Kedves Versenyzők!

Az itt közölt eredmények az összes szeptemberi és októberi matematika példa, valamint a felsorolt novemberi (a nehezebb feladatoknál az összes novemberi és decemberi) feladatok javítása utáni pontversenyállást mutatják, és azonosak az interneten 1998. február 13-án megjelentekkel. Az azóta feldolgozott feladatok pontszámai folyamatosan megjelennek a http://www.math.elte.hu/komal címen található internet honlapunkon. Itt bárki megtekintheti *részletezve* is pontszámait, ezért ezt e-mailen a továbbiakban csak azoknak küldjük el, akik ezt újra kérik (internetezni nem tudnak). Májusi számunkban újra közöljük a matematika pontverseny állását.

Felhívjuk a figyelmet

arra, hogy NEM VERSENYSZERŰ – eddig is és ezután is – minden MÁSOLT – tehát valakiével egyforma – dolgozat, továbbá a *határidő után* **beküldött** vagy **behozott** dolgozat. Ezeket nem értékeljük.

A szerk.

Az 1997–98-as tanévi matematika pontverseny állása a szeptember–októberi feladatok feldolgozása után

Gyakorlatok

Legfeljebb 8. osztályosok

Az eddig feldolgozott feladatok: a szeptemberi és az októberi szám feladatai, valamint Gy. 3158., Gy. 3159., Gy. 3160., Gy. 3161., Gy. 3163.

Feladatonként egy helyes megoldással elérhető: 105 pont.

1. *Harangi Viktor* 8. o. t. 92 pont; **2.** *Birkner Tamás* 5. o. t. 90 pont; **3.** *Kunszenti-Kovács Dávid* 7. o. t. 88 pont; **4.** *Gerencsér Balázs* 8. o. t. 83 pont; **5.** *Kovács Erika Renáta* 8. o. t. 81 pont; **6.** *Tran Thanh Long* 8. o. t. 75 pont; **7.** *Dombi 870 Tímea* 8. o. t. 70 pont; **8.** *Béky Bence* 8. o. t. 68 pont; **9.** *Csikvári Péter* 8. o. t. 65 pont; **10.** *Hamar Gergő* 8. o. t. 64 pont; **11.** *Tóth 370 Ágnes* 8. o. t. 62 pont; **12.** *Kerékfy Péter* 8. o. t. 60 pont; **13.** *Pallos Péter* 8. o. t. 54 pont; **14.** *Csóka Endre* 7. o. t. 50 pont; **15.** *Erdei Zsuzsa* 8. o. t. 47 pont; **16.** *Micskei Zoltán* 10. o. t. 34 pont; **17.** *Csordás Hunor* 8. o. t. 33 pont; **18.** *Devecsery Ágnes* 8. o. t. 31 pont; **19.** *Csernenszky András* 8. o. t. 29 pont; **20.** *Horváth Illés* 8. o. t. 24 pont; **21.** *Szerényi Zita* 9. o. t. 23 pont; **22.** *Farkas Melinda* 8. o. t. 21 pont; **23–24.** *Siroki László* 8. o. t., *Spanczér Ilona* 8. o. t. 20 pont; **25.** *Zsbán Ambrus* 8. o. t. 19 pont; **26.** *Nagy 625 Tibor* 7. o. t. 18 pont; **27.** *Wittner Lilla* 8. o. t. 17 pont; **28–31.** *Jesch Dávid* 8. o. t., *Kovács 625 Erika* 8. o. t., *Pszota Zsolt* 8. o. t., *Rischák Rózsa* 8. o. t. 16 pont; **32–33.** *Nyul Balázs* 7. o. t., *Sipos Szabó Eszter* 8. o. t. 15 pont; **34–36.** *Kőrösi Attila* 8. o. t., *Nagy 725 János* 8. o. t., *Szalay Zsófia* 8. o. t. 14 pont; **37.** *Aczél Márton* 8. o. t. 13 pont; **38.** *Lang Péter* 7. o. t. 12 pont; **39–43.** *Dőry*

Magdolna 7. o. t., *Drozdy Árpád* 8. o. t., *Farkas Ágnes* 8. o. t., *Lánczi Levente* 8. o. t., *Morvai Krisztina* 8. o. t. 11 pont; **44–53.** *Bíró Ádám* 8. o. t., *Bogya Emese Lujza* 7. o. t., *Buti Tamás* 7. o. t., *Czinder Attila* 8. o. t., *Fűrész Gábor* 8. o. t., *Kása Ildikó* 8. o. t., *Mészáros Zsolt* 7. o. t., *Pagács Kata* 8. o. t., *Tóth Andrea* 8. o. t., *Varga 480 Edit* 8. o. t. 10 pont. Kevesebb pontja van 51 versenyzőnek.

9. osztályosok

1. *Gelencsér Gábor* 98 pont; **2.** *Csirmaz Előd* 97 pont; **3.** *Deli Lajos* 92 pont; **4–5.** *Horváth 713 György*, *Pogátsa Attila* 88 pont; **6.** *Lovrics Anna* 81 pont; **7.** *Szilágyi Tamás* 80 pont; **8–9.** *Leipold Diána*, *Lovrics Klára* 79 pont; **10–11.** *Reviczky Ádám*, *Varjú Péter* 78 pont; **12.** *Szilasi Zoltán* 73 pont; **13.** *Pesti Gábor* 71 pont; **14.** *Ambrus Gergely* 69 pont; **15–18.** *Nagy Tamás*, *Schlanger Judit*, *Szűcs 702 Zsófia*, *Zalán Péter* 68 pont; **19–20.** *Árvay Eszter*, *Dőrr Zsuzsanna* 67 pont; **21.** *Babos Attila* 65 pont; **22.** *Boros M. Mátyás* 62 pont; **23.** *Poór Veronika* 61 pont; **24.** *Nagy Gergely* 60 pont; **25–26.** *Breuer János*, *Soós 740 Károly* 59 pont; **27.** *Kisfügedi Viktória* 58 pont; **28–30.** *Andrássy Zoltán*, *Bohák András*, *Fenyvesi Zsuzsanna* 57 pont; **31.** *Hegedűs Vera* 56 pont; **32–33.** *Kramer Zsófia*, *Molnár 947 Zoltán* 55 pont; **34.** *Tokodi Tünde* 52 pont; **35–39.** *Görföl Tamás*, *Nagy 314 Ádám*, *Paksa Tamás*, *Toka László*, *Tóth Adrienn* 51 pont; **40.** *Horváth Balázs* 50 pont; **41.** *Bóna Péter* 49 pont; **42–43.** *Fellegi Zoltán*, *Kerekes Attila* 48 pont; **44–48.** *Bálint Gergely*, *Bicskei László*, *Merazga Oktávia*, *Nagy 712 Gábor*, *Zajdó Csaba* 47 pont; **49.** *Ádám Zoltán* 46 pont; **50–51.** *Schmidt 414 András*, *Vicsek Miklós* 45 pont; **52–55.** *Almási Angelika*, *Kazinczi Csaba*, *Kiss 414 Norbert*, *Szintai Balázs* 43 pont; **56–59.** *Arató Orsolya*, *Bartha Tamás Árpád*, *Legány Csaba*, *Ráfael Balázs* 42 pont; **60–63.** *Darabos József*, *Fodor 133 Gyula*, *Koch Dénes*, *Nagy 729 Dávid* 40 pont; **64–65.** *Forgács Gergely*, *Földényi Tamás* 39 pont; **66–71.** *Bartucz Dorottya*, *Cseresznyés Viola*, *Gyurcsek András*, *Hegyi Márta*, *Károlyi Gergely*, *Nagy 777 Péter* 38 pont; **72–74.** *Csaszny Tamás*, *Fehér Gergely*, *Kurcz Éva* 37 pont; **75–78.** *Antal Ágnes*, *Horváth 303 Bálint*, *Lukács Ágnes*, *Moldvai Levente* 36 pont; **79–83.** *Csébi Gergely*, *Csurgó Krisztina*, *Paál Csaba*, *Peresztegi Márton*, *Szőts Miklós* 35 pont; **84–88.** *Bucsy Barnabás*, *Kádár 181 Csaba*, *Molnár Gábor*, *Pozsonyi Tamás*, *Velcsov Zsuzsanna* 34 pont; **89–93.** *Baross Gergely*, *Ekler Márton*, *Győző Miklós*, *Hubai Szabolcs*, *Tormási Imre György* 33 pont; **94.** *Balogh Róbert* 32 pont; **95–100.** *Beneda Károly Tamás*, *Csereklei Gábor*, *Garai Zsolt*, *Kántor Attila*, *Kovács Krisztián*, *Szalontay Luca* 31 pont; **101–105.** *Dóra Gábor*, *Lepcsényi Lilla*, *Stepán József*, *Varga Veronika*, *Wéner Balázs* 30 pont; **106–109.** *Horváth 004 Tamás*, *Horváth 724 Zoltán*, *Ritter Ádám*, *Vona Gábor* 29 pont; **110–116.** *Benedek Éva*, *Feró Dalma*, *Hegedűs Vera*, *Horváth Dénes*, *Kiss 111 Péter*, *Kurucz Endre*, *Vizy Sándor* 28 pont; **117–125.** *Arany Sándor*, *Börcsök József*, *Harcz Ádám*, *Horváth Szilárd*, *Medgyesi László*, *Porkoláb Dániel*, *Rábel Henrietta*, *Roszol László*, *Vértényi Péter* 27 pont; **126–129.** *Baka Nóra*, *Karácsony Veronika*, *Várkonyi Dániel*, *Zrínyi Dániel* 26 pont; **130–136.** *Bán Lilla*, *Bodor András*, *Gérecz Balázs*, *Király Ferenc*, *Molnár 318 Veronika*, *Rácz Veronika*, *Remete Dániel* 25 pont; **137–141.** *Gál Balázs*, *Gyenese Mónika*, *Pótó Júlia*, *Somogyi 555 Tamás*, *Wéber Zoltán* 24 pont; **142–150.** *Bartha Erika*, *Erdei Miklós*, *Fitos Tamás*, *Kalmár Levente*, *Lázár Imre*, *Németh 224 Zsófia*, *Pap Tünde*, *Szerényi Zita*, *Varga 519 Katalin* 23 pont; **151–165.** *Baté Zsuzsanna*, *Bódi Erzsébet*, *Bogatin György*, *Börzsönyi Ádám*, *Csikós Gábor*, *Dinya Beáta*, *Erdős János*, *Erki Szabolcs*, *Gál Katalin*, *Gelesz Tamás*, *Gyenese Katalin*, *Kada Katalin*, *Németh 829 Balázs*, *Németh István*, *Spielberger Ágnes* 22 pont; **166–172.** *Brehel Enikő*, *Cser Tamás*, *Horváth Ákos*, *Neheli Katalin*, *Oroszlány Zsófia*, *Theisler Katalin*, *Ujfalusi Melinda* 21 pont; **173–189.** *Csapó Adelinda*, *Cseri István*, *Hideg Lóránt*, *Ignácz Melinda*, *Jankó Erika*, *Kurucz Réka*, *Magyari Zoltán*, *Nagy 376 Balázs*, *Novits László*, *Örffy Zsolt*, *Szabó 341 Zsolt*, *Szabó Géza*, *Takács Gergely Tihamér*, *Talabos Éva*, *Tamás Gábor Zoltán*, *Tigyi Árpád*, *Zentai Gábor* 20 pont; **190–197.** *Csapár Tímea*, *Hülber Árpád*, *Kocsis András*, *Kolber Adél*, *Kupó János*, *Sebestyén Gábor*, *Szűcs Vince*, *Tolnay Adrienn* 19 pont; **198–206.** *Csányi Péter*, *Dénes Péter*, *Horváth Katalin*, *Horváth Péter*, *Kertész Bence*, *Manóczki Csilla*, *Németh 917 Júlianna*, *Szabó 923 Viktor*, *Szécsi Ákos* 18 pont; **207–214.** *Bernhardt János*, *Darabos Éva*, *Erényi Szabolcs*, *Jakab Orsolya*, *Kelemen Kristóf*, *Kocsis 313 Zoltán*, *Lugossy Zoltán*, *Vajda Péter* 17 pont; **215–223.** *Domonkos Brigitta*, *Erdélyi Róbert*, *Hosszú Balázs*, *Kármán Péter*, *Korcsmáros Adél*, *Krenedits Sándor*, *Simon 015 Tamás*, *Stefán Gábor*, *Varga 313 Eszter* 16 pont; **224–238.** *Bajnógel Tamás*, *Bánsági Tamás*, *Görbicz Gergely*, *Győrki Imre*, *Hafner Gábor*, *Halasi Tamás*, *Kovács 313 Ilka*, *Müller László*, *Novák Zoltán*, *Pacz Bence Tamás*, *Rokob András*, *Sipos Szabó István*, *Szabó Nóra*, *Varga Dávid*, *Visegrádi Norbert* 15 pont; **239–254.** *Balogh Béla*, *Czímer Balázs*, *Forgács Gyula*, *Hargitai Máté*, *Káli Gábor*, *Laczay Zsolt*, *Lajtha Balázs*, *Pekk Enikő*, *Szabó Valéria*, *Tóth 314 János Pál*, *Tóth Katalin*, *Tősér Kinga*, *Varga 444 Judit*, *Végh Miklós*, *Vígh Viktor*, *Vitális Anikó* 14 pont; **255–270.** *Biri Orsolya*, *Csollány László*, *Czímer Gergő*, *Dénes Ágnes*, *Doór Tamás*, *Germán Tibor*, *Gráczi Tekla Etelka*, *Kapin Anita*, *Karácsonyi József Sándor*, *Licskai Gergő*, *Mahler István*, *Pásztor Péter*, *Rudas Rozália*, *Siklósi Dávid*, *Szeti Balázs*, *Végh Krisztina* 13 pont; **271–280.** *Frey Dóra*, *Halmai Judit*, *Havasi Gergely*, *Heim Roland*, *Hevér Gábor*, *Kovács 999 Balázs*, *Novák Ádám*, *Rénes Sándor*, *Somlai Henrietta*, *Tabajdi Márton* 12 pont; **281–293.** *Ávéd Szilárd*, *Bartucz Zsófia*, *Békási Sándor*, *Bernáth Andrea*, *Földi Júlia*, *Horváth Zsófia*, *Nusser Gabriella*, *Somogyi György*, *Sóron Andrea*, *Tóth 189 Ferenc*, *Virányi Anna*, *Vörös Krisztina*, *Zákányi Balázs* 11 pont; **294–321.** *Ábel Ágnes*, *Bogár Tamás*, *Bogos Bálint*, *Dunai Gábor*, *Erhardt Zoltán*, *Faragó Tamás*, *Felber Péter*, *Gerencsér Norbert*, *Hárshegyi Zsuzsa*, *Imrefi József*, *Kerekes Fanni*, *Koczor Mónika*, *Kurucz Miklós*, *Molnár Tamás*, *Palojtay Eszter*, *Péter Imola*, *Péterfi Anna*, *Rácz Magdolna*, *Rádics András*, *Sajtos Erika*, *Siroki Balázs*, *Szabó Gábor*, *Szegő Judit*, *Takács 317 Eszter*, *Takács Noémi*, *Tavasz Kristóf*, *Varga 832 Erzsébet*, *Vas Gergely* 10 pont. Kevesebb pontja van 207 versenyzőnek.

10. osztályosok

1. *Papp Dávid* 104 pont; **2.** *Gyenes Zoltán* 102 pont; **3.** *Zábrádi Gergely* 100 pont; **4.** *Máthé András* 97 pont; **5.** *Kiss 345 Gergely* 95 pont; **6.** *Baharev Ali* 89 pont; **7.** *Venter György* 87 pont; **8.** *Keszegh Balázs* 86 pont; **9.** *Vizer Máté* 85 pont; **10.** *Győri Nikolett* 83 pont; **11.** *Taraza Busra* 82 pont; **12.** *Sidó Péter* 81 pont; **13.** *Lábó Melinda* 79 pont; **14.** *Horváth 413 László* 78 pont; **15.** *Lábó Eszter* 77 pont; **16–18.** *Besenyei Ádám*, *Péterffy Bálint*, *Varga Szilvia* 75 pont; **19–20.** *Csiszár Gábor*, *Ureczky Judit* 74 pont; **21.** *Pozsonyi Gergő* 73 pont; **22.** *Schlotter Ildikó* 70 pont; **23–24.** *Hesz Zoltán*, *Tolvaj Nándor* 69 pont; **25–28.** *Bárány Zsófi*, *Gajári Dávid*, *Hámori Tamás*, *Szélig Nikoletta* 68 pont; **29–30.** *Dezső Balázs*, *Vitéz Ildikó* 67 pont; **31–33.** *Bákor Krisztina*, *Bankó Krisztián*, *Buruzs Ádám* 63 pont; **34.** *Bajusz Csaba* 62 pont; **35–36.** *Gyarmati-Szabó István*, *Nagy Máté* 61 pont; **37–40.** *Hegedűs Ákos*, *Klausz Ferenc*, *Somlai Gábor*, *Tóth Endre* 60 pont; **41–43.** *Iván Szabolcs*, *Tarcsi Károly*, *Tóth 716 Bence* 58 pont; **44–46.** *Horváth Gergely*, *Jung János*, *Madarász Ádám* 56 pont; **47.** *Zempléni Márton* 55 pont; **48–49.** *Nátz Eszter*, *Somodi Katalin* 54 pont; **50.** *Takács 272 Zsuzsanna* 52 pont; **51–54.** *Papp*

Eszter, *Szekeres Nóra*, *Tillinkó Zsanett*, *Vigh Éva* 51 pont; **55–58.** *Déri Zsolt*, *Gyurcsán Péter*, *Juhász 113 Ágnes*, *Kajtár Márton* 50 pont; **59–60.** *Fodor Erika*, *Révai Balázs* 49 pont; **61–63.** *Hudomiet Péter*, *Pozsár Balázs*, *Varga Balázs* 48 pont; **64–68.** *Kántor Éva*, *Németh Lajos*, *Schmeiszer Krisztián*, *Simon Viktória*, *Sipos Ádám* 47 pont; **69–72.** *Fritz Lilla*, *Rozovits Zoltán*, *Szentes Szilvia*, *Tóth 888 János* 46 pont; **73–74.** *Horváth Hedvig*, *Pesti Péter* 45 pont; **75–77.** *Lengyel Zoltán*, *Riecke Katalin*, *Tóth 587 Viktória* 44 pont; **78–79.** *Kleinheincz Zoltán*, *Velcsov Gabi* 43 pont; **80–82.** *Antal István*, *Kurucz Keve*, *Szászi Zsuzsanna* 42 pont; **83–84.** *Baráth Ákos*, *Wilfing András* 41 pont; **85.** *Gömöri Péter* 40 pont; **86–89.** *Gáspár Endre*, *Hamar Gábor*, *Kardos Péter*, *Kovács Gergely* 39 pont; **90–94.** *Fodor Gyula*, *Inzelt György*, *Matécsa 999 Márta*, *Pálvölgyi Dömötör*, *Vitos Botond* 38 pont; **95–101.** *Bíró Márton*, *Csathó Csaba*, *Mészáros Albert*, *Nagy 201 Zoltán*, *Orosz Dániel*, *Schmeiszer Kornél*, *Tóth 013 Zoltán* 37 pont; **102–105.** *Benke Noémi*, *Patay Gergely*, *Tóth Balázs*, *Tóth Zsuzsanna* 36 pont; **106–110.** *Ács Zoltán*, *Fehér Katalin*, *Késmárki Péter*, *Matin Tamás*, *Törőcsik Andrea* 35 pont; **111–116.** *Balogh Csaba*, *Hernádi Gergő*, *Micskei Zoltán*, *Powell Pál*, *Soltész Noémi*, *Sors Erika* 34 pont; **117–120.** *Bokros Krisztián*, *Várady Gábor*, *Vastag Gábor*, *Zelenák Amarilla* 33 pont; **121–124.** *Balázs 255 Péter*, *Durkó Gábor*, *Menyhért Bálint*, *Nagy 831 Gábor* 32 pont; **125–129.** *Balogh 666 Csaba*, *Balogh Tamás*, *Lemmich Attila*, *Mongyi Béla*, *Nagy 369 László* 31 pont; **130–135.** *Balázsfalvi Gábor*, *Geri 144 Péter*, *Márkus Viktória*, *Móczó Péter*, *Solymossy Endre*, *Soós István* 30 pont; **136–140.** *Borbíró Levente*, *Filep Csongor*, *Gyenes Dávid*, *Illés Balázs*, *Izsák Zoltán* 29 pont; **141–145.** *Kiss 007 Norbert*, *Kiss 360 Sándor*, *Kriston Vízi Gábor*, *Kubatov Gábor*, *Nagy Bernadett* 28 pont; **146–149.** *Botos Péter*, *Hegedűs 512 Ramón*, *Kovács Roland*, *Vértesi Vera* 27 pont; **150–152.** *Geröly Péter*, *Jungbauer Alexandra*, *Tölgyesi János* 26 pont; **153–159.** *Deme 007 Gábor*, *Horváth Márton*, *Kovács Anna*, *Kovács Benedek*, *Kovács Róbert*, *Lőke Tamás*, *Molnár 478 László Milán* 25 pont; **160–164.** *Bíró Annamária Mása*, *Héder Zoltán*, *Karácsonyi Imre*, *Kiss Attila*, *Müncz Márton* 24 pont; **165–167.** *Galgand Veronika*, *Herczegh Géza*, *Simon Zoltán* 23 pont; **168–174.** *Alvarez Rafael*, *Gyímesi Judit*, *Herczeg Zoltán*, *Horváth 317 Eszter*, *Kocsis Tamás*, *Kövecses András*, *Pálinkás Bence Fábián* 22 pont; **175–185.** *Czigány András*, *Demeter Veronika*, *Hardy Vince*, *Jakab Zsolt*, *Jámbor Árpád*, *Kiss 921 Olivér*, *Lódi Edit*, *Ludányi Zoltán*, *Szekeres Lilla*, *Varga 951 Attila*, *Zám Katalin* 21 pont; **186–192.** *Bacsárdi László*, *Bence Virág*, *Kővári Bence*, *Papp 111 László*, *Székely Szilárd*, *Tóth Gábor*, *Tőkey Balázs* 20 pont; **193–199.** *Ács László*, *Berényi Károly*, *Gaál Zoltán*, *Ivaskó György*, *Mikó Adrienn*, *Nederman János*, *Szivós Zoltán* 19 pont; **200–202.** *Cserny Réka*, *Dávid Anita*, *Kulik István* 18 pont; **203–208.** *Balog Tamás*, *Baranyi Gergely*, *Bocz Péter*, *Kántor Krisztina*, *Sinkovicz Katalin*, *Táncos Tamás* 17 pont; **209–218.** *Andó Mária*, *Bodor Adrienn*, *Csernus Attila*, *Herendi Gergely*, *Laudisz Balázs*, *Nemeskéri Luca*, *Simay Csaba*, *Szever Ádám*, *Takáts Gergely*, *Varga 128 Eszter* 16 pont; **219–230.** *Birkás Tamás*, *Edőcs Eszter*, *Faluközy Tamás*, *Göllner Júlia*, *Horváth 530 András*, *Horváth 613 Krisztina*, *Kegyes Tamás*, *Simon Péter*, *Szűcs 981 Jenő*, *Tóth 416 Péter*, *Vajda Ágota*, *Vesszős Noémi* 15 pont; **231–240.** *Árokszállási Anita*, *Bachraty Gergely*, *Borbély 213 Gábor*, *Drén Judit*, *Kisvári 981 Zsuzsanna*, *Kósa Gabriella*, *Lukovszki Viktor*, *Miklós Bálint*, *Takács Sándor*, *Veress Vilmos* 14 pont; **241–245.** *Baranyai Gábor*, *Katona Bernadett*, *Koren Márton*, *Kovarik Márton*, *Ledniczki Petra* 13 pont; **246–252.** *Bosnyák Tamás*, *Dányi Piroska*, *Kiss Ádám*, *Oroszlány Endre*, *Ozogány Katalin*, *Ringer Norbert*, *Végh Zsuzsanna* 12 pont; **253–264.** *Bódis 576 János*, *Fekete Ada*, *Friedl Zita*, *Horváth 820 Mariann*, *Ivánszki Szilvia*, *Jancski Dóra*, *Kovács 233 Pál*, *Kovács Zsombor*, *László Zoltán*, *Megyer László*, *Pintér Melinda*, *Szabó 482 Béla* 11 pont; **265–291.**

