A matematika és fizika TOTÓ eredménye

A múlt havi számunkban közreadtuk az 1997. évi Téli Ankéton meghirdetett Totó kérdéseit. A telitalálatos szelvény:

1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, X, X, 1, X, X, X, 2.

A legtöbb találatot, nevezetesen 10-et ketten érték el: *Terpai Tamás*, a Fővárosi Fazekas M. Gyak. Gimn. 11. évfolyamos tanulója és *Rudolf Gábor*, az ELTE TTK I. éves matematikus hallgatója. A 9, 8 ..., 2 találatos szelvények száma rendre 8, 17, 11, 8, 3, 4, 2 és 1. (Érdemes felrajzolni az „eloszlás-diagramot, és leolvasni belőle a „ráérzőképesség" várható értékét és szórását.)

Az alábbiakban néhány – a szokásosnál kicsit fogósabb – kérdés megoldásához adunk útmutatót. (A feladatok szövegét ld. a múlt havi számunkban.)

3. Ha egy szalagnak csak egy határa van, akkor a kettévágás után is csak 1 szalag marad belőle, aminek az egyik határa az eredeti határ lesz, a másik határ pedig a kettévágásnál keletkezik. A Möbius-szalagnak, ami csak félszer van megcsavarva, csak 1 határa van. Ha hosszában elfelezzük, egyetlen szalag marad belőle, ami 1-szer van megcsavarva és két határa van. Ebből a második kettévágásnál két ugyanilyen (de egymáson átfűzött) szalag jön létre, a harmadik kettévágásnál pedig ezekből keletkezik 2-2 újabb. A végén tehát összesen 4 szalagunk lesz, ezek közül bármely kettő át van fűzve egymáson, úgyhogy kissé össze lesznek gubancolódva.

7. Legyen $N=1997^{1998}$. Az adott számok között a prímek száma az ún. prímszámtétel szerint „körülbelül" $N/\log N$. Ezzel szemben a négyzetszámok száma N-ig legfeljebb $\sqrt{N}$, a köbszámoké N köbgyöke stb. Általában addig számíthatunk (legalább egy) k-adik hatványra N-ig, ameddig $2^k \leqslant N$, azaz $k \leqslant \log_2 N$. Így a teljes hatványok száma legfeljebb $\sqrt{N}\cdot\log_2 N \ll N/\log N$, ha N, mint esetünkben is, „elég nagy".

8. A magából anyagot kidobó rakéta közismert példája mutatja, hogy egy (változó tömegű) rendszer akkor is gyorsulhat, ha nem hat rá külső erő. Eszerint az $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ egyenlet *nem* általános érvényű. Kevésbé ismert, hogy az impulzus *sem* számolható mindig az $\mathbf{I}=m\mathbf{v}$ egyenletből. Ha például egymás után óvatosan, függőlegesen mozgatva ráhelyezzük az ujjainkat a zongora billentyűire, akkor a zongorához érő ujjakból álló rendszer tömegközéppontja vízszintesen mozog, de ehhez a mozgáshoz *nem* társul vízszintes impulzus.

9. Az Euler-tételből könnyű levezetni, hogy egy n csúcsú *konvex* poliédernek legfeljebb $2n-{}$ -4 lapja és $3n-6$ éle lehet. Ez az eset akkor áll elő, ha csupa háromszög határolja. Ha viszont a poliéder lyukakat is tartalmaz, akkor minden lyuk 4-gyel növeli a lapok és 6-tal az élek maximális számát, úgyhogy a poliédernek nagyon sok lapja és éle is lehet.

12. Gauss egy nevezetes tétele szerint pontosan azok a számok írhatók fel legfeljebb 3 négyzetszám összegeként, amelyek *nem* $4^k(8n+7)$ alakúak. Adott korlátig (ami esetünkben 10^{2000}) a tiltott alakú számok előfordulási aránya kisebb, mint az $1/8+1/32+1/128+\ldots$ végtelen mértani sor összege, amely $1/6$. Tehát a legfeljebb 3 négyzetszám összegeként felírható (legfeljebb) 2000 jegyű számok gyakorisága (nagyon kevéssel) több, mint $1-(1/6)=5/6$.

13. A mikrohullámú sütőben az időegységenként elnyelt energia kicsiny testeknél (melyekbe könnyen behatol az elektromágneses mező) a test térfogatával arányos. Kevés víz melegítésekor tehát a felforraláshoz szükséges idő független a víz mennyiségétől. Nagyobb vízmennyiség esetén azonban a behatoló energia nem a térfogattal, hanem közelítőleg a felülettel arányos. Egy kétszer nagyobb oldalélű „vízkocka" például négyszer nagyobb teljesítménnyel melegíthető, a hőkapacitása viszont nyolcszor nagyobb, tehát kb. kétszer annyi idő alatt forralható fel, mint a kisebb.

13 + 1. Aki nem tud angolul, az is meg tudja számolni az egyes szavak betűinek számát...

Forgásfelületek szappanhártyából

Charles Delaunay tételéről

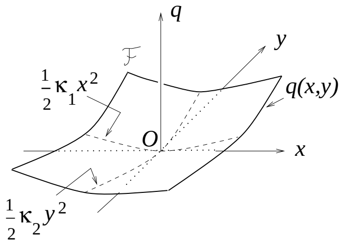
Az alábbi dolgozatban rövid ismertetést szeretnénk nyújtani a differenciálgeometria egy nevezetes tételéről, amely Charles Eugene Delaunay francia matematikustól származik 1847-ből.[1] A tétel igen plasztikus leírását adja a háromdimenziós euklideszi térben mindazoknak az $\mathcal{F}$ forgásfelületeknek, amiknek az ún. Minkowski-görbülete állandó, avagy – fizikai nyelvezetet használva – amelyek (legalábbis elvben) megvalósíthatók szappanhártyából olymódon, hogy a hártya két oldalán különböző légnyomást hozunk létre.[2]

A tétel ismertetéséhez, majd pedig bizonyításához szükségünk lesz egy rövid bevezetőre a háromdimenziós térben levő felületek (röviden: *felületek*) differenciálgeometriájának az elemeibe, valamint meg kell ismernünk a szappanhártyák sztatikájának az alapegyenletét. Mindezen felül, a bizonyításban felhasználjuk a tömegpontok Newton-féle mozgástörvényét és a körmozgás kinematikai leírásából a centripetális gyorsulás fogalmát; mindezt azzal a céllal, hogy bizonyos görbületek kiszámítását leegyszerűsítsük és szemléletesebbé tegyük az Olvasó számára. Emiatt joggal lesz mondható, hogy az itt következő bizonyítás „tiszta matematikai” értelemben nem 100% -ig teljes, cserébe viszont bőségesen kárpótol bennünket a szemléletesség és a fizikai intuíció felhasználása.

Felületek görbületei. Minkowski-görbület

A következő dolgokat bizonyítás nélkül felhasználjuk a differenciálgeometriából:

Legyen $\mathcal{F}$ egy sima felület, ami áthalad az O referencia ponton. A derékszögű koordinátarendszer alkalmas elmozgatásával feltehető, hogy O éppen az origó és az $\mathcal{F}$ felület O pontbeli érintő síkja a $z=0$ egyenletű sík. A tér z tengely körüli alkalmas elforgatásával még az is elérhető, hogy az $\mathcal{F}$ felületet legjobban (azaz harmadrendben kicsi hibával) közelítő $z=q(x,y)$ kvadratikus függvénygrafikon egy



1. ábra

$$q(x,y)=\frac{1}{2}\left(\varkappa_1 x^2+\varkappa_2 y^2\right) \tag{1}$$

---

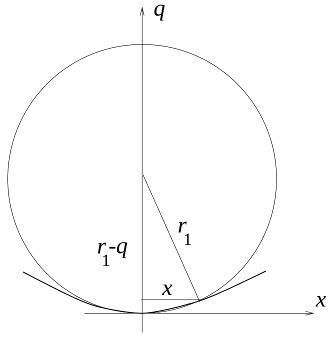
[1] Ch. E. Delaunay (ejtsd: döloné) (1816–1872) csillagászként is kiváló volt, elsősorban a Nap–Föld–Hold rendszer mozgásának számításával (az ún. háromtest-problémával) foglalkozott. Több évtizeden keresztül végzett nagyon pontos számításait nemrég számítógéppel ellenőrizték, és csak néhány jelentékleten hibát találtak benne.

[2] E tétel színes illusztrációja díszíti ezekben a hónapokban a KöMaL címlapját!

ún. diagonális kvadratikus alakkal adható meg, azaz olyannal, amelyre q-ban nincs vegyes másodrendű (xy-nal arányos) tag.

Megjegyzés.[3] Az itt fellépő $\varkappa_1$ és $\varkappa_2$ számokat az $\mathcal{F}$ felület, annak O pontja, és a felület „pozitív oldalának”, vagyis a z tengely irányának kiválasztása egyértelműen meghatározza, természetesen e két szám sorrendjétől eltekintve.

A $\varkappa_1$ és $\varkappa_2$ mennyiségeket a felület O-beli *főgörbületeinek* nevezik. E két szám szorzatát hívják az $\mathcal{F}$ O-beli Gauss-görbületének, míg e két szám összege a Minkowski-görbület.[4] Végezetül, a $q(x,y)=\frac{1}{2}\left(\varkappa_1 x^2+\varkappa_2 y^2\right)$ diagonális kvadratikus alakhoz tartozó x és y tengelyirányokat az $\mathcal{F}$ felület O pontbeli *főirányainak* nevezik.

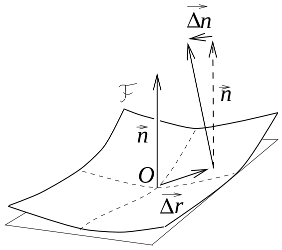


2. ábra

Megjegyzések. 1. A főirányokban vett görbületeknek egyszerű szemléletes jelentés is tulajdonítható. Ezek a számok a felületet (a megadott irányokban haladva) a legjobban közelítő körök, az úgynevezett *simulókörök* sugarainak reciprokai. Tekintsük például a felületet az $y=0$ síkban *(2. ábra).* A bejelölt derékszögű háromszögre felírhatjuk Pitagorász tételét: $(r_1-q)^2+x^2=r_1^2$, ahonnan $q(2r_1-q)=x^2$, azaz $q\ll r_1$ esetén $q(x,y=0)\approx x^2/(2r_1)$ adódik. Összehasonlítva a megadott kvadratikus alakkal látható, hogy $\varkappa_1=1/r_1$, és hasonlóan adódik, hogy $\varkappa_2=1/r_2$.

