Jelentés az 1997. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat az ezévi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyt október 10-én du. 3 órától tartotta a következő városokban: Békéscsaba, Bonyhád, Budapest, Debrecen, Eger, Győr, Kaposvár, Kecskemét, Miskolc, Nagykanizsa, Nyíregyháza, Pécs, Salgótarján, Sopron, Szeged, Székesfehérvár, Szolnok, Szombathely, Veszprém. A Társulat a verseny lebonyolítására a következő bizottságot kérte fel: *Bártfai Pál, Csirmaz László, Fejes-Tóth Gábor, Kálmán Tamás, Kós Géza, Pálmay Lóránt, Pelikán József, Reiman István, Surányi János (elnök), Szeidl Ádám (titkár), Ujváry-Menyhárt Zoltán.*

A bizottság a feladatok kitűzésére szeptember 19-én (nem tudott részt venni Fejes-Tóth G.) és szeptember 26-án (nem tudott részt venni Csirmaz L., Fejes-Tóth G., Pelikán J. és Reiman I.) tartott ülést, és a következő feladatokban állapodott meg:

1. *Legyen p páratlan prímszám, és tekintsük a síkon azokat a pontokat, amelyeknek mindkét koordinátája a* $0, 1, 2, \ldots, p-1$ *számok valamelyike. Mutassuk meg, hogy ezen rácspontok közül kiválasztható p darab, amelyek közül semelyik három nem esik egy egyenesre.*

2. *Az ABC háromszög körülírt körének középpontja O. A beírt kör az oldalakat az A_1, B_1, C_1 pontokban érinti, középpontja O_1. Az $A_1B_1C_1$ háromszög magasságpontja M_1. Igazoljuk, hogy az O, O_1, M_1 pontok egy egyenesen vannak.*

3. *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges síkba rajzolható gráf élei kiszínezhetők három színnel úgy, hogy a gráfban ne legyen egyszínű kör.*

A dolgozatok áttanulmányozása után december 5-i ülésén (nem tudott részt venni Fejes-Tóth G. és Pelikán J., utóbbi tájékoztatást adott véleményéről) a bizottság a következő jelentést fogadta el: „A verseny mindenütt rendben zajlott le. A vidéki városokban összesen 188-an indultak, 115-en adtak be dolgozatot. Budapesten 156-an vettek részt a versenyen, közülük 83-an adtak be dolgozatot.

Senki nem oldotta meg mind a három feladatot. A harmadik feladatra csak többé-kevésbé bíztatónak látszó próbálkozások fordultak elő. Ennek alapján *I. Kürschák József díjat nem ad ki* a bizottság.

Két megoldást tartalmaz Gueth Krisztián és Lippner Gábor dolgozata. Az első feladatra mindketten ugyanazt a pontrendszert választják. A második feladatot Gueth körre vonatkozó inverzió segítségével oldja meg. A harmadik feladatnál csak belekezd egy gondolatba, de nem látszik, hogy az célravezet-e.

Lippner a második feladatot vektor-összefüggések és vektorszorzat felhasználásával kiszámolja. A harmadik feladatba is belekezd, de nem jut értékelhető részeredményre.

Ennek alapján *II. Kürschák József díjban* és 8000–8000 Ft jutalomban részesül

Gueth Krisztián, a szombathelyi Kanizsai Dorottya Gimnázium III. (11.) osztályos tanulója, Módos Tiborné és Sándor Endre tanítványa és

Lippner Gábor, A budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium IV. (12.) osztályos tanulója, Thiry Imréné, Dobos Sándor és Pósa Lajos tanítványa.

Az 1997. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldása

1. *Legyen p páratlan prímszám, és tekintsük a síkon azokat a pontokat, amelyeknek mindkét koordinátája a $0, 1, 2, \ldots, p-1$ számok valamelyike. Mutassuk meg, hogy ezen rácspontok közül kiválasztható p darab, amelyek közül semelyik három nem esik egy egyenesre.*

Megoldás. Bebizonyítjuk, hogy azok az $A:(i,y(i))$ pontok, amelyeknél $y(x)$ az x^2 (legkisebb nemnegatív) maradéka p-vel történő osztásnál ($0 \leqslant i \leqslant p-1$), kielégítik a követelményt. Az értelmezés szerint $y(x) = x^2 + cp$ alkalmas c egésszel.

