olyan játékosnak, akinek még van pénze. Akinek elfogy a pénze, az kiesik a játékból. Keressünk végtelen sok olyan n számot, amelyre valamelyik játékos birtokába kerül mind az n pénzdarab.

A3. Számítsuk ki az integrál értékét:

$$\int_0^\infty \left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2\cdot 4} - \frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6} + \ldots\right)\cdot\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \ldots\right)\mathrm{d}x.$$

A4. Legyen G egy csoport, e az egységeleme, és $\varphi : G \to G$ olyan függvény, amelyre

$$\varphi(g_1)\varphi(g_2)\varphi(g_3) = \varphi(h_1)\varphi(h_2)\varphi(h_3)$$

teljesül, valahányszor $g_1g_2g_3 = e = h_1h_2h_3$. Bizonyítsuk be, hogy létezik G-nek egy olyan a eleme, amelyre a $\psi(x) = a\varphi(x)$ leképezés homomorfizmus. (Azaz $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$ minden x, $y \in G$-re.)

A5. Jelölje N_n az olyan $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pozitív egész rendezett n-esek számát, amelyekre $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = 1$. Határozzuk meg, hogy N_{10} páros-e vagy páratlan.

A6. A pozitív egész n és tetszőleges c valós számra definiáljuk x_k-t a következő rekurzióval: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, és minden $k \geqslant 0$-ra

$$x_{k+2} = \frac{cx_{k+1} - (n-k)x_k}{k+1}.$$

Rögzítsük az n-et, és tekintsük azt a legnagyobb c értéket, amelyre $x_{n+1} = 0$. Adjuk meg x_k-t n és k függvényében ($1 \leqslant k \leqslant n$).

B1. Jelölje $\{x\}$ az x valós számnak a legközelebbi egész számtól való távolságát. Tetszőleges pozitív egész n-re határozzuk meg az

$$S_n=\sum_{m=1}^{6n-1}\min\left(\left\{\frac{m}{6n}\right\},\ \left\{\frac{m}{3n}\right\}\right)$$

értéket. ($\min(a,b)$ jelöli az a és b minimumát.)

B2. Legyen f egy kétszer differenciálható valós értékű függvény, amelyre teljesül az

$$f(x)+f''(x)=-xg(x)f'(x)$$

egyenlőség, ahol $g(x)\geqslant 0$ minden valós x-re. Bizonyítsuk be, hogy $|f(x)|$ korlátos.

B3. Tetszőleges pozitív egész n-re írjuk fel a $\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}$ összeget $\dfrac{p_n}{q_n}$ alakban, ahol p_n és q_n relatív prím pozitív egészek. Határozzuk meg az összes olyan n-et, amelyre a q_n nem osztható 5-tel.

B4. Jelölje az $(1+x+x^2)^m$ hatványban az x^n együtthatóit $a_{m,n}$. Bizonyítsuk be, hogy minden $k\geqslant 0$ esetén

$$0\leqslant\sum_{i=0}^{\lfloor 2k/3\rfloor}(-1)^i a_{k-i,i}\leqslant 1.$$

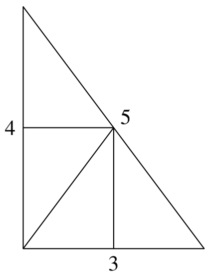
B5. Bizonyítsuk be, hogy minden $n\geqslant 2$-re

$$\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\right\}n\equiv\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\right\}n-1\pmod{n}.$$

B6. Egy háromszög feldarabolásakor képezzük az összes olyan pontpár távolságát, amelyek ugyanazon részbe esnek. A kapott távolságok halmazának legkisebb felső korlátját nevezzük a feldarabolás *átmérőjének.*

A 3, 4, 5 oldalú derékszögű háromszög ábra szerinti feldarabolásában például az „átmérő” $5/2$.

Mennyi a lehető legkisebb „átmérő”, amelyet e háromszög 4 részre darabolásával kaphatunk?



Tudósítás az Izsák Imre Gyula versenyről

A zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium 1997-ben hatodik alkalommal hirdette meg az **Izsák Imre Gyula** komplex természettudományi (meghívásos) versenyt matematika, fizika és számítástechnika tantárgyakból. Az idei versenyt rendhagyó módon csillagászati totó is színesítette.

A verseny rendje: A versenyzők mindhárom tantárgyból kaptak feladatot, amelyek megoldására két-két óra állt rendelkezésükre. Használható segédanyagok: az OKTV-n meghatározottak. A számítástechnika versenyen a tanulók IBM PC gépen dolgozhattak PASCAL vagy BASIC nyelven.

A feladatokat az Eötvös Loránd Tudományegyetem tanárai állították össze, és ők alkották a zsűrit is: matematikából *Hortobágyi István*, fizikából *Bérces György*, számítástechnikából *Zsakó László*.

A versenyen 14 gimnázium két-két tanulója indult. Az összetett versenyben (mindhárom tárgy összesített eredménye alapján):

I. helyezett: **Végh László**, Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium;
II. helyezett: **Váry Mátyás**, Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimnázium;
III. helyezett: **Karádi Richárd**, Győr, Révai Miklós Gimnázium.

Tantárgyi első helyezettek:

matematika: **Horváth Gábor**, Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium,
fizika: **Császár Balázs**, Szombathely, Premontrei r. Szent Norbert Gimnázium,
számítástechnika: **Várkonyi Dániel**, Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimnázium.

A nyerteseknek a díjakat a LOGITRON, a STARTUP BT és a PROCOMB Kft ajánlotta fel. A verseny megrendezését támogatták: a Pro Renovanda Cultura Hungariae Alapítvány és a ZALA Megyei Pedagógiai Intézet.

Kiss Zsolt
a verseny szervezője

A versenyben kitűzött feladatok

Matematika

1. Igazoljuk, hogy ha n 1-nél nagyobb természetes szám, akkor

$$\frac{27}{48} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \ldots + \frac{1}{2n} < 1. \qquad \text{(10 pont)}$$

2. Tekintsük az $A_1B_1C_1$ és a hozzá hasonló, kétszer akkora oldalakkal rendelkező, ellenkező körüljárású, tetszőleges $A_2B_2C_2$ háromszöget. Bizonyítsuk be, hogy az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 szakaszok A_1, B_1, C_1-hez közelebbi harmadolópontjai egy egyenesen helyezkednek el. (12 pont)

3. Oldjuk meg a következő egyenletet, ha x és y természetes szám:

$$1 + \frac{1}{x-1996} + \frac{1}{y-1996} = \frac{1995}{(x-1996)(y-1996)} \qquad \text{(12 pont)}$$

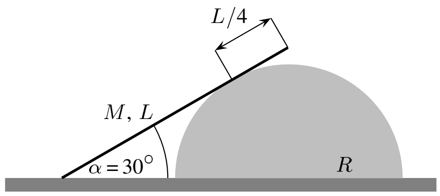
4. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges tetraéder felszíne legfeljebb az oldalélei négyzetösszegének $\frac{\sqrt{3}}{6}$-szorosával lehet egyenlő. Mikor áll fenn az egyenlőség? (16 pont)

Fizika

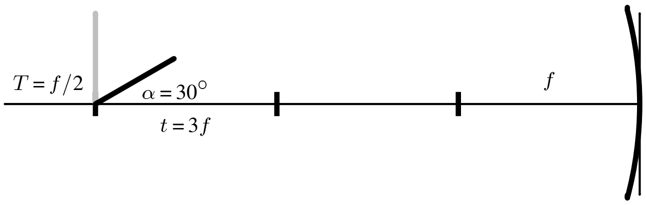
1. Hoffman-vízbontó készülékben szobahőmérsékleten ($t=20$ °C) fejlődő hidrogéngáz térfogatának időbeli változását mutatja a mellékelt táblázat. (A kísérletek közben mért áramerősség-értékek kiolvashatók a táblázatból.) Határozzuk meg az elemi töltés nagyságát.

$U=25$ V				
t (min, sec)	$7'12''$	$14'30''$	$21'52''$	$29'14''$
V (cm^3)	5,0	10,0	15,0	20,0
I (mA)	88,5	89,3	89,7	89,8

2. Vízszintes asztalon fekvő R sugarú, rögzített félgömbre egy M tömegű, L hosszúságú rúd támaszkodik. A rúd és a félgömb közötti súrlódás elhanyagolható. Mekkora az asztal és a rúd között fellépő μ_t tapadási súrlódási együttható értéke, ha a rúd az asztallappal $\alpha=30°$-os szöget zár be?



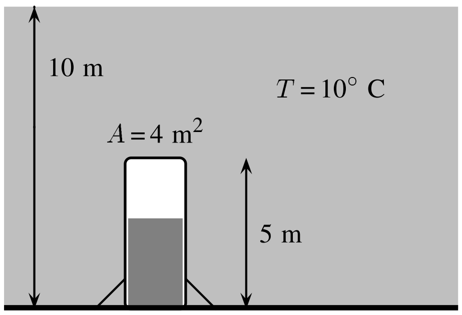
3. $f=1$ m fókusztávolságú, homorú lencse előtt $t=3$ m-re egy $T=0{,}5$ m magas, világító egyenes fényforrás áll, az optikai tengelyre merőlegesen. A fényforrást megdöntjük úgy, hogy az $\alpha=30°$-os szöget zárjon be az optikai tengellyel. Szerkesztéssel és számolással is határozzuk meg a fényforrás képének helyét és nagyságát.



4. Egy $L=5$ m hosszúságú, $A=4$ m^2 keresztmetszetű, felső végén zárt vasbetonhengert 10 m mély tó fenekére eresztettek le (leeresztése során mindvégig függőlegesen tartva). A tó és a levegő hőmérséklete egyaránt 10 ° C.

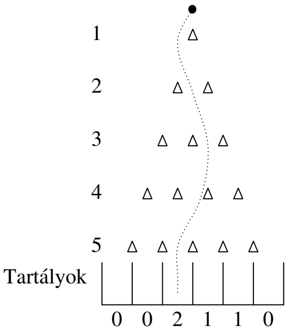
a) Mekkora a hengerben levő levegőoszlop magassága?

b) Mennyi hőt kellene közölni a henger belsejében levő levegővel, hogy a hengerben csak levegő maradjon?



1997. Számítástechnika

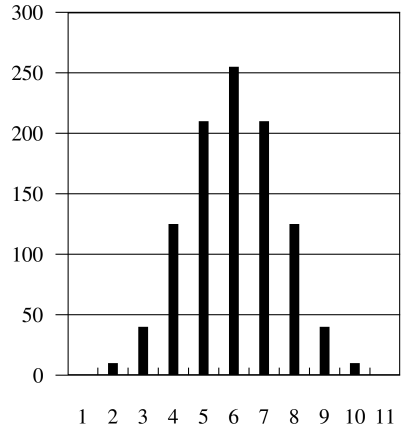
1. feladat. Galton-deszka szimuláció (100 pont)



1. ábra ($n = 5$ esetén)

Azt, hogy a binomiális eloszlásnak „köze van” a normális eloszláshoz, a matematikusok sokféle tételben megfogalmazták. Készítsünk a két eloszlás „rokonságának” igazolására kísérleti eszközt a következő elképzelésre építve! Egy deszkában n sorban szabályosan elrendezve ékeket helyezünk el, a k-adik sorban éppen k darabot (*1. ábra*). Golyókat indítunk útnak legfelül, egymás után, amelyek az ékeken véletlenszerűen eltérülve hullanak lefelé, míg végül a legalul elhelyezett $n+1$ tartály valamelyikében landolnak. Az ékek $1/2$ (P) valószínűséggel térítik el a golyót balra, illetve jobbra. Sok-sok golyóval elvégezve a kísérletet, a normális eloszlás haranggörbéjére emlékeztető alakzat fog kialakulni a lehullott golyók „oszlopaiból”.

Ezt az ún. Galton-deszka kísérletet kell számítógéppel imitálnod. A program paraméterként kérje be a sorok számát (n), valamint az egyes ékekről való balra eltérülés valószínűségét (P). Rajzold ki a Galton-deszkát a képernyőre, majd billentyűvel vezérelhető sebességgel „kövesd” útjukon a golyókat. Az egyes tartályokba leérkező golyók száma jelenjen meg a tartályoknál, a relatív gyakorisága pedig egy hisztogramon (*2. ábra*), a felhasználó által kívánt golyószámonként kirajzolva. Ha nagyon gyors mozgást kíván, akkor elegendő minden – mondjuk – 100-adik időegységben újrarajzolni a hisztogramot, ha pedig nagyon lassan, akkor minden egyes golyó után. Mindez addig tartson, amíg a felhasználó meg nem unja.