2. Ha a felület valamelyik főgörbülete negatív, akkor a megfelelő simulókör sugarának reciproka a görbület (-1)-szeresét adja.

3. A felület pozitív oldalának, azaz a felület irányításának megváltoztatásával $\varkappa_1$ és $\varkappa_2$ mindössze előjelet vált, így tehát ugyanez történik a Minkowski-görbülettel is, a Gauss-görbület viszont változatlan marad.



3. ábra

A főirányok és a főgörbületek fogalmát egy másik, geometriai úton is megvilágíthatjuk. Képezzük a felület $\vec{n}$ normálvektorát (vagyis az érintősíkra merőleges, a felület „pozitív” oldala felé irányított egységvektort) a felület O pontjában, illetve annak kis környezetében. Ha az O referencia pontból egy kicsiny $\overrightarrow{\Delta r}$ vektorral elmozdulunk a felület (tehát lényegében az érintősík) valamely közeli pontjába, akkor az ottani normálvektor – a felület görbültsége miatt – egy kicsit el fog térni az eredeti normálvektortól *(3. ábra).* Jelöljük ezt az eltérést $\overrightarrow{\Delta n}$-nel. $\vec{n}$ hosszának változatlansága miatt $\overrightarrow{\Delta n}$ merőleges $\vec{n}$-re, tehát $\overrightarrow{\Delta n}$ is az érintősíkban fekszik. Vizsgáljuk meg, mi a kapcsolat $\overrightarrow{\Delta r}$ és $\overrightarrow{\Delta n}$ között! Ezen két vektor (mindkettő infinitezimálisan kicsiny) nagysága arányos egymással, de az irányuk általában különböző. Van azonban az érintősíkban két olyan irány, amelyek mentén elmozdulva $\overrightarrow{\Delta r}$ és $\overrightarrow{\Delta n}$ párhuzamosak maradnak, tehát a kapcsolatuk így fejezhető ki:

$$\overrightarrow{\Delta n}=-\varkappa\cdot\overrightarrow{\Delta r}, \tag{2}$$

[3] Az apróbetűs „megjegyzések” nem tartoznak szorosan a cikk fő gondolatmenetéhez, ezért a részletek iránt kevésbé érdeklődő Olvasó először nyugodtan átugorhatja ezeket.

[4] A Minkowski-görbület (összgörbület) felét átlaggörbületnek is nevezik. A Gauss-görbület (szorzat-görbület) fontos szerepet játszik az általános relativitáselmélet matematikai megfogalmazásában.

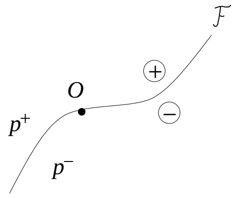
ahol $\varkappa$ a megfelelő irányhoz *(főirányhoz)* tartozó *főgörbület*. Belátható, hogy a két főirány egymásra merőleges, és hogy a főgörbületek a megfelelő simulókörök sugarainak reciprokai.

Szappanhártyák Minkowski-görbülete

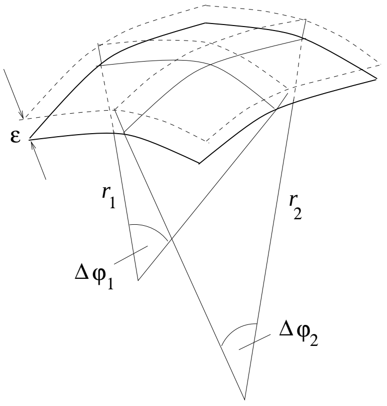
A mechanikából ismeretes *Laplace*-nak a következő, 1806-ból származó tétele: Egy egyensúlyi helyzetben levő $\mathcal{F}$ szappanhártya esetében az $\mathcal{F}$ felület minden pontjában

$$p^+ - p^- = \alpha(\varkappa_1 + \varkappa_2),$$

ahol p^+ és p^- az $\mathcal{F}$ hártya pozitív illetve negatív oldalán mért gáznyomás, $\alpha > 0$ pedig csupán a hártyától függő állandó *(4. ábra)*.[5] Így tehát (a $\Delta p = p^+ - p^-$ nyomáskülönbség állandó volta miatt) a szappanhártyák mindig konstans Minkowski-görbületű felületek.



4. ábra



5. ábra

Megjegyzés. Az idézett tétel a következőképpen szemléltethető. Tekintsük a felületnek kicsiny, a megfelelő simulókörök középpontjából $\Delta\varphi_1$, illetve $\Delta\varphi_2$ szögben látszó darabkáját (*5. ábra*). Ennek a felületdarabkának közelítőleg $r_1\Delta\varphi_1 \cdot r_2\Delta\varphi_2$ a területe, a felületi feszültség következtében tehát $\alpha \cdot r_1\Delta\varphi_1 \cdot r_2\Delta\varphi_2$ energiával rendelkezik.

Képzeljük el, hogy a felület valamilyen ok miatt az eredeti helyzetéhez képest egy kicsiny ε távolságnyira elmozdul. A megadott szögek alatt látszó felületdarabka nagysága és ezzel együtt a hozzá tartozó felületi energia megváltozik, méghozzá

$$\Delta E_f = \\ = \alpha \cdot (r_1+\varepsilon)\Delta\varphi_1 \cdot (r_2+\varepsilon)\Delta\varphi_2 - \alpha \cdot r_1\Delta\varphi_1 \cdot r_2\Delta\varphi_2 \approx \\ \approx \alpha \cdot (r_1+r_2)\Delta\varphi_1 \cdot \Delta\varphi_2 \cdot \varepsilon$$

mértékben. Másrészt a felület két oldalán levő gázok a $\Delta p = p^+ - p^-$ nyomáskülönbség miatt

$$W = \Delta p \cdot r_1\Delta\varphi_1 \cdot r_2\Delta\varphi_2 \cdot \varepsilon$$

nagyságú munkát végeznek. A munkatétel értelmében $W = \Delta E_f$. (Ha ez nem teljesülne, akkor a felület valamilyen irányú elmozdulása során energia szabadulhatna fel, tehát a felület nem lenne stabil egyensúlyi helyzetben). Behelyettesítve ΔE_f és W kifejezéseit, majd kihasználva a főgörbületek és a görbületi sugarak közötti kapcsolatot, éppen Laplace tételét kapjuk.

A kérdés mármost az, hogy melyek az állandó Minkowski-görbületű forgásfelületek, azaz mely forgásfelületek hozhatók létre (legalábbis elvben) szappanhártyából? A választ Delaunay már említett tétele adja meg:

[5] Az α állandó éppen a folyadékhártya felületi feszültsége (egységnyi szakaszon ható felületi erő, vagy ami ezzel egyenértékű: a hártya egységnyi felületére jutó energia). Tekintettel arra, hogy a szappanhártyának 2 oldala van, α megegyezik a folyadék (levegőre vonatkoztatott) felületi feszültségének kétszeresével.

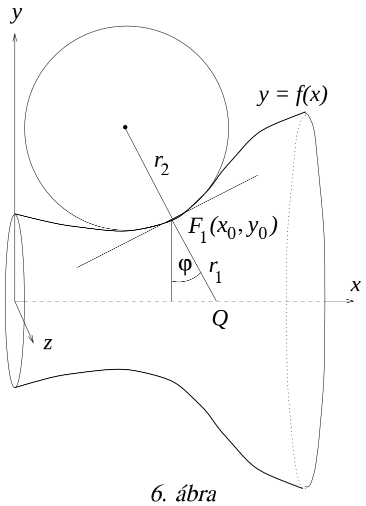
TÉTEL *Az állandó Minkowski-görbületű forgásfelületek úgy származtathatók, hogy egy S sík e egyenesén gördítünk egy C kúpszeletet, majd pedig C-nek a kiválasztott F_1 fókusza által leírt γ görbét megforgatjuk az e egyenes körül. Az így kapható γ-k által söpört $\mathcal{F}$ felületek a keresett forgásfelületek.*

Megjegyzések. 1. Az alábbiakban mi csupán az ellipszisek gördítésével nyerhető $\mathcal{F}$ felületekről látjuk be azt, hogy azok állandó Minkowski-görbületűek. A dolgozat végén rövid utalásokat teszünk arra, hogy az egyéb kúpszeletek esete miként tárgyalandó, illetve hogy azoknak milyen sajátosságaik vannak.

2. Azzal nem foglalkozunk bővebben, hogy a fenti eljárással miért is kapható meg az összes, kívánt tulajdonságú forgásfelület. Ezt a megfelelő differenciálegyenlet felírásával és a szabad paraméterek analízisével kaphatnánk meg.

Forgásfelületek főgörbületei

Forgassuk meg az $y = f(x)$ grafikont (itt f egy pozitív, sima függvény) az x tengely körül. Így kapjuk az $\mathcal{F}$ forgásfelületet.[6]



6. ábra

Bizonyítás nélkül felhasználjuk a differenciálgeometriából a következő, egyébként eléggé szemléletes eredményeket: Az $\mathcal{F}$ felület $F_1 = (x_0, y_0)$-pontbeli főirányait az alábbi egyenletrendszerű egyenesek adják meg:

$$x = x_0, \quad y = y_0,$$

tehát z tengellyel párhuzamos egyenes, illetve

$$z = 0, \quad y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

ami nem más, mint a vezérgörbe F_1 pontbeli érintője.[7]

Az elsőnek megfelelő $\varkappa_1$ főgörbület $r_1 = 1/\varkappa_1$ reciproka (vagyis a görbületi sugár) az

$$r_1 = y_0\sqrt{1 + (f'(x_0))^2} \tag{3}$$

képlettel, míg a másik főgörbület $r_2 = 1/\varkappa_2$ reciproka az

$$r_2 = \frac{\left[1 + (f'(x_0))^2\right]^{3/2}}{|f''(x_0)|} \tag{4}$$

formulával kapható meg.[8]

6 $f(x)$ grafikonját az $\mathcal{F}$ felület *vezérgörbéjének* nevezik.

7 $f'(x_0)$ az $y = f(x)$ függvény x_0 pontbeli differenciálhányadosát (deriváltját) jelöli, ami közelítőleg $\Delta y/\Delta x$ módon is kiszámítható. A továbbiakban – a differenciálszámításban nem eléggé jártas Olvasók kedvéért – nem teszünk különbséget a derivált és a differenciahányados között, ez utóbbit azonban mindig „infinitezimálisan kicsiny” mennyiségek arányaként értjük.