Andrásfai Judit, *Baka Miklós*, *Balázs 232 Enikő*, *Barák Róbert*, *Baranya Péter*, *Baráthy Enikő*, *Biczó András*, *Dóczy Pál*, *Fehér Bálint*, *Gyürki István*, *Horváth 0 Zsolt*, *Jósvai Szilárd*, *Juhász Gyöngyi*, *Kánya Tímea*, *Kasztner Tamás*, *László Dezső*, *Lovas László*, *Lükő Sára*, *Magony Emőke*, *Manrique Dávid*, *Marle Ágnes*, *Nyulász Viktória*, *Papp Ildikó*, *Tobak Zalán*, *Torbágyi Andrea*, *Varga 535 Edina*, *Vidra Zsolt* 10 pont. Kevesebb pontja van 119 versenyzőnek.

Feladatok

Legfeljebb 8. osztályosok

Az eddig feldolgozott feladatok: a szeptemberi és az októberi szám feladatai, valamint F. 3198., F. 3199., F. 3200.

Feladatonként egy helyes megoldással elérhető: 75 pont.

1. *Kunszenti-Kovács Dávid* 7. o. t. 43 pont; **2.** *Birkner Tamás* 5. o. t. 39 pont; **3.** *Harangi Viktor* 8. o. t. 38 pont; **4.** *Micskei Zoltán* 10. o. t. 31 pont; **5.** *Tran Thanh Long* 8. o. t. 22 pont; **6.** *Csóka Endre* 7. o. t. 20 pont; **7–8.** *Csernenszky András* 8. o. t., *Kovács Erika Renáta* 8. o. t. 10 pont; **9.** *Tóth 370 Ágnes* 8. o. t. 8 pont; **10–22.** *Bein Márton* 8. o. t., *Csordás Hunor* 8. o. t., *Devecsery Ágnes* 8. o. t., *Dombi 870 Tímea* 8. o. t., *Erdei Zsuzsa* 8. o. t., *Horváth Illés* 8. o. t., *Kőrösi Attila* 8. o. t., *Nagy 144 Ferenc* 8. o. t., *Nagy 625 Tibor* 7. o. t., *Nyul Balázs* 7. o. t., *Pallos Péter* 8. o. t., *Szalay Zsófia* 8. o. t., *Zsbán Ambrus* 8. o. t. 5 pont. Kevesebb pontja van 4 versenyzőnek.

9. osztályosok

1. *Gelencsér Gábor* 42 pont; **2.** *Deli Lajos* 30 pont; **3.** *Boros M. Mátyás* 29 pont; **4–5.** *Csirmaz Előd*, *Horváth 713 György* 20 pont; **6.** *Babos Attila* 19 pont; **7.** *Andrássy Zoltán* 15 pont; **8–9.** *Nagy 712 Gábor*, *Pásztor Péter* 10 pont; **10.** *Komáromi Hajnalka* 9 pont; **11–12.** *Lovrics Klára*, *Nagy 729 Dávid* 8 pont; **13–15.** *Győző Miklós*, *Legány Csaba*, *Somlai Henrietta* 7 pont; **16–17.** *Bozsik Balázs*, *Toka László* 6 pont; **18–53.** *Ábel Ágnes*, *Ádám Zoltán*, *Balogh Béla*, *Balogh Róbert*, *Bóna Péter*, *Bucsy Barnabás*, *Csollák Anna*, *Dóra Gábor*, *Földi Júlia*, *Gerő László*, *Gráczi Tekla Etelka*, *Hegyi Márta*, *Horváth Ákos*, *Horváth Anita Xénia*, *Kapin Anita*, *Kelemen Kristóf*, *Kiss 414 Norbert*, *Kővári Ádám*, *Kuti Ákos*, *Lajtha Balázs*, *Lepcsényi Lilla*, *Lovrics Anna*, *Lukács Dávid*, *Pesti Gábor*, *Poór Veronika*, *Presér Ágnes Judit*, *Révész Ágnes*, *Roszol László*, *Schmidt 414 András*, *Szabó 341 Zsolt*, *Szabó Géza*, *Szőts Miklós*, *Tóth 314 János Pál*, *Tóth 555 Katalin*, *Tóth Katalin*, *Vajda Péter* 5 pont. Kevesebb pontja van 16 versenyzőnek.

10. osztályosok

1–2. *Gyenes Zoltán*, *Zábrádi Gergely* 70 pont; **3.** *Baharev Ali* 55 pont; **4.** *Vizer Máté* 50 pont; **5–6.** *Győri Nikolett*, *Taraza Busra* 48 pont; **7–8.** *Gáspár Merse Előd*, *Keszegh Balázs* 47 pont; **9.** *Máthé András* 33 pont; **10.** *Micskei Zoltán* 31 pont; **11.** *Kiss 345 Gergely* 30 pont; **12.** *Móczó Péter* 28 pont; **13.** *Sidó Péter* 27 pont; **14.** *Hesz Zoltán* 25 pont; **15.** *Papp Dávid* 21 pont; **16–17.** *Gajári Dávid*, *Hegedűs 512 Ramón* 18 pont; **18.** *Pozsonyi Gergő* 17 pont; **19.** *Tillinkó Zsanett* 16 pont; **20–21.** *Bajusz Csaba*, *Kajtár Márton* 15 pont; **22–24.** *Schlotter Ildikó*, *Vitos Botond*, *Zempléni Márton* 14 pont;

25. *Mansur Boase* 11 pont; **26–29.** *Bankó Krisztián*, *Bíró Márton*, *Pozsár Balázs*, *Varga Szilvia* 10 pont; **30.** *Csornai Gyula* 9 pont; **31–32.** *Bernád József Zsolt*, *Kovács Benedek* 8 pont; **33–36.** *Kasztner Tamás*, *Kiss Ádám*, *Kulik István*, *Venter György* 6 pont; **37–50.** *Alvarez Rafael*, *Balázs 255 Péter*, *Dicső Gábor*, *Galgand Veronika*, *Gelencsér Tímea*, *Gyimesi Attila*, *Horváth Hedvig*, *Ivánszki Szilvia*, *Kiss 360 Sándor*, *Kundráth Gergely*, *Müncz Márton*, *Simon Péter*, *Szever Ádám*, *Vastag Gábor* 5 pont. Kevesebb pontja van 18 versenyzőnek.

11. osztályosok

Feladatonként egy helyes megoldással elérhető: 95 pont.

1. *Végh A. László* 96 pont; **2–3.** *Juhász András*, *Terpai Tamás* 89 pont; **4.** *Bárány Kristóf* 80 pont; **5.** *Pataki Péter* 79 pont; **6.** *Horváth 202 Gábor* 76 pont; **7–8.** *Lengyel Tímea*, *Patakfalvi Zsolt* 74 pont; **9.** *Lukács László* 73 pont; **10.** *Pap Júlia* 72 pont; **11.** *Gueth Krisztián* 71 pont; **12.** *Székelyhidi Gábor* 70 pont; **13.** *Szakács László* 67 pont; **14–16.** *Balogh Attila*, *Barát Anna*, *Mecz Balázs* 66 pont; **17.** *Hangya Balázs* 65 pont; **18.** *Devecsery András* 61 pont; **19–21.** *Lovas Róbert*, *Szécsi Vajk*, *Vaik István* 60 pont; **22–23.** *Gerbicz Róbert*, *Szabadka Zoltán* 59 pont; **24–25.** *Hegedűs 396 Péter*, *Horváth 472 András* 54 pont; **26.** *Pál András* 53 pont; **27–28.** *Izsák Rudolf*, *Rácz Balázs* 52 pont; **29.** *Bíró Zsuzsanna* 51 pont; **30.** *Bujdosó Attila* 48 pont; **31.** *Szabó 997 Péter* 46 pont; **32.** *Naszódi Gergely* 44 pont; **33–34.** *Poronyi Gábor*, *Stoll Péter* 43 pont; **35–36.** *Nagy 333 Kálmán*, *Szép László* 41 pont; **37–39.** *Dancsó Zsuzsanna*, *Fehér Lajos Károly*, *Pszota Anikó* 40 pont; **40.** *Kutalik Péter* 39 pont; **41.** *Takács Gábor* 38 pont; **42–43.** *Györey Bernadett*, *Katona Gergely* 37 pont; **44–46.** *Benedek Csaba*, *Vágvölgyi Péter*, *Varga 577 István* 36 pont; **47.** *Szilágyi Zoltán* 35 pont; **48–49.** *Csendes 003 Viktor*, *Dési Balázs* 34 pont; **50–51.** *Förhécz András*, *Hesz Gábor* 33 pont; **52.** *Simon Zoltán* 32 pont; **53–54.** *Gál Tamás*, *Kitlei Róbert* 30 pont; **55.** *Balogh Ferenc* 29 pont; **56.** *Huszár Péter* 27 pont; **57.** *Bosznay Tamás* 26 pont; **58–59.** *Kósa Botond*, *Rakonczai Pál* 25 pont; **60–61.** *Krescarek Máté*, *Németh 214 András* 24 pont; **62–63.** *Farkas Claudia*, *Zalán Eszter* 23 pont; **64–66.** *Csikvári Gábor*, *Schmidt Ákos*, *Szokolóczi Dorottya* 21 pont; **67–69.** *Bíró Anikó*, *Moór Csaba*, *Zeke András* 20 pont; **70–73.** *Hegyi Péter*, *Kis-Tóth Ágnes*, *Németh 330 Gábor*, *Szabó 111 János* 19 pont; **74–75.** *Bordás Róbert*, *Haskó Gabriella* 16 pont; **76–78.** *Garamszegi Zoltán*, *Tóth 768 Bálint*, *Udvari Zsolt* 15 pont; **79–83.** *Csernyu Adrienn*, *Felszeghy Bálint*, *Kiss 540 Balázs*, *Szirányi Zsófia*, *Tóth Zsuzsanna* 14 pont; **84–91.** *Bánfi Barnabás*, *Biró Dániel*, *Cserkúti Péter*, *Farkas Barnabás*, *Kundráth Péter*, *Kustán Ildikó*, *Nagy 512 Marianna*, *Röst János* 13 pont; **92–95.** *Gulyás Zoltán*, *Lovics Gábor*, *Miklós Levente*, *Molnár Kristóf* 12 pont; **96–98.** *Berencsi Sándor*, *Lenk Sándor*, *Szilvási Krisztina* 11 pont; **99–102.** *Lerchner István*, *Samu Axel*, *Savanya Judit*, *Telcs Borbála* 10 pont; **103–104.** *Bognár Zsuzsanna*, *Ravasz Mária Magdolna* 9 pont; **105–108.** *Balogh Judit*, *Majzik Róbert*, *Tóth 161 Szilvia*, *Udvardy Gergely* 8 pont; **109–113.** *Báli Péter*, *Csordás Helga*, *Fall Zoltán*, *Mészáros András*, *Papp Mária* 7 pont; **114.** *Hajósi Péter* 6 pont; **115–128.** *Bagita Dóra*, *Balogh 324 Viktor*, *Castro Aldo*, *Deliága Judit*, *Dománszky Péter*, *Huhn Zsófia*, *Lakatos Veronika*, *Lázár András*, *Lovrencsics Lilla*, *Somogyi 139 Gábor*, *Szalontay Mihály*, *Szegedi Máté*, *Tóth 999 Attila*, *Varga 249 Zsolt* 5 pont. Kevesebb pontja van 41 versenyzőnek.

12. osztályosok

Feladatonként egy helyes megoldással elérhető: 75 pont.

1. *Lippner Gábor* 76 pont; **2.** *Pogány Ádám* 73 pont; **3–4.** *Páles Csaba*, *Zawadowski Ádám* 72 pont; **5.** *Léka Zoltán* 68 pont; **6.** *Terék Zsolt* 62 pont; **7–8.** *Dályay Virág*, *Hartmann Miklós* 60 pont; **9–11.** *Hermann György*, *Katona Zsolt*, *Szilágyi Judit* 56 pont; **12–13.** *Gáli Gergely*, *Oláh 407 Szabolcs* 55 pont; **14.** *Kiss András Péter* 52 pont; **15–16.** *Less Áron*, *Puskás Péter* 50 pont; **17–18.** *Vaik Zsuzsanna*, *Vidor Anna* 49 pont; **19.** *Tóth 235 Ádám* 46 pont; **20–22.** *Méder Áron*, *Sarlós Ferenc*, *Sipos András* 45 pont; **23.** *Csikvári András* 44 pont; **24.** *Benke András* 41 pont; **25–26.** *Szabó 130 Gábor*, *Zombori Tamás* 40 pont; **27–28.** *Kőműves Balázs*, *Várady Gergő* 39 pont; **29.** *Tisch Dávid* 38 pont; **30.** *Farkas 496 Norbert* 37 pont; **31–34.** *Héjjas Péter*, *Kőhalmi Dóra*, *Nyul Gábor*, *Szigel Gábor* 32 pont; **35.** *Györkei Györgyi* 31 pont; **36.** *Biener Péter* 30 pont; **37–38.** *Boja Bence*, *Hajdufi Péter* 29 pont; **39.** *Salamon Éva* 26 pont; **40–41.** *Gazda Kinga*, *Homolya Dániel* 25 pont; **42–43.** *Koscsó Orsolya*, *Lázár Zsófia* 24 pont; **44–46.** *Barta Ágnes*, *Dedinszky Zsófia*, *Gregorich Zsuzsa* 23 pont; **47.** *Hegyi Veronika* 20 pont; **48–50.** *Csizmadia Zsolt*, *Kürthy Gábor*, *Mátyási István* 19 pont; **51–52.** *Mizda Roland*, *Szarvas György* 18 pont; **53.** *Kiss Ágnes* 17 pont; **54–56.** *Kurucz Ádám*, *Perényi Áron*, *Varga Attila* 16 pont; **57–60.** *Fehér Dóra*, *Harangozó Szabolcs*, *Horváth János*, *Serény András* 15 pont; **61–62.** *Németh 245 Ádám*, *Vincze László* 14 pont; **63–64.** *Csizmadia László*, *Dargó Eszter* 13 pont; **65.** *Onodi András* 12 pont; **66–68.** *Fodor Bea*, *Gaál Gábor*, *Nagy Elemér Károly* 11 pont; **69–74.** *Csökmei Krisztina*, *Horváth 286 József*, *Szabó 555 Krisztián*, *Szilágyi Dalma*, *Taraza Abir*, *Turkus Előd Barna* 10 pont; **75–77.** *Föglein Anna*, *Papp Eszter*, *Steinbach Gábor* 9 pont; **78–82.** *Balázs Erzsébet*, *Faddi Gábor*, *Merétey Vida Zsolt*, *Szekeres Dóra*, *Vámos Lénárd* 8 pont; **83–84.** *Füstös Melinda*, *Sztyéhlik Anikó* 6 pont; **85–100.** *Bíró Ádám*, *Dombi Gábor*, *Germán László*, *Hegedűs Miklós*, *Kovács 137 Rudolf*, *Kovács 333 Adrienn*, *Kovács Károly*, *Lendvai Anita*, *Lindner Zsófia*, *Mátó István*, *Móczár Judit*, *Molnár Rita*, *Pazár Bori*, *Sasi Nagy Júlia*, *Timár Norbert*, *Tóth László Tamás* 5 pont. Kevesebb pontja van 13 versenyzőnek.

Nehezebb feladatok

Az eddig feldolgozott feladatok: a szeptembertől decemberig megjelent feladatok.

Feladatonként egy helyes megoldással elérhető: 75 pont.

1. *Bérczi Gergely* 12. o. t. 61 pont; **2.** *Kun Gábor* 12. o. t. 57 pont; **3.** *Lukács László* 11. o. t. 55 pont; **4.** *Lippner Gábor* 12. o. t. 54 pont; **5.** *Végh A. László* 11. o. t. 49 pont; **6.** *Juhász András* 11. o. t. 38 pont; **7.** *Terpai Tamás* 11. o. t. 33 pont; **8.** *Gyenes Zoltán* 10. o. t. 30 pont; **9.** *Gerbicz Róbert* 11. o. t. 27 pont; **10.** *Horváth 202 Gábor* 11. o. t. 23 pont; **11.** *Székelyhidi Gábor* 11. o. t. 20 pont; **12–14.** *Naszódi Gergely* 11. o. t., *Pap Júlia* 11. o. t., *Szűcs Gábor* 12. o. t. 14 pont; **15.** *Katona Zsolt* 12. o. t. 12 pont; **16–23.** *Devecsery András* 11. o. t., *Hegedűs 396 Péter* 11. o. t., *Hubenkó Elemér* 11. o. t., *Kiss 246 Tamás* 12. o. t., *Mecz Balázs* 11. o. t., *Pataki Péter* 11. o. t., *Tóth 235 Ádám* 12. o. t., *Zábrádi Gergely* 10. o. t. 10 pont; **24–25.** *Baharev Ali* 10. o. t., *Léka Zoltán* 12. o. t. 9 pont; **26–28.** *Felföldi Zsolt* 11. o. t., *Gueth Krisztián* 11. o. t., *Szabó 997 Péter* 11. o. t. 7 pont; **29–30.** *Barát Anna* 11. o. t., *Papp Dávid* 10. o. t. 6 pont; **31–35.** *Boros M. Mátyás* 9. o. t., *Bujdosó Attila* 11. o. t., *Hesz Zoltán* 10. o. t., *Szigel Gábor* 12. o. t., *Zawadowski Ádám* 12. o. t. 5 pont; **36–38.** *Hesz Gábor* 11. o. t., *Máthé András* 10. o. t., *Pogány Ádám* 12. o. t. 4 pont; **39.** *Csóka Endre* 7. o. t. 3 pont. Kevesebb pontja van 25 versenyzőnek.

C jelű gyakorlatok, legfeljebb 10. osztályosok

Az eddig feldolgozott feladatok: a szeptemberi és októberi szám feladatai, valamint C. 482

Feladatonként egy helyes megoldással elérhető: 45 pont.