Tegyük fel, hogy az A_iA_j és az A_iA_k szakaszok meredeksége egyenlő volna:

$$\frac{y(j)-y(i)}{j-i} = \frac{y(k)-y(i)}{k-i}.$$

A törteket eltávolítva, az értelmezést felhasználva és átrendezve:

$$(k-i)(j^2-i^2+(v-u)p) = (j-i)(k^2-i^2+(w-u)p),$$

továbbrendezve és alakítva

$$(k-i)(j-i)(j-k) = p\Big((j-i)(w-u)-(k-i)(v-u)\Big).$$

A bal oldali szorzatnak kellene tehát oszthatónak lennie p-vel. Ez azonban nem lehetséges, mert egy szorzat csak úgy lehet osztható egy prímszámmal, ha valamelyik tényezője osztható vele, itt pedig mindegyik tényező 0-tól különböző és abszolút értékük p-nél kisebb. Nem lehet tehát a két meredekség egyenlő.

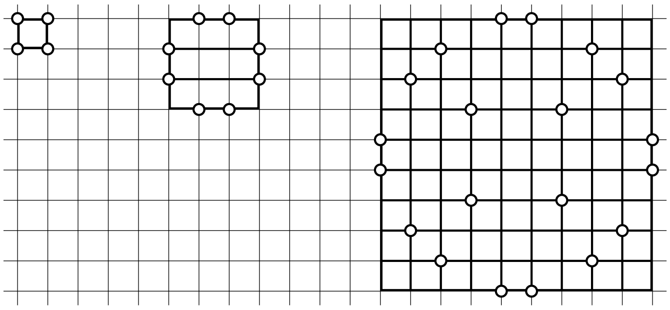
Megjegyzések. 1. Az x^2 helyett bármilyen egész együtthatós vagy egész helyeken egész értéket felvevő, másodfokú polinom megfelel. Érdekes, hogy a feladattal foglalkozó versenyzők többnyire az $\dfrac{x(x+1)}{2}$ polinomot választották.

2. Többen használtak olyan pontatlan állításokat, mint különbség maradéka egyenlő a maradékok különbségével, vagy szorzat maradéka egyenlő a tényezők maradékainak szorzatával, amelyek csak kiegészítésekkel érvényesek.

3. Egy versenyző azokat az (x,y) pontokat adta meg, amelyekre $xy \equiv 1 \pmod{p}$ $(1 \leqslant x \leqslant p-1)$, maga is megjegyezve, hogy így csak $p-1$ pontot kap.

4. A kérdésnek kiterjedt irodalma van. A feladat állítása igaznak látszik prímszám helyett minden pozitív egész számra, sőt próbálgatások során $n = 32$-ig és számos nagyobb páros n-re $2n$ pontot is sikerült találni úgy, hogy ne legyen közülük 3 egy egyenesen. Sikerült bebizonyítani, hogy tetszés szerinti pozitív h értékhez $(3/2)-h)n$ pont is kiválasztható, ha n elég nagy.

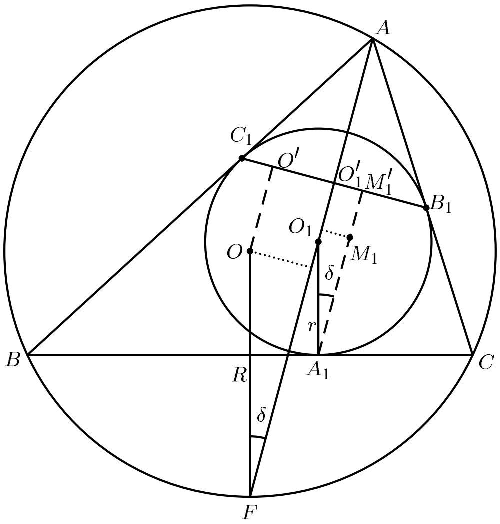
A problémával kapcsolatban R. K. Guy és P. A. Kelly több érdekes sejtést fogalmazott meg. Így többek közt azt sejtik, hogy csak az *1. ábrán* látható 3 esetben helyezhető



1. ábra

el $2n$ pont egy n oldalhosszú négyzetben úgy, hogy rendelkezzék a négyzet összes szimmetriájával; azt sejtik továbbá, hogy nagy n-re legfeljebb $(c+h)n$ pont helyezhető el a követelménynek megfelelően, ahol $c=(2\pi^2/3)^{1/3}\approx 1{,}85$. [1]