8 f'' az $f(x)$ függvény második deriváltját jelöli.

(*Vigyázat:* $f'' > 0$ esetén a kétféle görbület „ellentétes irányú", emiatt Laplace tételében ellentétes előjellel veendők figyelembe.)

Megjegyzések: 1. r_2 éppen az $y = f(x)$ grafikon $F_1 = (x_0,\ y_0)$ pontbeli simulókörének sugara, míg r_1 éppen az F_1 pont távolsága az $y = f(x)$ görbe F_1-beli normálisának az x tengellyel vett Q metszéspontjától. A könnyebb érthetőség kedvéért megemlítjük továbbá, hogy a Q középpontú, r_1 sugarú gömb másodrendben (azaz harmadrendűen kis hibával) simul az $\mathcal{F}$ felülethez az $x = x_0,\ y = y_0$ egyenes irányában.

2. A (4) formula könnyen igazolható a következő, fizikai gondolatmenettel. Tekintsük egy tömegpont síkbeli, $\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t, f(t))$ vektorfüggvénnyel leírt mozgását, ahol t az idő paraméter. (Ez az x tengely irányában egységnyi sebességű, tehát egyenletes, y irányban pedig megadott módon változó mozgás.) Ennek a mozgásnak a sebességvektora $\vec{v}(t) = \big(1,\ f'(t)\big)$, gyorsulása pedig $\vec{a}(t) = \big(0,\ f''(t)\big)$. Képezzük ezután az $\vec{a}(t)$ gyorsulásnak a skaláris szorzatát a $\vec{v}(t)$-re merőleges, alkalmasan irányított

$$\vec{n}(t) = \frac{1}{|\vec{v}(t)|}\big(f'(t),\ -1\big) = \frac{1}{\sqrt{\big(1 + (f'(t))^2\big)}}\big(f'(t),\ -1\big)$$

egységvektorral, azaz vegyük a gyorsulásnak a sebességre merőleges komponensét! A megfelelő körmozgással vett analógia alapján ez a skaláris szorzat nem egyéb, mint $|\vec{v}(t)|^2/r_2$, ahol r_2 éppen a függvény grafikonja simulókörének a keresett sugara. A mondott egyenlőséget felírva és r_2-re megoldva kapjuk (4)-et.

3. A következő fizikai érveléssel szemléltethetjük, hogy a forgásfelületek összgörbülete valóban a fentebb megadott r_1 és (a megfelelő előjellel vett) r_2 reciprokának összege.

Vágjuk el a felületet az x tengelyre merőlegesen két közeli síkkal *(7. ábra).* Az így adódó „abroncs" felülete $2\pi y_0\ r_2\Delta\varphi$, ahol $\Delta\varphi$ a vezérgörbe kimetszett kicsiny AB szakaszának látószöge a simulókör O középpontjából nézve.

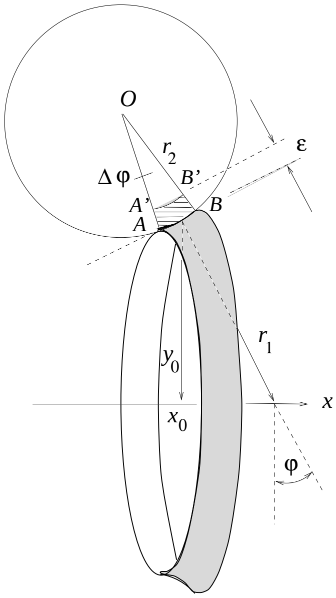
Gondoljuk meg, mi történik, ha a vezérgörbét a szóban forgó AB szakaszon egy kicsiny ε távolsággal közelebb hozzuk a vezérgörbe simulókörének O középpontjához (az $A'B'$ pontokig), majd az így adódó (eldeformált) görbét forgatjuk meg az x tengely körül. Az abroncs felülete egy kicsit megváltozik, méghozzá két ok miatt: egyrészt az $AB = r_2\ \Delta\varphi$ távolság lecsökken $\varepsilon\ \Delta\varphi$-vel, másrészt az abroncs „sugara" y_0-ról $y_0 + \varepsilon\cos\varphi$-re növekszik. Így a felület nagysága

$$(r_2 - \varepsilon)\Delta\varphi \cdot 2\pi(y_0 + \varepsilon\cos\varphi) - r_2\ \Delta\varphi \cdot 2\pi\ y_0 \approx$$

$$\approx \varepsilon\ 2\pi\Delta\varphi\,(r_2\ \cos\varphi - y_0),$$

a felületi energia pedig

$$\Delta E_f = \alpha\varepsilon 2\pi\Delta\varphi\,(r_2\ \cos\varphi - y_0)$$



7. ábra

értékkel megváltozik. Másrészt a görbe eltorzítása miatt a vizsgált térrész térfogata is egy kicsit megváltozik. A térfogat növekedése közelítőleg a bevonalkázott terület és az abroncs kerületének szorzata, tehát

$$\Delta V = \varepsilon \cdot r_2\Delta\varphi \cdot 2\pi y_0.$$

Ha a felület két oldalán levő gázok nyomáskülönbsége Δp, a tágulási munka $W = \Delta p \cdot \Delta V$. Az egyensúly feltétele most is $\Delta E_f = W$, ahonnan

$$\Delta p = \alpha \left(\frac{\cos\varphi}{y_0} - \frac{1}{r_2} \right) = \alpha \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

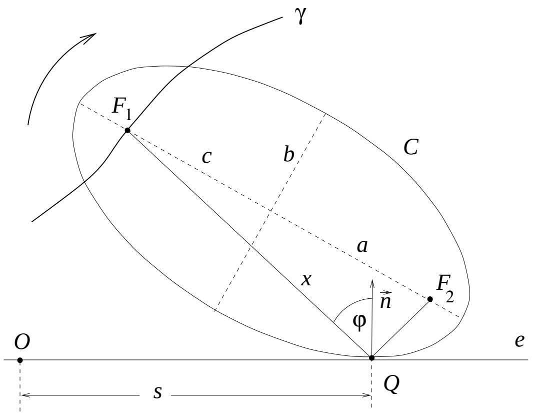
adódik. Összehasonlítva ezt az eredményt a Laplace-törvénnyel (és megfontolva a görbületek előjelét) láthatjuk, hogy a Minkowski-görbület valóban a megadott kifejezéssel egyenlő.

4. A főgörbületek (2) definíciója alapján is be lehet látni, hogy a forgásfelületek összeggörbülete valóban az (3) és (4) összefüggésekkel megadott sugarak reciprok-összege. Vegyük fel a forgásfelület normálvektorát a *6. ábrán* látható F_1 pontban, majd nézzük meg, hogyan változik a normálvektor, ha kicsit kimozdulunk az F_1 pontból. A vezérgörbe mentén mozogva $\overrightarrow{\Delta n}$ nyilván arányos az elmozdulásvektorral és az arányossági tényező nagysága (a simulókör sugarának definíciója alapján) $1/r_2$.

Ha viszont a normálvektor talppontját az x tengely körül (egy y_0 sugarú kör mentén) mozgatjuk el egy kicsit, a normálvektor végpontja egy $\cos\varphi$ sugarú kör mentén mozdul el (hiszen ekkora a normálvektor y komponense). Az elmozdulások aránya (vagyis a görbület) a megfelelő körök sugarainak arányával egyezik meg:

$$\varkappa_1 = \frac{\cos\varphi}{y_0} = \frac{1}{r_1}.$$

A számolás



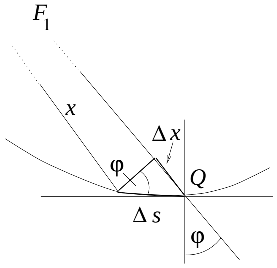
8. ábra

Gurítsuk tehát a C ellipszist az e egyenesen a *8. ábrán* látható módon: Szokás szerint a féltengelyek hosszát a-val és b-vel jelöljük ($0 < b \leqslant a$), $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ a fókuszoknak az ellipszis középpontjától mért távolsága. Az F_1 kiválasztott fókusz leírta γ görbét forgatjuk meg az e egyenes körül, és így kapjuk az $\mathcal{F}$ forgásfelületet. Legyen Q a C ellipszis és az e egyenes közös érintési pontja (ami az e egyenesen „jobbra" mozog), valamint x a változó $|F_1Q|$ távolság. Jelölje továbbá s a mozgó Q pontnak az e-n levő, rögzített O referencia ponttól mért távolságát, ami nem egyéb, mint a C ellipszisen mozgó Q pontnak az ellipszisen mért ívhossz paramétere. Végezetül legyen a $\overrightarrow{QF_1}$ vektor és az e egyenes $\vec{n}$ (C felé mutató) normálisa által bezárt szög a változó φ.

1. *A* $\cos\varphi$ *kifejezése.*

A QF_1F_2 háromszög 2φ szögére vonatkozó koszinusztétel szerint

$$4c^2 = x^2 + (2a - x)^2 - 2x(2a - x)\cos 2\varphi.$$



9. ábra

Felhasználva a $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$ azonosságot, az egyenletet rendezve és a továbbiakban hasznos

(5) $$u = \frac{1}{\cos\varphi}$$

mennyiség négyzetére megoldva

(6) $$u^2 = \frac{1}{a^2 - c^2}\ (2ax - x^2)$$

adódik.

2. *Változási arányszámok kiszámítása.*

Elemi geometriai észrevétel *(9. ábra)*, hogy az $x = |QF_1|$ távolság s ívhossz szerinti megváltozási rátája éppen $\sin\varphi$, azaz

(7) $$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \sin\varphi,$$

a φ szög alkalmas, előjeles értelmezése mellett.

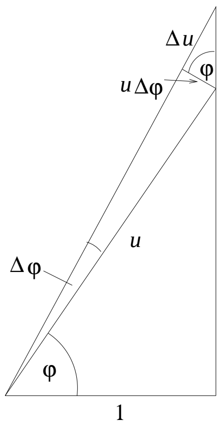
Írjuk fel a (6) egyenletet egy kicsit megváltozott $u + \Delta u$ és $x + \Delta x$ értékekkel, majd vonjuk ki belőle az eredeti egyenletet. A kicsiny mennyiségek négyzetének elhanyagolásával

(8) $$u\Delta u = \frac{1}{a^2 - c^2}\ (a - x)\Delta x$$

adódik.