1. *Boros M. Mátyás* 9. o. t. 45 pont; **2.** *Csató György* 9. o. t. 44 pont; **3.** *Árvay Eszter* 9. o. t. 43 pont; **4–6.** *Dombi József Dániel* 10. o. t., *Friedl Zita* 10. o. t., *Lengyel Zoltán* 10. o. t. 42 pont; **7–9.** *Birkner Tamás* 5. o. t., *Kós Viktória* 9. o. t., *Löki István* 10. o. t. 41 pont; **10–11.** *Gajdos Béla* 10. o. t., *Robotka Zsolt* 10. o. t. 40 pont; **12–16.** *Müncz Márton* 10. o. t., *Reményi Zsolt* 9. o. t., *Sallay 123 Enikő* 10. o. t., *Varga 519 Katalin* 9. o. t., *Zalán Péter* 9. o. t. 39 pont; **17–19.** *Bákor Krisztina* 10. o. t., *Kriston Vízi Gábor* 10. o. t., *Strobl Apolka* 10. o. t. 38 pont; **20–21.** *Pap Attila* 9. o. t., *Szűcs 702 Zsófia* 9. o. t. 37 pont; **22–24.** *Bankó Krisztián* 10. o. t., *Kasztner Tamás* 10. o. t., *Wilfing András* 10. o. t. 36 pont; **25–33.** *Antal István* 10. o. t., *Bálint Zsuzsanna* 9. o. t., *Bohák András* 9. o. t., *Demián Tamás* 9. o. t., *Horváth 413 László* 10. o. t., *Legány Csaba* 9. o. t., *Nagy Máté* 10. o. t., *Veres 618 Dániel* 9. o. t., *Vona Gábor* 9. o. t. 35 pont; **34–39.** *Bacsárdi László* 10. o. t., *Csontos Gergő* 10. o. t., *Fehér Gergely* 9. o. t., *Fodor Erzsébet* 10. o. t., *Kántor Éva* 10. o. t., *Pozsonyi Tamás* 9. o. t. 34 pont; **40–43.** *Csaszny Tamás* 9. o. t., *Tóth Adrienn* 9. o. t., *Vajda Péter* 9. o. t., *Zajdó Csaba* 9. o. t. 33 pont; **44–46.** *Farkas Melinda* 8. o. t., *Herczeg Zoltán* 10. o. t., *Kövesárki Péter* 10. o. t. 32 pont; **47–53.** *Berta Andrea* 10. o. t., *Csóka Endre* 7. o. t., *Hegedüs Balázs* 9. o. t., *Nagy 314 Ádám* 9. o. t., *Nátz Eszter* 10. o. t., *Ozogány Katalin* 10. o. t., *Péterfalvi Ferenc* 8. o. t. 31 pont; **54–64.** *Babos Attila* 9. o. t., *Dankai György* 10. o. t., *Feró Dalma* 9. o. t., *Harangi Norbert* 10. o. t., *Horváth Réka* 8. o. t., *Jusztin Balázs* 10. o. t., *Nagy Bernadett* 10. o. t., *Németh 829 Balázs* 9. o. t., *Sajtos Erika* 9. o. t., *Soós István* 10. o. t., *Szerencsi Zsuzsanna* 10. o. t. 30 pont; **65–71.** *Baross Gergely* 9. o. t., *Hegyi Márta* 9. o. t., *Mészáros Albert* 10. o. t., *Pájer Boróka* 9. o. t., *Siroki László* 8. o. t., *Tóth Katalin* 9. o. t., *Vajda Ágota* 10. o. t. 29 pont; **72–76.** *Kádár 181 Csaba* 9. o. t., *Simon Zoltán* 10. o. t., *Soós 740 Károly* 9. o. t., *Szűcs Júlia* 9. o. t., *Varga Szilvia* 10. o. t. 28 pont; **77–81.** *Bíró Márton* 10. o. t., *Börcsök József* 9. o. t., *Fitos Tamás* 9. o. t., *Gyenese Mónika* 9. o. t., *Stefán Gábor* 9. o. t. 27 pont; **82–85.** *Békási Sándor* 9. o. t., *Bencze Ágnes* 9. o. t., *Veres Orsolya* 10. o. t., *Zsédely Eszter* 10. o. t. 26 pont; **86–93.** *Bodor András* 9. o. t., *Fűrész Gábor* 8. o. t., *Lang Péter* 7. o. t., *Nagy 625 Tibor* 7. o. t., *Novits László* 9. o. t., *Pszota Zsolt* 8. o. t., *Vincze-Pap Gergely* 9. o. t., *Vitos Botond* 10. o. t. 25 pont; **94–106.** *Benke Noémi* 10. o. t., *Buruzs Ádám* 10. o. t., *Darabos Andrea* 9. o. t., *Dobó István* 10. o. t., *Halasi Tamás* 9. o. t., *Kósa Gabriella* 10. o. t., *Patay Gergely* 10. o. t., *Rischák Rózsa* 8. o. t., *Sinkovicz Katalin* 10. o. t., *Szabó Csilla* 9. o. t., *Szalay Zsófia* 8. o. t., *Veress Vilmos* 10. o. t., *Závodi Attila* 10. o. t. 24 pont; **107–113.** *Balogh 666 Csaba* 10. o. t., *Barics Krisztián János* 10. o. t., *Dobrádi László* 9. o. t., *Kármán Péter* 9. o. t., *Lánczi Levente* 8. o. t., *Lendvai Péter* 10. o. t., *Soltész Noémi* 10. o. t. 23 pont; **114–119.** *Ács László* 10. o. t., *Berényi Károly* 10. o. t., *Pintér Miklós* 9. o. t., *Pótó Júlia* 9. o. t., *Ringer Norbert* 10. o. t., *Végh Zsuzsanna* 10. o. t. 22 pont; **120–123.** *Fodor Erika* 10. o. t., *Hangya Miklós* 6. o. t., *Matin Tamás* 10. o. t., *Pásztor Péter* 9. o. t. 21 pont; **124–141.** *Bán Lilla* 9. o. t., *Csapó Melinda* 10. o. t., *Dőry Magdolna* 7. o. t., *Drozdy Árpád* 8. o. t., *Farkas Ágnes* 8. o. t., *Gál 356 József* 9. o. t., *Gyurcsán Péter* 10. o. t., *Horváth 820 Mariann* 10. o. t., *Kántor Gergely* 10. o. t., *Kegyes Tamás* 10.

o. t., *Merazga Oktávia* 9. o. t., *Nyul Balázs* 7. o. t., *Takáts Gergely* 10. o. t., *Tallián Miklós* 9. o. t., *Urr Beáta* 10. o. t., *Várszegi Gergely* 10. o. t., *Végh Anita* 9. o. t., *Veréb Tamás* 8. o. t. 20 pont; **142–156.** *Baur Eszter* 8. o. t., *Drén Judit* 10. o. t., *Földi Júlia* 9. o. t., *Juhász 113 Ágnes* 10. o. t., *Kovács 211 Béla* 10. o. t., *Kőrösi Attila* 8. o. t., *Magyaros Ferenc* 9. o. t., *Morvai Krisztina* 8. o. t., *Nagy 369 László* 10. o. t., *Pilissy György* 8. o. t., *Sirokai Levente* 10. o. t., *Solymossy Endre* 10. o. t., *Spanczér Ilona* 8. o. t., *Tóth Balázs* 9. o. t., *Veszeli Tamás* 10. o. t. 19 pont; **157–168.** *Havancsák Viktória* 9. o. t., *Hegedűs Vera* 9. o. t., *Jelenka József* 9. o. t., *Kántor Krisztina* 10. o. t., *Lükő Sára* 10. o. t., *Pardavi Péter* 10. o. t., *Pollák Gergely* 9. o. t., *Sörös Csaba* 9. o. t., *Szabó Gyöngyi* 9. o. t., *Vajda Milán* 10. o. t., *Várady Gábor* 10. o. t., *Vicsek Miklós* 9. o. t. 18 pont; **169–179.** *Ács Zoltán* 10. o. t., *Antal Ágnes* 9. o. t., *Balogh Zsófia* 10. o. t., *Csapó Adelinda* 9. o. t., *Hárshegyi Zsuzsa* 9. o. t., *Ivánszki Szilvia* 10. o. t., *Kapitány Benedek* 9. o. t., *Kiss 921 Olivér* 10. o. t., *Medgyesi László* 9. o. t., *Vesszős Noémi* 10. o. t., *Vitális Anikó* 9. o. t. 17 pont; **180–193.** *Béky Bence* 8. o. t., *Bernula János* 10. o. t., *Dósa Mariann* 8. o. t., *Fekete Ada* 10. o. t., *Görbicz Gergely* 9. o. t., *Horváth Illés* 8. o. t., *Kiss Judit* 9. o. t., *Makai Krisztián* 10. o. t., *Masa Gabriella* 9. o. t., *Müller László* 9. o. t., *Sofró Csaba* 9. o. t., *Szabó 923 Viktor* 9. o. t., *Varga 951 Attila* 10. o. t., *Vastag Gábor* 10. o. t. 16 pont; **194–230.** *Bence Virág* 10. o. t., *Enyingi Katalin* 9. o. t., *Hegedűs 512 Ramón* 10. o. t., *Herczeg Tamás* 10. o. t., *Horváth 303 Bálint* 9. o. t., *Joó Péter* 9. o. t., *Kalmár Levente* 9. o. t., *Keresztes Róbert* 9. o. t., *Kiss 360 Sándor* 10. o. t., *Kiss 857 Miklós* 9. o. t., *Kleinheincz Zoltán* 10. o. t., *Koch Dénes* 9. o. t., *Kovács 999 Balázs* 9. o. t., *Licskai Gergő* 9. o. t., *Minárik Gábor* 9. o. t., *Molnár Sándor* 9. o. t., *Nagy 144 Ferenc* 8. o. t., *Nagy 666 Péter* 9. o. t., *Németh 224 Zsófia* 9. o. t., *Németh 278 Andrea* 8. o. t., *Oravecz Viktor* 9. o. t., *Oroszlány Endre* 10. o. t., *Pető Beáta* 9. o. t., *Poór Veronika* 9. o. t., *Radó Rózsa* 9. o. t., *Rév Tamás* 9. o. t., *Rudas Rozália* 9. o. t., *Schmidt Andrea* 9. o. t., *Soós Péter* 8. o. t., *Szabó Géza* 9. o. t., *Szalontay Luca* 9. o. t., *Szántó 900 Imre* 10. o. t., *Tolvaj Nóra* 8. o. t., *Tolvaj Vera* 10. o. t., *Varga 101 Dániel* 10. o. t., *Zima István* 10. o. t., *Zsuppán András* 10. o. t. 15 pont. Kevesebb pontja van 459 versenyzőnek.

C jelű gyakorlatok, 11–12. osztályosok

1. *Csirmaz Attila* 11. o. t. 47 pont; **2–3.** *Kormos Márton* 12. o. t., *Sarlós Ferenc* 12. o. t. 46 pont; **4.** *Gueth Krisztián* 11. o. t. 44 pont; **5–7.** *Csizmadia Zsolt* 12. o. t., *Farkas Milán* 11. o. t., *Keller László* 12. o. t. 43 pont; **8–10.** *Davidovics Gábor* 11. o. t., *Fall Zoltán* 11. o. t., *Orbán Viktor* 11. o. t. 42 pont; **11–13.** *Bérces Márton* 11. o. t., *Héger Nóra* 11. o. t., *Juhász Júlia* 11. o. t. 41 pont; **14–15.** *Kocsis 444 Gábor* 11. o. t., *Kovács 333 Adrienn* 12. o. t. 40 pont; **16.** *György László* 12. o. t. 39 pont; **17–20.** *Csökmei Krisztina* 12. o. t., *Lakatos Veronika* 11. o. t., *Lovas Róbert* 11. o. t., *Váradi 256 Attila* 11. o. t. 38 pont; **21–24.** *Führer Lívia* 11. o. t., *Horti Csilla* 12. o. t., *Nagy 512 Marianna* 11. o. t., *Ráth Krisztián* 11. o. t. 37 pont; **25–26.** *Bakonyi Gábor* 12. o. t., *Németh Péter* 11. o. t. 36 pont; **27–29.** *Ábrány Miklós* 11. o. t., *Fehér 666 Ágnes* 11. o. t., *Kiss Marietta* 11. o. t. 35 pont; **30.** *Szőllősi Loránd* 11. o. t. 34 pont; **31–32.** *Biczó Mihály* 11. o. t., *Dancsó Zsuzsanna* 11. o. t. 33 pont; **33–37.** *Horváth Anett* 12. o. t., *Kardos Dániel* 11. o. t., *Mizda Roland* 12. o. t., *Németh 245 Ádám* 12. o. t., *Racskó Norbert* 11. o. t. 32 pont; **38–41.** *Hegyi Péter* 11. o. t., *Huszár Csaba* 12. o. t., *Juhász Gábor* 11. o. t., *Papp Mária* 11. o. t. 31 pont; **42–46.** *Aranyossy Márta* 11. o. t., *Barnácz*

Brigitta 11. o. t., *Förhécz András* 11. o. t., *Hegyközi József* 12. o. t., *Katona Gergely* 11. o. t. 30 pont; **47–48.** *Balázs Erzsébet* 12. o. t., *Pallaghy Kata* 11. o. t. 29 pont; **49–53.** *Badacsonyi Réka* 12. o. t., *Gundel Ferenc* 12. o. t., *Kovács 114 Laura* 12. o. t., *Szegedi Máté* 11. o. t., *Szekeres Szabolcs* 12. o. t. 28 pont; **54–57.** *Lakatos Gabriella* 11. o. t., *Leidinger Árpád* 12. o. t., *Mihálovics Lajos* 11. o. t., *Szabó 555 Krisztián* 12. o. t. 27 pont; **58–60.** *Csuthy Gábor* 11. o. t., *Molnár Csaba* 11. o. t., *Szipola Ágnes* 12. o. t. 26 pont; **61–66.** *Bede István* 11. o. t., *Horváth 286 József* 12. o. t., *Jelinek György* 11. o. t., *Koroknai Sándor* 11. o. t., *Tóth Dániel* 11. o. t., *Vörös Bernadett* 12. o. t. 25 pont; **67–70.** *Baur Edina* 11. o. t., *Rózsa Tamás* 12. o. t., *Szabados Judit* 12. o. t., *Verbovszki Andrea* 12. o. t. 24 pont; **71–75.** *Benke Emese* 11. o. t., *Harangozó Szabolcs* 12. o. t., *Kovács 899 Péter* 11. o. t., *Mezősi Gábor* 11. o. t., *Portschy Szabolcs* 11. o. t. 23 pont; **76–81.** *Farkas 496 Norbert* 12. o. t., *Gajdos Dániel* 11. o. t., *Győrfi Annamária* 11. o. t., *Paukovics Diána* 11. o. t., *Vántus András* 11. o. t., *Víg Diána* 12. o. t. 22 pont; **82–91.** *Balázs Gábor* 11. o. t., *Bujtás Anita* 12. o. t., *Czövek Zoltán* 11. o. t., *Hajlamász Zsolt* 12. o. t., *Oldal Lilla* 11. o. t., *Szigel Gábor* 12. o. t., *Tarsoly Ágnes* 12. o. t., *Thiry Gábor* 12. o. t., *Tóth Éva* 11. o. t., *Turkus Előd Barna* 12. o. t. 21 pont; **92–101.** *Bella Ildikó* 11. o. t., *Hevesi László* 12. o. t., *Kállai András* 11. o. t., *Kárász Judit* 12. o. t., *Kovács Adrián* 11. o. t., *Nagy Elemér Károly* 12. o. t., *Pári Csaba* 11. o. t., *Simon Péter* 11. o. t., *Tóth 161 Szilvia* 11. o. t., *Tuska László* 11. o. t. 20 pont; **102–108.** *Bacskay Tamás* 11. o. t., *Brulich Ákos* 11. o. t., *Hermán Zsuzsanna* 12. o. t., *Keresztély Éva* 11. o. t., *Makó Veronika* 11. o. t., *Tóth 111 Gábor* 11. o. t., *Vajnai 111 Viktória* 11. o. t. 19 pont; **109–112.** *Cserháti András* 11. o. t., *Föglein Anna* 12. o. t., *Kovács Károly* 12. o. t., *Spacér Beáta* 11. o. t. 18 pont; **113–118.** *Balogh Anikó* 12. o. t., *Bóta Adrienn* 12. o. t., *Fehér Ágnes* 11. o. t., *Havasi Kata* 11. o. t., *Sipos Nikoletta* 11. o. t., *Timár Norbert* 12. o. t. 17 pont; **119–123.** *Galambos András* 12. o. t., *Kozma Gergely* 11. o. t., *Maróti Csilla* 11. o. t., *Mezei Irén* 11. o. t., *Molnár Gábor* 11. o. t. 16 pont; **124–144.** *Berengyán Amadé* 12. o. t., *C. Szabó István* 11. o. t., *Csordás Helga* 11. o. t., *Czuczy Noémi* 12. o. t., *Galó Péter* 12. o. t., *Hegedűs Miklós* 12. o. t., *Horák György* 11. o. t., *Kürthy Gábor* 12. o. t., *Lovrencsics Lilla* 11. o. t., *Miszlai Nikoletta* 12. o. t., *Novák Péter* 11. o. t., *Pádár Gergely* 11. o. t., *Perényi Áron* 12. o. t., *Petrányi Gábor* 11. o. t., *Sipos Tünde* 11. o. t., *Solova László* 12. o. t., *Szabó 111 János* 11. o. t., *Varga 249 Zsolt* 11. o. t., *Vincze Viktor* 12. o. t., *Vitális Gábor* 11. o. t., *Zeke András* 11. o. t. 15 pont. Kevesebb pontja van 152 versenyzőnek.

Könyvismertetés

Benedek József: 7×21 az 161, azaz másképpen ugyanaz

Benedek József, a kecskeméti Németh László Gimnázium és Szakközépiskola tanára segíteni akart diákjainak. Azon túl, hogy minél jobban felkészítse őket az érettségire, az is célja volt, hogy gondolkodásmódjával, egyéni hangvételével megértesse és megszerettesse, diák-közelivé hozza a matematikát. Így született ez a könyv, amely az érettségin szükséges 161 elméleti kérdést egységes stílusban tárgyalja, egy-egy oldalon, a fogalmakat példákkal magyarázva, mellettük üres oldalt hagyva a diákok próbálkozásainak, tanárok megjegyzéseinek.

Ez a könyv más, mint a többi: gyönyörű formai megoldásai ugyanazt szolgálják, mint tartalmi lényegre törése: diák és tanár egyaránt felkészülhet belőle.

A „…másképpen ugyanaz” bemutat egy szemléletet, esztétikai igényességet, egy praktikus könyvszerkezetet és egy iskola szellemiségét, amely a könyvet kiadta.

(Megrendelhető: a 76/327–703 telefonszámon, vagy a 76/328–603 telefaxon.)

THE PROBLEMS OF THE 1997 KÜRSCHÁK CONTEST

1. Let p be an odd prime number. Consider points in the coordinate plane both coordinates of which are numbers in the set 0, 1, 2, $\ldots$, $p-1$. Prove that it is possible to choose p lattice points out of these such that no three of them should be collinear.

2. O is the circumcentre of triangle ABC. The inscribed circle touches the sides at A_1, B_1 and C_1 and its centre is O_1. The orthocentre of triangle $A_1B_1C_1$ is M_1. Prove that O, O_1 and M_1 are collinear.

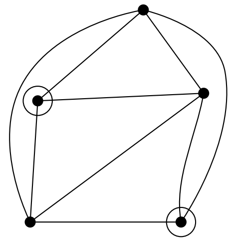
3. Consider a graph in the plane the edges of which do not intersect each other. Prove that the edges can be coloured with three colours so that there should be no chromatic circuit.

Helyreigazítás

Az előző számunkban megjelent, **Az 1997. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldása** c. cikkben a 67. oldal utolsó előtti mondata helyesen: Az O-ból AF-re és O_1-ből A_1M_1'-re emelt merőleges szakaszok egyrészt az $O'O_1'$, illetőleg $O_1'M_1'$ szakasszal egyenlők, másrészt hosszuk $R\sin\delta$, illetőleg $r\sin\delta$, ahol R a háromszög köré írt kör sugara, r a beírt köré.

A 71. oldalon a harmadik sorban kezdődő mondat kiegészítve a következő: Húzzuk meg ezeket az előbbi módon, majd hagyjuk el P-t a belőle induló élekkel együtt, így most is síkra rajzolható G' gráfot kapunk, mert az új élek csak PB-t és PE-t metszik.

A 72. oldalon a 14. ábra helyett az alábbit kell tekinteni:



A tévedésért elnézést kér

a szerk.

A januári szakköri feladatok megoldásvázlatai, eredményei

1. Ismeretes, hogy ha $A>0$ és $B>0$, akkor $A+B\geqslant 2\sqrt{AB}$. Ezt alkalmazva

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geqslant 2\sqrt{\frac{ab^2c}{ac}}=2b,\qquad \frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geqslant 2c\quad\text{és}\quad \frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant 2a.$$

Így

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)\geqslant\frac{1}{2}(2b+2c+2a)=a+b+c.$$

Az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=b=c$.