2. ábra ($n = 10$ esetén)

A középiskolák sorrendje a matematika tárgyban elért eredmények tükrében

Lezárult a középiskolák objektív ismérvek alapján való összehasonlítására irányuló kutatás első szakasza, és a középiskolák megkapták az ennek eredményeit összegező kiadványt. E vizsgálat közel százötven mutató alapján rendezi sorrendbe az iskolákat, ezek közül a következő 6 a matematika oktatásával kapcsolatos:

- a közös matematika írásbeli érettségi-felvételi vizsgák 1992–1996 évek közötti átlagai (írásbelik),
- az Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Versenyek 1986-1996 közötti helyezései (OKTV),
- három országos egyéb matematika versenyen (Arany Dániel, Kürschák József, KöMaL pontverseny) 1986–1996 között elért helyezések (egyéb).
- a nemzetközi matematika versenyeken résztvevők száma.

A vizsgált időszakban a közös írásbeliken 792 iskola tanulói vettek részt, a matematika OKTV-n 225 iskola tanulói, az egyéb versenyeken 143 iskola tanulói értek el helyezést. A következő táblázat azokat az iskolákat tünteti fel, amelyek legalább egy szempontból az első 30 hely valamelyikére kerültek.

A közös írásbelik átlagai szerint nem állítottuk sorrendbe azokat az iskolákat, amelyekből a vizsgált évek bármelyikében nem volt legalább három és az öt évben legalább 15 vizsgázó.

Az OKTV és az egyéb versenyeken elért helyezéseket pontoztuk (1. helyezés = 10 pont, 2. helyezés = 9 pont, 3. helyezés = 8 pont, ..., 10. helyezés = 1 pont, minden dicséret = 0,5 pont).

A vizsgált időszakban az Arany D. versenyen 385, a Kürschák J. versenyen 101, a KöMaL pontversenyen 605 helyezés született. A táblázat e három verseny helyezéseit (talán joggal bírálható módon) összevontan kezeli.

A matematika közös írásbeliken 111 iskola tanulói értek el 9,00 feletti átlagot. Ezek 22,5%-a fővárosi, 39,7%-a nagyvárosi és 37,8%-a kisvárosban, községben van. A matematika OKTV helyezéseinek 22,7%-át a városi iskolák, 42,6%-át a nagyvárosok, 34,7%-át a kisvárosok iskoláinak tanulói szerezték meg. Az egyéb matematika versenyeken elért helyezések 25%-át a fővárosi, 42,7%-át nagyvárosi, 32,2%-át kisvárosi, községi középiskolák tanulói érték el.

A matematika OKTV-n a vizsgált 11 évben 1 iskola tanulói értek el 24, 1 iskoláé 7, 2 iskoláé 4, 3 iskoláé 3, 12 iskoláé 2 és 40 iskoláé 1 „dobogós” helyezést; 166 iskola versenyzői osztoztak a további helyeken.

Ha összevetjük az OKTV különböző tantárgyi versenyeit, megállapítható:

1. Az egyes tantárgyi versenyeken átlagosan csak az iskolák 10–15%-a ért el eredményeket. Az átlagot meghaladó számú iskolának vannak helyezettjei a matematika (24%), az orosz (21,9%), a fizika (17,8%) és a német (17,2%) OKTV-ken.
2. A tantárgyak egy részében vannak kiemelkedő iskolák, amelyek szinte évente kikerül 1–1 „dobogós” helyen végző fiatalt. Ilyen a matematika (Fazekas), a spanyol (Szilágyi E.), a biológia (Fazekas), a fizika (Fazekas és Apáczai), a francia (Piarista és a szegedi Ságvári), a német (soproni Széchenyi), a spanyol (Szilágyi E.) és az olasz (Berzsenyi). A tantárgyak más részében vannak ugyan kiemelkedő iskolák, de azok távolsága az őket követőktől nem jelentős; ilyen az angol, a földrajz, a kémia, a latin és a magyar. Az orosz és a történelem tárgyakban szinte évenként más-más iskola viszi el a pálmát.

A következő oldalakon összefoglaló táblázatok találhatók a középiskoláknak a matematika tárgyban elért eredmények szerinti sorrendjéről és az egyéb versenyeken a legtöbb helyezést elért tanulók iskoláiról.

A középiskolák sorrendje a matematika tárgyban elért eredmények tükrében

A középiskola neve	Városa	Írásbeli vizsga			OKTV		Egyéb verseny	
G. = Gimnázium, Szk. = Szakközépisk.		sorrend	fő	átlag	sorrend	pont	sorrend	pont
Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló G.	Budapest	1	275	12,54	1	454,0	1	2601,0
Apáczai Csere J. Gyakorló G. (ELTE)	Budapest	2	240	11,63	2	135,0	5	236,5
Berzsenyi Dániel G.	Budapest	3	291	11,60	8	48,5	8	139,5
Városmajori G.	Budapest	4	225	11,07	60–67	10,0	66–67	17,0
Lovassy László G.	Veszprém	5	392	11,05	53–54	11,5	22	55,0
Piarista G.	Budapest	6	180	10,96	28–29	19,0	11	114,5
Szent István G.	Budapest	7	293	10,91	11	39,5	4	271,5
Czuczor Gergely Bencés G.	Győr	8	116	10,88	75–80	8,5		
Zrínyi Miklós G.	Zalaegerszeg	9	182	10,84	20	27,0	15	109,0
Tinódi Sebestyén G.	Sárvár	10	37	10,79	105–110	4,0		
Trefort Á. Gyakorlóiskola (ELTE)	Budapest	11	135	10,77	15	34,0	16	101,0
Árpád G.	Budapest	12	283	10,74	7	49,5	3	331,5
Radnóti Miklós Kisérleti G.	Szeged	13	235	10,73	3	71,5	10	134,0
Szent István G.	Kalocsa	14	62	10,69				
Alternatív Közgazdasági G.	Budapest	15	111	10,66				
Janus Pannonius G. és Szk.	Pécs	16	65	10,65				
III. Béla G.	Baja	17	141	10,61	145–172	1,0	28	43,0
Radnóti Miklós Gyakorló G. (ELTE)	Budapest	18	260	10,60	21–23	26,0	21	58,0
Váci Mihály G.	Tiszavasvári	19	15	10,53	85–87	7,5	38	32,0
Bányai Júlia G.	Kecskemét	20	89	10,51	145–172	1,0		
Bocskai István G.	Szerencs	21	17	10,47				
Földes Ferenc G.	Miskolc	22	298	10,46	9	48,0	7	213,0
Ságvári Endre Gyakorló G. (JATE)	Szeged	23	199	10,44	12	38,0	2	366,5
Táncsics Mihály G.	Kaposvár	24	215	10,43	104	4,5	44	23,0
Veres Péter G.	Budapest	25	137	10,42	173–225	0,5		

Baár-Madas Református G.	Budapest	26	72	10,33			135	1,0
Pápai Református G.	Pápa	27	35	10,31				
Révai Miklós G.	Győr	28–29	300	10,24	4	57,0	9	138,5
Ferences G.	Szentendre	28–29	108	10,24	39–40	16,0		
Petőfi Sándor Evangélikus G.	Bonyhád	30–31	79	10,22	17–18	31,0	13	112,5
Teleki Blanka G.	Székesfehérvár	30–31	186	10,22	33–35	17,5	23	54,0
Egressy Gábor Ipari Szk.	Budapest	76–77	177	9,33	5	52,5	104–119	8,0
Boronkay György Műszaki Szk.	Vác	137	108	8,76	6	51,0	12	114,0
Kossuth Lajos Tud.egy. Gyakorló G.	Debrecen	32–34	180	10,21	10	42,0	18–19	74,0
Kolos Richárd Műszaki Szk.	Budapest	183–184	125	8,32	13	37,5	42–43	24,0
Energetikai Szakképzési Intézet	Paks	85	129	9,19	14	36,5	18–19	74,0
Nagy Lajos G.	Szombathely	32–34	214	10,21	16	33,5	14	112,0
Vásárhelyi P. Építőip. és Vízügyi Szk.	Nyíregyháza	323–324	37	7,24	17–18	31,0	25	48,0
Déri Miksa Ipari Szk.	Szeged	195–196	79	8,17	19	30,0	78–85	10,0
Kőrösy József Közg. és Külker. Szk.	Szeged	80–81	234	9,27	21–23	26,0	63–67	17,0
Sárospataki Ref. Kollégium G.a	Sárospatak	91–92	168	9,15	21–23	26,0	51–55	18,0
Móricz Zsigmond G.	Budapest	93–94	302	9,14	24	24,0	35–36	34,0
Neumann J. G. és Közgazd. Szk.	Eger	86–89	215	9,17	25	21,5	33–34	35,0
Kada Elek Közgazdasági Szk.	Kecskemét	80–81	139	9,27	26	20,0	104–119	8,0
Eötvös József G.	Tata	73	179	9,39	27	19,5	68–69	16,0
József Attila G.	Székesfehérvár	143	175	8,70	28–29	19,0	37–38	32,0
Trefort Á. Kéttannyelvű Szk. és G.	Budapest	173	119	8,41	30	18,5	17	93,0
Fazekas Mihály G.	Debrecen	86–89	248	9,17	42–44	14,0	6	234,0
Türr István G. és Óvónői Szk.	Pápa	130	52	8,81	50–52	12,0	20	70,5
Széchenyi István Műszaki Szk.	Székesfehérvár	430–431	133	6,15	111–114	3,5	24	49,0
Batthyány L. G. és Eg.ügyi Szk.	Nagykanizsa	79	120	9,28	47–49	12,5	26	46,5
Garay János G.	Szekszárd	72	147	9,40	115–117	3,0	30	42,0

Az egyéb matematika versenyeken a legtöbb helyezést elért tanulók iskolái a következők:

A középiskola neve	Városa	Arany Dániel		Kürschák		KöMaL	
G. = Gimnázium, Szk. = Szakközépiskola		sorrend	pont	sorrend	pont	sorrend	pont
Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló G.	Budapest	1	826,0	1	482,0	1	1294,0
Ságvári Endre Gyakorló G. (JATE)	Szeged	5	85,0	2	36,5	3	245,0
Árpád G.	Budapest	11	68,0	12–13	7,0	2	256,5
Szent István G.	Budapest	3	100,0	5	27,0	5	144,5
Apáczai Csere J. Gyakorló G. (ELTE)	Budapest	2	105,0	9–11	8,0	6	123,5
Fazekas Mihály G.	Debrecen	8	71,0			4	163,0
Berzsenyi Dániel G.	Budapest	19	34,0	3	30,0	10	75,5
Révai Miklós G.	Győr	14	46,0	8	16,0	9	76,5
Radnóti Miklós Kísérleti G.	Szeged	7	73,0			11	61,0
Piarista G.	Budapest	6	78,0	6–7	17,0	18	19,5
Petőfi Sándor Evangélikus G.	Bonyhád	12	63,0	6–7	17,0	12	32,5
Nagy Lajos G.	Szombathely	22	27,0			7	85,0
Zrínyi Miklós G.	Zalaegerszeg	21	28,0	14	4,0	8	77,0
Trefort Ágoston Gyakorlóiskola (ELTE)	Budapest	9	69,0	12–13	7,0	14	25,0
Trefort Á. Kéttannyelvű Szk. és G.	Budapest	4	93,0				
Kossuth L. Tud.egyetem Gyakorló G.a	Debrecen	16	43,0			13	31,0
Energetikai Szakképzési Intézet	Paks	10	69,0			21–22	5,0
Türr István G. és Óvónői Sz.	Pápa	24	19,0	4	27,5	15	24,0
Radnóti Miklós Gyakorló G. (ELTE)	Budapest	18	37,0	9–11	8,0	20	13,0
Lovassy László G.	Veszprém	23	24,0	9–11	8,0	16	23,0

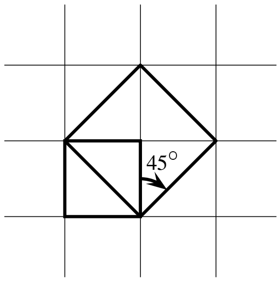
Az 1992 és 1996 között érettségizők közös és egységes írásbeli dolgozatainak átlaga valamennyi tárgyból 8,49, matematikából 8,39. Az összes ilyen dolgozat 22,67%-át matematikából írták. A legalább 10 dolgozatot megíró tanulók iskolai átlagának megoszlása:

Dolgozatok átlaga	12,00–12,54	11,00–11,99	10,00–10,99	9,00–9,99	8,00–8,99	7,00–7,99	6,00–6,99	5,00–5,99	4,00–4,99	3,00–3,99	2,00–2,99
Iskolák száma	1	4	35	71	114	119	101	67	22	5	2
%	0,18	0,74	6,46	13,12	21,07	22,00	18,67	12,38	4,07	0,92	0,37

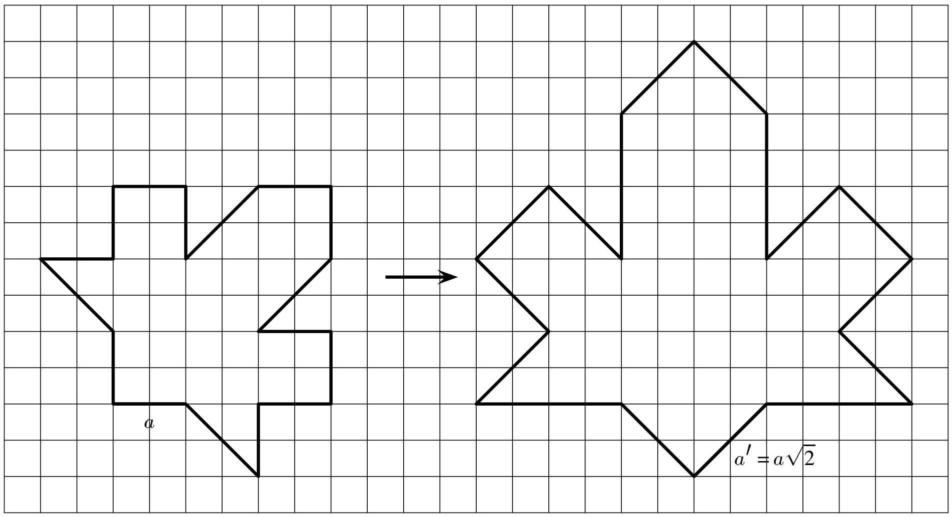
Neuwirth Gábor

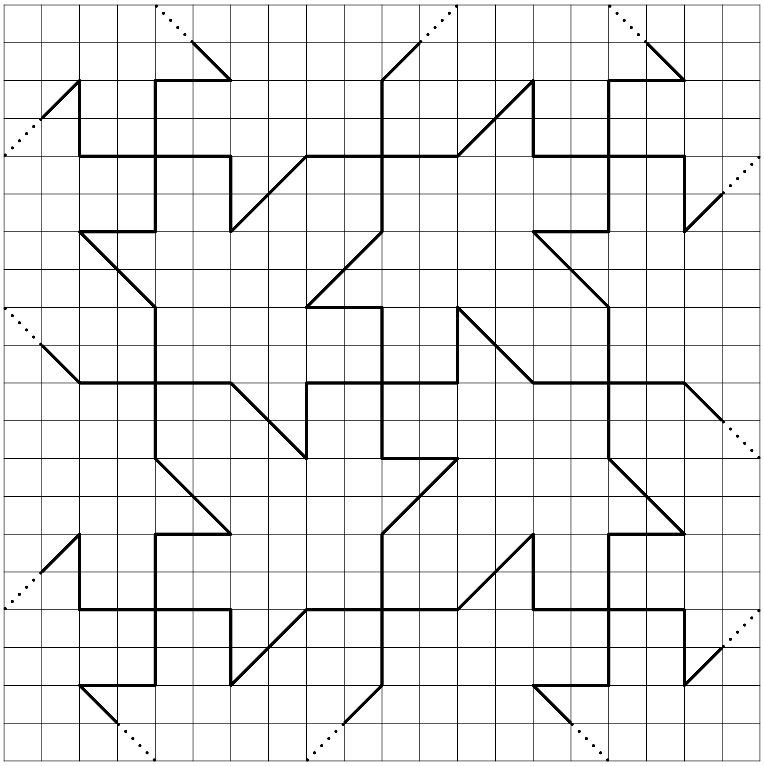
Az 1997/8 és az 1998/1 KöMaL számok hátsó borítóinak ábráiról

Ahhoz, hogy az 1997/8. számban megjelent mór díszítő motívumot (vagy a négyzetet, amelyből származik) négyzethálós papíron kétszeres területűvé nagyítsuk, elegendő a négyzet oldalát 45°-kal elforgatni, és hosszát a négyzet átlójával megegyező méretre, azaz $\sqrt{2}$-szeresére nagyítani.



Patay Gergely (Debrecen), *Gajdos Béla* (Beregszász) és *Baka Nóra* (Kaposvár) is így oldották meg a feladatot.



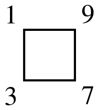


Teljes síklefedés mór díszítő motívummal (beküldte Patay Gergely).

Akiket a téma érdekel, lapozzák fel az Abacus 1998. februári számában *Kovács Zoltán* Barkács-matek rovatát.

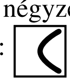
❄

Az 1998/1. sz. hátoldalán a táblázat kis négyzetei egy-egy évtizedet ábrázolnak, 880-tól 2100-ig. A furcsa jelek arra utalnak, hogy abban a tíz évben melyek a prímszámok. Nyilván csak 1, 3, 7 és 9-re végződő szám lehet prím.

Nézzük ezt a megfeleltetést: 

. Amelyik szám az évtizedben prím, abba a csúcsba a négyzet középpontjából vonalat húzunk.

Például: 1301, 1303 és 1307 prímek: 

1890–1900 között nem volt egyetlen prímszám sem, ez a négyzet üresen maradt. 2020 és 2030 között csak 2027 és 2029 prímszámok: 

C gyakorlatok megoldása

C. 446. *Keressük meg az összes olyan pozitív egész számot, amely osztója a tízes számrendszerbeli alakja megfordításával kapható számnak.*

Szalkai Balázs és szülei, Veszprém

Megoldás. Írjuk fel a tízes számrendszerbeli számot a szokásos módon

$$a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$$

alakban. Keressük az

(1) $$\left(a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0\right) k = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \ldots + a_n$$

egyenlet megoldásait, ahol k legalább 1 és legfeljebb 9, mivel a szám és megfordítottja ugyanannyi jegyet tartalmaz.

Legyen először $k=1$, és rendezzük át az (1) egyenletet a következőképpen:

$$10^n(a_n - a_0) + 10^{n-1}(a_{n-1} - a_1) + \ldots + (a_0 - a_n) = 0.$$

Az egyenlőség csak akkor teljesül, ha valamennyi különbség 0, (mivel a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_0 mind pozitív és 10-nél kisebb egész, és 10-nek semelyik hatványa sem 0), azaz $a_n = a_0$, $a_{n-1} = a_1$, $\ldots$, vagyis a szám önmagának tükörképe. (Páratlan sok számjegy esetén a középső számjegyre tükrös, páros sok számjegy esetén a két középső jegy megegyezik.) Az ilyen számok ki is elégítik a feladat követelményét.

Megmutatjuk, hogy a feladatnak az előbbieken kívül csak $k=4$ és $k=9$ esetén van még megoldása.

Legyen $k=4$, ekkor

$$\left(\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}\right) \cdot 4 = a_0 a_1 \ldots a_n.$$

Itt a_n páros, és legfeljebb 2 lehet, és mivel $2 \cdot 4 = 8$, $a_0 = 8$ vagy esetleg 9. De ha $a_0 = 9$ lenne, akkor a 4-szerese nem végződhetne 2-re, ezért $a_0 = 8$, és így

$$\left(\overline{2a_{n-1} \ldots a_1 8}\right) \cdot 4 = \overline{8 \ldots 2}.$$

Ha $a_{n-1} = 3$ lenne, akkor $4 \cdot 23 > 90$; nem lehetséges. Így a_{n-1} vagy 0, vagy 1, vagy 2.

Az $\overline{a_1 8} \cdot 4$ szorzatban tetszőleges a_1 esetén a tízesek helyén mindig páratlan szám áll, ezért a_{n-1} csak 1 lehet.

$$\left(\overline{21 \ldots 8}\right) \cdot 4 = (8 \ldots 21).$$

Az a_1 csak 2 vagy 7 lehet, mert csak ezekre igaz, hogy a fenti szorzat 1-re végződik, mert $4 \cdot 2 + 3 = 11$, $4 \cdot 7 + 3 = 31$. De 2 nem állhat az utolsó előtti helyen, mert

$$\left(\overline{21 \ldots 28}\right) \cdot 4 = (82 \ldots 12)$$

esetén $4 \cdot 21 = 84 > 82$ lenne.

Marad az $a_1 = 7$, és a $2178 \cdot 4 = 8712$ négyjegyű szám valóban megoldás.

Most belátjuk, hogy ha 21 és 78 közé akárhány 9-est írunk, továbbra is jó megoldást kapunk.

Az eredeti szám: $21\underbrace{\ldots\ldots}_{k\text{ darab 9-es}}78$, megfordítottja: $87\underbrace{\ldots\ldots}_{k\text{ darab 9-es}}12$.

Végezzük el a következő átalakításokat:

$$21\underbrace{99\ldots9}_{k\text{ darab 9-es}}78 = 21 \cdot 10^{k+2} + 10^{k+2} - 10^2 + 78 = 22 \cdot 10^{k+2} - 22;$$

hasonlóképpen:

$$87\underbrace{99\ldots9}_{k\text{ darab 9-es}}12 = 87 \cdot 10^{k+2} + 10^{k+2} - 10^2 + 12 = 88 \cdot 10^{k+2} - 88,$$

valóban a megfordított szám négyszerese az eredetinek.

A második esetben, ha $k = 9$, akkor a_n csak 1 lehet.

$$(\overline{1\ldots9}) \cdot 9 = (9\ldots1)$$

Az a_{n-1} lehet 1 vagy 0, de az $a_{n-1} = 1$ azt jelentené, hogy $9 \cdot a_1 + 8$ szám 1-re végződik; ilyen egész szám viszont nincs; ezért $a_{n-1} = 0$,

$$(10\ldots9) \cdot 9 = (9\ldots01),$$

ahonnan $a_1 = 8$ adódik. Valóban, $(1089) \cdot 9 = 9801$, ez a négyjegyű szám is megoldása a feladatnak.

Az előzőkhöz hasonlóan most is beláthatjuk, hogy 10 és 89 közé akárhány 9-est írva jó megoldást kapunk.

Vizsgáljunk meg a kimaradó esetek közül egyet; pl. $k = 3$-ra

$$(\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_0}) \cdot 3 = (\overline{a_0 a_1 \ldots a_n});$$

a_n legfeljebb 3 lehet, és ha $a_n = 3$, akkor

$$(3a_{n-1}\ldots a_0) \cdot 3 = (a_0 a_1 \ldots 3).$$

Az a_0 csak 1 lehet $3a_0 = .3$ miatt, ami lehetetlen, mert az egyenlet jobb oldalán kisebb szám állna, mint a bal oldalon.

A többi esetet végigvizsgálva láthatjuk, hogy nincs másféle megoldása az (1) egyenletnek. A megoldások száma így is végtelen.

Megjegyzés. A feladat szövege szerint „keressük meg az összes pozitív számot. . . ” a megoldók egy része elkezdte összeszámolni a megoldásokat. A kérdésre az is helyes válasz, hogy végtelen sok van (meg kell mondani persze, hogy „melyek ezek”, milyen összefoglaló tulajdonsággal rendelkeznek a feladat feltételei következtében).

215 dolgozat érkezett. 5 pontos Bálint Olivér, Boros M. Mátyás, Csizmadia Zsolt, Fehér Lajos Károly, Kispál István, Kovács 339 Attila, Lajtos Tímea, Mészáros Albert, Nagy 712 Gábor, Nagy 725 János, Polyák Tamás, Sarlós Ferenc, Terpai Tamás, Tirpák Miklós, Varanka János és

Végh A. László megoldása. 4 pontot kapott 12, 3 pontot 41, 2 pontot 57, 1 pontot 48, 0 pontot 41 versenyző.

C. 477. *Egy automatába kétféle korongot dobhatunk be, pirosat vagy zöldet. A gép* 1 *piros korongért* 5 *zöldet ad és* 1 *zöldért* 5 *pirosat. Ha valaki* 1 *zöld koronggal kezd el játszani, elérheti-e, hogy ugyanannyi zöld korongja legyen, mint piros, ha elég sokáig játszik?*

Angol versenyfeladat

I. megoldás. Ha ugyanannyi zöld korongunk lenne, mint piros, akkor a korongok számának összege páros lenne. Mivel 1 korong bedobásával a korongok száma 4-gyel nő, minden lépés után a korongok együttes száma páratlan. Nem érhető tehát el, hogy a zöld és piros korongok száma egyenlő legyen.