Másrészt a *10. ábráról* leolvashatjuk, hogy $\Delta u = \operatorname{tg}\varphi\ u\Delta\varphi$, azaz

(9) $$\frac{\Delta u}{\Delta\varphi} = u^2\ \sin\varphi.$$



10. ábra

Összevetve a (7), (8) és (9) egyenleteket, továbbá felhasználva (5)-öt és (6)-ot is végül azt kapjuk, hogy

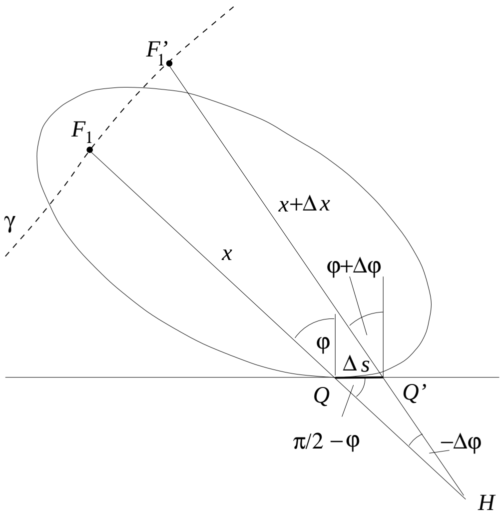
(10) $$\frac{\Delta s}{\Delta\varphi} = \frac{\Delta s}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta\varphi} = \frac{2ax - x^2}{(a - x)\cos\varphi}.$$

Megjegyzés. Ugyazezt az eredményt természetesen megkaphatjuk a differenciálszámítás összefüggéseinek alkalmazásával is. Ha deriváljuk (6)-ot az s változó szerint, felhasználjuk (5)-t és a „láncszabályt”, továbbá a (7)-nek megfelelő $x'(s) = \sin\varphi$ összefüggést, némi számolás után (10)-hez jutunk.

3. *A $\varkappa_2$ görbület kiszámítása.*

A forgásfelületek főgörbületeiről korábban mondottak szerint $\varkappa_1 = \dfrac{1}{|F_1Q|} = \dfrac{1}{x}$. Számítsuk most ki a γ görbe F_1-beli simulókörének $r_2 = \dfrac{1}{\varkappa_2}$ sugarát, hogy megkaphassuk a $\varkappa_2$ főgörbület értékét is!

Vegyük először is észre, hogy minden egyes pillanatban az F_1Q egyenes merőleges az F_1 pont leírta γ görbére. Ez úgy látható be a legegyszerűbben, hogy az F_1 és Q pontokat egy pillanatra úgy interpretáljuk, mintha azok az ellipszis alakú lemez peremére festett pettyek volnának, és e két felfestett pont mozgását, pontosabban a sebességeiket vizsgáljuk. Az ellipszis gördülése miatt a felfestett Q pont sebessége nulla, valamint az F_1Q szakasz hossza állandó. Ebből már következik, hogy az F_1 pont sebessége merőleges az F_1Q egyenesre.



11. ábra

Teljen el egy kicsiny idő, miáltal a Q pont menjen át a Q', az F_1 pont pedig az F_1' pontba *(11. ábra)*! Az r_2 görbületi sugár – definíció szerint – az F_1Q és $F_1'Q'$ egyenesek (amik a γ görbe normálisai) H metszéspontjának és az F_1 pontnak az előjeles távolsága. A $Q'QH$ kicsiny háromszögben a H-nál levő szög éppen $-\Delta\varphi$, a vele szemben fekvő oldal Δs, míg a Q csúcsnál levő szög $(\pi/2)-\varphi$. Így tehát a szinusztétel értelmében és (10) szerint

$$|QH| \approx Q'H = \frac{\Delta s\cdot\cos\varphi}{\sin(-\Delta\varphi)} \approx -\frac{\Delta s}{\Delta\varphi}\cos\varphi = \frac{2ax-x^2}{x-a},$$

továbbá

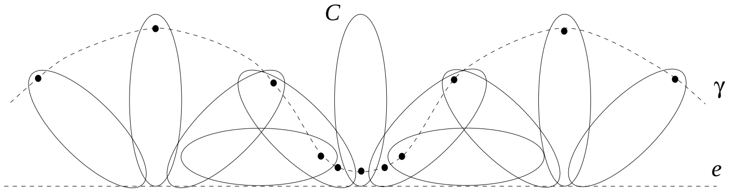
$$\frac{1}{\varkappa_2} = r_2 = x + |QH| = x + \frac{2ax-x^2}{x-a} = \frac{ax}{x-a}.$$

Innen és a $\varkappa_1 = 1/x$ azonosságból azonnal látszik, hogy

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 \equiv \frac{1}{a} = \text{állandó},$$

s éppen ezt akartuk bizonyítani.

A *12. ábra* kvalitatív képet ad a γ görbe alakjáról. Látszik, hogy γ fel-alá „hullámozva", periodikusan halad az e egyenes irányában; a periódus hossza éppen a C ellipszis kerülete.

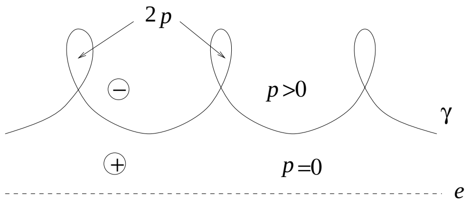


12. ábra

Záró megjegyzések (bizonyítások nélkül)

1. A hiperbola esete. Az $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ hiperbolának az e egyenesen való gördítése során az $F_1(\sqrt{a^2+b^2},0)$ fókusz leírta γ görbét az e egyenes körül megforgatva a konstans $-1/a$ Minkowski-görbületű $\mathcal{F}$ forgásfelületet kapjuk. Ennek az igazolása az ellipszis esetéhez teljesen hasonló módon történhet, mindössze a szükséges előjelcseréket kell végrehajtani a megfelelő képletekben. Két dologra azonban különös figyelmet kell fordítani a hiperbola esetében:

a) Amikor a gördülő hiperbolának az e egyenessel való Q érintkezési pontja határátmenetben kimegy az egyik hiperbola-ág „végére”, akkor a hiperbola az egyik ideális pontjában érinti az e egyenest, azaz az e egyenes lesz az egyik aszimptota. Ilyenkor a gördítést logikusan úgy kell folytatni, hogy áttérünk a hiperbola másik ágára, miközben a kiválasztott fókuszt – természetesen – változatlanul hagyjuk.



13. ábra

b) A γ görbe hurkolt lesz ugyan, de továbbra is periodikusan az e egyenes irányában halad, amint azt a *13. ábra* kvalitatívan mutatja. Vigyáznunk kell azonban a Minkowski-görbület előjelezésével! A γ görbének továbbra is az e egyenes felőli oldalát (azaz az $\mathcal{F}$ belsejének megfelelő oldalt) deklarálva pozitív oldalnak, a Minkowski-görbület negatív: $\varkappa_1+\varkappa_2=$ $=-1/a<0$. Ez azt jelenti, hogy (az egyszerűség kedvéért) az e egyenes körül nulla gáznyomást véve, a szappanhártya egyensúlyban tartásához $p>0$ külső nyomás, a hurkok által bezárt térrészekben pedig $2p$ nyomás szükséges, alkalmas p értékkel.

2. A parabola. Ez az egy ideális ponttal rendelkező kúpszelet, ami úgy is felfogható, mint egy $a=\infty$ fél nagytengely hosszú ellipszis, azaz $1/a=0$ lesz. Ennek megfelelően, a parabolák gördítésekor kapható $\mathcal{F}$ felületek lesznek a nulla Minkowski-görbületű (az ún. minimál-) forgásfelületek. Az ilyen felületek egy hasonlóság erejéig egyértelműen meghatározottak és a nevük: katenoidok. A név eredete a latin *catena* (jelentése: lánc), mivel a megfelelő γ görbék az $y=\dfrac{p}{2}\operatorname{ch}\dfrac{2x}{p}$ egyenletű úgynevezett *láncgörbék,* ahol p a parabolánk paramétere, $\operatorname{ch} x=(e^x+e^{-x})/2$ pedig a hiperbolikus koszinusz függvény. A láncgörbe elnevezés onnan származik, hogy a két pont között függő, homogén tömegeloszlású lánc ilyen alakot vesz fel.

3. A kör. Ekkor kapjuk a hengerfelületet.

4. Az egyenes szakasz, mint elfajult ellipszis. A $2a$ hosszúságú egyenes szakasz felfogható, mint egy $2b=0$ kistengely-hosszú elfajult ellipszis, a szakasz két végpontjával, mint fókuszokkal. Világos módon ekkor az $\mathcal{F}$ felület $2a$ sugarú gömböknek egy végtelen füzére lesz: a gömbök középpontjai egymástól $4a$ távolságra lesznek felfűzve az e egyenesre.

Simányi Nándor Szeged, JATE Bolyai Intézet,
Gnädig Péter Budapest, ELTE Atomfizikai Tanszék

Fizika gyakorlatok és feladatok megoldása

FF. 3026. *Hogyan készíthetünk* 20 m *hosszúságú,* 0,2 mm^2 *keresztmetszetű,* 0,5 $\Omega\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{m}$ *fajlagos ellenállású konstantán huzalból* 200 W*-os fogyasztót a* 24 V*-os hálózatra, a teljes huzal felhasználásával?*

Közli: *Keglevich László,* Budapest

Megoldás. Az adatok szerint a vezeték teljes ellenállása 50 Ω, 1 méterre jutó ellenállása tehát 2,5 Ω/m. A szükséges ellenállás $R=U^2/P=24^2/200=2{,}88\ \Omega$. Ez 17,36-szor kisebb, mint a vezeték teljes ellenállása.

Ha a vezetéket n részre vágjuk és az egyes darabokat párhuzamosan kapcsoljuk, akkor az eredő ellenállás $\frac{1}{n^2}$ arányban lecsökken. Látható, hogy $n=4$ még a szükségesnél nagyobb, $n=5$ pedig már túl kicsi ellenállást eredményezne.

Próbálkozhatunk azzal, hogy a vezeték x hosszúságú darabjából 4 eres, a maradékból pedig 5 eres vezetéket készítünk, s ezeket sorba kapcsoljuk. Az ellenállásokra vonatkozó összefüggés akkor teljesül, ha

$$\left(\frac{x}{4^2}+\frac{20-x}{5^2}\right)\cdot 2{,}5=2{,}88, \qquad \text{ahonnan} \qquad x=15{,}64\ \mathrm{m}.$$

Major Csaba (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.)