2. a) Az állítás teljes indukcióval igazolható. Ha $n=1$, akkor igaz az állítás, mert $S_1=1\cdot 2=$ $=10+(3-5)\cdot 2^2=2$. Tegyük fel, hogy n-re igaz, azaz $S_n=10+(3n-5)\cdot 2^{n+1}$. Be kell látnunk, hogy $(n+1)$-re is igaz, azaz hogy

$$S_{n+1}=10+(3(n+1)-5)\cdot 2^{n+2}=10+(6n-4)\cdot 2^{n+1}.$$

Ez is fennáll, hiszen

$$S_{n+1}=S_n+(3(n+1)-2)\cdot 2^{n+1}=10+(3n-5)\cdot 2^{n+1}+(3(n+1)-2)\cdot 2^{n+1}=10+(6n-4)\cdot 2^{n+1}.$$

Így az állítást igazoltuk.

b) Észrevehető, hogy S'_n k-adik tagja 2^k-nal nagyobb az S_n k-adik tagjánál. Ezért

$$S'_n=S_n+(2+2^2+2^3+\ldots+2^n)=S_n+2(2^n-1)=8+(3n-4)\cdot 2^{n+1}.$$

3. a) Ismeretes, hogy a háromszög területe $T=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ és $c=2r\sin\gamma$, tehát $T=\frac{abc}{4r}$, azaz $r=\frac{abc}{4T}$.

Mivel $\varrho=\frac{T}{s}$, ahol $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$, azért ha $ac=6r\varrho$, akkor $ac=6\cdot\frac{abc}{4T}\cdot\frac{T}{s}=\frac{3abc}{a+b+c}$, amiből $a+b+c=3b$, $a+c=2b$, $a-b=b-c$, azaz a, b, c valóban egy számtani sorozat három szomszédos eleme.

b) Legyen a, b, c egy számtani sorozat három szomszédos eleme. Ekkor $a+c=2b$, ezért

$$6r\varrho=6\cdot\frac{abc}{2T}\cdot\frac{2T}{a+b+c}=3\frac{abc}{3b}=ac.$$

4. a) Legyen $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD}=\mathbf{c}$ és $\overrightarrow{DA}=\mathbf{d}$. Világos, hogy $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=\mathbf{0}$.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=\mathbf{ac}+\mathbf{b}(-\mathbf{d})+(\mathbf{c}+\mathbf{d})(\mathbf{b}+\mathbf{c})=$$
$$\mathbf{ac}-\mathbf{bd}+\mathbf{bc}+\mathbf{c}^2+\mathbf{bd}+\mathbf{cd}=\mathbf{c}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})=0.$$

b) A feltétel szerint $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ és $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$, ezért skaláris szorzatuk nulla, azaz $\mathbf{ac}=0$, és hasonlóan $(-\mathbf{d})\mathbf{b}=0$.

Azt kell belátni, hogy $CA \perp BD$. Mivel $\overrightarrow{CA} = \mathbf{c} + \mathbf{d}$ és $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, ezért elegendő belátni, hogy $(\mathbf{c} + \mathbf{d})(\mathbf{b} + \mathbf{d}) = 0$. Ez pedig teljesül, mert

$$(\mathbf{c}+\mathbf{d})(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{cb} + \mathbf{c}^2 + \mathbf{db} + \mathbf{dc} = \mathbf{c}(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}) = \mathbf{c}(-\mathbf{a}) = 0,$$

hiszen $\mathbf{db} = 0$, $\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = -\mathbf{a}$ és $\mathbf{ca} = 0$.

c) A b) feltétele szerint, ha a D pont rajta van a C-ből és az A-ból induló magasságvonalon, akkor a bizonyított állítás szerint rajta van a B-ből induló magasságvonalon is, tehát az ABC háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást.

Rábai Imre

Megoldásvázlatok, eredmények a III. mérőlap (1998/2. sz.) feladataihoz

1. Az egyenlet mindkét oldalát $100 = 2^2 \cdot 5^2$-nel osztva:

$$5^{x-2} \cdot 2^{\frac{x-2}{1-x}} = 1, \qquad \left(5 \cdot 2^{\frac{1}{1-x}}\right)^{x-2} = 1.$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha $x - 2 = 0$ vagy $5 \cdot 2^{\frac{1}{1-x}} = 1$. Az egyenlet megoldásai: $x_1 = 2$, $x_2 = \log_5 10$.

2. A feltétel és a koszinusztétel alkalmazásával

$$-\frac{b}{a} = -2\cos\gamma \quad \text{és} \quad -2\cos\gamma = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab},$$

ahonnan

$$\frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab} = -\frac{b}{a}$$
$$c^2 = a^2,$$

így $c = a$ ($c > 0$, $a > 0$), a háromszög egyenlő szárú.

(Az igazolás szinusztétel alkalmazásával is elvégezhető, $\alpha = \gamma$ adódik. A $b = 2a\cos\gamma$ feltétellel belátható, hogy a b oldalhoz tartozó magasságvonal a háromszög szimmetriatengelye.)

3. Nyilván $x \geqslant -4$ és $x \neq 0$. Ezek a számok egyben az egyenlőtlenség megoldásai, mert ha a törtet $\left(2 + \sqrt{x+4}\right)^2$-nel bővítjük, akkor

$$\left(2 + \sqrt{x+4}\right)^2 > x + 6, \qquad \text{azaz a}$$
$$2 + 4\sqrt{x+4} > 0$$

egyenlőtlenséghez jutunk, ami minden megengedett x-re teljesül.

($\sqrt{x+4}$ helyett bevezethetünk új változót.)

4. Mindkét tört számlálója pozitív állandó és a nevezők is pozitívak, így akkor veszik fel a legnagyobb értéküket, ha a nevezőjük a lehető legkisebb.

a) Ha $A > 0$ és $B > 0$, akkor $A + B \geqslant 2\sqrt{AB}$, és az egyenlőség pontosan $A = B$ esetén teljesül. Mivel 2^{x-1} és $2^{2-x} > 0$,

$$2^{x-1} + x^{2-x} + 1 \geqslant 2\sqrt{2^{x-1} \cdot 2^{2-x}} + 1 = 2\sqrt{2} + 1.$$

és csak akkor lesz egyenlőség, ha $2^{x-1}=2^{2-x}$ tehát, ha $x=\frac{3}{2}$. Az adott kifejezés legnagyobb helyettesítési értéke $\frac{4\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}+1}=2$, amit az $x=\frac{3}{2}$ helyen vesz fel.

b) Tudjuk, hogy $A^2+B^2\geqslant 0$, ahol az egyenlőség pontosan $A=0$ és $B=0$ esetén teljesül. $(3-x+\lg 2y)^2+(x^2-1)^2+16\geqslant 16$. Az egyenlőség akkor teljesül, ha $x^2-1=0$ és $3-x+\lg 2y=0$, azaz ha $x_1=1$, $y_1=0{,}005$ vagy $x_2=-1$, $y_2=0{,}00005$. Az adott kifejezés legnagyobb értéke $\frac{32}{16}=2$, amit az $(x_1;y_1)$ és az $(x_2;y_2)$ számpárok esetén vesz fel.

5. A feltételek szerint $S_{n+3}-S_n=\frac{126-75}{2}$, tehát $a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=\frac{51}{2}$, azaz

$$\left(a_1+n\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(a_1+(n+1)\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(a_1+(n+2)\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{51}{2},$$

amiből

$$2a_1+n=16. \tag{1}$$

Mivel $\frac{75}{2}=\frac{n}{2}\left(2a_1+(n-1)\cdot\frac{1}{2}\right)$, azért

$$n(4a_1+n-1)=150. \tag{2}$$

Az (1) és a (2) egyenletek által alkotott egyenletrendszer megoldása során az $n^2-31n+150=0$ egyenletet kapjuk. Így ha $n=6$, akkor $a_1=5$, és ha $n=25$, akkor $a_1=-\frac{9}{2}$.

6. A második egyenletből $x=y+z-3$, így $(y+z-3)^2-y^2-z^2=1$, azaz $yz-3y-3z=-4$, ami szorzattá alakítással

$$y(z-3)-3(z-3)-9=-4, \qquad (y-3)(z-3)=5$$

alakban írható. Az egész számok körében $5=1\cdot 5=5\cdot 1=(-1)\cdot(-5)=(-5)\cdot(-1)$, azaz $y-3=1$, $z-3=5$ vagy $y-3=5$, $z-3=1$ vagy $y-3=-1$, $z-3=-5$ vagy $y-3=-5$, $z-3=-1$. Az egyenletet a következő egész számokat tartalmazó (x,y,z) számhármasok elégítik ki:

$$(9;\,4;\,8),\qquad (9;\,8;\,4),\qquad (-3;\,2;\,-2),\qquad (-3;\,-2;\,2).$$

7. Az adott körnek két $x_0=11$ abszcisszájú pontja van, $E_1(11;-9)$ és $E_2(11;-25)$. Az E_1 pontban az adott kört és az x tengelyt érintő körök közös érintőjének az egyenlete $3x-4y=69$. (Egy normálvektora az $\frac{1}{2}\overrightarrow{E_1C}(3;-4)$, ahol $C(17;-17)$ az adott kör középpontja.)

A $3x-4y=69$ egyenletű érintő az x tengelyt az $M(23;0)$ pontban metszi. A feltételeknek két kör felel meg, ezek az x tengelyt olyan F_1, illetve F_2 pontban érintik, amelyekre $ME_1=MF_1=MF_2$, hiszen a külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők. Mivel $ME_1=15$, azért $F_1(8;0)$ és $F_2(38;0)$. A keresett körök középpontja rajta van az E_1C egyenesen, amelynek egyenlete: $4x+3y=17$, és az $x=8$, illetve $x=38$ egyenletű egyeneseken. A keresett körök egyenlete:

$$(x-8)^2+(y+5)^2=5^2, \qquad \text{illetve} \qquad (x-38)^2+(y+45)^2=45^2.$$

Az $E_2(11;-25)$ ponthoz tartozó érintőkörök egyenlete:

$$(x+64)^2+(y+125)^2=125^2, \qquad \text{illetve} \qquad \left(x-\frac{58}{3}\right)^2+\left(y+\frac{125}{9}\right)^2=\left(\frac{125}{9}\right)^2.$$

A feladat más módon is megoldható. Hogyan?

8. A feladatban szereplő egyenlet: $x^4+2(m^2-5)x^2+m^4-10m^2+7=0$. Az adott, x^2-re másodfokú egyenlet diszkriminánsa $D=72=(6\sqrt{2})^2$, így

a) $x^2=(5+3\sqrt{2})-m^2$ vagy b) $x^2=(5-3\sqrt{2})-m^2$.

a) Az $x^2=5+3\sqrt{2}-m^2$ egyenletnek két különböző x_1 és x_2 megoldása van, ha $5+3\sqrt{2}-m^2>0$, azaz ha $-\sqrt{5+3\sqrt{2}}<m<\sqrt{5+3\sqrt{2}}$, egy (két egyenlő) megoldása van, az $x_0=0$, ha $m=\sqrt{5+3\sqrt{2}}$ vagy $m=-\sqrt{5+3\sqrt{2}}$, nincs megoldása, ha $m>\sqrt{5+3\sqrt{2}}$ vagy $m<-\sqrt{5+3\sqrt{2}}$.

b) Az $x^2=(5-3\sqrt{2})-m^2$ egyenletnek két különböző x_3 és x_4 megoldása van, ha $-\sqrt{5-3\sqrt{2}}<m<\sqrt{5-3\sqrt{2}}$, egy (két egyenlő) megoldása van, az $x_0=0$, ha $m=\sqrt{5-3\sqrt{2}}$ vagy $m=-\sqrt{5-3\sqrt{2}}$, nincs megoldása, ha $m>\sqrt{5-3\sqrt{2}}$ vagy $m<-\sqrt{5-3\sqrt{2}}$.

Összefoglalva:

Az egyenletnek négy különböző megoldása van, ha $-\sqrt{5-3\sqrt{2}}<m<\sqrt{5-3\sqrt{2}}$,
három különböző megoldása van, ha $m=-\sqrt{5-3\sqrt{2}}$ vagy $m=\sqrt{5-3\sqrt{2}}$,
két különböző megoldása van, ha $-\sqrt{5+3\sqrt{2}}<m<-\sqrt{5-3\sqrt{2}}$ vagy $\sqrt{5-3\sqrt{2}}<m<$ $<\sqrt{5+3\sqrt{2}}$,
egy (kettős) megoldása van, ha $m=-\sqrt{5+3\sqrt{2}}$ vagy $m=\sqrt{5+3\sqrt{2}}$,
az egyenletnek nincs megoldása, ha $m<-\sqrt{5+3\sqrt{2}}$ vagy $m>\sqrt{5+3\sqrt{2}}$.

Rábai Imre

C gyakorlatok megoldása

C. 473. *Előfordulhat-e egy naptári évben, hogy egyetlen vasárnap sem esik hetedikére?*

Megoldás. Legyen májusban a hét x-edik napja az a nap, amelyikre hetedike esik.

Ekkor júniusban az $(x+3)$-adik napra,
júliusban az $(x+5)$-ödik,
augusztusban az $(x+1)$-edik,
szeptemberben az $(x+4)$-edik,
októberben az $(x+6)$-odik,
novemberben az $(x+2)$-odik

napra esik hetedike. Mivel ezek mindegyike különböző érték, és összesen 7 értéket soroltunk fel, valamelyik közülük biztosan vasárnap.

Tóth László Tamás (Sátoraljaújhely, Kossuth L. Gimn. 12. évf.)

Megjegyzés. A hónapokat csak májustól novemberig vizsgáltuk meg, ezért az eredményen a szökőév nem változtat. Másféle megoldást csak akkor fogadtunk el teljesnek, ha a szökőév esetét is tárgyalta.

661 dolgozat érkezett. 6 pontos Antal István, Árvay Eszter, Babos Attila, Béky Bence, C. Szabó István, Farkas 496 Norbert, Hangya Miklós, Horváth Illés, Kungl István, Mizda Roland, Molnár 947 Zoltán, Németh 245 Ádám, Ozogány Katalin, Rudas Rozália, Sinkovicz Katalin, Spanczér Ilona, Szűcs 702 Zsófia, Tóth László Tamás megoldása. 5 pontos 472, 4 pontos 53, 3 pontos 49, 2 pontos 8, 1 pontos 2 dolgozat. Hibás 48, nem versenyszerű 11.

C. 474. *Egy gyalogos* 3,5 *órát gyalogolt. Bármely* 1 *órás időszak alatt* 5 *km utat tett meg. Lehet-e az átlagsebessége nagyobb, mint* 5 *km/óra?*

Megoldás. Osszuk fel a 3,5 órát félórás szakaszokra. Ha a gyalogos az első, harmadik, ötödik és hetedik félórában $(5+v)\ \dfrac{\text{km}}{\text{ó}}$ sebességgel $(v>0)$, a második, negyedik és hatodik félórában $(5-v)\ \dfrac{\text{km}}{\text{ó}}$ sebességgel halad, akkor igaz az, hogy bármely 1 órás időszak alatt 5 km utat tett meg.

Az átlagsebessége pedig:

$$\frac{4\cdot 0{,}5\cdot(5+v)+3\cdot 0{,}5\cdot(5-v)}{3{,}5}=\frac{17{,}5+0{,}5v}{3{,}5}=5+\frac{0{,}5v}{3{,}5}>5.$$

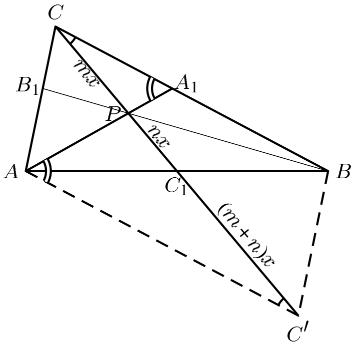
Vagyis az átlagsebesség lehet nagyobb, mint $5\ \dfrac{\text{km}}{\text{ó}}$.

Biczó Mihály (Paks, Vak Bottyán Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés: Sokan a megoldók közül állították, hogy ez „természetesen” nem lehetséges.

593 dolgozat érkezett. 5 pontos 170, 4 pontos 103, 3 pontos 41, 2 pontos 18, 1 pontos 11 dolgozat. Hibás 241. Nem versenyszerű 9.

C. 475. *Az ABC háromszög CC_1 súlyvonalán vegyük fel azt a P pontot, amelyre $\dfrac{CP}{PC_1}=\dfrac{m}{n}$ $(m, n\geqslant 1$ tetszőleges egész számok). Milyen arányban osztja P az AP, illetve a BP egyenesnek a háromszögbe eső szakaszát?*



Megoldás. Tükrözzük a háromszöget a C_1 pontra. A középpontos tükrözés tulajdonságaiból következik, hogy a keletkezett $ACBC'$ síkidom paralelogramma. Az a feltétel, hogy $\dfrac{CP}{PC_1}=\dfrac{m}{n}$, azt jelenti, hogy $CP=m\cdot x$, $PC_1=n\cdot x$ alakban írható $(x>0)$. Ekkor C_1C hossza $(m+n)\,x$ lesz. Az AP egyenes a CB oldalt A_1-ben, a BP egyenes az AC oldalt B_1-ben metszi. A CPA_1 és $C'PA$ háromszögek hasonlók (szögeik egyenlők). Ezért megfelelő oldalaik aránya megegyezik. Azaz

$$\frac{PA}{PA_1}=\frac{C'P}{PC}=\frac{nx+(n+m)\,x}{mx}=\frac{m+2n}{m},$$

ez a keresett arány.

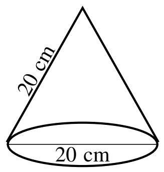
Hasonlóan leolvashatjuk a B_1PC és BPC' háromszögek hasonlóságából, hogy

$$\frac{PB}{PB_1}=\frac{m+2n}{m}.$$

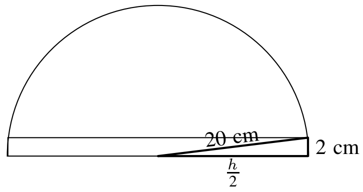
199 dolgozat érkezett. 6 pontos Bérces Márton, Csirmaz Attila, Csökmei Krisztina és Kormos Márton megoldása. 5 pontos 64, 4 pontos 38, 3 pontos 24, 2 pontos 10, 1 pontos 13 dolgozat. Hibás 39, másolt 6 dolgozat.

C. 476. *Egy egyenes kúp alapkörének átmérője és alkotója is* 20 cm*. Legfeljebb milyen hosszú öntapadó csík ragasztható a kúp palástjára gyűrődés, szakadás (vágás) és átfedés nélkül, ha a csík szélessége* 2 cm*?*

Megoldás. A kúp alapkörének átmérője 20 cm, kerülete 20π, ami éppen a fele egy 20 cm sugarú kör kerületének. Vagyis, a kúp palástja síkba kiterítve egy 20 cm sugarú félkör. Ebben a félkörben kell egy 2 cm széles csíkot elhelyezni. A csík hosszabbik



1. ábra



2. ábra

oldala a feltétel szerint a félkör egy húrja. Azt pedig tudjuk, hogy a körbe írt húrok közül a leghosszabb az átmérő. A csík oldala akkor lesz a leghosszabb, ha hosszabbik oldala, h átmegy a kör középpontján. Pitagorasz tételéből:

$$\frac{h}{2}=\sqrt{20^2-2^2}=\sqrt{396}\approx 19{,}89.$$

A csík hossza tehát legfeljebb 39,7 cm lehet.

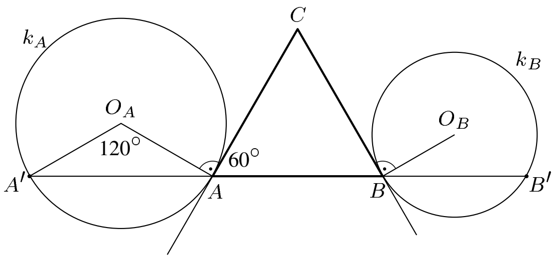
291 dolgozat érkezett. 5 pontos Bérces Márton, Boros M. Mátyás, Csirmaz Attila, Katona Gergely, Kormos Márton, Sarlós Ferenc, Siroki László megoldása. 4 pontos 6, 3 pontos 97, 2 pontos 76, 1 pontos 37 dolgozat. Hibás 68.

Matematika gyakorlatok megoldásai

Gy. 3139. *Adottak az egymáson kívül elhelyezkedő k_A és k_B körök. Szerkesszünk olyan ABC szabályos háromszöget, amelynek A csúcsa a k_A, B csúcsa a k_B körön van, továbbá az AC egyenes a k_A-nak, BC pedig a k_B-nek érintője.*

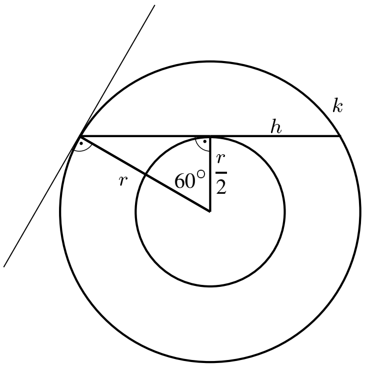
Megoldás. Tekintsük a feladatot megoldottnak. Jelöljük a k_A és k_B körök középpontjait O_A-val, illetve O_B-vel, sugaraikat pedig r_A-val, illetve r_B-vel. Legyen az AB

egyenesnek a k_A és k_B körökkel való A-tól és B-től különböző metszéspontja A', illetve B'.