Föglein Ágnes (Németország, Oberasbach, Dietrich-Bonhoeffer Gymn., 10. évfolyam)

II. megoldás. Ha az automatába bedobunk egy zöld korongot, ezek száma 1-gyel csökken, míg a piros korongok száma 5-tel nő. (Ha piros koronggal kezdenénk, hasonló volna a helyzet.) Azaz minden korong bedobásakor a különböző színű korongok számának különbsége 6-tal változik. Kezdéskor a különbség 1 volt, így minden bedobás után a különböző színű korongok száma közti különbség $6k+1$ alakú, ahol k egy egész szám. Ha a két színből ugyanannyi korong lenne, ez azt jelentené, hogy $6k+1=0$, ahonnan $k=-\frac{1}{6}$, ami lehetetlen. Soha nem lehet tehát a piros és zöld korongok száma egyenlő.

Kormos Márton (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 12. évf.)

531 dolgozat érkezett. 6 pontos Kormos Márton, Pozsonyi Tamás, Sarlós Ferenc, Szőllősi Loránd megoldása. 5 pontos 408, 4 pontos 1, 2 pontos 2, 1 pontos 1 dolgozat. Hibás 103, nem versenyszerű 12.

C. 478. *Egy számtani sorozat első* n *elemének összege* A, *első* $2n$ *elemének összege* B. *Fejezzük ki* A *és* B *segítségével az első* $3n$ *elem összegét.*

Javasolta: *Sarinay Dávid,* Siófok

Megoldás. Írjuk fel a számtani sorozat ismert összegképletét az első n, $2n$ és $3n$ tagra:

$$A=S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d),$$
$$B=S_{2n}=\frac{2n}{2}(2a_1+(2n-1)d),$$
$$C=S_{3n}=\frac{3n}{2}(2a_1+(3n-1)d).$$

Rendezve:

$$2A=2a_1n+n^2d-nd,$$
$$B=2a_1n+2n^2d-nd.$$

A második egyenlőségből az elsőt kivonva kapjuk, hogy

$$B-2A=n^2d.$$

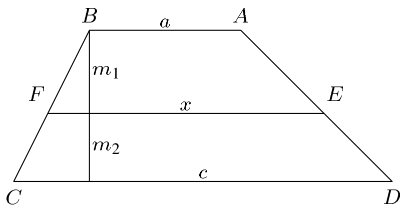
A 3. egyenletet rendezve és n^2d helyébe beírva a most kapott $(B-2A)$-t:

$$2C=2S_{3n}=6a_1n+9n^2d-3nd=6a_1n+6n^2d-3nd+3n^2d=$$
$$=3(2a_1n+2n^2d-nd)+3n^2d=3B+3(B-2a).$$

Innen $C=3(B-A)$.

451 dolgozat érkezett. 6 pontos Hajlamász Zsolt, Orbán Viktor, Robotka Zsolt, Szűcs 702 Zsófi megoldása. 5 pontos 275, 4 pontos 18, 3 pontos 8, 2 pontos 10, 1 pontos 21, 0 pontos 77, nem versenyszerű 38 dolgozat.

C. 479. *Egy trapéz párhuzamos oldalai a és c. Mekkora annak a szakasznak a hossza, amely párhuzamos a trapéz megadott oldalaival, és a trapéz területét felezi?*



Megoldás. Legyenek a trapéz csúcsai A, B, C, D az *ábra* szerint. A trapéz területét felező x szakasz az AD szárat E-ben, a BC szárat F-ben metszi, $EF=x$, $EF \parallel AB$.

Jelöljük az $ABCD$ trapéz területét $2T$-vel, ekkor

$$T_{EFCD}=T_{ABFE}=T.$$

Írjuk fel a területeket a szokásos képlettel:

$$2T=\frac{a+c}{2}\cdot m. \tag{1}$$

$$T=\frac{c+x}{2}\cdot m_2. \tag{2}$$

$$T=\frac{x+a}{2}\cdot m_1. \tag{3}$$

(1), (2) és (3)-ból a megfelelő magasságokat kifejezhetjük:

$$m_1=\frac{2T}{x+a},\qquad m_2=\frac{2T}{c+x},\qquad m=\frac{4T}{a+c},$$

és mivel $m_1+m_2=m$, T-vel való egyszerűsítés után kapjuk, hogy $(T\neq 0)$,

$$\frac{2}{x+a}+\frac{2}{c+x}=\frac{4}{a+c}.$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket és egyszerűsítéseket, a kívánt szakasz hossza:

$$x=\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}.$$

Münz Márton (Budapest, Alternatív Közg. Gimn., 10. évf.)

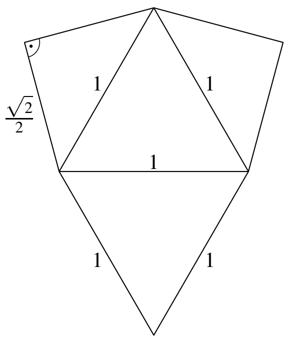
Megjegyzés. Ez az összefüggés akkor is igaz, ha $a=c$, azaz a trapéz paralelogramma. Ekkor a területfelező egyenes hossza megegyezik az alapok hosszával és a másik két oldal felezőpontjait köti össze. Erre nem gondoltak azok, akik a megoldást úgy kezdték, hogy a szárak metszéspontja legyen.... Paralelogramma esetén ugyanis nincs ilyen pont.

391 dolgozat érkezett. 6 pontos Csató György, Csirmaz Attila, Csizmadia Zsolt, Gara Zsófia, Győrfi Annamária, Herczeg Tamás, Orbán Viktor, Szekeres Szabolcs, Szigel Gábor megoldása. 5

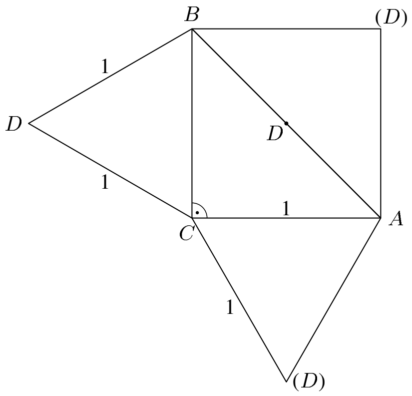
pontos 129, 4 pontos 151, 3 pontos 15, 2 pontos 26, 1 pontos 26, 0 pontos 29, nem versenyszerű 6 dolgozat.

C. 480. *Egy tetraéder két lapja egységnyi oldalú szabályos háromszög, két lapja pedig egyenlő szárú derékszögű háromszög. Mekkora a tetraéder térfogata?*

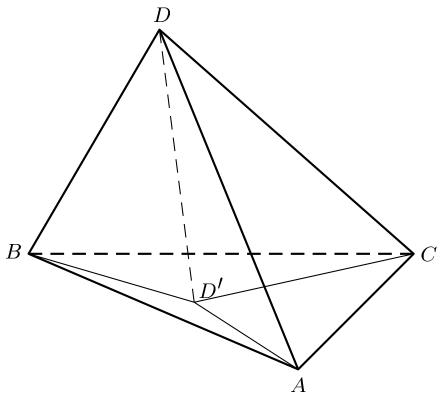
Megoldás. Készítsük el a test hálózatát. Könnyű belátni, hogy a derékszögű háromszög átfogója nem lehet egységnyi (*1. ábra*), mert akkor a befogó hossza $\frac{\sqrt{2}}{2}$ lenne, s ehhez nem illeszkedhet az egységnyi oldalú szabályos háromszög. A keresett test tehát 2 db szabályos és 2 db egységnyi befogójú derékszögű háromszögből áll (*2. ábra*).



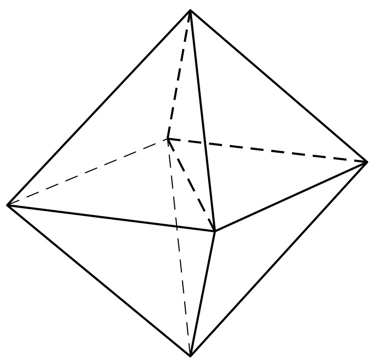
1. ábra



2. ábra



3. ábra



4. ábra

Legyen az alaplap az ABC derékszögű háromszög. A negyedik D csúcs alapsíkra való vetülete D' (*3. ábra*). A $DD'A$, $DD'B$, $DD'C$ derékszögű háromszögek egybevágók, mivel átfogójuk éppen a test magasságával egyenlő; így $D'A = D'B = D'C$. A

D' pont egyenlő távolságra van az A, B, C csúcsoktól, s mivel ABC derékszögű, D' az ABC háromszög köré írható Thalész kör középpontja. Így $D'A = D'B = D'C = \frac{\sqrt{2}}{2}$, azaz a $DD'B$ derékszögű háromszög is egyenlő szárú. Ezért a tetraéder testmagassága $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

A tetraéder térfogata: $V = \frac{A_t \cdot m}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}$ térfogategység.

Megjegyzés. Többen észrevették, hogy a megadott tetraéder a szabályos egységoldalú oktaédernek éppen a negyede, s így a térfogata könnyen felírható.

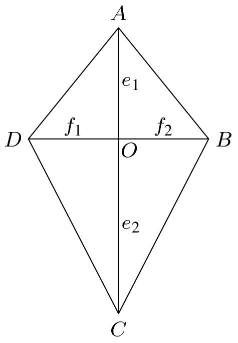
331 dolgozat érkezett. 6 pontos Domonkos Brigitta, Fehér Gergely, Kiss 921 Olivér, Madarász Éva, Münz Márton, Novits László, Péterfalvi Ferenc, Ráth Krisztián, Stefán Gábor, Tóth Adrienn, Tóth Katalin dolgozata. 5 pontos 182, 4 pontos 27, 3 pontos 10, 2 pontos 6, 1 pontos 0, 0 pontos 74, nem versenyszerű 21.

C. 483. *A* Mindent vagy semmit! *műveltségi vetélkedő egyik adásában hangzott el az a kérdés, hogy melyik az a síkidom, amelynek területe az átlók szorzatának a fele. „Deltoid” – volt a hivatalos válasz. Vajon szükséges-e, hogy a keresett síkidom deltoid legyen?*

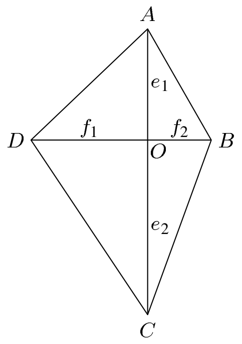
Megoldás. A feltétel, azaz hogy a négyszög (konvex) deltoid legyen, nyilván elegendő, de nem szükséges. Tekintsük az $ABCD$ deltoidot (*1. ábra*). Tudjuk, hogy az átlói merőlegesek egymásra, 4 derékszögű háromszögre osztják a deltoidot. A háromszögek területeinek összege egyenlő a deltoid területével. Jelöljük az átlók metszéspontját O-val, az $AO = e_1$, $OC = e_2$, $DO = f_1$, $BO = f_2$ jelöléssel

$$T = \frac{f_1 e_1}{2} + \frac{f_2 e_1}{2} + \frac{f_1 e_2}{2} + \frac{f_2 e_2}{2} = \frac{(f_1 + f_2)(e_1 + e_2)}{2} = \frac{ef}{2}.$$

Az előző számítást azonban bármely olyan konvex négyszögre is alkalmazhatjuk, amelynek átlói merőlegesek egymásra, hiszen sehol sem használtuk fel, hogy a négyszög kétkét oldalpárjának hossza megegyezik.



1. ábra



2. ábra

Így tehát ezekre a konvex négyszögekre (nem deltoidokra) is igaz, hogy területük egyenlő az átlók szorzatának felével (*2. ábra*).

Megjegyzés. Mivel a négyzet és rombusz speciális deltoidok, azokra is igaz az állítás. Ez azonban nem elegendő válasz. Azt kellett belátnunk, hogy létezik olyan négyszög, amely nem deltoid (tehát nem is négyzet vagy rombusz), amelynek a területe a feladatban leírt módon kapható.

421 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Ábrány Miklós, Andrássy Zoltán, Antal István, Bákor Krisztina, Benke Noémi, Biczó Mihály, Csató György, Csizmadia Zsolt, Csóka Endre, Csordás Helga, Csökmei Krisztina, Dőry Magdolna, Gueth Krisztián, Horváth Illés, Németh 245 Ádám, Pozsonyi Tamás, Sarlós Ferenc, Szűcs 702 Zsófia, Tamás Gábor Zoltán és Zeke András. 5 pontos 264, 4 pontos 29, 2 pontos 1, 1 pontos 14, 0 pontos 86 dolgozat. Nem versenyszerű 7.