2. *Az ABC háromszög körülírt körének középpontja O. A beírt kör az oldalakat az A_1, B_1, C_1 pontokban érinti, középpontja O_1. Az $A_1B_1C_1$ háromszög magasságpontja M_1. Igazoljuk, hogy az O, O_1, M_1 pontok egy egyenesen vannak.*



2. ábra

I. megoldás. Tekintsük az O, O_1 és M_1 pontok merőleges vetületeit az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalaira. Elegendő azt megmutatni, hogy az ezek közti szakaszok aránya két különböző oldalon megegyező. Határozzuk meg ezt az arányt pl. a B_1C_1 oldalon. F-fel jelölve az ABC háromszög köré írt kör A-t nem tartalmazó BC ívének felezőpontját, ezen átmegy az O-ból a BC oldalra emelt merőleges is és az A-ból induló szögfelező is. Jelöljük a köztük levő szöget δ-val (2. ábra). Az O_1A_1 érintési sugár szintén merőleges a BC oldalra.

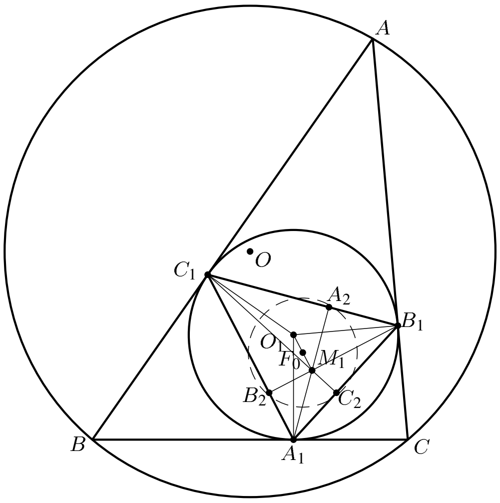
O, O_1 és M_1 merőleges vetületét a B_1C_1 oldalon jelöljük O', O_1' és M_1'-vel. Az AB_1C_1 háromszög egyenlő szárú, ezért O_1' AF-en van, tehát A_1M_1 párhuzamos AF-fel, és így $O_1A_1M_1\sphericalangle=\delta$. Az O-ból AF-re és O_1-ből A_1M_1'-re emelt merőleges szakaszok az $O'O_1'$, illetőleg $O_1'M_1'$ szakasszal egyenlők, tehát hosszuk $R\sin\delta$, illetőleg $r\sin\delta$, ahol R a háromszög köré írt kör sugara, r a beírt köré. Így

$$O'O_1' : O_1'M_1' = (R\sin\delta):(r\sin\delta) = R:r.$$

[1] R. K. Guy: *Unsolved problems in number theory*, 2. kiad. Springer, 1996. XVI + 285 old., közelebbről 242–244. old.

Ez az arány azonban csak a két kör adataitól függ, a B_1C_1 oldaltól nem, így ugyanez az arány adódik a másik két oldalon levő vetületek közti szakaszokra is. Ezzel a feladat állítása bizonyítást nyert.

II. megoldás. A megoldáshoz felhasználunk a háromszögekre vonatkozó néhány összefüggést, amelyeket a megoldás végén bizonyítunk.



3. ábra

Jelöljük az $A_1B_1C_1$ háromszög csúcsaiból húzott magasságok talppontját rendre A_2, B_2, C_2-vel (3. ábra).

a) Egy háromszög magasságai felezik a talpponti háromszög szögeit, így a magasságpont a talpponti háromszögbe írt kör középpontja, esetünkben M_1 az $A_2B_2C_2$-be írté.

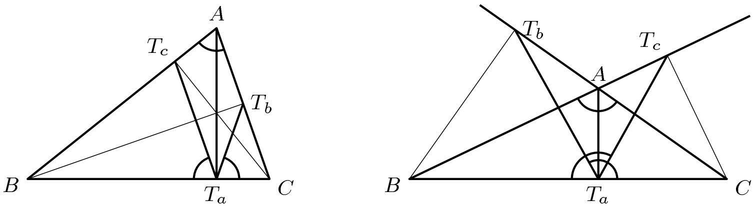
b) Ismeretes, hogy a háromszög (esetünkben az $A_1B_1C_1$ háromszög) köré írt körnek a csúcsokhoz mutató sugarai merőlegesek a talpponti háromszög oldalaira. Esetünkben O_1A_1, O_1B_1, O_1C_1 érintési sugár is, tehát merőleges rendre a BC, CA, AB oldalra is, tehát az ABC és az $A_2B_2C_2$ háromszög oldalai párhuzamosak.

c) A két háromszög hasonló helyzetű is, s így rájuk vonatkozóan megfelelő pontpárok összekötő egyenesei is párhuzamosak.

d) Az $A_2B_2C_2$ háromszög köré írt kör az $A_1B_1C_1$ háromszög ún. Feuerbach-köre, ez átmegy az oldalak felezőpontjain is, és középpontja az O_1M_1 szakasz F_0 felezőpontja.