1. ábra

Mivel az AC és a BC egyenesek érintik a megfelelő köröket és $CAB\sphericalangle = CBA\sphericalangle = 60°$, ezért az AA' és a BB' húrokhoz tartozó kisebbik érintőszárú kerületi szögek $60°$-osak, így ezek a húrok a megfelelő középpontból $2 \cdot 60° = 120°$-os szögben látszanak, azaz $AO_AA'\sphericalangle = BO_BB'\sphericalangle = 120°$. A *2. ábráról* leolvasható annak a bizonyítása, hogy az r sugarú k kör h húrja pontosan akkor látszik k középpontjából $120°$-os szögben, ha h érinti a k-val koncentrikus $\frac{r}{2}$ sugarú kört. Vagyis az AB egyenes érinti az O_A középpontú $\frac{r_A}{2}$ sugarú kört is (mert AA' az O_A-ból $120°$-os szögben látszik), és az O_B középpontú $\frac{r_B}{2}$ sugarú kört is (mert $BO_BB'\sphericalangle = 120°$). Tehát az AB egyenes e két kör (egyik) közös érintője.



2. ábra

Ezek alapján a szerkesztés menete: Megszerkesztjük a k_A-val, illetve k_B-vel koncentrikus, feleakkora sugarú köröket, majd a két kis kör egyik közös érintőjét. Ezután megrajzoljuk a k_A és k_B köröknek a közös érintővel való metszéspontjaikban vett érintőit. E négy érintő közül kettő-kettő párhuzamos lesz. A különböző körökhöz tartozó nem párhuzamos érintők metszéspontjai a szerkesztendő szabályos háromszögek C csúcsait adják, míg a k_A, illetve k_B körön lévő érintési pontok az A, illetve B csúcsokat.

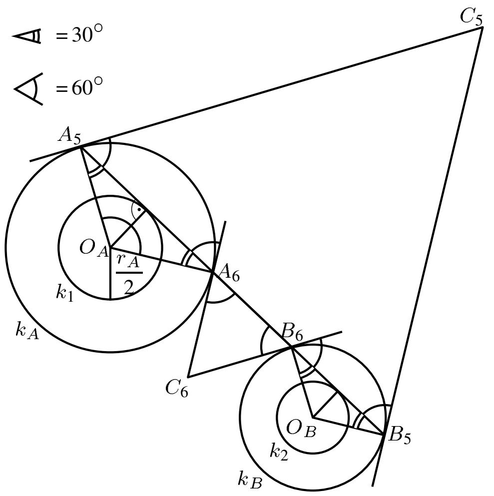
Az így szerkesztett ABC háromszögek eleget tesznek a feladat feltételeinek, mert $A \in k_A$ és $B \in k_B$; az A-ban k_A-hoz húzott érintő, illetve a B-ben k_B-hez húzott érintő az AB egyenessel $60°$-os szöget zár be, ezért az ABC háromszögben $BAC\sphericalangle = ABC\sphericalangle = 60°$, vagyis a háromszög szabályos.

Mivel a k_A és k_B körök egymáson kívül helyezkednek el, ezért a velük koncentrikus, felelakkora sugarú köröknek összesen négy közös érintőjük van. Minden egyes külső (*3. ábra*), illetve belső (*4. ábra*) közös érintőhöz két-két megoldás tartozik, ezért a feladatnak minden esetben nyolc megoldása van.

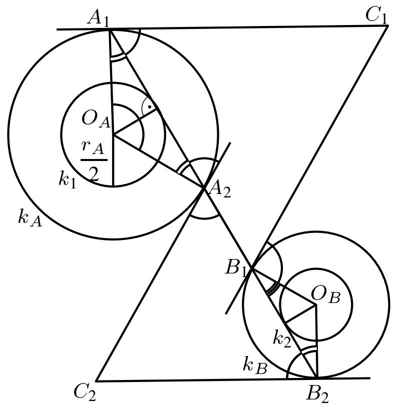
Megjegyzés. A nyolc darab háromszög C jelű csúcsainak mindegyikére igaz, hogy belőle a k_A és a k_B körhöz egyenlő hosszúságú érintők húzhatók. Ezért a nyolc pont mindegyike rajta van a k_A és k_B körök hatványvonalán, vagyis a nyolc pont egy egyenesen van.

Barát Anna (Szeged, Radnóti M. Kísérl. Gimn., II. o. t.)

70 dolgozat érkezett. 7 pontos Terpai Tamás, 5 pontos Andrássy Zoltán, Bacsárdi László, Baharev Ali, Barát Anna, Benedek Csaba, Bíró Zsuzsanna, Bosznay Tamás, Gelencsér Gábor, Gyenes



3. ábra



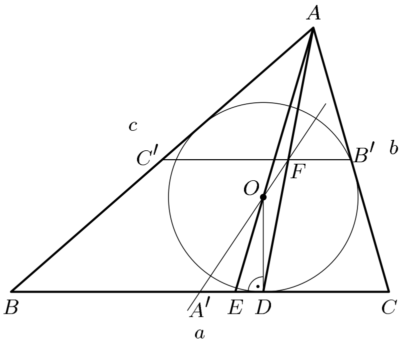
4. ábra

Zoltán, Győri Nikolett, Horváth 413 László, Klausz Ferenc, Kunszenti-Kovács Dávid, Mecz Balázs, Naszódi Gergely, Papp Dávid, Pozsonyi Gergő, Szekeres Nóra, Vaik István, Végh László megoldása. 4 pontot kapott 34, 3 pontot 10, 2 pontot 4, 1 pontot 1 beküldő.

Gy. 3140. *Az ABC háromszög oldalfelező pontjai a szokásos jelölésekkel A', B' és C'; a beírt körének a BC oldalon lévő érintési pontja D, középpontja pedig O. Mutassuk meg, hogy A', O és az AD és $B'C'$ szakaszok metszéspontja egy egyenesen van.* (**H**)

Megoldás. Jelöljük az AD és $B'C'$ szakaszok metszéspontját F-fel, a BAC szög felezőjének és a háromszög BC oldalának metszéspontját E-vel, a háromszög oldalainak hosszát pedig a szokásos módon a, b, c-vel.

Ha $b=c$, akkor az állítás nyilvánvaló. A továbbiakban feltesszük, hogy $b<c$; a $b>c$ esetben is ugyanúgy láthatnánk be az állítást. Menelaosz tételének megfordítását (lásd pl. *Horvay-Reiman: Geometriai feladatok gyűjteménye I.* kötet, 1261. feladat) fogjuk alkalmazni az AED háromszögre és az A', O, F pontokra.



A szögfelezőtétel szerint $\frac{BE}{EC}=\frac{c}{b}$, és mivel $BE+EC=a$, ezért $BE=\frac{ac}{b+c}$ és $EC=\frac{ab}{b+c}$. A háromszög csúcsaiból a beírt körhöz húzott érintőszakaszok BD, illetve CD, ezért $BD=\frac{a+c-b}{2}$ és $CD=\frac{a+b-c}{2}$. Ezekből az összefüggésekből valamint a $b<c$ feltételből következik, hogy a B, A', E, D, C pontok az ábrán látható sorrendben

helyezkednek el a BC egyenesen. Ezért

$$\frac{DA'}{A'E}=-\frac{BD-BA'}{BE-BA'}=-\frac{\frac{a+c-b}{2}-\frac{a}{2}}{\frac{ac}{b+c}-\frac{a}{2}}=-\frac{b+c}{a}.$$

Az F pont rajta van az ABC háromszög $B'C'$ középvonalán, ezért

$$\frac{AF}{FD}=1.$$

Végül az OD szakasz merőleges BC-re, tehát párhuzamos az ABC háromszög A-hoz tartozó magasságával. Így a párhuzamos szelők tétele szerint

$$\frac{EO}{OA}=\frac{OD}{m_a-OD}=\frac{r}{m_a-r}=\frac{\frac{2t}{a+b+c}}{\frac{2t}{a}-\frac{2t}{a+b+c}}=\frac{a}{b+c}$$

(r és t az ABC háromszögbe írható kör sugarát, illetve a háromszög területét jelöli). Ezekből az egyenlőségekből kapjuk, hogy

$$\frac{AF}{FD}\cdot\frac{DA'}{A'E}\cdot\frac{EO}{OA}=1\cdot\left(-\frac{b+c}{a}\right)\cdot\frac{a}{b+c}=-1,$$

vagyis az F, A' és O pontok egy egyenesen vannak, ami éppen a bizonyítandó állítás.

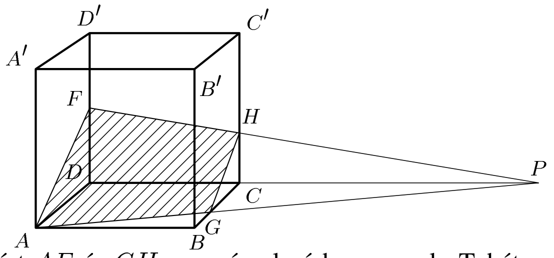
Dályay Virág (Szeged, Radnóti M., Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. A feladatra többféle megoldás is érkezett: vektorok, koordináta-geometria, affinitás, illetve különböző tételek felhasználásával.

40 dolgozat érkezett. 7 pontot kapott Bérczi Gergely, Lippner Gábor és Terék Zsolt, 6 pontot Terpai Tamás. 5 pontos Baharev Ali, Barát Anna, Bérces Márton, Csirmaz Előd, Dályay Virág, Gueth Krisztián, Gyenes Zoltán, Győri Nikolett, Hangya Balázs, Lengyel Tímea, Naszódi Gergely, Szabadka Zoltán, Szilágyi Judit, Taraza Busra és Vaik Zsuzsanna megoldása. 4 pontot kapott 8, 3 pontot 3, 0 pontot 10 versenyző.

Gy. 3141. *Az ábrán látható $ABCDA'B'C'D'$ kockát két részre vágjuk az A-n, a CC' él C-hez közelebbi H harmadolópontján, és a DD' él F felezőpontján átmenő síkkal. Határozzuk meg a két rész térfogatának arányát.*

Megoldás. Jelöljük a kockát kettévágó síkot S-sel, a BC egyenes és S döféspontját pedig G-vel. Válasszuk a kocka élhosszát 6 egységnek. Az AF és a GH egyenesek benne vannak az S síkban, de nem metszhetik egymást, mert az $ADD'A'$, illetve a $BCC'B'$ síkokban, azaz a kocka két párhuzamos lapsíkjában is benne vannak. Ezért AF és GH egymással párhuzamosak. Tehát az AFD és a GHC háromszögek hasonlóak, amiből kapjuk, hogy $\frac{GC}{CH}=\frac{AD}{DF}$, vagyis



$$GC=CH\cdot\frac{AD}{DF}=2\cdot\frac{6}{3}=4.$$

Jelöljük P-vel a DC félegyenes D-től 18 egységnyi távolságra lévő pontját. Ekkor

$$\frac{FD}{HC}=\frac{DP}{CP}=\frac{AD}{GC},$$

és mivel $FD \parallel HC$ valamint $AD \parallel GC$, ezért a párhuzamos szelők tételéből következik, hogy az FH és az AG egyenesek is átmennek P-n. Ez viszont azt jelenti, hogy az $AFDGHC$ test csonkagúla, amelynek alap-, illetve fedőlapja AFD és GHC, magassága pedig DC; ezért térfogata az ismert képlet alapján

$$V_1=\frac{DC}{3}\left(T_{AFD}+\sqrt{T_{AFD}\cdot T_{GHC}}+T_{GHC}\right)=2\cdot(9+6+4)=38.$$

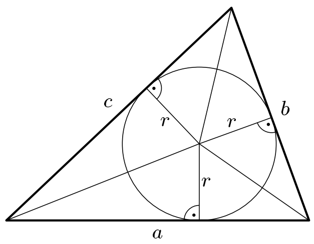
Mivel a kocka másik részének térfogata $V_2=6^3-V_1=178$, ezért az S sík által elválasztott két rész térfogatának aránya $38:178=19:89$.

113 dolgozat érkezett. 7 pontot kapott Máthé András. 5 pontos 36, 4 pontos 41, 3 pontos 7, 2 pontos 3, 1 pontos 7, 0 pontos 18 dolgozat.

Gy. 3146. *Egy derékszögű háromszög befogói a és b, beírható körének sugara pedig r. Mutassuk meg, hogy* $2+\sqrt{2}\leqslant\dfrac{2ab}{(a+b)r}<4$.

Javasolta: *Varga István,* Békéscsaba

Megoldás. Jelöljük a háromszög átfogóját c-vel, területét pedig t-vel. Ismert, hogy minden háromszögben igaz a $2t=r\cdot(a+b+c)$ összefüggés (a bizonyítás leolvasható az ábráról), ezért mivel a háromszögünk derékszögű



$$r=\frac{a\cdot b}{a+b+c},\qquad \text{azaz}\qquad \frac{2ab}{(a+b)\cdot r}=\frac{2\,(a+b+c)}{a+b}.$$

Így a bizonyítandó összefüggés a

$$2+\sqrt{2}\leqslant\frac{2\,(a+b+c)}{a+b}<4,$$

azaz a

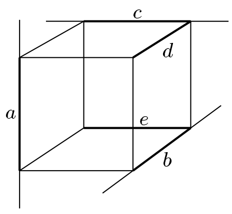
$$\sqrt{2}\leqslant\frac{2c}{a+b}<2$$

alakot ölti. A jobb oldali egyenlőtlenség nyilvánvalóan következik a $c<a+b$ háromszög-egyenlőtlenségből. A bal oldali egyenlőtlenség ekvivalens a $2\,(a+b)^2\leqslant 4c^2$ egyenlőtlenséggel, amit Pitagorasz tételét felhasználva $(a+b)^2\leqslant 2\left(a^2+b^2\right)$ alakban is írhatunk. Ezt rendezve a mindig teljesülő $0\leqslant(a-b)^2$ egyenlőtlenséget kapjuk.

Minden lépésben ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a feladatban szereplő mindkét egyenlőtlenséget igazoltuk.

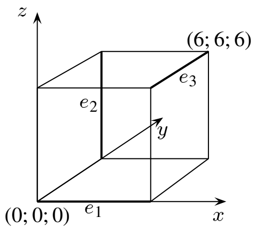
321 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Papp Dávid. 5 pontos 220, 4 pontos 21, 3 pontos 27, 2 pontos 34, 1 pontos 6, 0 pontos 4 dolgozat, nem versenyszerű 8.

Gy. 3148. *Legyen* e_1, e_2 *és* e_3 *egy kocka három kitérő éle. Határozzuk meg az* $E_1E_2E_3$ *háromszögek súlypontjainak halmazát, ha* E_i *az* e_i *él egy pontja* ($i=1, 2, 3$).



1. ábra

Megoldás. Először azt vizsgáljuk meg, hogyan helyezkednek el egymáshoz képest a kocka kitérő élhármasai. Mivel az élek szerepe szimmetrikus, ezért az első élt tetszés szerint választhatjuk. Jelöljük a kiválasztott élt a-val (*1. ábra*). A kocka maradék 11 éle közül 4 metszi a-t, 3 pedig párhuzamos vele. Ezért a második élt az ábrán b, c, d, e-vel jelölt élek közül kell választanunk. Ez a 4 él a-hoz képest ismét teljesen szimmetrikusan helyezkedik el, ezért feltehetjük, hogy a második kiválasztott él b. Ekkor viszont a harmadik él már csak c lehet. Ezzel beláttuk, hogy elegendő egyetlen élhármas esetén megkeresnünk a súlypontok halmazát, mert a három kitérő él egymáshoz képest mindig ugyanúgy helyezkedik el, a háromszögek súlypontjainak halmaza mindig egybevágó azzal a halmazzal, amit a 2. ábrán látható e_1, e_2 és e_3 éleken lévő $E_1E_2E_3$ háromszögek súlypontjai alkotnak.



2. ábra

Vegyünk fel egy térbeli derékszögű koordináta-rendszert úgy, hogy a tengelyek párhuzamosak legyenek a kocka éleivel, az egység minden tengelyen legyen a kocka élhosszának egyhatoda, a kocka középpontja pedig legyen a $(3,3,3)$ pont (*2. ábra*). Jelöljük az E_i pont koordinátáit $\left(e_i{}^x, e_i{}^y, e_i^z\right)$-vel ($i=1, 2, 3$). Ekkor a koordináta-rendszer felvételéből következik, hogy $e_1{}^y=e_1{}^z=0$; és $e_2{}^x=0$ és $e_2{}^y=6$; $e_3{}^x=e_3{}^z=6$; továbbá $e_1{}^x$, $e_2{}^z$ és $e_3{}^y$ a $[0;6]$ intervallumból kerül ki. Ha az $E_1E_2E_3$ háromszög súlypontjának koordinátáit s^x, s^y és s^z jelöli, akkor ismert, hogy

$$s^x=\frac{e_1{}^x+e_2{}^x+e_3{}^x}{3}, \qquad s^y=\frac{e_1{}^y+e_2{}^y+e_3{}^y}{3}, \qquad s^z=\frac{e_1{}^z+e_2{}^z+e_3{}^z}{3},$$

azaz

$$s^x=2+\frac{e_1{}^x}{3}, \qquad s^y=2+\frac{e_3{}^y}{3} \qquad \text{és} \qquad s^z=2+\frac{e_2{}^2}{3}.$$

Ezért $2\leqslant s^x$, s^y, $s^z\leqslant 4$, vagyis a súlypont mindig benne van abban a 2 egység élű K kockában, melynek középpontja egybeesik az eredeti kocka középpontjával, élei pedig párhuzamosak annak éleivel. Ha $P\left(p^x, p^y, p^z\right)$ a K belsejében vagy annak valamelyik lapján van, akkor $2\leqslant p^x$, p^y, $p^z\leqslant 4$, ezért az $E_1{}^p\left(3p^x-6;0;0\right)$, $E_2{}^p\left(0;6;3p^z-6\right)$ és $E_3{}^p\left(6;3p^y-6;6\right)$ pontok által meghatározott háromszög súlypontja éppen P, továbbá $E_i{}^P$ rajta van az eredeti kocka e_i élén.

Ezzel megmutattuk, hogy a keresett ponthalmaz egy kocka, melyet úgy kapunk, hogy az eredeti kockát a középpontjából egyharmadára kicsinyítjük.

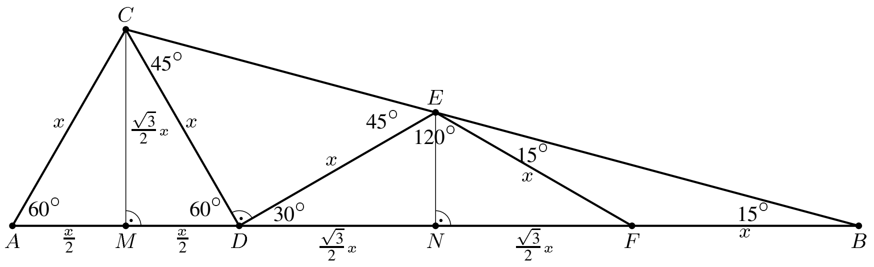
Papp Dávid (Budapest, Szt. István Gimn., 10. évf.)

118 dolgozat érkezett. 5 pontos Bajusz Csaba, Csikvári Péter, Csirmaz Előd, Gelencsér Gábor, Győri Nikolett, Horváth 713 György, Keszegh Balázs, Lovrics Anna, Papp Dávid, Péterffy Bálint, Szilágyi Tamás, Varjú Péter és Zábrádi Gergely megoldása. 5 pontos 13, 4 pontos 44, 3 pontos 22, 2 pontos 9, 1 pontos 8, 0 pontos 22 dolgozat.

Gy. 3149. *Az ABC háromszög AB oldala* 1 *egység, a rajta levő szögek pedig* 15° *és* 60°*. Határozzuk meg a háromszög másik két oldalának hosszát trigonometrikus függvények használata nélkül.*

Javasolta: *Gáspár Merse Előd,* Budapest

I. megoldás. Válasszuk a háromszög csúcsainak jelölését úgy, hogy az A-nál lévő szög legyen 60°-os, a B-nél lévő pedig 15°-os. Ekkor a C-nél lévő szög $180^\circ - \left(60^\circ+15^\circ\right)=105^\circ$. Vegyük fel az AB oldalon a D pontot úgy, hogy $ACD\sphericalangle=60^\circ$ legyen, majd a BC oldalon az E pontot úgy, hogy $CDE\sphericalangle=90^\circ$ legyen, végül az AB oldalon az F pontot úgy, hogy $DEF\sphericalangle=120^\circ$ legyen (*1. ábra*).