C. 486. *Hányféleképpen fizethető ki* 25 *forint* 1, 2, 5, 10 *és* 20 *forintos érmékből?*

Megoldás. A kérdésre megadhatjuk a választ úgy, hogy megszámoljuk a lehetséges eseteket.

Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor csak egyféle pénzt használunk fel a kifizetéshez. Ez nyilván nem lehet páros értékű (2, 10, 20 Ft-os) érme, mivel 25 páratlan. Így marad $\underline{2}$ lehetőségünk, amikor csupa 1 Ft-ossal, illetve csupa 5 Ft-ossal fizetünk.

Ezután számoljuk össze azon eseteket, amikor kétféle névértéket használunk fel. Ez lehet 1 és 2 Ft-os a következőképpen:

1 db 1 Ft-os és 12 db 2 Ft-os,
3 db 1 Ft-os és 11 db 2 Ft-os,

és így tovább, mindig 1-gyel csökkentjük a 2 Ft-osok számát, és 2-vel növeljük az 1 Ft-osokét. Ez összesen $\underline{12}$ eset.

Az 1 és 5 forintosok felhasználásánál 5 db 1 Ft-ossal és 4 db 5 Ft-ossal kezdünk, és hasonlóképpen csökkentve az 5 Ft-osok számát, és növelve az 1 Ft-osokét, összesen $\underline{4}$ lehetséges esetünk van.

Könnyű belátni, hogy 1 és 10 Ft-osok felhasználásával a lehetőségek száma $\underline{2}$, míg 1 és 20 Ft-osokkal és 5 és 20 Ft-ossal csak $\underline{1}$-$\underline{1}$ eset lehetséges, 2 és 5 Ft, illetve 5 és 10 Ft felhasználásával viszont $\underline{2}$-$\underline{2}$ eset.

Ez eddig összesen $2+12+4+2+1+1+2+2=26$ lehetőség.

Hátravan még az a lehetőség, amikor 3, illetve 4 különböző címletű érmét használunk fel a kifizetéshez. Az előzőhöz hasonlóan beláthatjuk, hogy az első esetben az összes lehetőségek száma $\underline{36}$, míg a második esetben $\underline{6}$.

Végeredményben összesen: $26+36+6=68$-féleképpen tudunk kifizetni 25 Ft-ot az 1, 2, 5, 10, 20 Ft-os címletekkel, feltéve, hogy azokból elegendő darab áll rendelkezésünkre.

311 dolgozat érkezett. 6 pontos Bérces Márton és Szőllősi Loránd megoldása. 5 pontot kapott 70, 4 pontot 122, 3 pontot 68, 2 pontot 15, 1 pontot 21, 0 pontot 7 dolgozat. Nem versenyszerű 6.

C. 488. *Egy egyenes csonkakúp palástját oldalmagasságának feléig kékre festettük, azon felül pirosra. A kék színű felület kétszer akkora, mint a piros. Hányszorosa az alapkör sugara a fedőkör sugarának?*

Megoldás. A csonkakúp palástjának felszíne: $P_f=(R+r)a\pi$, ahol r és R a fedőkör, illetve alapkör sugarát, míg a a csonkakúp alkotóját jelöli. Ha a kúpot pontosan a magassága felénél kettévágnánk, az elvágott kör sugara az alap és fedőkör sugarának számtani közepe lenne, azaz $\frac{R+r}{2}$. Így felírhatjuk a feltételnek megfelelő következő egyenletet:

$$\left(\frac{R+r}{2}+R\right)\frac{a}{2}\pi=2\left(\frac{R+r}{2}+r\right)\frac{a}{2}\pi,$$

ahonnan egyszerűsítés után $R=5r$.

278 dolgozat érkezett. 6 pontos Juhász 606 Erika megoldása. 5 pontot kapott 204, 4 pontot 21, 3 pontot 16, 2 pontot 5, 1 pontot 17, 0 pontot 10 dolgozat. Nem versenyszerű 4.

Matematika gyakorlatok megoldásai

Gy. 3150. *Egy városban minden buszjáratnak* 3 *megállója van, bármely két megálló között van buszjárat, és bármely két buszjáratnak* 1 *közös megállója van. Hány buszjárat lehet a városban?* (**H**)

Megoldás. Jelöljük a megállók számát n-nel. Ekkor a megálló-párok száma $\binom{n}{2}$. Tudjuk, hogy bármely két megálló között van buszjárat, és hogy bármely két buszjáratnak 1 közös megállója van, tehát 2 megálló között pontosan egy buszjárat közlekedik. Mivel minden buszjáratnak 3 megállója van, ezért a buszjáratok száma $\frac{1}{3}\cdot\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{6}$, így a járatok páronkénti közös megállóinak száma

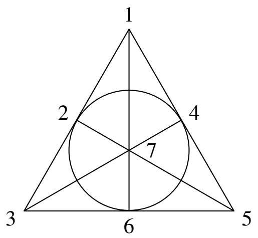
$$k=\binom{\frac{n(n-1)}{6}}{2}=\frac{\frac{n(n-1)}{6}\left(\frac{n(n-1)}{6}-1\right)}{2}.$$

Másrészt minden megállóban $\frac{n-1}{2}$ buszjárat áll meg (minden buszjárathoz 2 másik megálló van), ezért minden megálló $\binom{\frac{(n-1)}{2}}{2}=\frac{\frac{n-1}{2}\cdot\left(\frac{n-1}{2}-1\right)}{2}$ közös megállónak felel meg. Tehát $k=n\cdot\frac{\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}-1\right)}{2}$, vagyis

$$\frac{\frac{n(n-1)}{6}\cdot\left(\frac{n(n-1)}{6}-1\right)}{2}=n\cdot\frac{\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}-1\right)}{2}.$$

Ebből $n^2-10n+21=0$, azaz $n=3$ vagy $n=7$.

Az $n=3$ esetben 1 buszjárat van, amire nyilvánvaló a feladat állítása. Az $n=7$ esetben 7 buszjárat van, amire a következő példát lehet mutatni:



Ha a buszmegállókat 1, 2, 3, …, 7-tel jelöljük, akkor a következő buszjáratok kielégítik a feladat feltételeit:

$$\{1,2,3\},\quad \{1,4,5\},\quad \{1,6,7\},\quad \{2,4,6\},$$
$$\{2,5,7\},\quad \{3,4,7\},\quad \{3,5,6\}.$$

Tehát 1 vagy 7 buszjárat lehet a városban.

Székelyhidi Gábor (Kuwait, New English School, 11. évf.)

Megjegyzés. A feladatbeli megállók járatonkénti csoportosítása speciális esete a következő típusú konfigurációknak. Tekintsünk egy n elemű halmazt és ennek bizonyos részhalmazait azzal a két tulajdonsággal, hogy
(1) bármely két ilyen (különböző) részhalmaznak pontosan egy közös eleme van; és
(2) bármely két (különböző) elemet véve a halmazban, pontosan egy olyan kijelölt részhalmaz létezik, amelynek mindketten elemei.

Az (1) és (2) tulajdonságoknak eleget tevő halmazrendszereket – bizonyos, nyilvánvalóan triviális elrendezéstől eltekintve – *véges projektív síkoknak* nevezzük; a természetes geometriai analógia alapján a halmaz elemeit pontoknak, a kijelölt részhalmazokat egyeneseknek hívjuk. Könnyen belátható, hogy egy projektív sík egyeneseinek a száma ugyanannyi, mint a pontok száma, azaz n. Azt sem nehéz bizonyítani, hogy minden egyenesnek ugyanannyi pontja van – szokás ezt a számot $(q+1)$-gyel jelölni – és ez a szám megegyezik egy tetszőleges ponton átmenő egyeneseknek a számával. Az is egyszerűen adódik ezután, hogy $n=q^2+q+1$.

Az úgynevezett véges testek felhasználásával konstruálni lehet véges projektív síkot minden olyan esetben, amikor q prímhatvány. Vannak azonban olyan síkok, amelyek ezzel az általános eljárással nem állíthatók elő. Olyan síkot azonban még senki sem talált, amelyben q ne lett volna prímhatvány. Ezzel kapcsolatos a véges matematika egy nevezetes, mindeddig megoldatlan problémája: milyen q értékekre létezik q-adrendű véges projektív sík (lehet-e q más is, mint egy prímszám egész kitevős hatványa)?

311 dolgozat érkezett. 6 pontos Naszódi Gergely, 5 pontos Babos Attila, Béky Bence, Birkner Tamás, Devecsery András, Dombi 870 Tímea, Gajári Dávid, Gerencsér Balázs, Gyenes Zoltán, Hesz Gábor, Hudomiet Péter, Kerékfy Péter, Keszegh Balázs, Kiss 345 Gergely, Kunszenti-Kovács Dávid, Lengyel Tímea, Németh 214 András, Pap Júlia, Papp Dávid, Pataki Péter, Szécsi Vajk, Székelyhidi Gábor, Terpai Tamás, Tillinkó Zsanett, Végh A. László, Venter György, Vizer Máté és Zábrádi Gergely megoldása. 4 pontot kapott 50, 3 pontot 23, 2 pontot 20, 1 pontot 68, 0 pontot 108 beküldő. Nem versenyszerű 14 dolgozat.

Gy. 3151. *Minden pozitív egész n-re jelölje A_n azon pozitív egészek halmazát, amelyek nem relatív prímek n-hez. Milyen n-ekre következik $x,\, y\in A_n$-ből, hogy $x+y$ is A_n-ben van?*

Megoldás. Mivel az 1-hez minden szám relatív prím, azért A_1 az üres halmaz, így $x,\, y\in A_1$-ből $x+y\in A_1$ nyilvánvalóan teljesül.

Legyen most $n>1$. Ha $n=p^k$ prímhatvány, akkor egy szám vagy relatív prím n-hez, vagy osztható p-vel. Ha tehát $x,\, y\in A_n$, akkor x és y osztható p-vel, így az összegük is, tehát $x+y\in A_n$ következik. Ezek a számok tehát megfelelőek.

Megmutatjuk, hogy ha n prímosztóinak száma legalább 2, akkor vannak olyan x és y számok, amelyek nem relatív prímek n-hez, míg az összegük az.

Legyenek n prímosztói $p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_m$, $m\geqslant 2$. Legyen $x=p_1$ és $y=p_2p_3\ldots p_m$. Ekkor x és y nyilván nem relatív prím n-hez. Az $x+y$ számnak viszont nincs 1-nél nagyobb közös osztója n-nel, hiszen nem osztható az n egyetlen prímosztójával sem. Tehát $x,\ y\in A_n$, $x+y\notin A_n$; a megoldást pontosan a prímhatványok jelentik.

Papp Dávid (Budapest, Szent István Gimn., 10. évf.)

186 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Papp Dávid, 5 pontos Béky Bence, Deli Lajos, Erdei Zsuzsa, Győri Nikolett, Poór Veronika, Varjú Péter, Venter György és Zábrádi Gergely megoldása. 4 pontot kapott 82, 3 pontot 34, 2 pontot 27, 1 pontot 14, 0 pontot 20 dolgozat.

Gy. 3152. *Az a, b, c, d valós számokra $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}=6$, és $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}=8$ teljesül. Mi lehet $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ értéke?*

Megoldás. Legyen $p=\frac{a}{b}$, $q=\frac{b}{c}$, $r=\frac{c}{d}$ és $s=\frac{d}{a}$. Ekkor a két egyenlet:

$$p+q+r+s=6 \quad \text{és}$$

$$pq+qr+rs+sp=8.$$

A második egyenletet szorzattá alakíthatjuk: $(p+r)(q+s)=8$. Ekkor a $p+r=x$ helyettesítéssel az első egyenletből $q+s=6-x$, így a második egyenletből $x(6-x)=8$, azaz $-x^2+6x-8=0$, így

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot(-1)\cdot(-8)}}{2\cdot(-1)}=\frac{-6\pm 2}{-2},$$

vagyis a keresett összeg értéke 2, illetve 4 lehet.

Természetesen csak akkor teljes a megoldásunk, ha mutatunk olyan a, b, c, d számokat, amelyekre a keresett összeg valóban 2, illetve 4. Legyen először $a=b=1$, $c=d=2-\sqrt{3}$, a másik esetben pedig $a=d=2+\sqrt{3}$, $b=c=1$.