Megjegyzés. A kapcsolás sokféleképpen megvalósítható. Megtehetjük például azt is, hogy bizonyos hosszúságú darabból két- vagy háromeres vezetéket készítünk, a maradékot pedig $n\geqslant 5$ részre hajtva egymással párhuzamosan, a többivel pedig sorosan kapcsoljuk. Úgy is eljárhatunk, hogy a vezetéket két részre (egy kb. 3 Ω-os és egy 47 Ω-os darabra) vágjuk, majd ezeket párhuzamosan kapcsoljuk.

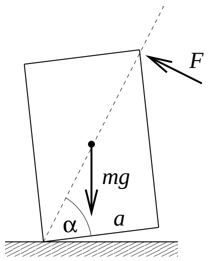
Ezek azonban nem célszerű kapcsolások, mert az bizonyos vezetékdarabokon sokkal nagyobb áram folyik, mint a többin. Táblázatokból kikereshetjük, hogy egy 0,2 mm^2 keresztmetszetű konstantán huzal maximum 5 A-es árammal terhelhető, ez alig több, mint a fele a feladatban szereplő fogyasztón átfolyó áramnak. Emiatt a kapcsolás nem tartalmazhat olyan részt, amelyen a teljes áram átfolyik, és még a kéteres szakasz is a terhelhetőség határának közelében van. Általában érdemes úgy eljárni, hogy minél egyenletesebben osszuk szét az áramot az egyes vezetékek között.

Kispál István (Dunaújváros, Széchenyi I. Gimn., III. o.t.) és
Perényi Péter (Budapest, Egressy G. Szki., III. o.t.)

119 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Borsos Júlia, Kispál István és Várady Gergő megoldása. Helyes 91 megoldás, kicsit hiányos (3 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 13, hibás 6 dolgozat.

FF. 3034. *Minden óvodás tudja, hogy ha összeilleszthető, egyforma elemekből (pl. LEGO elemekből) épít egy tornyot, akkor minél magasabb a torony, annál könnyebben feldől. Igaz-e, hogy az ugyanolyan alapú és azonos sűrűségű anyagból készült magas* *tornyot kisebb erővel, illetve kevesebb munkával lehet feldönteni, mint az alacsonyabbat?* (**M**) *(Másodikosoknak is!)*

Közli: *Radnai Gyula,* Budapest



Megoldás. Az *ábra* jelöléseit alkalmazva a torony feldöntéséhez az szükséges, hogy

$$F\frac{a}{\cos\alpha} > mg\frac{a}{2}, \qquad \text{azaz} \qquad F > \frac{mg}{2}\cos\alpha$$

teljesüljön. Mivel egy ϱ sűrűségű torony tömege $m = a^3\varrho\,\mathrm{tg}\,\alpha$, a feldöntéséhez szükséges legkisebb erő

$$F_{\min} = \frac{a^3\varrho g}{2}\sin\alpha = \text{állandó}\cdot\sin\alpha,$$

a magasabb (nagyobb α szöggel jellemezhető) torony feldöntéséhez *nagyobb erőt* kell kifejtenünk.

Ha lassan megdöntjük a tornyot, a tömegközéppontja a talajtól mért $\frac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2}$ magasságból $\frac{a}{2\cos\alpha}$ magasságba kerül, a szükséges munkavégzés tehát

$$W = mg\left(\frac{a}{2\cos\alpha} - \frac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2}\right) = \frac{a^4\varrho g}{2}\,\frac{(1-\sin\alpha)\,\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \text{állandó}\cdot\left(1 - \frac{1}{1+\sin\alpha}\right).$$

Különböző magasságú tornyokat összehasonlítva csak a legutolsó zárojeles kifejezés változik, az pedig α növekedtével egyre nagyobbá válik. Megállapíthatjuk tehát, hogy egy magasabb torony feldöntéséhez nemcsak nagyobb erő, de *több munka* is szükséges, mint az alacsonyabbéhoz.

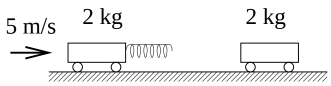
Eszerint a feladat szövegében megfogalmazott két állítás *egyike sem* igaz!

Ács Róbert (Szolnok, Verseghy F. Gimn., IV. o.t.)

Megjegyzés. Az óvodások által is ismert hétköznapi tapasztalatnak az lehet a magyarázata, hogy a talaj nem pontosan vízszintes, emiatt a torony falai nem függőlegesek. Az egyre magasabbra épített ferde torony tömegközéppontja az alaplap valamelyik széléhez egyre közelebb kerül, s végül magától (a határeset elérése előtt pedig igen kicsiny külső erő hatására) feldől.

Sarlós Ferenc (Baja, III. Béla Gimn., III. o.t.)

150 dolgozat érkezett. Helyes 11, kicsit hiányos (3 pont) 36 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 69, hibás 34 dolgozat.



FGy. 3040. *Vízszintes, sima asztalon két, egyenként* 2 kg *tömegű kiskocsi nyugszik. Az egyik kiskocsihoz az ábrán látható módon egy rugót is erősítettünk. A bal oldali kiskocsit* 5 m/s *sebességgel a jobb oldali kiskocsihoz lökjük. Mennyi a rugó rugalmas energiája akkor, amikor az ütközés során a legrövidebb a rugó?* (**Á**)

Közli: *Simon Péter,* Pécs

Megoldás. Amikor a rugó a legrövidebb, akkor a két kiskocsi sebessége megegyezik. A közös sebesség ebben a pillanatban (a lendületmegmaradás törvénye értelmében) $v_1 = 2{,}5$ m/s.

Az ütközés előtt a rendszer mozgási energiája $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 5^2 = 25$ J volt, a rugó legnagyobb összenyomódásakor pedig $2\cdot\frac{1}{2}mv_1^2 = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2{,}5^2 = 12{,}5$ J. Az energiamegmaradás törvénye szerint a rugó rugalmas energiája a mozgási energiák különbségével egyenlő, vagyis 12,5 J nagyságú.

Várallyay György (Budapest, Kodály Z. Magyar Kórusisk., II. o.t.)

192 dolgozat érkezett. Helyes 138 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 6, hibás 46 dolgozat.

FGy. 3050. *Két egyforma szökőkút egyikéből víz, másikából bor tör a magasba. A kiömlőnyílás keresztmetszete és a feltörő folyadék kezdősebessége is egyenlő. Melyik folyadék tör magasabbra? Melyik szökőkúton „táncolna” ugyanaz a labda magasabban?*

Közli: *Izsák Margit,* Dunaújváros

I. megoldás. A két szökőkút csak a folyadékok sűrűségében különbözik egymástól. A bor alkoholt is tartalmaz, emiatt a sűrűsége feltehetően kisebb, mint a vízé. (Ez a bor cukortartalma miatt nem teljesen magától értetődő, bizonyos boroknál nem is igaz.)

Mindkét szökőkútnál ugyanakkora v_0 kezdősebességgel tör fel a folyadék, s mindkét folyadék lassulása $g = 9{,}81$ m/s^2. Emiatt a szökőkutak folyadékoszlopának magassága a folyadék sűrűségétől függetlenül ugyanakkora, nevezetesen $h = v_0^2/(2g)$.

Ha egy labdát helyezünk a folyadéksugárra, az azért nem esik le, mert a „nekiütköző” folyadék által kifejtett erő éppen egyensúlyt tart a gravitációs erővel. (A „táncolás”, vagyis az oldalirányú mozgás és annak stabilitása igen bonyolult jelenség, azzal itt most nem foglalkozunk.)

Egy kicsiny Δt idő alatt az A keresztmetszetű folyadéksugárban $Av\Delta t$ térfogatú, tehát $\varrho Av\Delta t$ tömegű és $\varrho Av^2\Delta t$ függőleges lendületű (impulzusú) folyadékdarabka ütközik neki a labdának. Ez a folyadékdarabka $F\Delta t$ erőlökés hatására elveszíti a függőleges lendületét, tahát a labda által kifejtett erő $F = \varrho Av^2$. Ugyanekkora nagyságú erővel hat a folyadéksugár a labdára, s ez az erő tart egyensúlyt az $m_{\text{labda}}g$ gravitációs erővel.

A kétféle folyadékkal működő szökőkutat összehasonlítva látható, hogy (ugyanakkora m_{labda} és A esetén) a nagyobb sűrűségű folyadéknál a táncoló labda helyének közelében v kisebb kell legyen. Mivel ez nagyobb magasságban teljesül (hiszen a feltörő folyadék sebessége egyre csökken), megállapíthatjuk, hogy a szokásos, vízzel működő szökőkúton táncolna magasabban a labda. (Természetesen a víznél sűrűbb borral „működő” szökőkútnál éppen fordított lenne a helyzet.)

Gulyás Zoltán (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., II. o.t.) és
Kenyeres Péter (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján

II. megoldás. Az örvénymentesen áramló, belső súrlódástól mentes folyadékokra (a szökőkút közelítőleg ilyennek tekinthető) felírhatjuk a Bernoulli-törvényt:

$$\frac{p}{\varrho}+\frac{v^2}{2}+gh=\text{állandó}.$$

Ezt a törvényt a folyadékoszlop legalsó és legfelső pontjára alkalmazva, valamint kihasználva, hogy vízsugárban a nyomás alul is és felül is ugyanakkora (nevezetesen a külső légnyomás), az emelkedési magasságra a folyadék sűrűségétől függetlenül $h=v_0^2/(2g)$ adódik.

A folyadéksugár tetején táncoló labda „nyomja” a folyadékoszlopot. (A nyomás a labda súlyának és a folyadéksugár keresztmetszetének hányadosa, tehát közvetlenül a labda alatt mindkét szökőkútnál a folyadék (átlagos) nyomása ugyanakkora p_1 érték kell legyen.) Alkalmazzuk ismét Bernoulli törvényét a folyadék legalsó és legfelső pontjára:

$$\frac{p_0}{\varrho}+\frac{v_0^2}{2}=\frac{p_1}{\varrho}+gh,$$

ahonnan az emelkedési magasság:

$$h=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{p_1-p_0}{\varrho g}.$$

Látható, hogy nagyobb sűrűségű folyadéknál h nagyobb, tehát a vízsugáron magasabban táncol a labda, mint a víznél kisebb sűrűségű borral működő szökőkúton.