1. ábra

Ekkor egyszerű számolással meghatározhatjuk az ACD, CDE, DEF és EFB háromszögek szögeit:

$$\begin{aligned}
&ADC\sphericalangle=180^\circ-(DAC\sphericalangle+ACD\sphericalangle)=60^\circ;\\
&DCE\sphericalangle=ACB\sphericalangle-ACD\sphericalangle=45^\circ,\\
&DEC\sphericalangle=180^\circ-(CDE\sphericalangle+DCE\sphericalangle)=45^\circ;\\
&EDF\sphericalangle=180^\circ-ADE\sphericalangle=30^\circ,\\
&DFE\sphericalangle=180^\circ-(EDF\sphericalangle+DEF\sphericalangle)=30^\circ;\\
&EFB\sphericalangle=180^\circ-EFA\sphericalangle=150^\circ,\\
&FEB\sphericalangle=180^\circ-CEF\sphericalangle=15^\circ.
\end{aligned}$$

Tehát az ACD háromszög szabályos, a CDE, DEF és EFB háromszögek pedig egyenlő szárúak. Ha AC hosszát x-szel jelöljük, akkor $AC=AD=CD=DE=EF=FB=x$. Legyen AD felezőpontja M, DF felezőpontja pedig N. Mivel az ADC háromszög szabályos, ezért CM merőleges AD-re, $AM=MD=\dfrac{x}{2}$ és $CM=\dfrac{\sqrt3}{2}\cdot x$. Az EN szakasz is merőleges DF-re, ezért a CMD és a DNE háromszögek megfelelő szögei megegyeznek. Mivel $CD=DE$ is teljesül, ezért a két háromszög egybevágó, vagyis $DN=CM=\dfrac{\sqrt3}{2}\cdot x$, és mivel N a DF felezőpontja, ezért $FN=DN=\dfrac{\sqrt3}{2}\cdot x$. Ezeket felhasználva kapjuk, hogy

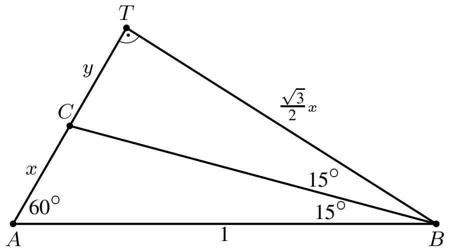
$$1=AB=AD+DN+NF+FB=x+\frac{\sqrt3}{2}\cdot x+\frac{\sqrt3}{2}\cdot x+x=\left(2+\sqrt3\right)x.$$

Vagyis $x = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$. A BC oldal hosszát a BCM derékszögű háromszögből határozhatjuk meg Pitagorasz tételét felhasználva:

$$BC^2 = CM^2 + MB^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x\right)^2 + \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 = x^2 - x + 1 = 6 - 3\sqrt{3}.$$

Tehát az ABC háromszög másik két oldalának hossza $2 - \sqrt{3}$ és $\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$.

Pótó Júlia (Budapest, Veres P. Gimn., 9. évf.)



2. ábra

II. Megoldás. Feltehetjük, hogy az ABC háromszögben az A-nál lévő szög 60°-os, a B-nél lévő pedig 15°-os. A háromszög C-nél lévő szöge tompaszög, ezért a B-ből induló magasság T talppontja az AC oldal C-n túli meghosszabbításán van (*2. ábra*). Legyen $AC = x$ és $CT = y$.

Mivel $BAT\sphericalangle = 60^\circ$ és $ATB\sphericalangle = 90^\circ$, ezért $ABT\sphericalangle = 30^\circ$, a BAT háromszöget a BT egyenesre tükrözve a tükörkép és az eredeti háromszög együtt egy szabályos háromszöget alkot, melynek oldalhossza $AB = 1$. Így $AT = \dfrac{1}{2}$ és $BT = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. A BC egyenes felezi az ABT szöget, mert $CBT\sphericalangle = ABT\sphericalangle - ABC\sphericalangle = 30^\circ - 15^\circ = 15^\circ = ABC\sphericalangle$. A szögfelezőtételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\text{(1)}\qquad \frac{TC}{CA} = \frac{BT}{BA}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tudjuk, hogy $AT = AC + CT = \dfrac{1}{2}$, vagyis

$$\text{(2)}\qquad x + y = \frac{1}{2}.$$

Az (1) és (2) egyenletekből álló egyenletrendszert megoldva

$$x = 2 - \sqrt{3} \qquad \text{és} \qquad y = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2}$$

adódik. A BC oldal hosszát ezután a BCT háromszögből, Pitagorasz tételét alkalmazva kapjuk:

$$BC^2 = CT^2 + TB^2 = \left(\frac{2\sqrt{3} - 3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 6 - 3\sqrt{3}.$$

Tehát az ABC háromszög másik két oldalának hossza $2 - \sqrt{3}$ és $\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$.

Szilasi Zoltán (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 9. évf.)

463 dolgozat érkezett. 7 pontos Deli Lajos és Szűcs 702 Zsófia, 6 pontos Tokodi Tünde megoldása. 5 pontot kapott 225, 4 pontot 64, 3 pontot 47, 2 pontot 28, 1 pontot 23, 0 pontot 71 beküldő, nem versenyszerű 2.

Matematika feladatok megoldásai

F. 3171*. *Egy 1×2 egységnyi oldalú téglalapban elhelyezünk három négyzetet, amelyeknek páronként nincs közös belső pontjuk. A négyzetek oldalhossza a, b és c. Igaz-e, hogy $a+b+c \leqslant 2$?*

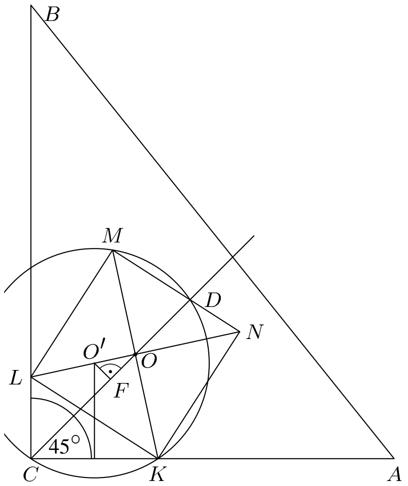
Pap László, Szeged

Megoldás. A feladat megoldásához néhány segédtételt bocsátunk előre.

I. *Egy téglalapban elhelyezett bármely négyzet oldala legfeljebb akkora, mint a téglalap rövidebbik oldala.*

Húzzunk párhuzamost a négyzet csúcsain keresztül a téglalap megfelelő oldalaival úgy, hogy azok ne messék a négyzet belsejét. A négy egyenes olyan négyzetet határoz meg, amely a kiindulási négyzetet tartalmazza, és oldalai párhuzamosak a téglalap oldalaival.

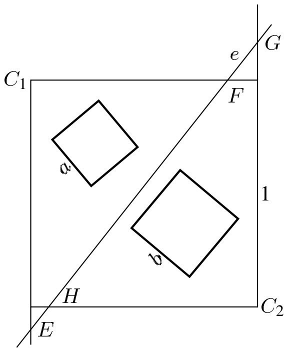
II. *Egy derékszögű háromszögbe írt négyzetek közül az a legnagyobb, amelyiknek két oldala a befogókra illeszkedik, egy csúcsa pedig az átfogón van.*



1. ábra

Legyen $KLMN$ egy, az ABC derékszögű háromszögben lévő négyzet. Mozgassuk el a négyzetet úgy, hogy pl. K az AC, L pedig a BC oldalon legyen, és az új négyzet is ABC-ben feküdjön (*1. ábra*). Mivel $CKOL$ húrnégyszög, $OCK\sphericalangle = OLK\sphericalangle = 45^\circ$, vagyis a négyzet O középpontja a derékszög felezőjére esik. Messe ez a szögfelező az MN oldalt D-ben. Elegendő megmutatni, hogy $\overline{CD} > \overline{KM}$. Látható, hogy C, K, D és M egy körön van, hiszen a KD szakasz C-ből is és M-ből is 45°-os szögben látszik. A C, K, D és M pontokon átmenő kör O' középpontja a CD és KM húrok felezőmerőlegesének metszéspontja, ezért $O'FO\sphericalangle = 90^\circ$, így $\overline{O'F} < \overline{O'O}$. A CD húr tehát közelebb van O'-höz, mint a KM, ezért valóban $\overline{CD} > \overline{KM}$.

* A feladat kitűzője a nemrég elhunyt Erdős Pál professzor emlékére ajánlotta ezt a példát. Az ő feladata volt a következő megoldatlan probléma: Egy egységnyi oldalú négyzetbe beírunk n^2+1 négyzetet, amelyeknek nincs közös belső pontja. A négyzetek oldalhossza a_i ($i = 1, 2, \ldots, n^2+1$.) Igaz-e, hogy $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n^2+1} \leqslant n$? ($n^2$ ilyen négyzetre ez triviális, de (n^2+2)-re már nem igaz!)



2. ábra

III. *Ha egy egységnyi oldalú négyzetben elhelyezkedik egy a és egy b oldalú, közös belső pont nélküli négyzet, akkor $a+b \leqslant 1$.*

Legyen e olyan egyenes, amelynek a két négyzet különböző félsíkjában van (*2. ábra*). Ha e az egységnégyzet valamelyik oldalával párhuzamos, akkor (**I**) szerint készen vagyunk. Egyébként e metszi az egységnégyzet valamennyi oldalegyenesét. Jelölje C_1 és C_2 az egységnégyzet két azon átellenes csúcsát, amelyek egyike az e-től legtávolabb lévő csúcs. (**II**) szerint a C_1EF, illetve a C_2GH derékszögű háromszögben elhelyezhető legnagyobb négyzet egyik átlója a C_1C_2 szakaszon van, így a két átlónak közös belső pontja nem lévén, hosszuk összege legfeljebb $\overline{C_1C_2}$, azaz $\sqrt{2}(a+b) \leqslant \sqrt{2}$.

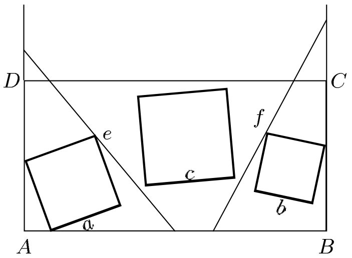
IV. *Egy téglalapban lévő, közös belső pont nélküli két négyzet oldalának összege legfeljebb akkora, mint a téglalap hosszabbik oldala.*

Az állítás közvetlenül adódik (**III**)-ból, ehhez a téglalapot olyan négyzetté egészítjük ki, amelynek oldala a téglalap hosszabbik oldalával egyenlő.

Nevezzük a továbbiakban az 1×2-es téglalap felezőjének azt az egyenest, amely őt 2 darab egységnégyzetre bontja; e két négyzetet hívjuk majd a téglalap felének.

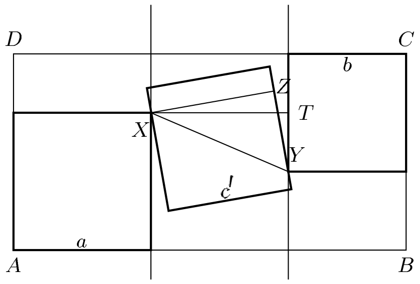
V. *Ha az 1×2-es téglalapban lévő valamely négyzetnek létezik közös (határ)pontja a téglalap egységnyi hosszúságú oldalával, akkor ez a négyzet a téglalapnak az egyik (a közös pontot tartalmazó) felében van.*

Az (**I**) bizonyításában látott módon a szóban forgó négyzet olyan, a téglalapban fekvő négyzetbe foglalható, amelynek oldalai párhuzamosak a téglalap oldalaival, és egyik oldalegyenese a téglalap egyik egységhosszúságú oldalával közös. Nyilván ez a befoglaló négyzet a téglalap felében található.

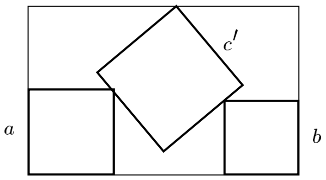


3. ábra

A feladat kérdésére térve megmutatjuk, hogy a válasz igenlő. Toljuk el a téglalapban lévő három négyzetből álló ponthalmazt a $\overrightarrow{BA}$ irányában úgy, hogy valamelyik négyzetnek legyen határpontja AD-n (*3. ábra*). Ha több ilyen négyzet is lenne, jelöljük ki az egyiket; nevezzük bal szélsőnek. A másik két négyzet közül válasszuk ki azt, amelyiket $\overrightarrow{AB}$ irányában eltolva nem metszi a másikat (ha mindkettő ilyen, tekintsük az egyiket); toljuk el ezt a négyzetet úgy, hogy egyik határpontja BC-re essék. Az így kapott négyzetet hívjuk jobb szélsőnek, az első eltolás során kapott harmadikat pedig középsőnek. A négyzetek származtatásából látható, hogy a bal szélsőnek és a középsőnek nincs közös belső pontja, akárcsak a jobb szélsőnek és a középsőnek. A két szélső pedig azért nem metszi egymást, mert (**V**) szerint a téglalap két különböző felében vannak. A továbbiakban elegendő csak a két szélső és a középső négyzettel foglalkozni az eredetiek helyett; mivel nem metszik egymást, a középső elválasztható a két szélsőtől az e és az f egyenesekkel. Mivel a két szélső négyzet a téglalap „bal", illetve „jobb' felében fekszik, elérhető, hogy e-nek legyen közös pontja a téglalap bal felét alkotó zárt négyzetlemezzel, hasonlóan f-nek a zárt jobb féllel.



4. ábra

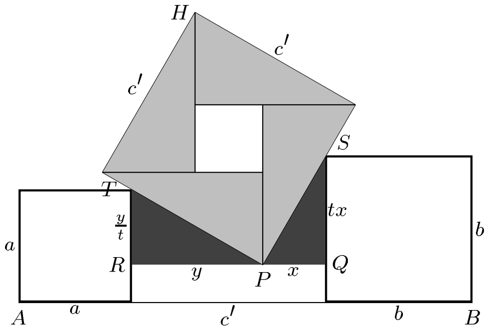


5. ábra

Ha e és f egyike párhuzamos AD-vel, akkor a bizonyítani kívánt egyenlőtlenség következik (**IV**)-ből; ha pedig az egyik egyenes AB-vel párhuzamos, akkor egy négyzet egy $n \times 2$-es, kettő pedig egy $(1-n) \times 2$-es téglalapba kerül, ezért (**I**) szerint a négyzetoldalak összege legfeljebb $n + 2(1-n) = 2 - n \leqslant 2$. Foglalkozzunk a továbbiakban azzal az esettel, amikor e és f a téglalap valamennyi oldalegyenesét metszve létrehoz két olyan derékszögű háromszöget, amelyekben egy-egy szélső négyzet helyezkedik el. Tekintsük például a 3. ábrán az A csúcsú, e által levágott derékszögű háromszöget. Mivel e-nek van közös pontja a téglalap bal felével, azért a DAB szög felezője a téglalapon metszi az e egyenest. Ez azt jelenti, hogy a derékszögű háromszögbe a (**II**) szerinti legnagyobb négyzetet beírva, az része marad a téglalapnak; helyettesítsük ővele a bal szélső négyzetet, és tegyünk ugyanígy a jobb szélső négyzettel is. Ezután két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy az újonnan kapott szélső négyzetek a téglalap különböző vagy azonos oldalaira támaszkodnak-e (*4.* és *5. ábra*). Az első esetben a középső négyzet c oldala legfeljebb akkora, mint az XZY derékszögű háromszög XZ befogója (*4. ábra*). Az XTY derékszögű háromszög XY átfogója az XZY háromszögével közös, így – mivel $ZXY\sphericalangle \geqslant TXY\sphericalangle$ – $\overline{ZY} \geqslant \overline{TY}$, ezért

$$c \leqslant c' = \overline{XZ} \leqslant \overline{XT} = 2 - (a+b).$$

Utolsóként az *5. ábrán* látható konfigurációval foglalkozunk. Megmutatjuk, hogy az a és b oldalú négyzetekhez nem tudunk $2-a-b$ vagy annál nagyobb oldalú négyzetet illeszteni úgy, hogy az ne nyúljon ki a téglalapból. A *6. ábra* jelöléseivel elég azt megmutatni, hogy már a $c' = 2 - -(a+b)$ oldalú négyzet is csak úgy helyezhető el ezen a módon, hogy H csúcsának AB-től való távolsága nagyobb, mint 1; feltehető, hogy a, $b < 1$.



6. ábra

Könnyen látható, hogy a c' oldalú négyzetbe berajzolt négy, egymással egybevágó derékszögű háromszög hasonló a PQS és a TRP derékszögű háromszögekhez; ezekben a két befogó arányát jelölje t, és használjuk az ábra többi jelölését is. A H pontnak az AB-től való távolsága:

$$\begin{aligned} d &= c' \cdot \frac{t+1}{\sqrt{1+t^2}} + \left(a - \frac{y}{t}\right) = \\ &= c' \frac{t+1}{\sqrt{1+t^2}} + (b - tx). \end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy $a - \dfrac{y}{t} = b - tx$ (a P pont távolsága AB-től) és

$$x + y = c' = 2 - (a+b),$$

kapjuk, hogy

$$x = \frac{t(b-a) + c'}{1+t^2},$$

ezért

$$\begin{aligned} d - 1 &= \left(\frac{t^2+t}{1+t^2} - \frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}\right) a + \left(\frac{1+t}{1+t^2} - \frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}\right) b + 2\left(\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{t}{1+t^2}\right) - 1 = \\ &= (t+1)\left[\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) a + \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) b + 2\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{1+t^2}\right) - \frac{t-1}{1+t^2}\right] = \\ &= (t+1)\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{1+t^2}\right)(2-a-b) - \frac{t-1}{1+t^2}(1-a)\right] = \\ &= \frac{t+1}{1+t^2}\left[\left(\sqrt{1+t^2} - 1\right)(2-a-b) - (t-1)(1-a)\right] > 0, \end{aligned}$$

hiszen $\sqrt{1+t^2} - 1 > 0$, $\sqrt{1+t^2} - 1 > t - 1$ és $2 - a - b > 1 - a$.

Gyenes Zoltán (Budapest, Apáczai Cs. J. Gyak. Gimn., III. o.t.) és *Juhász András* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o.t.) dolgozatainak felhasználásával

Megjegyzések. 1. A feladat rokonságot mutat az 1974. évi Kürschák József matematika verseny 2. feladatával, amely megtalálható Surányi János: *Matematikai versenytételek* III. rész c. művében.

2. Ha a téglalap $1 \times d$ méretű és $d < 2$, akkor $a + b + c \leqslant d$ nem igaz.

3. Megyeri Csaba (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., IV. o.t.) rámutat a feladat és Erdős Pál megoldatlan feladata közötti kapcsolatra: Ha a feladat állítása nem lenne igaz, akkor Erdős professzor úr megoldatlan problémája sem lenne igaz. Osszuk fel ugyanis az egységnégyzetet n^2 darab $\dfrac{1}{n}$ oldalú négyzetre. Két egymás mellettibe elhelyezzük azt a három négyzetet, amelyre $a + b + c > \dfrac{2}{n}$, a többi négyzetet meghagyjuk. Így összesen $n^2 + 1$ négyzetet helyeztünk el, az oldalhosszak összege:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n^2+1} = a + b + c + \left(n^2 - 2\right) \cdot \frac{1}{n} > \frac{2}{n} + \left(n^2 - 2\right) \cdot \frac{1}{n} = n.$$

32 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Gyenes Zoltán és Juhász András. 4 pontos 1, 1 pontos 23, 0 pontos 6 dolgozat.

F. 3174. *Határozzuk meg az* $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \ldots, \binom{n}{n-1}$ *számok legnagyobb közös osztóját.*

Megoldás. Legyen az n prímtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t}$. Tetszőleges $k \leqslant \alpha_j$ és $1 \leqslant j \leqslant t$-re

$$\binom{n}{p_j^k} = \frac{n}{p_j^k} \cdot \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-(p_j^k-1)}{p_j^k-1}.$$

Megmutatjuk, hogy $\binom{n}{p_j^k}$ nem osztható $p_j^{\alpha_j+1-k}$-nal. Tegyük fel, hogy az egyik $\frac{n-i}{i}$ tényező számlálója osztható p_j^v-vel. A v értéke nem lehet α_j vagy annál nagyobb, hiszen akkor $p_j^{\alpha_j}$ osztaná $(n-i)$-t és n-et, ezért i-t is, ami $1 \leqslant i \leqslant p_j^k - 1 \leqslant p_j^{\alpha_j} - 1$ miatt lehetetlen. Így p_j^v osztója n-nek is, emiatt pedig $i = n-(n-i)$-nek, a tört nevezőjének is. Ezért, ha az $\frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-(p_j^k-1)}{p_j^k-1}$ törtet egyszerűsítjük, a kapott tört számlálója nem lesz p_j-vel osztható. Mivel $\frac{n}{p_j^k}$ nem osztható $p_j^{\alpha_j+1-k}$-nal, állításunkat igazoltuk.

Speciálisan kapjuk, hogy $\binom{n}{p_j^{\alpha_j}}$ nem osztható p_j-vel.

Jelölje az $\binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n-1}$ számok legnagyobb közös osztóját m. A fentiekből látható, hogy ha n nem prímhatvány, akkor m a $p_1, p_2, \ldots, p_t$ prímek egyikével sem osztható. Így, mivel m osztója $\binom{n}{1} = n$-nek, m értéke 1.

Legyen ezután $n = p^\alpha$ prímhatvány; nyilván ekkor $m = p^\beta \leqslant p^\alpha$ lehet csak. Az előbbi észrevételt $k = \alpha - 1$-re alkalmazva kapjuk, hogy $\beta < \alpha + 1 - (\alpha - 1) = 2$, azaz $\beta \leqslant 1$. Másrészt tetszőleges $1 \leqslant l \leqslant p^\alpha - 1$ esetén $l = p^w \cdot l_1$, ahol l_1 nem osztható p-vel és $w \leqslant \alpha - 1$. Így

$$\binom{n}{l} = \binom{p^\alpha}{l} = p \cdot p^{\alpha-1-w} \cdot \frac{\binom{p^\alpha-1}{l-1}}{l_1}.$$

mivel l_1 a p-hez relatív prím, a $\frac{\binom{p^\alpha-1}{l-1}}{l_1}$ hányados egész, ezért $\binom{n}{l}$ osztható p-vel. Tehát: $m = 1$, ha n nem prímhatvány, és $m = p$, ha n a p prímnek hatványa.