Papp Dávid (Budapest, Szent István Gimn., 10. évf.)

237 dolgozat érkezett. 5 pontos Bajusz Csaba, Bárány Zsófi, Csikvári Péter, Csirmaz Előd, Deli Lajos, Gelencsér Gábor, Gerencsér Balázs, Gyenes Zoltán, Győri Nikolett, Horváth 713 György, Hudomiet Péter, Kiss 345 Gergely, Máthé András, Papp Dávid és Pozsonyi Gergő megoldása. 4 pontot kapott 195, 3 pontot 10, 2 pontot 7, 1 pontot 1, 0 pontot 9 beküldő.

Matematika feladatok megoldásai

F. 3191. *Az n és p pozitív egész számokra teljesül, hogy $n\geqslant 6$, $4\leqslant p\leqslant \frac{n}{2}$. Színezzük ki egy szabályos n-szög p darab csúcsát pirosra, a többit kékre! Bizonyítsuk be, hogy létezik két egybevágó, legalább $\left[\frac{p}{2}\right]+1$ csúcsú sokszög, amelyek közül az egyiknek minden csúcsa piros, a másiknak pedig minden csúcsa kék!*

Megoldás. Színezzünk ki ugyanígy egy másik, ugyanekkora méretű szabályos n-szöget is. Rakjuk ezt az n-szöget az eredeti fölé úgy, hogy azonos színű csúcsok kerüljenek egymásra. Ezután forgassuk el a felső sokszöget rendre $\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}, \dots, (n-1)\frac{2\pi}{n}$ szöggel. A $j\cdot\frac{2\pi}{n}$ szögű forgatás során néhány piros csúcs kék csúcs fölé került: legyen ezek száma k_j.

$k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}=p(n-p)$, mivel minden piros csúcs $n-p$ esetben került kék csúcs fölé. A $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ számok közül vegyük a legnagyobbat, legyen ez k_t. Ekkor:

$$(n-1)k_t \geqslant k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}=p(n-p).$$

Ebből: $k_t \geqslant \frac{p(n-p)}{n-1}$. Felhasználva, hogy $p<\frac{n+1}{2}$, kapjuk:

$$k_t \geqslant \frac{p(n-p)}{n-1} > \frac{p\left(n-\frac{n+1}{2}\right)}{n-1} = \frac{p}{2} \geqslant \left[\frac{p}{2}\right].$$

k_t egész, tehát:

$$k_t \geqslant \left[\frac{p}{2}\right]+1.$$

Jelöljük meg a $t\cdot\frac{2\pi}{n}$ szögű forgatás során a piros csúcsok alá került kék csúcsokat, és a felettük lévő piros csúcsokat. Így két egybevágó, legalább $\left[\frac{p}{2}\right]+1$ csúcsú sokszöghöz jutunk, amelyek közül az egyiknek minden csúcsa piros, a másiknak minden csúcsa kék. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Terpai Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

28 dolgozat érkezett. 5 pontos Bárány Kristóf, Barát Anna. Dályay Virág, Gelencsér Gábor, Gyenes Zoltán, Juhász András, Katona Zsolt, Lippner Gábor, Lukács László, Pap Júlia, Pogány Ádám, Székelyhidi Gábor, Terpai Tamás, Végh A. László, Vidor Anna és Zábrádi Gergely megoldása. 4 pontos 4, 3 pontos 4, 2 pontos 1, 0 pontos 3 dolgozat.

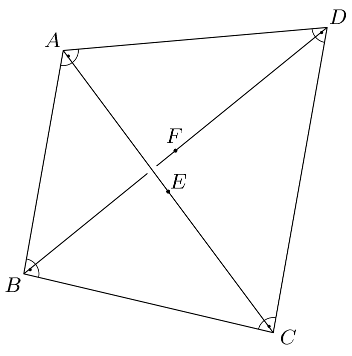
F. 3192. *Az 5×5-ös sakktáblán lóugrással néhányat léptünk úgy, hogy végül a kiindulási helyre értünk vissza. Lehetséges-e, hogy a sakktábla minden mezőjére pontosan egyszer léptünk?*

Megoldás. A huszár világos mezőről csak sötét, sötét mezőről csak világos mezőre léphet. Így páratlan sok lépés után ellenkező színű mezőn áll, mint a kiinduláskor. Az 5×5-ös sakktábla bejárásához páratlan sok lépés szükséges. Tehát nem lehetséges, hogy a sakktábla minden mezőjére pontosan egyszer léptünk.

Schmidt Ágnes (Budapest, Szent István Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

285 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Báli Péter, Benke András, Bozsik Balázs, Csikvári András, Csizmadia László, Föhércz András, Gáli Gergely, Gáspár Merse Előd, Horváth 472 András, Kasztner Tamás, Kutalik Péter, Less Áron, Lippner Gábor, Mecz Balázs, Naszódi Gergely, Németh 330 Gábor, Oláh 407 Szabolcs, Pszota Anikó, Puskás Péter, Várady Gergő és Varga 577 István. 5 pontos 247, 4 pontos 4, 3 pontos 1, 1 pontos 6, 0 pontos 6 dolgozat.

F. 3193. *A torznégyszög csúcsai nincsenek egy síkban. Lehet-e egy torznégyszög mindegyik szöge derékszög?*



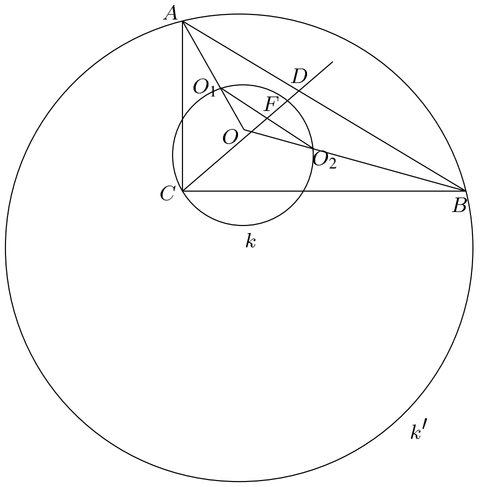
Megoldás. A torznégyszög csúcsai egy tetraédert határoznak meg, aminek van körülírt gömbje. Legyen a négyszög átlóinak felezőpontja E, illetve F, és tegyük fel, hogy mindegyik szöge derékszög. Az ABC derékszögű háromszögből $EA = EC = EB$, az ACD derékszögű háromszögből pedig $EA = EC = ED$. Megállapításaink azt jelentik, hogy az E ponttól a négyszög csúcsai egyenlő távolságra vannak, tehát E a körülírt gömb középpontja. Az ABD és BCD derékszögű háromszögekből az előbbiekhez hasonlóan arra következtethetünk, hogy F is a körülírt gömb középpontja. Mivel a körülírt gömb egyértelműen létezik, ez csak úgy lehetséges, ha E és F egybeesnek. De akkor a négyszög átlói metszik egymást, tehát az síknégyszög. Ez ellentmondás, ezért nincs olyan torznégyszög, amelynek mindegyik szöge derékszög.

Kiss András Péter (Gyula, Erkel Ferenc Gimn., 12. évf.)

184 dolgozat érkezett. 6 pontos Baharev Ali, Barát Anna, Kőműves Balázs, Less Áron, Páles Csaba, Papp Dávid, Pataki Péter, Székelyhidi Gábor megoldása. 5 pontos 98, 4 pontos 33, 2 pontos 9, 1 pontos 4, 0 pontos 14 dolgozat.

F. 3194. *Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójának D egy olyan pontja, amelyre a DCA és DCB háromszögekbe írható körök sugara megegyezik. Szerkesszük meg a D pontot.*

Javasolta: *Mihalovics Sándor,* Esztergom



Megoldás. Vizsgáljunk meg egy, a feladat feltételeinek eleget tevő háromszöget. Legyen az ADC háromszög beírt körének középpontja O_1, a BDC háromszögé O_2, az ABC háromszög beírt körének középpontja pedig O. Az O_1O_2 szakasz és a CD metszéspontja legyen F. A CO_1 szakasz felezi a DCA, a CO_2 pedig a DCB szöget, ezért az $O_1CO_2\sphericalangle = 45^\circ$. Az O_1, O_2, C pontokon átmenő k kör C pontjából O_1O_2 45°-os szögben látszik, és O_1O_2 párhuzamos AB-vel. A k kört O-ból felnagyíthatjuk úgy, hogy a képe átmenjen az A, B pontokon, legyen ez a nagyított kör k'. A k' kör azon pontjaiból, amelyek AB-nek ugyanabban a félsíkjában vannak, mint a C csúcs, az AB szakasz 45°-os szögben látszik. Ennek ismeretében k' megszerkeszthető. Ha most a k' kört O-ból úgy kicsinyítjük, hogy átmenjen a C ponton, a k kört kapjuk, amely az AO és BO szögfelezőkből kimetszi az

O_1, illetve O_2 pontokat. Tekintve, hogy O_1 és O_2 ugyanakkora távolságra vannak CD-től, F az O_1O_2 szakasz felezőpontja, ezért CF szerkeszthető, és CF kimetszi AB-ből a D pontot.

A feladatnak mindig egy megoldása van, mert O_1 és O_2, de akkor F szerkesztése is egyértelmű.

Katona Zsolt (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. évf.)

62 dolgozat érkezett. 7 pontot kapott Zawadowski Ádám. 6 pontos Hangya Balázs, Hermann György, Léka Zoltán és Lengyel Tímea megoldása. 5 pontos 36, 4 pontos 10, 3 pontos 1, 2 pontos 2, 1 pontos 2, 0 pontos 5 dolgozat, nem versenyszerű 1.

F. 3199. *Az ABC háromszög C-nél lévő szögét n egyenlő részre osztó egyenesek az AB oldalt a $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ pontokban metszik. Mutassuk meg, hogy az*

$$\frac{\dfrac{1}{AC_1}-\dfrac{1}{AB}}{\dfrac{1}{C_{n-1}B}-\dfrac{1}{AB}}$$

tört értéke nem függ n-től.

I. megoldás. Hozzuk egyszerűbb alakra az emeletes törtet:

$$\frac{\frac{1}{AC_1}-\frac{1}{AB}}{\frac{1}{C_{n-1}B}-\frac{1}{AB}}=\frac{AB-AC_1}{AB-C_{n-1}B}\cdot\frac{C_{n-1}B}{AC_1}=\frac{BC_1\cdot BC_{n-1}}{AC_1\cdot AC_{n-1}}.$$

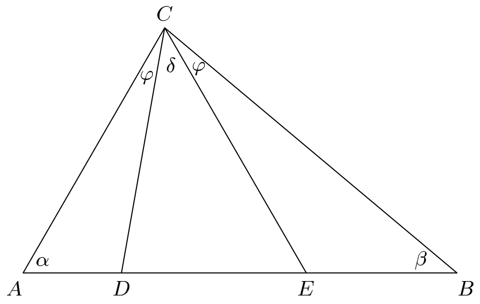
A C_1 és C_{n-1} pontokra igaz, hogy $ACC_1\sphericalangle=BCC_{n-1}\sphericalangle$. Megmutatjuk, hogy ha D és E az AB oldal olyan pontjai, amelyekre $ACD\sphericalangle=BCE\sphericalangle=\varphi$, akkor $\dfrac{BD\cdot BE}{AD\cdot AE}=$ $=\left(\dfrac{BC}{AC}\right)^2$, ami eredeti feladatunknak általánosítása. Legyen $DCE\sphericalangle=\delta$, $CAB\sphericalangle=\alpha$ és $CBA\sphericalangle=\beta$ (lást az *1. ábrát*). Ekkor a szinusztételt alkalmazva a BCD, BCE, ACD, ACE és ABC háromszögekben, kapjuk, hogy

$$\frac{BD\cdot BE}{AD\cdot AE}=\frac{\left(CD\cdot\frac{\sin(\varphi+\delta)}{\sin\beta}\right)\cdot\left(CE\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin\beta}\right)}{\left(CD\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}\right)\cdot\left(CE\cdot\frac{\sin(\varphi+\delta)}{\sin\alpha}\right)}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}=\left(\frac{BC}{AC}\right)^2.$$

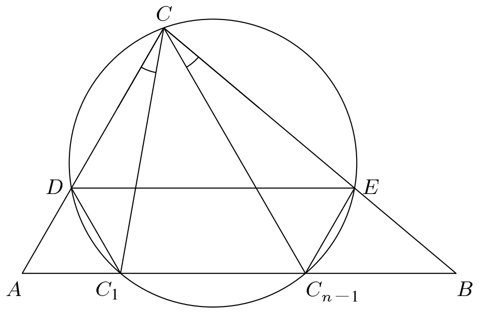
Mansur Boase (London, Anglia) dolgozata alapján

Megjegyzés. A bizonyítás során felhasználtuk, hogy D az AE szakaszon van, azaz $2\varphi<ACB\sphericalangle$. Ha $2\varphi\geqslant ACB\sphericalangle$, az állítás akkor is igaz, a bizonyításon csak annyit kell módosítani, hogy $\varphi+\delta$ helyett $\varphi-\delta$-t írunk.