Szabó László (Temesvár, Bartók B. Líceum, II. o.t.) dolgozata alapján

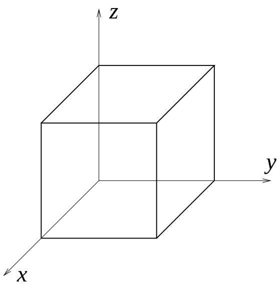
Megjegyzés. A megoldás során a folyadék mozgását egymástól független, tömegpontként kezelhető vízcseppek mozgásának, függőleges hajításának tekintettük. Ez nem mindig jogos feltevés, hiszen a vízsugár cseppekre szakadása előtt egy kiszemelt folyadékdarabkára a körülötte levő többi folyadék nyomást, erőt fejt ki. A szökőkútnál azért tekinthetünk el ettől a hatástól, mert a vékony folyadéksugár belsejében mindenhol (jó közelítéssel) *ugyanakkora* a nyomás, mint a szélénél, ott pedig a külső légnyomással egyezik meg. (Ez a helyzet lényegesen különbözik a hidrosztatikus esettől, ahol a nyomás a magasság függvényében *változik.*) Az egyenletes nyomású folyadékban a folyadékrészecskéket ugyanakkora erővel nyomja a környező folyadék lentről és fentről, elölről és hárulról, jobbról és balról, emiatt a környezet hatásáról megfeledkezhetünk.

G. P.

163 dolgozat érkezett. Helyes 38 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 44, hiányos (1–2 pont) 59, hibás 22 dolgozat.

FF. 3058. *Hasonlítsuk össze egy kockába zárt elektron két kvantumállapotát! Az egyik esetben csak az ábrán látható x irányban van a hullámállapotnak két csomósíkja, az y és z irányokban nincsen, a másik esetben mindhárom irányban van egy-egy csomósík. Melyik állapotban nagyobb az elektron energiája?*

Közli: *Radnóti Katalin,* Budapest



Megoldás. Az x tengely mentén mozgó, a széles „dobozba” zárt elektront olyan állóhullám írja le, melynek félhullámhossza (k_x+1)-szer „fér el” az a szakaszon, tehát $a=(k_x+1)\lambda/2$ (k_x a belső csomópontok száma). A de Broglie-féle $mv_x = h/\lambda$ összefüggésből kiszámíthatjuk az elektron „megengedett” sebességét, majd a mozgási energiáját:

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{h}{m\lambda}\right)^2 = \frac{h^2}{8ma^2}(k_x+1)^2.$$

Ha az elektron mindhárom térbeli irányban korlátozottan mozoghat, a teljes mozgási energiája

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 = \frac{h^2}{8ma^2}\left[(k_x+1)^2 + (k_y+1)^2 + (k_z+1)^2\right],$$

ahol k_x, k_y és k_z a (belső) csomósíkok száma. Összehasonlítva a megadott két állapotot láthatjuk, hogy a $k_x = 2$, $k_y = k_z = 0$ kvantumszámoknak megfelelő elektron energiája $\frac{11}{12}$ része a $k_x = k_y = k_z = 1$ állapotbelinek.

Halász György (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján

52 dolgozat érkezett. Helyes 43 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 7, hibás dolgozat.

FF. 3074. *A lámpagyújtogató bolygóján percenként van napnyugta. Három lépéssel körül tudja járni a kisbolygót. A kis herceg tanácsára* 24 *órán keresztül egyfolytában gyalogolt. Ezalatt* 5760 *lépést tett meg, miközben mindig a napnyugtát látta. (A lámpagyújtogató végig a bolygó egyenlítőjén mozgott.)*

a) *Milyen időközönként volt napnyugta a bolygón, miközben a lámpagyújtogató sétált rajta?*

b) *Mennyi a lámpagyújtogató és a bolygó tehetetlenségi nyomatékának aránya a bolygó forgástengelyére vonatkozólag?* (**M**) (Másodikosoknak is!)

Közli: *Simon Péter*, Pécs

Megoldás. *a*) A lámpagyújtogató percenként $\frac{5760}{24\cdot 60} = 4$ lépést tett meg. A kisbolygó ezalatt $\frac{4}{3}$ fordulatot fordult, a tengelyforgási ideje tehát $\frac{3}{4}$ perc. Mivel fordulatonként egyszer van napnyugta, ez (a lámpagyújtogató sétálása közben) $\frac{3}{4}$ percenként következik be.

b) A kisbolygóból és a lámpagyújtogatóból álló (zárt) rendszer perdülete időben állandó. Kezdetben (amikor a lámpagyújtogató még nem sétált), a perdület $(\Theta_b + \Theta_l)\,\omega_1$ volt, ahol Θ_b a bolygó, Θ_l a lámpagyújtogató tehetetlenségi nyomatéka, ω_1 pedig a közös szögsebesség. Amikor a lámpagyújtogató sétált, szögsebessége nulla volt (hiszen mindvégig „napnyugtát” látott), így a rendszer perdülete a kisbolygó $\Theta_b\omega_2$ perdületével egyezett meg. A perdületmegmaradás törvénye szerint $(\Theta_b + \Theta_l)\,\omega_1 = \Theta_b\omega_2$, ahonnan

$$\frac{\Theta_l}{\Theta_b} = \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$$

Gyöpös Noémi (Csurgó, Nagyváthy János Középisk., II. o.t.) dolgozata alapján

105 dolgozat érkezett. Helyes 65 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 3, hiányos (2 pont) 23, hibás 14 dolgozat.

CSILLAGÁSZAT

Rovatvezető: Horányi Gábor

A csillagok fényessége

Már az i.e. 2. sz.-ban élt *Hipparkhosz* görög csillagász feltüntette csillagkatalógusában a csillagok fényességét. Ehhez egy ún. *fényrend-skálát* kellett definiálnia: elsőrendűnek nevezte a legfényesebbnek látszó csillagokat, hatodrendűnek az éppen észrevehetőket. A többi – közepes fényességű – csillag fényességét becsléssel határozta meg.

Ez a fényrendskála a mai követelményeknek már természetesen nem felel meg, de hagyománytiszteletből a ma használatos fényrendskálát úgy definiálták, hogy illeszkedjék a Hipparkhosz-féle skálához (és persze érzékszerveinknek ahhoz a tulajdonságához is, hogy az érzet szubjektív erőssége nem lineárisan, hanem logaritmikusan függ az inger erősségétől [Weber–Fechner-féle pszichofizikai alaptörvény]). Eszerint két tetszőleges csillag látszó fényessége *magnitúdó* egységekben (m_1 és m_2) és a róluk érkező fény intenzitása (I_1 és I_2) között fennáll:

$$\mathrm{m}_1-\mathrm{m}_2=-2{,}5\lg\frac{\mathrm{I}_1}{\mathrm{I}_2}.$$

Ha még megadjuk egy tetszőleges csillag látszó fényességét is, azaz definiáljuk a skála nullpontját, akkor most már bármely csillag mért fényintenzitása alapján kiszámítható annak fényrendje. Így pl. a Betelgeuze (α Orionis) látszó fényessége 0,50 magnitúdó (0^{m},50), az égbolt legfényesebb csillagáé, a Sziriuszé (α Canis Maioris) -1^{m},46. Látható, hogy a fényesebb égitestek magnitúdó-értéke kisebb, a nagyon fényeseké már negatív érték. Földi távcsövekkel észlelhető leghalványabb csillagok kb. 24–25 magnitúdósak, a Hubble űrtávcső ezeknél jóval halványabb égitesteket is képes észlelni.

A látszó fényesség azonban semmit sem mond arról, hogy a csillag valójában milyen fényes, azaz mekkora teljesítménnyel sugároz a látható tartományban. Ugyanis a csillagok a legkülönbözőbb távolságokban helyezkednek el, és ezért lehetséges pl, hogy két csillag egyforma fényesnek látszik, miközben az egyik jóval fényesebb, de jóval messzebb van. Ezért az asztrofizikában, ha lehet, a csillagok ún. *abszolút fényességével* dolgozunk. Egy csillag abszolút fényessége az a látszó fényesség, amit akkor mérnénk, ha a csillag nem a valódi távolságában lenne, hanem pontosan 10 parsec távolságban. (1 parsec [pc] az a távolság, ahonnan merőleges rálátás esetén a földpálya fél nagytengelye 1 ívmásodperc látószög alatt látszik, azaz kb. 3,26 fényév.) Ha eltekintünk a csillagközi fényelnyelés hatásától, akkor a tőlünk r parsec távolságra levő csillag m látszó és M abszolút fényesség közt fennáll:

$$m-M=-5+5\lg r.$$

A mért fényességértékek függnek attól is, hogy az érzékelő berendezés (pl. emberi szem, fotólemez, fotódióda stb) érzékenysége hogyan függ a hullámhossztól, ezért a különböző műszerekkel mért fényességeket nagyon nehéz összehasonlítani. Ennek megkönnyítésére a csillagvizsgálókban szabványos színszűrőket, fényképező lemezeket stb. használnak.

Csaba György Gábor

Újdonságok

A Kuiper-öv

Századunk elején a csillagászok remélték, hogy van a Naprendszerben a Neptunuszon túl is nagybolygó. Sokáig hiába keresték, végre 1930-ban a keresés eredményre vezetett: C. Tombaugh felfedezte a Plútót. E bolygó kis mérete, szabálytalan pályaelemei azonban nagyon elütnek a többi nagybolygóétól, ezért sok vita folyt a Plútó eredetéről; sokan úgy vélték, hogy a Neptunusz megszökött holdja. 1992-ben felfedeztek egy égitestet (1992 QB1), amelynek pályája sokban hasonlít a Plútóéra, majd nagyjából ugyanilyen távol a Naptól még több hasonlót találtak. Kiderült, hogy a Plútó nem más, mint egy nagyra nőtt kisbolygó, amely a Naprendszer újonnan felfedezett külső kisbolygóövezetében, a Kuiper-övben kering. Ma kb. 60 Kuiper-objektumot ismerünk, köztük az 1996TO66-ot, amelynek átmérője 600–700 km lehet, így az ismert összes kisbolygó közt a második legnagyobb – csak a Ceres, az 1800 január 1-jén, legelsőnek felfedezett kisbolygó nagyobb nála. Az elméleti számítások szerint a Kuiper-övben nagyon sok anyag van; a felfedezéseknek tehát még nincs vége.

Csaba György Gábor

Mi újság a Marson?