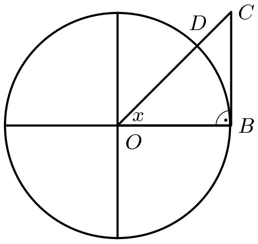
Megyeri Csaba (Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimn., IV. o.t.)

48 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Barát Anna, Bérczi Gergely, Gyenes Zoltán, Györkei Györgyi, Hangya Balázs, Jakabfy Tamás, Juhász András, Klausz Zoltán, Léka Zoltán, Lippner Gábor, Méder Áron, Megyeri Csaba, Pintér Dömötör, Prause István, Szalai-Dobos András, Székelyhidi Gábor, Szita István, Terék Zsolt, Terpai Tamás, Vaik Zsuzsanna, Várkonyi Péter és Zawadowski Ádám. 4 pontos 15, 3 pontos 3, 2 pontos 2, 1 pontos 1, 0 pontos 5 dolgozat.

F. 3184. *Bizonyítsuk be, hogy* $0<x<\frac{\pi}{2}$ *esetén*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\cos x}>\frac{2}{\sqrt{\sin x}}.$$

Megoldás. Először azt mutatjuk meg, hogy $0<x<\frac{\pi}{2}$ esetén $x<\operatorname{tg} x$.



Ábrázoljuk az x szöget az egységsugarú körben.

Jelöljük a kör középpontját O-val, sugarát OB-vel, ekkor $BOC\sphericalangle=x$ és $OBC\sphericalangle=\frac{\pi}{2}$. A BC szakasz hossza $\operatorname{tg} x$, így az OBC háromszög területe $\frac{\operatorname{tg} x}{2}$. Az OC félegyenes a kört D-ben metszi. A BOD köcikk területe $\frac{x}{2}$. Mivel az OBC háromszög tartalmazza a BOD körcikket, $\frac{x}{2}<\frac{\operatorname{tg} x}{2}$, azaz $x<\operatorname{tg} x$. Így

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}&>x,\\ \frac{1}{\cos x}&>\frac{x}{\sin x},\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{\cos x}&>\frac{1}{x}+\frac{x}{\sin x}.\end{aligned}$$

Itt $\frac{1}{x}$ és $\frac{x}{\sin x}$ pozitív számok, így alkalmazhatjuk rájuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget:

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{x}{\sin x}}{2}\geqslant\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}}=\frac{1}{\sqrt{\sin x}}.$$

Ebből $\frac{1}{x}+\frac{1}{\cos x}>\frac{1}{x}+\frac{x}{\sin x}\geqslant\frac{2}{\sqrt{\sin x}}$.

Benedek Csaba (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Ha a BD ív hosszát hasonlítjuk össze a D-ből OB-re bocsátott merőleges szakasz hosszával, akkor a $\sin x<x$ egyenlőtlenséget kapjuk.

182 dolgozat érkezett. 5 pontos 133, 4 pontos 14, 3 pontos 31, 2 pontos 1, 1 pontos 1, 0 pontos 2 dolgozat.

F. 3185. *Bizonyítsuk be, hogy az* 1*-nél nem kisebb számokra értelmezett*

$$x\circ y=xy+\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}$$

művelet asszociatív.

Javasolta: *Pataki János,* Duino, Olaszország

I. megoldás. Ha x, $y \geqslant 1$, akkor $x \circ y \geqslant 1$; tehát $x \circ y$ valóban művelet az 1-nél nem kisebb számokon. Ez a művelet kommutatív, így $x \circ (y \circ z) = (y \circ z) \circ x = (z \circ y) \circ x$.

Belátjuk, hogy az $(x \circ y) \circ z$ kifejezés x-re, y-ra, z-re nézve szimmetrikus.

$$(x \circ y) \circ z =$$
$$= \left(xy + \sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}\right) z + \sqrt{\left(\left(xy + \sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}\right)^2 - 1\right)(z^2-1)} =$$
$$= xyz + z\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1} +$$
$$+ \sqrt{\left(x^2y^2 + x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2xy\sqrt{(x^2-1)}\sqrt{y^2-1}\right)(z^2-1)} =$$
$$= xyz + z\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1} +$$
$$+ \sqrt{\left(x^2\left(y^2-1\right) + y^2\left(x^2-1\right) + 2xy\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}\right)\left(z^2-1\right)} =$$
$$= xyz + z\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1} + \sqrt{\left(x\sqrt{y^2-1} + y\sqrt{x^2-1}\right)^2 (z^2-1)} =$$
$$= xyz + z\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1} + \left| x\sqrt{y^2-1}\sqrt{z^2-1} + y\sqrt{x^2-1}\sqrt{z^2-1} \right|$$

$x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$ miatt az abszolútértékjelek között szereplő összeg nem negatív.

Innen:

$$(x \circ y) \circ z = xyz + z\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1} + y\sqrt{x^2-1}\sqrt{z^2-1} + x\sqrt{y^2-1} \cdot \sqrt{z^2-1},$$

és ez valóban szimmetrikus x-re, y-ra, z-re nézve. Ebből adódik, hogy $(x \circ y) \circ z = (z \circ y) \circ x$. Mivel $x \circ (y \circ z) = (z \circ y) \circ x$, azért $(x \circ y) \circ z) = x \circ (y \circ z)$. Tehát a művelet asszociatív.

Less Áron (Miskolc, Földes F. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

II. megoldás. A $\circ$ művelet pontosan akkor asszociatív, ha bármilyen x, y, z 1-nél nem kisebb számokra $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

A feladatot hiperbolikus függvények segítségével fogjuk megoldani.
$\left(\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2},\ \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$

Ismert azonosságok: $x \geqslant 0$ esetén

$$\operatorname{sh} x = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}, \qquad \operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

Így

$$\operatorname{ch} u \circ \operatorname{ch} v = \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v + \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 1}\sqrt{\operatorname{ch}^2 v - 1} = \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v + \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v = \operatorname{ch}(u+v),$$

ha $u \geqslant 0$ és $v \geqslant 0$.

A $\operatorname{ch} x$ függvény értékkészlete a nemnegatív valós számokon az $[1, \infty)$ intervallum.

Így $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$, $z \geqslant 1$ esetén léteznek olyan $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ valós számok, hogy $x = \operatorname{ch} a$, $y = \operatorname{ch} b$, $z = \operatorname{ch} c$. Ekkor

$$(x \circ y) \circ z = (\operatorname{ch} a \circ \operatorname{ch} b) \circ \operatorname{ch} c = \operatorname{ch}(a+b) \circ \operatorname{ch} c = \operatorname{ch}(a+b+c),$$
$$x \circ (y \circ z) = \operatorname{ch} a \circ (\operatorname{ch} b \circ \operatorname{ch} c) = \operatorname{ch} a \circ \operatorname{ch}(b+c) = \operatorname{ch}(a+b+c).$$

Tehát $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

Terpai Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

59 dolgozat érkezett. 6 pontos kapott Hermann György és Végh A. László, 5 pontos Bárány Kristóf, Boja Bence, Dályay Virág, Förhécz András, Gáli Gergely, Horváth János, Juhász András, Kőhalmi Dóra, Léka Zoltán, Less Áron, Lippner Gábor, Lukács László, Méder Áron, Páles Csaba, Pap Júlia, Papp Eszter, Pataki Péter, Pogány Ádám, Sipos András, Szabó 997 Péter, Szalontay Mihály, Terék Zsolt, Terpai Tamás, Vaik Zsuzsanna és Zábrádi Gergely megoldása. 4 pontos 13, 3 pontos 3, 2 pontos 8, 1 pontos 3, 0 pontos 5 dolgozat.

F. 3186. *Tegyük fel, hogy a nemnegatív $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ számokra $\alpha_i + \alpha_j \leqslant \pi$ teljesül, ha $i \neq j$. Bizonyítsuk be, hogy*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \cos \alpha_i \leqslant \cos \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right).$$

Javasolták: *Páles Csaba*, Debrecen, *Pap Gyula*, Debrecen és *Vörös Zoltán*, Budapest

Megoldás. $n = 1$-re az állítás triviálisan teljesül.

A továbbiakban feltesszük, hogy $n \geqslant 2$ és $\pi \geqslant \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n \geqslant 0$; (nem megy az általánosság rovására). Először lássuk be a következőt (ami éppen a feladat állítása $n = 2$ esetén):

$$\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 \leqslant 2 \cdot \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}. \tag{1}$$

Alkalmazva az ismert azonosságot:

$$2 \cdot \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \leqslant 2 \cdot \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$$

Ez viszont nyilván teljesül, hiszen

$$\cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \geqslant 0, \quad \text{mert} \quad 0 \leqslant \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \leqslant 1.$$

Ezzel (1)-et bebizonyítottuk.

Legyen $\alpha_1' = \alpha_2' = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ és $\alpha_i' = \alpha_i$ $(i > 2)$. Ekkor $\dfrac{\pi}{2} \geqslant \alpha_1' \geqslant \alpha_2' \geqslant \alpha_3' \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n' \geqslant 0$. Ezek után (1)-et alkalmazva:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \cos \alpha_i = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=3}^{n} \cos \alpha_i + \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 \right) \leqslant \frac{1}{n} \left(\sum_{i=3}^{n} \cos \alpha_i + 2 \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) =$$
$$= \frac{1}{n} \left(\sum \cos \alpha_i' \right) \leqslant \cos \left(\frac{1}{n} \sum \alpha_i' \right).$$

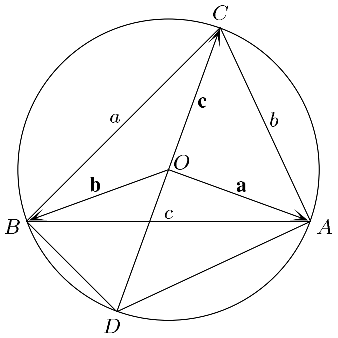
Az utolsó egyenlőtlenség azért teljesül, mert a koszinusz-függvény $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$-ben konkáv és $\alpha_i' \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

76 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Balogh Ferenc, Benke András, Biener Péter, Gueth Krisztián, Győri Nikolett, Hajdufi Péter, Hartmann Miklós, Hegedűs 396 Péter, Horváth 472 András, Juhász András, Kiss András Péter, Kunszenti-Kovács Dávid, Lázár Zsófia, Lippner Gábor, Lukács László, Németh 214 András, Pál András, Páles Csaba, Pap Júlia, Pataki Péter, Pogány Ádám, Szakács László, Székelyhidi Gábor, Szilágyi Judit, Terpai Tamás, Végh A. László, Zábrádi Gergely és Zawadowski Ádám. 4 pontos 12, 3 pontos 1, 2 pontos 7, 1 pontos 10, 0 pontos 18 dolgozat.

F. 3187. *Melyek azok a háromszögek, amelyekre $a^2+b^2+c^2=8R^2$, ahol a, b, c a háromszög oldalainak, R a körülírt kör sugarának hosszát jelöli?*

Javasolta: *Schmidt Edit,* Budapest

I. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy a feladat feltétele pontosan a derékszögű háromszögekre igaz. Legyen először az ABC háromszög hegyesszögű. Az *ábrán* O a körülírt kör középpontja, D pedig a kör C-vel átellenes pontja. Ekkor $8R^2=2(2R)^2=a^2+BD^2+b^2+AD^2<a^2+b^2+c^2$, hiszen most a $BDA\sphericalangle$ tompaszög, és így $AD^2+BD^2<c^2$.



Ha a háromszög tompaszögű, akkor $2R>c$ miatt $4R^2>c^2$ és $8R^2>2c^2>a^2+b^2+c^2$, ahol c a legnagyobb oldalt jelöli.

Derékszögű háromszög esetén $2R=c$, ezért $8R^2=2c^2=a^2+b^2+c^2$, ahol c az átfogó. Tehát $a^2+b^2+c^2=8R^2$ pontosan akkor teljesül, ha a háromszög derékszögű.

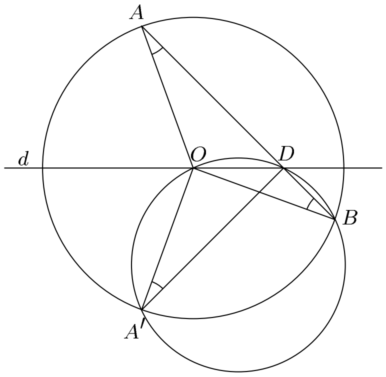
Kunszenti-Kovács Dávid (Oslo, Lycée Français René Cassin, 7. o.t.)

II. megoldás. Legyen O a vonatkoztatási pont, és $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$. Ekkor $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=|\mathbf{c}|=R$, és pl. $|\mathbf{b}-\mathbf{c}|=a$ alapján: $a^2=(\mathbf{b}-\mathbf{c})^2=2R^2-2\mathbf{bc}$, amiből $2\mathbf{bc}=2R^2-a^2$. Hasonlóan kapjuk, hogy $2\mathbf{ab}=2R^2-c^2$, $2\mathbf{ca}=2R^2-b^2$. Legyen $\mathbf{m}$ a magasságpont helyvektora. Ismeretes, hogy $\mathbf{m}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, ezért $\mathbf{m}^2=(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2=3R^2+6R^2-(a^2+b^2+c^2)$, amiből $a^2+b^2+c^2=9R^2-\mathbf{m}$. A feladat feltételének azok és csak azok a háromszögek felelnek meg, amelyekre $9R^2-\mathbf{m}^2=8R^2$, azaz $R^2=\mathbf{m}^2$, tehát $|R|=|\mathbf{m}|$. Ez pontosan a derékszögű háromszögekre teljesül.

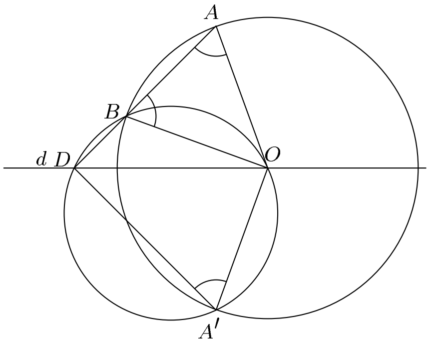
228 dolgozat érkezett. 7 pontot kapott Less Áron, 6 pontot Bíró Zsuzsanna, Gyenes Zoltán, Györkei Györgyi, Hegedűs 396 Péter, Lengyel Tímea, Lovas Róbert, Stoll Péter és Végh A. László. 5 pontos 124, 4 pontos 18, 3 pontos 20, 2 pontos 2, 1 pontos 29, 0 pontos 21 dolgozat, nem versenyszerű 5.

F. 3188. *Adott az O középpontú kör egy A pontja és egy O-n átmenő d egyenes. Egy A-ból induló szelő a kört B-ben, a d-t D-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy ha a szelő A körül forog, bármely helyzete esetén az O, B, D pontokon átmenő kör O-n kívül átmegy még egy fix ponton.*

Megoldás. Legyen az A pont tükörképe a d egyenesre A'. Használjuk az *ábrák* jelöléseit. Azt fogjuk megmutatni, hogy az O, B, D pontokon átmenő kör átmegy az A' ponton. A tükrözés folytán $OAD\sphericalangle = OA'D\sphericalangle$, az AOB egyenlő szárú háromszögből pedig $OAB\sphericalangle = OBA\sphericalangle$ (*1. ábra*). Ezért az $OA'BD$ négyszög húrnégyszög.



1. ábra



2. ábra

Ha a D pont a körön kívül van (*2. ábra*), akkor az $OA'DB$ négyszög B-nél lévő külső szöge egyenlő az A'-nél lévő belső szöggel, ezért ez a négyszög húrnégyszög. Az A' pont tehát most is pontja az O, B, D pontokon átmenő körnek.

Ha a D pont O-ba vagy a d-re illeszkedő átmérő valamelyik végpontjába esik, akkor az O, B, D pontokon átmenő kör határozatlan, ezért ezeket az eseteket kizárjuk. Nem engedjük meg azt sem, hogy A illeszkedjék d-re, hiszen a feladat szövege szerint az A-ból húzott szelő metszi d-t. Nem lehet továbbá olyan szelő sem, amelyik d-vel párhuzamos, mert akkor D nem létezik.

Több dolgozat alapján

113 dolgozat érkezett. 5 pontos Gerbicz Róbert, Hermann György, Izsák Rudolf, Lippner Gábor, Lukács László, Pap Júlia, Pogány Ádám, Rácz Balázs, Sarlós Ferenc, Sipos András és Tisch Dávid megoldása. 4 pontos 52, 3 pontos 37, 2 pontos 4, 0 pontos 9 dolgozat.

F. 3189. *Egy háromszög szögei α, β, γ. Bizonyítsuk be, hogy*

$$\left|\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}+\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}-\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}+\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}+\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right)\right|<1.$$

Javasolta: *Mihalovics Sándor,* Esztergom

Megoldás. A szinusztételt alkalmazva a bizonyítandó állítás:

$$\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}-\frac{a}{c}\right|<1,$$

azaz

(1) $$-1<\frac{c-b}{a}+\frac{a-c}{b}+\frac{b-a}{c}<1.$$

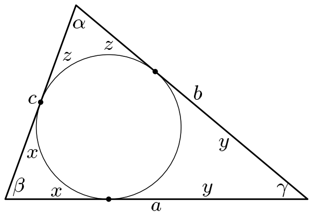
Adjunk mindkét oldalhoz 3-at mindegyik egyenlőtlenségben:

$$2 < \frac{a+c-b}{a} + \frac{a+b-c}{b} + \frac{b+c-a}{c} < 4.$$

Vezessük be az $a+b+c=2s$ jelölést. 2-vel osztva:

$$1 < \frac{s-b}{a} + \frac{s-c}{b} + \frac{s-a}{c} < 2.$$

Jelöljük a háromszög beírt köréhez húzható érintő szakaszokat az *ábra* szerint. Ekkor $x+y+z=s$, $a=x+y$, $b=y+z$ és $c=z+x$. A bizonyítandó egyenlőtlenség így alakul:



(2) $$1 < \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} < 2.$$

A törtek eltávolítása és némi számolás után (2) mindkét egyenlőtlensége nyilvánvalóan teljesül. Mivel átalakításaink megfordíthatók, a feladat állítását igazoltuk.

Mizda Roland (Szombathely, Kanizsai Dorottya Gimn. 12. o. t.)

Megjegyzés. Már az (1) egyenlőtlenségek helyessége is közvetlenül megmutatható. Tegyük fel, hogy

(3) $$a \leqslant b \leqslant c.$$

A háromszög-egyenlőtlenség szerint $|c-b| < a$, $|a-c| < b$ és $|b-a| < c$, tehát az (1)-ben szereplő törtek 1-nél kisebb abszolútértékűek. (3) miatt $\frac{a-c}{b}$ negatív, de legalább akkora abszolútértékű, mint a pozitív $\frac{b-a}{c}$, ezért összegüknek $\frac{c-b}{a}$-val vett összege teljesíti (1)-et.

A teljesség érdekében végig kell vizsgálni az a, b, c nagyság szerinti felírásának (3)-hoz hasonló minden változatát.

141 dolgozat érkezett. 5 pontos 82, 4 pontos 40, 3 pontos 12, 2 pontos 1, 1 pontos 3, 0 pontos 3.

Nehezebb matematika feladatok megoldása

N. 149. *Definiáljuk az (a_n) sorozatot a következőképpen:*

$$a_0 = a_1 = 1, \quad (n+1)a_{n+1} = (2n+1)a_n + 3na_{n-1}.$$

Mutassuk meg, hogy a sorozat egész számokból áll.

Megoldás. Megmutatjuk, hogy a_n nem más, mint az $(1+x+x^2)^n$ polinomban x^n együtthatója. Jelöljük egyelőre c_n-nel az x^n együtthatóját az $(1+x+x^2)^n$ polinomban.

Azt könnyű ellenőrizni, hogy $c_0 = a_0 = 1$ és $c_1 = a_1 = 1$. Mivel

$$(1+x+x^2)^n = x^n \left(1+x+\frac{1}{x}\right)^n = x^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x+\frac{1}{x}\right)^k,$$

ebből az alakból kiolvasható, hogy

$$c_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n}{2}} \binom{n}{2k}\binom{2k}{k} = \sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n}{2}} \frac{n!}{k!^2(n-2k)!}. \tag{1}$$

Az (1) azonosság egyszerű átrendezéseiből kapjuk, hogy

$$c_{n+1} = \sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n+1}{2}} \frac{(n-1)!}{k!^2(n-2k+1)!}\cdot n(n+1),$$

$$c_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n+1}{2}} \frac{(n-1)!}{k!^2(n-2k+1)!}\cdot n(n-2k+1),$$

$$c_{n-1} = \sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n-1}{2}} \frac{(n-1)!}{k!^2(n-2k-1)!} = \sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n+1}{2}} \frac{(n-1)!}{k!^2(n-2k+1)!}\cdot (n-2k)(n-2k+1),$$

$$c_{n-1} = \sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n+1}{2}} \frac{(n-1)!}{(k-1)!^2(n-2k+1)!} = \sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n+1}{2}} \frac{(n-1)!}{k!^2(n-2k+1)!}\cdot k^2.$$

Ezek alapján

$$(2n+1)c_n + 3nc_{n-1} = (2n+1)c_n + 4nc_{n-1} - nc_{n-1} =$$

$$= \sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n+1}{2}} \frac{(n-1)!}{k!^2(n-2k+1)!}\cdot \Big((2n+1)n(n-2k+1) + 4nk^2 - n(n-2k)(n-2k+1)\Big) =$$

$$= \sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n+1}{2}} \frac{(n-1)!}{k!^2(n-2k+1)!}\cdot n(n+1)^2 = (n+1)c_{n+1},$$

vagyis az (a_n) és (c_n) sorozatokra ugyanaz a rekurzió teljesül.