II. megoldás. Ismét azt mutatjuk meg, hogy $\dfrac{BC_1\cdot BC_{n-1}}{AC_1\cdot AC_{n-1}}$ állandó. Messe a CC_1C_{n-1} háromszög köré írható kör az AC és a BC szakaszokat a D és az E pontokban (*2. ábra*). Mivel a körben $DCC_1\sphericalangle=ECC_{n-1}\sphericalangle$, azért $DC_1=EC_{n-1}$, tehát a DE szakasz a szimmetria miatt párhuzamos AB-vel. Ezért a párhuzamos szelők tétele



1. ábra



2. ábra

alapján $\dfrac{BE}{AD} = \dfrac{BC}{AC}$. Másrészt az A, illetve a B pontnak a körre vonatkozó hatványát kétféleképpen felírva kapjuk, hogy $AC_1 \cdot AC_{n-1} = AD \cdot AC$ és $BC_1 \cdot BC_{n-1} = BE \cdot BC$. Ezeket felhasználva:

$$\frac{BC_1 \cdot BC_{n-1}}{AC_1 \cdot AC_{n-1}} = \frac{BE \cdot BC}{AD \cdot AC} = \frac{BE}{AD} \cdot \frac{BC}{AC} = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2,$$

ami állandó.

Pap Júlia (Debrecen, Fazekas M. Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján

81 dolgozat érkezett. 6 pontos Birkner Tamás, Izsák Rudolf, Lengyel Tímea, Lukács László, Mansur Boase, Pap Júlia, Pataki Péter és Vaik István megoldása. 5 pontos 67, 4 pontos 2, 3 pontos 1, 0 pontos 3 dolgozat.

F. 3204. *Két játékos a következő játékot játssza:* 923^k *darab kavicsból felváltva elvesznek* 9 *vagy* 2 *vagy* 3 *kavicsot. Az veszít, aki már nem tud így elvenni. Van-e valamelyik játékosnak nyerő stratégiája?*

Javasolta: *Vörös Zoltán,* Budapest

Megoldás. Tekintsük a következő két halmazt:

$$S = \{2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}, \qquad R = \{0, 1, 5, 6\}.$$

Legyen a t-edik lépés után megmaradó kavicsok száma n_t, az n_t 11-gyel való osztási maradéka pedig m_t.

Nézzük azt az esetet, amikor $m_t \in S$. Ha $m_t \in \{2, 3, 7, 8\}$, akkor $n_t \geqslant 2$. Ekkor 2 kavicsot elvéve a halmazból, azt kapjuk, hogy $m_{t+1} \in R$.

$m_t \in \{4, 9\}$ esetén $n_t \geqslant 4$, így ha 3 kavicsot veszünk el a halmazból, akkor $m_{t+1} \in R$. Egyetlen eset marad hátra: $m_t = 10$. Ekkor 9 kavicsot elvéve a halmazból, kapjuk, hogy $m_{t+1} \in R$. Tehát ha $m_t \in S$, akkor mindig tudunk úgy lépni, hogy $m_{t+1} \in R$ legyen. Könnyen látható, hogy ha $m_t \in R$, akkor bármit lépünk, mindenképpen $m_{t+1} \in S$. Összefoglalva: $m_0 \in S$ esetén a kezdő tud úgy játszani, hogy minden lépése előtt a kavicsok számának 11-es maradéka az S halmazba essen. Így ő mindig tud lépni, tehát ekkor ő nyer. Hasonló meggondolással adódik, hogy $m_0 \in R$ esetén a második játékos nyer. A mi esetünkben:

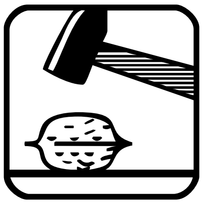
$$m_0 \equiv (923)^k \equiv (-1)^k \pmod{11}.$$

Tehát, ha k páratlan, akkor a kezdőnek, különben pedig a második játékosnak van nyerő stratégiája.

Székelyhidi Gábor (Kuwait, New English School, 11. évf.) dolgozata alapján

87 dolgozat érkezett. 6 pontos Barát Anna és Végh A. László, 5 pontos Föglein Anna, Gueth Krisztián, Gyenes Zoltán, Homolya Dániel, Horváth 202 Gábor, Kiss 007 Norbert, Kutalik Péter, Léka Zoltán, Less Áron, Lippner Gábor, Máthé András, Páles Csaba, Pap Júlia, Papp Dávid, Pataki Péter, Robotka Zsolt, Serény András, Szabadka Zoltán, Székelyhidi Gábor, Terpai Tamás, Tisch Dávid, Tóth 235 Ádám és Vidor Anna megoldása. 4 pontos 37, 3 pontos 12, 1 pontos 3, 0 pontos 10 dolgozat.

Nehezebb matematika feladatok megoldása



N. 155. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy pozitív egészekből álló végtelen sorozatban mindegyik elemnek ugyanannyi osztója van, akkor létezik olyan végtelen részsorozata, amelyben bármelyik két elem legnagyobb közös osztója ugyanaz.*

Megoldás. Bebizonyítjuk, hogy ha a sorozat mindegyik elemének legfeljebb n osztója van, akkor létezik a kívánt részsorozat.

Teljes indukciót alkalmazunk. Ha $n = 1$, akkor mindegyik elem 1, és a teljes sorozat megfelelő.

Tegyük fel, hogy állításunk igaz $n = k$ esetén, és tekintsünk egy olyan pozitív egészekből álló a_1, a_2, $\ldots$ sorozatot, amelyben mindegyik elemnek legfeljebb $k + 1$ osztója van.

Két esetet fogunk vizsgálni:

1. eset: Létezik olyan p prímszám, amely végtelen sok elemnek osztója. Legyenek ezek az elemek a_{i_1}, a_{i_2}, $\ldots$ és tekintsük az $\frac{a_{i_1}}{p}$, $\frac{a_{i_2}}{p}$, $\ldots$ sorozatot. Ebben mindegyik elemnek legfeljebb k osztója van, ezért az indukciós feltevés szerint kiválasztható belőle egy olyan $\frac{a_{j_1}}{p}$, $\frac{a_{j_2}}{p}$, $\ldots$ részsorozat, amelyben bármelyik két elem legnagyobb közös osztója ugyanaz a d szám. Ekkor viszont az a_{j_1}, a_{j_2}, $\ldots$ sorozatban bármely két elem legnagyobb közös osztója pd. Létezik tehát a feltételeknek megfelelő részsorozat.

2. eset: Bármelyik prímszám a sorozat elemei közül csak véges soknak osztója. Ebben az esetben rekurzívan definiálunk egy olyan részsorozatot, amelyben bármely két elem relatív prím. Legyen $i_1 = 1$. Ha már definiáltuk $i_1, i_2, \ldots, i_m$-et, akkor legyen i_{m+1} az első olyan pozitív egész, amely nagyobb i_m-nél, és amelyre $a_{i_{m+1}}$ relatív prím az $a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}$ elemek mindegyikéhez. Ilyen elem létezik, mert az $a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}$ elemeknek

külön-külön és együttesen is csak véges sok prímosztója van, és ez a véges sok prímosztó a sorozat elemei közül összesen csak véges soknak osztója.

Megjegyzés. A feladat valójában a halmazelmélet kategóriájába tartozik. Lényegében ugyanezzel a módszerrel bizonyítható be, hogy ha a H_1, H_2, $\ldots$ halmazsorozat legfeljebb n elemű halmazokból áll, akkor kiválasztható egy olyan részsorozata, amelyben bármelyik két halmaz metszetének elemszáma ugyanaz.

23 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Bérczi Gergely, Devecsery András, Gerbitz Róbert, Gueth Krisztián, Gyenes Zoltán, Horváth 202 Gábor, Juhász András, Kun Gábor, Lippner Gábor, Lukács László, Mecz Balázs, Pap Júlia, Székelyhidi Gábor, Terpai Tamás, Végh A. László és Zábrádi Gergely. 4 pontot kapott Máthé András. 2 pontos 1, 1 pontos 1, 0 pontos 4 dolgozat.

N. 157. Egy $n \times n$-es táblázat valós számokkal van kitöltve úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban az elemek monoton fogynak. Egy a számról el szeretnénk dönteni, hogy szerepel-e a táblázatban. Ehhez a-t a táblázat tetszőleges elemével összehasonlíthatjuk. Hány összehasonlítással oldható meg biztosan a feladat?

Javasolta: *Csirmaz László,* Budapest

Megoldás. Mutatunk egy olyan algoritmust, amely $2n-1$ összehasonlítással biztosan eldönti a kérdést, és mutatunk egy olyan kitöltést is, amikor $2n-2$ összehasonlítás biztosan nem elég.

Hasonlítsuk össze az a számot a tábázat jobb felső sarkában álló elemmel. Ha ez az elem éppen a, akkor a kérdés máris eldőlt. Ha az elem nagyobb, mint a, akkor a monotonitás miatt az első sorban mindegyik elem nagyobb, mint a; ha a jobb felső sarokban álló elem kisebb a-nál, akkor pedig az utolsó oszlop mindegyik eleme kisebb a-nál. Hagyjuk el a táblázatból az előbbi esetben az első sort, az utóbbi esetben az utolsó oszlopot (amelyben a biztosan nem szerepel), és vizsgáljuk a maradék táblázatot. Ezt az eljárast ismételgetve, azaz a-t mindig a megmaradt táblázat első sorának utolsó elemével összehasonlítva, legfeljebb $2n-1$ lépés után vagy megtaláljuk a-t a táblázatban, vagy pedig elhagyjuk az összes oszlopot vagy az összes sort. Ez a módszer tehát legfeljebb $2n-1$ lépésben biztosan célra vezet.

Most töltsük ki a táblázatot a következőképpen: a bal alsó és a jobb felső sarkot összekötő átlóba írjunk mindenhova 3-at, a közvetlenül ezek alatt levő mezőkbe 1-et. Az átló fölötti mezőkbe írjunk mindenhova 4-et, a megmaradt mezőkbe pedig 0-t. Végül válasszuk a-t 2-nek.

4	4	4	...	4	3
4	4	4	...	3	1
4	4	3	...	1	0
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
4	3	1	...	0	0
3	1	0	...	0	0

Tegyük fel, hogy valaki összehasonlította az $a=2$ számot a táblázat $2n-2$ elemével. Az összesen $2n-1$ darab 3-as és 1-es között van legalább egy, amelyet nem hasonlított össze a 2-vel.

Ha ezt az elemet 2-nek választottuk volna, akkor az összehasonlítások eredménye mind ugyanaz lett volna. A $2n-2$ összehasonlításból tehát nem derülhet ki egyértelműen, hogy a 2 nem szerepel a táblázatban.

11 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Bérczi Gergely, Gerbitz Róbert, Juhász András, Kun Gábor, Lippner Gábor, Lukács László és Végh A. László. 2 pontos 1 dolgozat. Hibás 3.

A pontversenyben kitűzött C gyakorlatok (501–504.)

C. 501. Egyik reggel az iskolában a táblára fel voltak írva az egymás után következő egész számok 1-től kezdve egy bizonyos számig. A hetes az egyik számot gondosan letörölte. Az egész ügy feledésbe merült volna, ha valaki nem jegyzi meg, hogy a megmaradt számok számtani közepe $\frac{45}{4}$ volt. Próbáljuk meg kinyomozni, hogy melyik számot törölte le a hetes.

C. 502. Az $x^2-2bx+b^2-c^2=0$ egyenlet gyökeit jelölje x_1 és x_2. Mutassuk meg, hogy az

$$x^2-2b(b^2+3c^2)x+(b^2-c^2)^3=0 \tag{1}$$

egyenlet gyökei x_1^3 és x_2^3.

C. 503. Két egyenlő szárú háromszög beírt köre az egyik esetben a szárakat az alaphoz közelebb eső harmadolópontjukban, a másik esetben az alaptól távolabb lévő harmadolópontjukban érinti. Melyik esetben fedi a beírt kör a háromszög területének nagyobb hányadát?