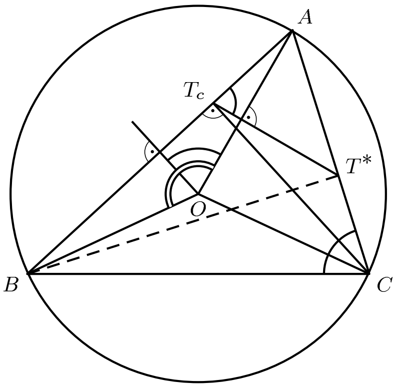
Az ABC háromszögre vonatkozóan O és O_1 megfelelői az $A_2B_2C_2$-re vonatkozóan F_0 és M_1, így összekötő egyeneseik párhuzamosak. A két egyenesnek azonban O_1 közös pontja, így O, O_1 és M_1 egy egyenesen van, és ezt kellett bizonyítani.

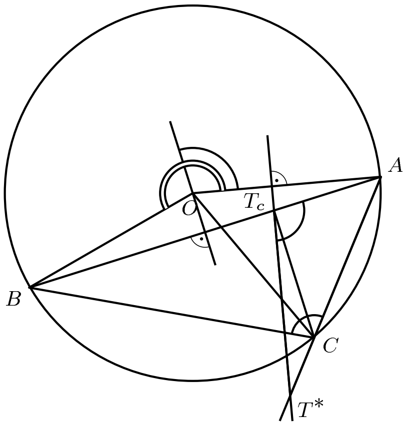
Bebizonyítjuk a felhasznált összefüggéseket.



4. ábra

a) Jelöljük az ABC háromszög egymás utáni csúcsaiból húzott magasságainak talppontját T_a, T_b, T_c-vel (4. ábra). Az ABT_aT_b és az ACT_aT_c négyszög húrnégyszög, így $T_cT_aB\sphericalangle = CAB\sphericalangle$ és $T_bT_aC\sphericalangle = BAC\sphericalangle$, tehát AT_a szögfelező.

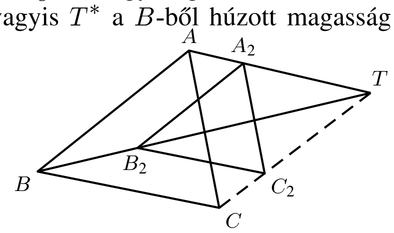




5. ábra

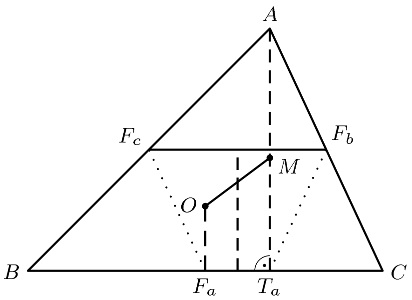
b) Az ABC háromszög köré írt O középpontú körben az $AOB\sphericalangle$ mint középponti szög az $ACB\sphericalangle$ kétszerese (5. ábra). Szögfelezője merőleges AB-re, és $ACB\sphericalangle$ nagyságú szöget zár be vele. A C pontból húzott magasság T_c talppontjából állítsunk merőlegest OA-ra, messe ez a CA oldal egyenesét a T^* pontban. Ekkor $AT_cT^*\sphericalangle$ mint merőleges szárú szög ugyancsak $ACB\sphericalangle$ nagyságú, tehát BCT^*T_C húrnégyszög, benne a BC oldal T_C-ből derékszögben látszik, tehát T^*-ból is, vagyis T^* a B-ből húzott magasság talppontja, T_b.

c) Azt kell belátnunk, hogy ha az ABC és az $A_2B_2C_2$ háromszög megfelelő oldalai párhuzamosak, akkor AA_2, BB_2 és CC_2 egy ponton megy keresztül, vagy párhuzamosak (6. ábra). Ha pl. AA_2 és BB_2 metszi egymást egy T pontban, akkor ABT és A_2B_2T hasonló háromszögek, így $AT : A_2T = AB : A_2B_2 = BT : B_2T$. Másrészt $AB : A_2B_2 = BC = B_2C_2$. Ekkor azonban a BCT és a B_2C_2T háromszög is hasonló, mert egy szögük és az azt közrefogó oldalak aránya egyenlő. Ebből viszont következik, hogy C, C_2 és T is egy egyenesen van.