Megjegyzések. 1. Egy polinom együtthatóit komplex függvénytani eszközökkel is lehet kezelni. Például az $(x^2+x+1)^n$ polinomban x^n együtthatóját felírhatjuk a következő alakban:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{2it}+e^{it}+1\right)^n e^{-int}\mathrm{d}t.$$

Ebből a rekurzió parciális integrálással nyerhető. (A feladat innen származik.)

2. Lippner Gábor és Lukács László az $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ generátorfüggvény vizsgálatával egy érdekes azonosságot fedezett fel:

$$a_0a_n + a_1a_{n-1} + \ldots + a_{n-1}a_1 + a_na_0 = \frac{3^{n+1}+(-1)^n}{4}. \tag{2}$$

Nem nehéz végiggondolni, hogy F definíciója $|x| < \frac{1}{3}$ esetén értelmes, és ebben az intervallumban teljesül rá a

$$(3x^2 + 2x - 1)F'(x) + (3x + 1)F(x) = 0; \quad F(0) = 1$$

homogén lineáris differenciálegyenlet. Ezt megoldva $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-3x)(1+x)}}$,

$$F^2(x) = \frac{\frac{3}{4}}{1-3x} + \frac{\frac{1}{4}}{1+x} = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1} + (-1)^n}{4}x^n.$$

Másfelől

$$F^2(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(a_0 a_n + \ldots + a_n a_0)x^n,$$

és a függvény az együtthatókat egyértelműen meghatározza, ebből (2) következik.

Természetesen (2) bizonyításához nincs szükség analitikus eszközökre, teljes indukcióval is igazolható.

A (2) azonosságból a feladat állítása viszonylag egyszerűen következik.

4 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Bérczi Gergely, Lippner Gábor és Lukács László. 4 pontot kapott Juhász András.

N. 151. *Az $a_2, a_3, \ldots$ pozitív valós számokból álló sorozat, és $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ konvergens. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $\sum_{n=2}^{\infty} a_n^{1-\frac{1}{\ln n}}$ sor is konvergens.*

Megoldás. Mivel pozitív tagú sorokról van szó, a konvergencia helyett elég a vele ekvivalens korlátosságot vizsgálni.

Felhasználjuk, hogy tetszőleges x pozitív valós számra és $n \geqslant 3$ egészre

$$x^{1-\frac{1}{\ln n}} < \frac{e^2}{n^2} + e^2 x. \tag{1}$$

Ha ugyanis $0 < x < \frac{1}{n^2}$, akkor $1 - \frac{1}{\ln n} > 0$ és $x^{1-\frac{1}{\ln n}} < \left(\frac{1}{n^2}\right)^{1-\frac{1}{\ln n}} = \frac{e^2}{n^2}$, ha pedig $x \geqslant \frac{1}{n^2}$, akkor $x^{1-\frac{1}{\ln n}} \leqslant x\left(\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{\ln n}} = e^2 x$.

Legyen $A = \sum_{n=2}^{\infty} a_n$, ekkor (1) alapján, felhasználva, hogy $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4} < 1$,

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n^{1-\frac{1}{\ln n}} < a_2^{1-\frac{1}{\ln 2}} + e^2\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2} + e^2\sum_{n=3}^{\infty} a_n < a_2^{1-\frac{1}{\ln 2}} + e^2(A+1) < \infty.$$

12 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Bérczi Gergely, Juhász András, Lippner Gábor, Kun Gábor, Lukács László, Terpai Tamás és Végh A. László. 0 pontos 5 dolgozat.

A pontversenyben kitűzött C gyakorlatok (497–500.)

C. 497. Van-e olyan n pozitív egész szám, amelyre $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, azaz $n!$ pontosan 100 nullára végződik?

C. 498. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:

$$x^3 + 1 > x^2 + x. \tag{1}$$

C. 499. Egy egységnyi sugarú kör körül úgy helyezkedik el n darab egyenlő sugarú kör a síkon, hogy mindegyikük kívülről érinti az egységkört és a „koszorúban” lévő két szomszédját. Határozzuk meg a körök sugarát n függvényében. A sugarakat számítsuk is ki négy tizedesjegy pontossággal az n első négy lehetséges értékére.

C. 500. Be lehet-e csúsztatni egy 28 cm széles reklámtasakba két 22 cm széles művészeti albumot és egy 25 cm széles szakácskönyvet, ha mindhárom könyv külön-külön 1,5 cm vastag?

❄

Beküldési határidő: 1998. április 15.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest, Pf. 47. 1255

❄

A pontversenyben kitűzött gyakorlatok (3190–3197.) és feladatok (3220–3225.)

Gy. 3190. A 49 szám két jegye közé beírjuk a 48 számot. Ezután a 4-es és a 8-as közé újra beírjuk a 48-at, majd ezt néhányszor megismételjük ($44\ldots48\ldots89$). Igaz-e, hogy így mindig négyzetszámot kapunk?

Gy. 3191. Igaz-e, hogy minden egész számnak legalább annyi pozitív $4k+1$ alakú osztója van, mint $4k-1$ alakú?

Általános iskolások részére javasolt példák: **C. 497.**, **C. 500.**, **Gy. 3190.**, **3191.**, **Gy. 3192.**

Gy. 3192. Keressük meg azokat a pozitív egész A, B számokat, amelyek tízes számrendszerbeli alakját egymás után írva négyzetszámot kapunk, és ez egyenlő az A és B szorzatának kétszeresével.

Gy. 3193. Egy kosár mogyorót n kupacba osztottunk szét. Összekevertük, és utána $n+k$ kupacot készítettünk belőlük ($k>0$). Bizonyítsuk be, hogy legalább $k+1$ szem mogyoró kisebb kupacba került, mint amekkorában előzőleg volt. (**H**)

Gy. 3194. Egy háromszög két magasságának hossza legalább akkora, mint a hozzájuk tartozó oldal. Mekkorák a háromszög szögei?

Gy. 3195. Egy derékszögű háromszögbe írt kör középpontján át mindegyik oldallal párhuzamost húzunk. A három egyenes a háromszög mindegyik oldalát három szakaszra osztja. Bizonyítsuk be, hogy az átfogón kapott középső szakasz hossza egyenlő a befogókon keletkezett középső szakaszok hosszának összegével.

Gy. 3196. A sík A pontjából kiinduló e_0, e_1, $\ldots$, e_6 félegyenesei közül e_1 az e_0-lal és minden következő az előzővel 30°-os szöget zár be. Vetítsük merőlegesen az e_0 A-tól egységnyi távolságra lévő B_0 pontját az e_1-re, a vetület legyen B_1. Vetítsük hasonlóan B_1-et az e_2-re, a vetület legyen B_2 és így tovább. Számítsuk ki a $B_0B_1\ldots B_6$ töröttvonal hosszát, és a $B_0B_1\ldots B_6$ sokszög területét.

Gy. 3197. Egy vízszintes síkra négy, egymást érintő r sugarú gömböt helyezünk el úgy, hogy középpontjaik négyzetet alkossanak. A négy gömbre ráteszünk egy ötödik r sugarú gömböt, amelyik mind a négy másikat érinti. Milyen távolságra van a síktól az ötödik gömb legmagasabban lévő pontja? (**H**)

❄

Beküldési határidő: 1998. április 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

❄

F. 3220. Egy téglalap alakú mezőt az oldalaival párhuzamos egyenesek segítségével 100 db egybevágó téglalap alakú parcellára osztottunk úgy, hogy a szomszédos parcelláknak az egyik oldala közös. Kezdetben a mezőn 9 parcella gazos volt. Egy parcella elgazosodik, ha legalább két szomszédja gazos. Lehetséges-e, hogy előbb-utóbb az egész mező elgazosodik?

F. 3221. Az $A_1A_2\ldots A_n$ szabályos n-szög csúcsaira valamilyen sorrendben felírjuk az 1, 2, $\ldots$, n számokat.

a) Mekkora lehet legfeljebb a szomszédos számok közötti különbségek abszolút értékeinek összege?

b) Ez a maximális összeg hányféle elrendezésnél fordulhat elő?

F. 3222. Legyen n prímszám. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az

$$(1^n+2^n+\ldots+x^n)+(1^n+2^n+\ldots+(n-1)^n)=1^n+2^n+\ldots+(2n-1)^n \tag{2}$$

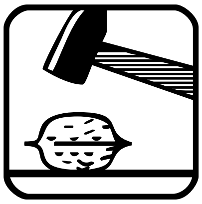
egyenletnek nincs pozitív egész megoldása.

F. 3223. Hány oldala lehet egy olyan sokszögnek, amelynek pontosan n darab szimmetriatengelye van?

F. 3224. Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex poliéder minden lapja középpontosan szimmetrikus, akkor legalább hat lapja paralelogramma.

Javasolta: *Rudolf Gábor,* Budapest

F. 3225. Adjunk meg a térben olyan ponthalmazt, amelynek bármely síkon van legalább egy, de legfeljebb öt pontja.



A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (167–170.)

N. 167. Adott a síkon három egységnyi sugarú körlemez. Legyen t_1 és t_2 annak a két tartománynak a területe, amelyet a körök pontosan egyszer, illetve pontosan kétszer fednek le. Igazoljuk, hogy $t_1 \geqslant t_2$.

N. 168. Igazoljuk, hogy tetszőleges n pozitív egész számra

$$\binom{0}{0}\binom{2n}{n}+\binom{2}{1}\binom{2n-2}{n-1}+\binom{4}{2}\binom{2n-4}{n-2}+\ldots+\binom{2n}{n}\binom{0}{0}=4^n. \tag{3}$$

N. 169. Jelölje a_n egy n résztvevős verseny lehetséges végeredményeinek számát, ha megengedjük a holtversenyt is; például $a_2=3$ és $a_3=13$. Bizonyítsuk be, hogy

$$1{,}4^{n-1} \leqslant \frac{a_n}{n!} \leqslant 1{,}5^{n-1}. \tag{4}$$

N. 170. Bizonyítsuk be, hogy ha $15a+6b+4c+8d=0$, akkor az $ax^3+bx^2+cx+d=0$ egyenletnek van pozitív gyöke.

❄

Beküldési határidő: 1998. április 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 48. No. 3. March 1998)

New exercises for practice (see page 166): **C. 497.** Is there any positive integer n such that $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, that is, $n!$, ends with exactly 100 zeros? **C. 498.** Solve inequation (1). **C. 499.** There is given a circle of unit radius in the plane. A wreath of n congruent circles is formed around the given circle such that each circle in the wreath touches its two neighbours and also the given circle. Determine, in terms of n, the common radius of the circles. Calculate these radii, up to four digits precision after the decimal point, for the first four possible values of n. **C. 500.** Is it possible to slip two fine arts albums, each 22 cm wide, and a 25 cm wide cookbook into 28 cm wide plastic bag? Assume that each book has a thickness of 1.5 cm.

New exercieses: Gy. 3190. We define a number $44\ldots48\ldots89$ with the following procedure. First, we insert the number 48 between the two digits of 49. Next, 48 is inserted between the digits 4 and 8 of the resulting number. Finally, we repeat this second step a few times. Is it true that every number obtained this way is a perfect square? **Gy. 3191.** Is it true that every integer has at least as many positive divisors of the form $4k+1$ as that of the form $4k-1$? **Gy. 3192.** Find all pairs of positive integers A,B with the following property: if the decimal representation of A is placed in front of that of B, then the resulting number is a perfect square, equal to twice the product of A and B. **Gy. 3193.** A basketful of peanuts is distributed into n piles. We gather the piles and rearrange them into $n+k$ new piles ($k>0$). Prove that at least $k+1$ peanuts are transferred to smaller piles than the respective original piles that contained them. **Gy. 3194.** In a triangle, two of the altitudes are at least as long as the corresponding sides of the triangle. Find the angles of the triangle. **Gy. 3195.** In a right triangle, parallel lines to each side are drawn through the incentre of the triangle. These lines divide each side of the triangle into three parts. Prove that the length of the middle part of the hypotenuse equals the sum of the lengths of the middle parts arising on the legs of the triangle. **Gy. 3196.** There are given rays e_0, e_1, $\ldots$, e_6, each starting at the same point A of the plane. Each ray forms an angle of 30° with the one that precedes it in the given order. Let B_0 denote the point on ray e_0 such that A and B_0 are a unit distance apart. Let B_1 denote the orthogonal projection of B_0 to e_1. Similarly, denote by B_2 the orthogonal projection of B_1 to e_2, and so on. Calculate the length of the polygonal path $B_0B_1\ldots B_6$ and the area of polygon $B_0B_1\ldots B_6$. **Gy. 3197.** Four balls, each of radius r, are placed on a horizontal plane such that each of them touches two others and their centres form a square. A fifth ball of the same radius is placed on the top of these balls, touching all of them. Calculate the distance of the topmost point of the fifth ball from the given plane.

New problems: F. 3220. A rectangular field is divided into 100 congruent rectangular plots with the help of lines parallel to the edges of the field. Neighbouring plots share a common edge. Initially, 9 plots of the field are overgrown with weeds. The weeds overgrow any plot whose (at least) two neighbours are already overgown. Is it possible that the whole field becomes overgrown sooner or later? **F. 3221.** The numbers 1, 2, $\ldots$, n are assigned, in some order, to the vertices of a regular n-gon $A_1A_2\ldots A_n$. a) Determine the maximum possible value of the sum of the absolute values of the differences between numbers assigned to consecutive vertices. b) Find the number of arrangements for which the above sum is maximum. **F. 3222.** Given that n is a prime, prove that there is no positive integer x that satisfies equality (2). **F. 3223.** A polygon has exactly n axes of symmetry. How many sides may the polygon have? **F. 3224.** In a certain convex polytope, every face has a central symmetry. Prove that at least six of the faces are parallelograms. **F. 3225.** Find a set of points in 3-space which intersects every plane in at least one but not more than five points.

New advanced problems: N. 167. There are given three unit discs in the plane. Let t_1 and t_2 denote the areas of the two regions in the plane which the discs cover exactly once resp. exactly twice. Prove that $t_1 \geqslant t_2$. **N. 168.** Prove that equality (3) holds for every positive integer n. **N. 169.** Let a_n denote the number of possible results of a contest with n participants, where ties may occur. For example, $a_2=3$ and $a_3=13$. Prove inequality (4). **N. 170.** Given that $15a+$ $+6b+4c+8d=0$, prove that the equation $ax^3+bx^2+cx+d=0$ has a positive root.

Beszámoló az 1997. évi Téli Ifjúsági Ankétról

A Bolyai János Matematikai Társulat, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat és a KöMaL szerkesztősége 1997. december 20. és 22. között rendezte meg a matematikai és fizikai Téli Ifjúsági Ankétot.

A pénteki megnyitón a Budapesti Műszaki Egyetem Fizikai Intézetének igazgatója, *Zawadowski Alfréd* akadémikus köszöntötte a matematika és fizika iránt érdeklődő diákokat, tanárokat. Utána egy érdekes kísérleteket mutatott be az intézet munkatársa, Härtlein Károly Délután a Csodák Palotája új kiállítására, az „Illúziók”-ra 65-en, a Planetárium „Betlehemi csillag” bemutatójára 39-en látogattak el.

A ország minden részéből, Erdélyből és Szlovákiából érkezett résztvevők száma összesen 200 körül volt. Az előző tanévi országos matematika vagy fizika versenyeken elért jó eredményeik alapján 87 diák és tanár költségeit – a **Fővárosi Közgyűlés Kulturális Bizottsága** jóvoltából – a MATFUND Alapítvány fedezte. Részvételi díjat 32-en fizettek. Az **MKM Felsőoktatási Programfinanszírozási Pályázata** járult hozzá az ankét étkezési és szállásköltségeihez, valamint az ajándék könyvutalványok megvásárlásához.

Előadó:
Pelikán József

Szombaton program szerint 3 kiváló előadót hallhattunk a Villányi úti Konferenciaközpontban: *Pelikán József* és *Laczkovich Miklós* matematikusokat és *Marik Miklós* fizikust. Ebéd után került sor a KöMaL díjkiosztó ünnepségére, melyen a szerkesztőség munkatársain kívül a BJMT, az ELFT elnökségének képviselői és a MATFUND Alapítvány kuratóriumi tagjai is részt vettek. A korábbi évek kisebb értékű ajándékaihoz képest néhányan nagyobb pénzjutalmat vehettek át pályadíjként. Erre az alapítványt támogatók biztosítottak lehetőséget. A legnagyobb összeget – az eredményhirdetésen is megjelent – *dr. Párkány Mihály*, lapunk valamikori feladatmegoldója és nővére ajánlották fel édesapjuk, *Pollák Simon* emlékére, aki éppen 90 évvel ezelőtt küldte be rendszeresen a Középiskolai Matematikai Lapok példáira megoldásait. Fia, unokái és dédunokái is követték ezt a hagyományt. A pályadíjak egy részét a **Budapest Bank az oktatásért és a magyar pénzügyi kultúráért Alapítvány** pályázatán nyert összegből fizettük ki.

A pontverseny eredmények alapján (KöMaL 1997. évi 6. sz.) 25–25 ezer Ft jutalmat kapott *Gyenes András* és tanára, *Drozdy Győzőné dr.* (Bp., Apáczai Csere J. Gimn.); *Megyeri Csaba* és tanára, *dr. Pintér Ferenc* (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn.); *Braun Gábor* és tanára, *Halek Tamás* (Bp., Szent István Gimn.); *Terpai Tamás* és *Lippner Gábor* 25-25 ezer Ft-ot, tanáraik: *Táborné Vincze Márta* és *Dobos Sándor* 20 ezer Ft-ot, *Thiry Imréné* 10 ezer forintot (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn.). **A matematika műveléséért és a matematika oktatásáért Alapítvány** *Beleznay Ferencet* sikeres tanári, *Pósa Lajost* többéves kiemelkedő tehetséggondozó munkájáért 10 ezer Ft-tal, illetve 25 ezer Ft-tal jutalmazta.

A MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány pályadíjaiban részesültek még a következő tanulók: *Kacsuk Zsófia* és *Ravasz Mária Magdolna* (20 eFt), *Sarlós Ferenc* (18 eFt), *Balogh Tímea*, *Juhász András* és *Várkonyi Péter* (10 eFt), *Bérczi Gergely, Pintér Dömötör, Frenkel Péter, Pap Gyula, Zábrádi Gergely, Papp Dávid, Szalai Gábor, Laudisz Balázs, Kormos Márton, Ivády Balázs* és *Ronyecz Andrea* (5 eFt), *Babos Attila, Pápai Péter, Hegedűs Ágnes, Csige Sándor, Erdélyi Ildikó, Sebestyén Zsolt, Zágoni Csaba, Józsa Imre Gergő, Péterfalvi Csaba* és *Rudolf Gábor* (3 eFt). A további helyezettek könyvutalványokat kaptak, illetve a **Nemzeti Tankönyvkiadó** és a **Typotex Kiadó** által ajándékozott (összesen több, mint 200 eFt értékű) könyv és egy sorozat **Calibra** kiadású tankönyv közül válogathattak.

A **Természet Világa** c. folyóirat egyéves előfizetését 10 díjazott nyerte el, közülük hatan, *Braun Gábor, Páles Csaba, Sarlós Ferenc, Várkonyi Péter, Végh A. László* és *Zawadowski Ádám* azért, mert egyaránt sikeresen szerepeltek a matematika és a fizika pontversenyekben.

A délután folyamán lehetett játszani *Kovács Zoltánnak* a Játék–Tanszer Stúdióból hozott különleges játékaival, és sor került a TOTÓ eredményhirdetésére is, melyre az ajándékot az ERICSSON Rt.-től kaptuk. Nagy érdeklődés kísérte az esti programot, az Eötvös Collegiumban *Gnädig Péter* beszélt változó tömegű rendszerekről.

A harmadik nap előadásain a hallgatók főként geometriai ismereteiket gyarapíthatták *Reiman István, Bogdán Zoltán* és *Lóránt László* feladatain keresztül. Jól sikerültek *Varga István* „katasztrofális” kísérletei az előcsarnokban. A fizika előadók, *Tasnádi Péter, Szvetnik Endre* és *Groma István* sok érdekességet mondtak el a mozgó koordinátarendszerekről, mozgásegyenletekről, változó tömegű testekről, az ekvivalenciaelvről és a hullámtanról.

Az ankét legtöbb előadása rávilágított a matematika és a fizika szoros kapcsolatára.