Az 1997. július 4-én Marsot ért Mars Pathfinder (MPF), illetve ahogy nevezik, a Sagan Memorial Station (SMS) megadta magát a vörös bolygó hideg éjszakájának. Az utolsó értékelhető jeleket a MPF -től szept. 27-én sikerült fogni, azóta csak halvány, rövid jelek törték meg a csendet okt. 2-án és 7-én. Mivel a Sojourner marsjármű is az SMS-en keresztül kommunikált a Földdel, már vele sincs kapcsolat. A MPF még így is sokkal tovább dolgozott, mint remélték, hiszen a leszállóegységet 30 napi, a Sojournert egyheti élettartamra tervezték.

Közben 1997 szeptemberében a Mars közelébe ért a Mars Global Surveyor (MGS) szonda, és megkezdte a körpályára állást a Mars körül. Kamerája elkészítette az első lenyűgöző, nagyfelbontású képeket a Mars felszínéről. A 12 m-es felbontású képek részletesen mutatják a kanyonokat és a marsi homokdűnéket. A szonda folyamatosan „súrolta” a Mars légkörét, hogy csökkentse sebességét és pályamagasságát, de október 6-án az egyik napelem helyzete megváltozott, hátranyomódott (nyilván a légellenállás miatt). Ekkor a földi irányítók megemelték a szonda pályáját, hogy kockázatmentesen tanulmányozhassák a problémát. Néhány hét után úgy döntöttek, hogy folytatják a fékezést, de csak kisebb légkörbe-merüléseket végeznek. A szonda végső pályája valamennyire különbözni fog ugyan a tervezettől, de ez várhatóan nem lesz lényeges hatással a küldetés tudományos eredményeire.

Elméletek a Hold keletkezéséről

Az utóbbi időben egyre népszerűbb az az elképzelés, amely szerint a Hold valamikor a Föld testéből szakadt ki. 1997 augusztusában három amerikai kutató számítógépes szimulációval modellezte e kiszakadást. Elképzelésük szerint a „gyermekkorában” levő Földdel egy Mars-méretű objektum ütközött. A Nature szeptemberi számában a kutatók kifejtették, hogy egy ilyen ütközés után az „elő-Föld” körül keringő törmelékfelhő külső része már egy év alatt Hold-méretű objektummá állhatott össze. Az eredmény független a törmelékdarabok számától és méretétől. Meglepő, hogy a törmeléknek szerintük csak 15–40%-a került a Holdba. Érdekes, hogy próbálkozásaik egyharmadában a törmelék két kísérővé alakult. Az elmélet támogatóinak széles tábora van a geokémikusok közt, mert megmagyarázza többek között a Hold alacsony vastartalmát és a víz teljes hiányát (ha ugyan a Lunar Prospector nem fog vizet találni a Holdon. . .).

Fényes, nappali tűzgömb Amerika felett

1997. október 9-én az Egyesült Államok délnyugati része fölött az égen egy nappali tűzgömb tűnt föl. Egy texasi kutató szerint az objektum fényessége kb. −(15–18) magnitúdó lehetett, vagyis fényesebb volt, mint a Hold! A meteor helyi idő (Mountain Daylight Time) szerint 12:47-kor tűnt fel; csak néhány másodpercig látszott, csóvája viszont még kb. 10 percig volt megfigyelhető. Sokan látták a jelenséget. A meteorról legalább fél tucatnyi videókamera készített felvételt, köztük egy biztonsági kamera, amely rögzítette a felrobbanó tűzgömb felvillanását és hangját is. A Los Alamos-i, nukleáris robbantásokat figyelő laboratórium infrahang-detektorai is észlelték az eseményt. A laboratórium egyik munkatársa szerint a robbanés ereje 500 tonna TNT-nek felelt meg, amiből arra következtethetünk, hogy a meteor átmérője 50–75 cm közt lehetett. Egy időjárásfigyelő radar is rögzítette a csóvát.

A Sky and Telescope alapján összeállította

Makk Péter és **Szeredi Pál**
Budapest, Veres Péter Gimnázium 8. o.t.

Infravörös csillagászat

Az elektromágneses spektrum infravörös (IR) tartománya közvetlenül az optikai tartomány mellett található. Hullámhossza 760 nm-től 1 mm-ig terjed. Az igazi IR-tartomány azonban csak a 0,76-tól a 15 mikrométerig tart, amit három részre oszthatunk fel (közeli infravörös – 0,76–1,3 mikrométer; középső infravörös – 1,3–3,0 mikrométer és távoli infravörös – 3,0–15 mikrométer). Az infravörös sugárzást hősugárzásnak is nevezik. Ennek ellenére, a közeli és középső infravörös tartományban erőteljesen sugárzó források még optikai felvételeken is megjelenhetnek. Ennél nagyobb hullámhosszakon már csak elektronikus adatrögzítés lehetséges.

Egyes objektumokról – legyenek akár pontszerű vagy kiterjedt források – sokkal több információt nyerhetünk, ha az IR-tartományban vizsgáljuk őket, így a csillagászat egyik ága az infravörös források felkutatásával és vizsgálatával foglalkozik. Mivel a földi légkör gyakorlatilag csak a magaslégköri felhők, vagyis kb. 3000 méter felett átlátszó a teljes infravörös sugárzással szemben, illetve a légkör maga is bocsájt ki infravörös sugárzást, ezért az IR-megfigyeléseket repülőgépről és műholdról lehet a leghatékonybban végezni. (Korábban léggömbökre szerelt berendezésekkel is próbálkoztak.) A műszerek saját sugárzása is zavarhatja az észlelést; ez ellen úgy védekeznek, hogy a műszereket az abszolút nulla fokhoz közeli hőmérsékletre hűtik le. A műszerek fejlődésének köszönhetően számos földi telepítésű óriástávcső (pl. a hatalmas Keck-teleszkópok) is végez infravörös megfigyeléseket.

Az első igazán értékes eredmények az IRAS (Infrared Astronomical Satellite) infravörös csillagászati műhold pályára állítása után születtek meg (1983). 1995-ben indított utódja az ISO (Infrared Space Observatory). 1997-ben a Hubble-űrtávcső is kapott egy infravörös műszert, a közeljövőben pedig számos új műhold fellövését tervezik. Az infravörös csillagászat aranykorát éli, sok nagyon fontos dolgot árulva el az Univerzumról.

Mit vizsgálhatunk legjobban az IR-tartományban? Galaxisunkban erős infravörös forrás a csillagközi poranyag, különösen a születő csillagok környezetében. A születő bolygórendszerek porban gazdag anyagkorongjai is tanulmányozhatók ezzel a módszerrel (pl. Beta Pictoris nevű csillag környezete). Az IR csillagászat segítségével a galaxisok, csillagok és bolygórendszerek fejlődésébe pillanthatunk be, visszatekintve az egészen távoli múltba.

A Tejútrendszeren túl – amellett, hogy a spirálgalaxisok poranyagának sugárzása az uralkodó – sok aktív galaxis is erős IR-forrásnak bizonyult. Azokból a csillagvárosokban, ahol robbanásszerűen heves csillagkeletkezés zajlik, szintén sok infravörös sugárzást foghatunk.

Néhány fontosabb „infravörös oldal” és jelentősebb műhold adatai a hálózaton:

http://www.ipac.caltech.edu/ – IPAC (Infrared Processing and Analysis Center). Az infravörös főoldal; egy igen színvonalas és gazdag honlap, ahonnét gyakorlatilag mindenhová eljuthatunk az infravörös csillagászat témakörében. Az IPAC a NASA infravörös csillagászati programjának legfontosabb intézménye, ahol számos projekt adatainak feldolgozása folyik.

http://nedwww.ipac.caltech.edu/ – NASA/IPAC EXTRAGALACTIC DATABASE. Egy fantasztikus adatbázis – nem csak infravörös forrásokról – mintegy 120 000 képpel! Keresés különféle szempontok szerint.

http://www.ipac.caltech.edu/Outreach/Gallery/gallery.html – Az IPAC galériája és kapcsolat más „képtárakhoz”.

http://www.ipac.caltech.edu/ipac/iras/iras.html – IRAS (Infrared Astronomical Satellite). Ma már történelem ez a műhold, amely megalapozta az új infravörös csillagászatot. Szinte a teljes égboltot letapogatta, többször egymás után. Adataiból gigantikus katalógus készült (250 000 pontforrás és 16 000 kiterjedt forrás).

http://crystal.ipac.caltech.edu:8001/applications/IGA/ – IRAS Galaxis Atlasz; Tejútrendszerünk feltérképezése az infravörös tartományban.

http://www.ipac.caltech.edu/iso/iso.html – ISO (Infrared Space Observatory); az IRAS utódja – jelenleg a legfontosabb IR-műhold.

http://pegasus.phast.umass.edu/GradProg/2mass.html – 2MASS Home Page (Two Micron All Sky Survey); ez a program azt tűzte ki céljául, hogy földi telepítésű távcsövekkel, a korábbinál sokkal érzékenyebb műszerekkel pásztázza át az IR-égboltot.

http://www.gsfc.nasa.gov/astro/cobe/cobe_home.html – COBE (Cosmic Background Explorer, kozmikus háttérsugárzásvizsgáló műhold). E kitűnő szerkezet a mikrohullámú háttérsugárzás vizsgálatáról vált híressé, amely óriási jelentőségű a kozmológia szempontjából. A jelenleg is aktív műhold újabb lenyűgöző eredménnyel lepte meg a világot (lásd a következő címet).

http://oposite.stsci.edu/pubinfo/pr/1998/01/ – Kozmikus infravörös háttérsugárzásban izzik a Világegyetem – a COBE szenzációs eredménye! A magyar nyelvű fordítás az AKG honlapján található meg: http://www.akg.hu/supernova/hst/prc98-01/x.html

http://oposite.stsci.edu/pubinfo/pr/1998/dusty-spirals.html – Poranyag a spirálgalaxisokban – két „nagyágyú”, a Hubble-űrtávcső és az ISO együttműködésének pompás eredménye. A magyar nyelvű fordítás http://www.akg.hu/supernova/hst/iso/x.html

http://sunland.gsfc.nasa.gov/smex/wire/ – WIRE (Wide-Field Infrared Explorer). Az 1998-ban induló küldetés fő feladata a galaxisok kialakulásának és fejlődésének kutatása lesz.

http://sirtf.jpl.nasa.gov/sirtf/home.html – SIRTF (The Space InfraRed Telescope Facility). A 2001-ben induló IR-műhold figyelme minden fontos témára kiterjed: formálódó naprendszerek, csillagontó galaxisok, aktív galaxismagok stb. Már csak kb. 1400 nap az indulásig!