C. 504. Adottak a térben az A, B, C, D, E, F pontok. A pontok milyen elhelyezkedése esetén létezik olyan sík, amelytől a pontok egyenlő távolságra vannak, és amely az A, B, C ponthármast elválasztja a D, E, F pontoktól?

❄

Beküldési határidő: 1998. május 15.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest, Pf. 47. 1255

❄

Általános iskolások részére javasolt példák: **C. 501., C. 503., Gy. 3198., Gy. 3201.**

A pontversenyben kitűzött gyakorlatok (3198–3205.) és feladatok (3226–3231.)

Gy. 3198. Vannak-e olyan a, b, c, d pozitív egész számok, amelyekre $ab=cd$, és az $a+b+c+d$ összeg értéke prím?

Iráni versenyfeladat

Gy. 3199. Oldjuk meg az egész számok körében az

(2) $$1996x+1998y+1=xy$$

egyenletet.

Ír versenyfeladat

Gy. 3200. Legyen H a $\{0,1,2,\ldots,1998\}$ halmaznak egy 1000 elemű részhalmaza. Bizonyítsuk be, hogy H-nak vannak olyan a, b nem feltétlenül különböző elemei, amelyekre $a+b$ értéke 2-hatvány.

Gy. 3201. Egy 9×9-es sakktáblát lefedtünk 1×2-es dominókkal úgy, hogy valamelyik sarka üresen maradt. Bizonyítsuk be, hogy a táblán a dominókat tologatva az üres mező bármelyik sarokba „átvihető". (**H**)

Gy. 3202. Daraboljunk fel egy n cm élű tömör kockát 1 cm élű kockákra (n természetes szám). Mely n esetén lehet a kapott kis kockákból $2n$ cm élű kockát összeállítani, ha megengedjük, hogy a kocka belsejében üreg is lehessen?

Gy. 3203. Egy rombusz átlóinak hossza $2a$, illetve $2b$. A beírt körnek az átlókkal párhuzamos érintői és a rombusz oldalai egy nyolcszöget határoznak meg. Fejezzük ki a nyolcszög területét a-val és b-vel.

Gy. 3204. Az AB és CD szakaszok párhuzamosak. A BC szakasz egy belső pontja P, az AP egyenes a CD egyenest E-ben metszi. Hogyan kell a P pontot megválasztani, hogy az APB és CPE háromszögek területének összege a lehető legkisebb legyen?

Gy. 3205. Az ABC hegyesszögű háromszög oldalaira kifelé félköröket szerkesztünk. Az A, B, C csúcsokból húzott magasságvonalak a félköröket rendre az E, F, G pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy az $AGBECF$ hatszögből egy ABC alapú gúla modellje készíthető el. (**H**)

Szlovák versenyfeladat

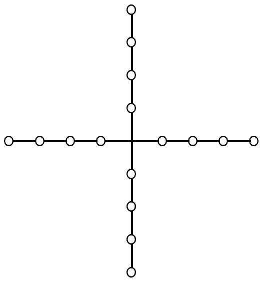
❄

Beküldési határidő: 1998. május 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

❄

F. 3226. Az ábra köreit hány különböző módon színezhetjük ki úgy, hogy mindegyik ágon 2 sárga és 2 kék legyen? Különbözőnek csak azokat az ábrákat tekintjük, amelyek forgatással vagy tükrözéssel nem hozhatók fedésbe.

Javasolta: *Bakonyi Gábor,* Budapest



F. 3227. Milyen m értékek mellett osztható az

$$x^m + y^m + z^m - (x+y+z)^m \tag{3}$$

polinom az $(y+z)(z+x)(x+y)$ polinommal?

F. 3228. Az A városból a B városba busszal lehet eljutni. A buszok félóránként indulnak, és legfeljebb 50 ember fér fel rájuk. Azok az utasok, akik nem férnek föl, a váróteremben várakoznak, aki pedig a váróterembe sem jut be, mert megtelt, az elindul gyalog B-be. Két busz indulása között 0, 25, 50 vagy 75 utas érkezhet ugyanakkora $(1/4)$ valószínűséggel. Egy új várótermet akarnak építeni a régi helyébe, amely modulokból épül, ezért a befogadóképessége csak 25-nek többszöröse lehet.

Legalább mekkorára építsék ezt az új várótermet, ha azt szeretnék, hogy 1%-nál kisebb valószínűséggel forduljon elő, hogy valakinek gyalog kell mennie?

F. 3229. Fejezzük ki a háromszög c oldalát az a és b oldalak segítségével, ha tudjuk, hogy a c oldalhoz hozzáírt kör sugara mértani közepe az a és b oldalakhoz hozzáírt körök sugarának?

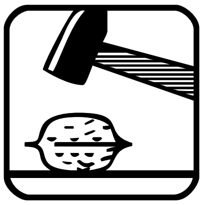
Javasolta: *Bodrogi Klára,* Hódmezővásárhely

F. 3230. Legyen az ABC háromszög súlypontja S. A háromszög minden csúcsából bocsássunk merőlegeseket a másik két csúcshoz tartozó külső és belső szögfelezőkre. Bizonyítsuk be, hogy a kapott merőleges szakaszok négyzetének összege

$$6(SA^2 + SB^2 + SC^2).$$

Javasolta: *Bíró Bálint,* Eger

F. 3231. A g gömb egy rögzített belső P pontján átmenő h_1, h_2 és h_3 húrjai páronként merőlegesek egymásra. A húrok által meghatározott három sík egy-egy kört metsz ki a gömbből. Mutassuk meg, hogy a három kör területének összege nem függ a húrok helyzetétől.



A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (171–174.)

N. 171. Adottak a síkban az e_1, e_2, …, e_n egyenesek és a P pont. A P pontot merőlegesen vetítjük az első egyenesre, a képét levetítjük a soron következő egyenesre stb. Az utolsó egyenesről ismét az elsőre vetítünk, és folytatjuk az eljárást. Bizonyítsuk be, hogy a P pont vetületei korlátos ponthalmazt alkotnak.

Javasolta: *Dr. Pap Gyula,* Debrecen

N. 172. Egy kártyakeverő gép egy $2n$ elemű paklit a következő módon tud megkeverni:

$$(1, 2, 3, \ldots, 2n-1, 2n) \longrightarrow (2n, 1, 2n-1, 2, \ldots, n+1, n) \tag{4}$$

Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb $2n$ keverési lépés után a kártyákat eredeti sorrendben kapjuk vissza.

Javasolta: *Kovács Zoltán,* Szeged

N. 173. Felbontható-e egy $(1 \times \sqrt{2})$-es téglalap véges sok négyzetre?

Javasolta: *Pap Júlia,* Debrecen

N. 174. Egy fagráf bejárásának nevezzük a következőt: egy bábu az élek mentén lépkedve eljut minden csúcshoz, és minden élen pontosan kétszer megy végig. Két bábu egyszerre járja be a fát, ha egyszerre indulnak, esetleg különböző csúcsokból, és időegységenként egyet-egyet lépnek. Két bábu akkor találkozik, ha egyszerre lépnek ugyanarra a csúcsra, vagy egyszerre tartózkodnak ugyanazon az élen. Jelöljük $f(n)$-nel azt a legnagyobb számot, amelyre létezik olyan n csúcsú fa, amit $f(n)$ darab bábu egyszerre be tud járni úgy, hogy egyetlen találkozás sem történik. Bizonyítsuk be, hogy $f(5k+1)=2k$, ha k pozitív egész.

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS

(Volume 48. No. 4. April 1998)

New exercises for practice (see page 231): **C. 501.** One morning in the school the integers from 1 through a certain number were written on the blackboard. A student carefully erased one of them. There would have been nothing special about it if someone had not noted that the average of the remaining numbers had been $45/4$. Try to figure out which number was erased. **C. 502.** Let us denote the roots of equation $x^2-2bx+b^2-c^2=0$ by x_1 and x_2. Prove that the roots of equation (1) are x_1^3 and x_2^3. **C. 503.** Given are two isosceles triangles. The inscribed circles of the triangles touch the legs at their points of trisection closer to the base of the triangle in one case and further from the base of the triangle in the other case. In which case covers the inscribed circle a greater portion of the area of the triangle? **C. 504.** The points A, B, C, D, E, F lie in the 3 dimensional space. How are the points positioned if there exists a plane, in the same distance from each of the points, which separates points A,B,C from points D, E, F?

New exercieses: Gy. 3198. Do there exist positive integers a, b, c, d such that $ab=cd$ and $a+b+c+d$ is a prime number? **Gy. 3199.** Find all integer solutions to equation (2). **Gy. 3200.** Let H be a 1000-element subset of the set $\{0, 1, 2, \ldots, 1998\}$. Prove that it has two not necessarily distinct elements a and b such that $a+b$ is a power of 2. **Gy. 3201.** A 9×9 chessboard is is packed with 1×2 dominoes such that only one corner of the board is left uncovered. Prove that the uncovered field of the board can be transferred to any other corner by shifting the dominoes about on the board. **Gy. 3202.** A solid cube of edge length n cm is divided into smaller cubes each with egde length 1 cm. Determine those values of n for which a subset of the small cubes can be arranged to form a cube with edge length $2n$ cm. The latter cube may be hollow. **Gy. 3203.** The lengths of the diagonals of a rhomboid are $2a$ and $2b$, respectively. The sides of the rhomboid together with those tangents of the inscribed circle which are parallel to either diagonal form an octagon. Express the area of the octagon in terms of a and b. **Gy. 3204.** The segments AB and CD are parallel. P is an interior point of segment BC, the lines AP and CD intersect in E. For which point P is the sum of the areas of triangles APB and CPE is minimum? **Gy. 3205.** Semicircles are drawn externally on each side of the acute triangle ABC. The altitudes drawn from vertices A,B,C intersect the semicircles in points E,F,G, respectively. Prove that the hexagon $AGBECF$ can be folded into a pyramid of base ABC.

New problems: F. 3226. In how many different ways can one colour the circles depicted on the figure such that each arm contains exactly two yellow and two blue circles? Two colourings are different if one cannot be obtained from the other using a rotation or a reflection. **F. 3227.** Find all values of m for which polynomial (3) is divisible by $(y+z)(z+x)(x+y)$. **F. 3228.** A bus line connects cities A and B. The buses leave in every 30 minutes. Each bus has a capacity of 50 passengers. Those who do not fit in the bus wait in the waiting hall, and those passengers who do not even fit there leave for B on foot. Between two consecutive buses either 0, 25, 50 or 75 passengers arrive, with probability $1/4$, respectively. A new waiting hall is to be built to replace the old one. It is to be built from modules, each of capacity 25. At least how many such modules have to be used in order to ensure that the probability that one has to leave on foot is smaller than 1%? **F. 3229.** In a triangle of side lengths a,b,c, the exradius belonging to side c is the geometric mean of the exradii belonging to sides a and b, respectively. Express c in terms of a and b. **F. 3230.** Let S denote the centroid of triangle ABC. Erect perpendiculars from each vertex of the triangle to the external and internal bisectors of the angles belonging to the other two vertices. Prove that the sum of the squares of the lengths of the resulting perpendicular segments is $6(SA^2+SB^2+SC^2)$. **F. 3231.** Given are a sphere g and a point P in its interior. Let h_1, h_2, h_3 be pairwise orthogonal chords passing through P. Each of the three planes determined by the pairs of chords intersect the sphere in a circle. Prove that the sum of the areas of the three circles is independent of the position of the chords.

New advanced problems: N. 171. There are given lines $e_1, e_2, \ldots, e_n$ and a point P in the plane. Project P perpendicularly on the first line. Next, project its image on the second line, and so on. After projecting on the last line, project again on the first line, and continue the process. Prove that the different images obtained by the procedure form a bounded set. **N. 172.** An automatic card shuffler is used to shuffle a deck of $2n$ cards. It can rearrange the deck according to the rule described in (4). Prove that the cards will be in their original order after at most $2n$ shuffles. **N. 173.** Is it possible to partition a $(1\times\sqrt{2})$ rectangle into a finite number of squares? **N. 174.** A tour of a tree graph is the following. A figure, moving along the edges of the graph, visits each vertex such that it travels along every edge exactly twice. We say that two figures tour the graph simultaneously if they start at the same time, not necessarily at the same vertex, and then they always move at the same time during their respective tours of the graph. They meet if they move to the same vertex or stay on the same edge of the graph at the same time. Let $f(n)$ denote the largest integer for which there exist a tree on n vertices which $f(n)$ figures can tour simultaneously such that no two of them meet. Prove that $f(5k+1)=2k$ for every positive integer k.