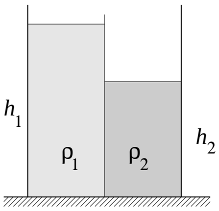
Addig is mindenkinek jó kutatást kívánok! Írjátok meg a lapnak, miről szeretnétek információkat a következő számban, vagy küldjetek nekem E-mailt (tom@gedeon.akg.hu)! A cikk elektronikus száma megtalálható az AKG Csillagászati szakkörének honlapján (www.akg.hu/supernova), a Hónap témája c. rovatban!

Simon Tamás

Fizikából kitűzött gyakorlatok és feladatok

196. mérési feladat. Átlátszó, hengeres palack aljába tegyünk homokot, majd töltsük tele vízzel és zárjuk le a tetejét. Rázzuk össze a keveréket, majd a palackot állítsuk ismét függőleges helyzetbe. Tanulmányozzuk a homok ülepedését! Adjuk meg a leülepedett anyag mennyiségét az idő függvényében! Milyen módon következtethetünk a homokszemcsék méretére?

Közli: *Varga István,* Békéscsaba



FGy. 3140. Téglatest alakú, felül nyitott edényt egy függőleges válaszfal két egyenlő térfogatú részre oszt. A bal oldalon $h_1=30$ cm magas, $\varrho_1=800\ \mathrm{kg/m^3}$ sűrűségű folyadékoszlop, a jobb oldalon $h_2=20$ cm magas, $\varrho_1=1600\ \mathrm{kg/m^3}$ sűrűségű folyadékoszlop van. Ezek a folyadékok egymással nem keverednek.

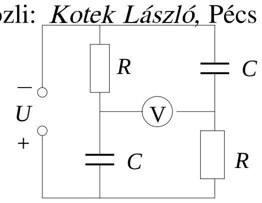
a) Milyen magas folyadékoszlopok alakulnak ki, ha a válaszfal alján kis nyílást vágunk?

b) Hol vághatunk nyílást a válaszfalon úgy, hogy a rendszerben semmi változás ne történjen?

Közli: *Kotek László,* Pécs

FGy. 3141. Az *ábrán* látható kapcsolásban $R=1\ \mathrm{k\Omega}$, $C=25$ nF, $U=25$ V. Mekkora feszültséget jelez az ideális (sztatikus) voltmérő?

Közli: *Csizmadia Szilárd,* Budapest



FGy. 3142. Hogyan változtatják meg a Föld forgásának szögsebességét az Egyenlítői-Guineában kibányászott szenet felhasználó erőművek?

Közli: *Várkonyi Péter,* Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn.

FGy. 3143. Dugattyús légszivattyút kapcsoltunk egy gázkisülésű csőre, melynek térfogata a dugattyús henger űrtartalmának tízszerese. Határozzuk meg, hány szívás után csökken a kisülési csőben lévő nyomás a tized részére! A szivattyúzás folyamatát tekintsük

a) izotermikusnak; *b)* adiabatikusnak ($\varkappa=1{,}4$).

(Melyik a reálisabb közelítés?)

Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

FGy. 3144. Egy kettőscsillag tőlünk 100 parsec távolságban van. Komponenseinek abszolút fényessége 2^{m} és 4^{m}. Mekkora a rendszer együttes látszó fényessége?*

Közli: *Csaba György Gábor,* Budapest

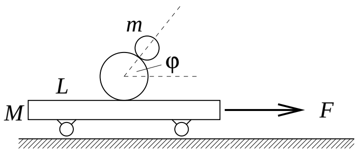
* Lásd a csillagok fényességéről szóló ismertetést a Csillagászat Rovatban, lapunk 187. oldalán!

FF. 3145. Egy edényben levő kolloid oldat fölé desztillált vizet töltünk. A két folyadék nem keveredik. Egy lézersugár lép a levegőből a vízbe úgy, hogy a beesési szög 5°-kal nagyobb, mint a törési szög. A vízben haladó fénysugár beesési szöge a kolloid oldat határán 6°-kal nagyobb, mint az ottani törési szög. Mekkora a fény terjedési sebessége a kolloid oldatban, ha a víznek a levegőre vonatkozó törésmutatója 1,333?

Közli: *Völgyi István,* Szekszárd, Garay J. Gimn.

FF. 3146. Egy repülőgép 900 km/h sebességgel halad, szárnyvégeinek távolsága 50 m. A Föld mágneses terének függőleges komponense 0,5 mT. Mekkora a gép szárnyvégei között indukálódó feszültség? Miért nem világít egy ekkora feszültségre méretezett izzólámpa, amelyet a szárnyvégekre kapcsolunk? Megmérhető-e mégis ez a feszültség?

Közli: *Pócs Miklós,* Budapest



FF. 3147. Egy mutatvány alkalmával L hosszúságú, M tömegű, könnyen gördülő kocsi közepére egy r és egy $R=2r$ sugarú gömböt helyeztek egymásra úgy, hogy a nagyobbik került alulra, és a középpontjaikat összekötő egyenes a vízszintessel φ szöget zárt be. Ezután a kocsit vízszintes irányú erővel úgy húzták, hogy közben a φ szög nem változott. A gömbök azonos anyagból készültek és tömörek. A kisebbik gömb tömege m.

a) Mekkora erőt fejtett ki a mutatványos?

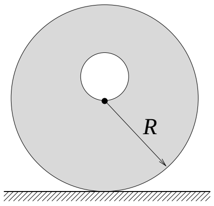
b) Mennyi idő múlva estek le a gömbök a kocsiról?

(A gömbök egymáson és a kocsin nem csúsztak meg. *Adatok:* $m=1$ kg, $M=6$ kg, $L=$ $=2$ m, $\varphi=60^\circ$.)

Közli: *Holics László,* Budapest

FF. 3148. Egy transzformátor N_1 menetszámú, L önindukciós együtthatójú primer tekercsére ω körfrekvenciájú váltófeszültséget kapcsolunk. Az N_2 menetes szekunder tekercset egy R ellenálláson keresztül zárjuk. (A tekercsek ohmos ellenállása elhanyagolható.) Határozzuk meg a primer és a szekunder feszültségek közti, valamint a primer és a szekunder áramok közti fáziskülönbséget! Vizsgáljuk meg az $R\to 0$ és $R\to\infty$ határeseteket! Mikor igaz az, hogy a tekercsben folyó áramok a menetszámokkal fordítva arányosak?

Közli: *Jarábik Béla,* Ócsa



FN. 3149. Egy R sugarú, homogén, tömör hengerbe az *ábrán* látható módon egy $R/4$ sugarú lyukat fúrtunk. Mekkora periódusidővel mozog jobbra-balra ez a test vízszintes, érdes asztalon, kis kitérések esetén?

Közli: *Szabó Szilárd,* Budapest

A fizika feladatok megoldásai a következő címre küldendők:

Eötvös Loránd Fizikai Társulat, KöMaL feladatok

Budapest, Pf. 433. 1371

A beküldési határidő: **1998. április 11.**

❄

Physics

Experimental problem: 196. Pour some sand into a transparent, cylindrical container, and fill it up with water. Close the bottle, shake it well, and stand it in a vertical position. Observe how the sand settles in the bottom. Find a relation between the volume of sediment (settled sand) and time. Find a method to determine the size of the sand particles.

New exercises: 3140. An open rectangular tank is divided into two equal halves by a vertical wall. In the left half of the tank is a column of liquid, density $\varrho_1 = 800\ \mathrm{kg/m^3}$, and height $h_1 = 30$ cm. The right half of the tank contains liquid of density $\varrho_2 = 1600\ \mathrm{kg/m^3}$ to a height, $h_2 = 20$ cm (see fig.). The two liquids don't mix. a) Find the heights of the respective columns, if a small hole is drilled in the bottom of the separating wall. b) Where is it possible to drill a hole, without causing any change to the state of the system? **3141.** Consider the circuit shown in the figure ($R = 1$ kΩ, $C = 25$ nF, $U = 25$ V). What is the p.d. shown on the ideal (static) voltmeter? **3142.** Coal is mined in the Equatorial-Guinea, to be burnt in power stations across the world. How does this change the angular velocity of the rotation of the Earth? **3143.** A piston operated vacuum pump is connected to a gas discharge tube of ten times its volume. How many times does the piston need to be pumped in order for the pressure in the discharge tube to decrease to $\frac{1}{10}$th of its original value? Assume the process to be a) isothermal; b) adiabatic ($\varkappa = 1.4$). (Which model is the most realistic?) **3144.** A binary star is at a distance of 100 parsec from the Earth. The absolute brightnesses of its components are 2^{m} and 4^{m} respectively. What is the absolute brightness of the whole system?

New problems: 3145. Distilled water is poured on top of a colloidal solution in a container. The two liquids don't mix. The angle of incidence of a laser beam entering the water from air is 5° greater than its angle of refraction, and the angle of incidence from the water at its interface with the solution is 6° greater than its angle of refraction. Find the velocity of the beam in the colloidal solution, if the refractive index for light travelling from air to water is 1.333. **3146.** An aeroplane, with a wing span of 50 m, travels at a speed of 900 km/h.The vertical component of the Earth's magnetic field is 0.5 mT. Find the p.d. induced between the wing tips. Why doesn't a bulb, designed for this voltage, light up if it is connected between the wing tips? Is it possible to measure the p.d.? **3147.** In a demonstration, two balls of equal density, and radii, r and $R = 2r$, are placed on the middle of a cart of mass $M = 6$ kg and length $L = 2$ m. The mass of smaller ball is $m = 1$ kg. The balls are caused to roll, without slipping, in such a way that the larger ball is at the bottom, and a strait line connecting their centres remains constant at an angle $\varphi = 60^\circ$ to the horizontal. The cart is pulled with a horizontal force in the direction shown in the figure. a) Find the magnitude of the force, F. b) How much time elapses before the balls fall down? **3148.** The primary coil of a transformer has N_1 turns, and self-inductance, L. The secondary coil has N_2 turns, and is connected to a load resistor, R. (The ohmic resistance of the coils is negligible.) An alternating emf of frequency, f, is applied across the primary coil. Determine the phase difference between the primary and secondary voltages and currents. Examine the limiting cases, $R \to 0$ and $R \to \infty$. Under what conditions are the currents in the coils inversely proportional to the number of turns? **3149.** A hole of radius $R/4$ is drilled through a solid, homogeneous cylinder, lying on a rough, horizontal surface, as shown in the figure. With what period does the cylinder move to and fro, if it is displaced slightly from its equilibrium position?