6. ábra

d) A Feuerbach-körre vonatkozó állítások igazolására jelöljük a BC, CA, AB oldalak felezőpontjait rendre F_a, F_b, F_c-vel (7. ábra. Az A csúcs tükörképe az F_bF_c középvonalra a T_a magasságtalppont. F_aF_c mint középvonal F_bA-val egyenlő és párhuzamos, a tükrözés folytán pedig F_bT_a-val egyenlő. Így $F_aT_aF_bF_c$ szimmetrikus trapéz (lehet hurkolt, esetleg egyenlő szárú háromszög). Így kör írható köré, amelynek középpontja az F_aT_a szakasz felezőmerőlegesén van, az pedig felezi az O és az M magasságpont közti szakaszt.



7. ábra

A kör átmegy mind a három oldal felezőpontján, így a gondolatot a másik két oldalra megismételve, ugyanaz a kör adódik, sőt, azt is kapjuk, hogy a kör középpontja az OM szakasz F_0 felezőpontja. Az oldafelezőpontok és a magasságtalppontok közül bármelyik 3 különböző már meghatározza a kört.

3. *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges síkba rajzolható gráf élei kiszínezhetők három színnel úgy, hogy a gráfban ne legyen egyszínű kör.*

Megoldás. A feladat állítását hurokél és többszörös él nélküli gráfokra, ún. egyszerű gráfokra bizonyítjuk. (Hurokél minden színezésnél egyszínű körhöz vezetne, és egy négy éllel összekötött pontpár esetén már szintén keletkeznék kör.)

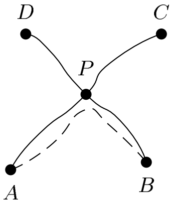
Szükségünk lesz a síkra rajzolható gráfok két ismert tulajdonságára (ezek bizonyításával kapcsolatban lásd megjegyzéseinket):

1) Síkra rajzolható gráfban nem lehet teljes ötszög, azaz öt olyan pont, amelyek közül bármely kettőt él köt össze.

2) Tetszőleges síkra rajzolható gráf tartalmaz legfeljebb 5-ödfokú pontot, azaz olyan pontot, amelyből legfeljebb 5 él indul ki.

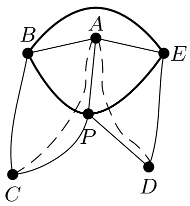
Az állítást a pontok száma szerinti indukcióval bizonyítjuk. 1, 2 és 3 pontú gráfokra az állítás triviális. Tegyük fel, hogy az állítás igaz n csúcsú gráfokra, és tekintsünk egy tetszőleges $n+1$ csúcsú síkra rajzolható gráfot. Ennek létezik legfeljebb 5-ödfokú pontja, legyen P egy ilyen pont. A P pont foka szerint három esetet különböztetünk meg.

I. eset: P legfeljebb 3-adfokú. Hagyjuk el P-t a belőle induló élekkel együtt. A megmaradó G' gráf továbbra is síkra rajzolható, és az indukciós feltétel szerint jól színezhető, azaz nem lesz benne egyszínű kör. Ezután G' egy jó színezéséhez a P-ből induló éleket színezzük különbözőre. Egyszínű kör G'-ben nincs, és a P-n átmenő körök is tartalmaznak két P-ből induló, különböző színű élt, a kapott színezés tehát jó.



8. ábra

II. eset: P 4-edfokú. Legyenek a P-vel összekötött pontok A, B, C és D. Ezek között van kettő – mondjuk A és B –, amelyek között nincs él, mert P-vel együtt nem alkothatnak teljes ötszöget. Hagyjuk el a P pontot a belőle kiinduló élekkel együtt, és húzzuk be az AB élt (Ez lehetséges, pl. az eredeti AP, PB élekhez elég közel, ld. *8. ábra*). A keletkező G' gráfot színezzük jól. Tegyük fel, hogy az AB él az 1-es színt kapta. Ezután színezzük G-ben az AP, PB éleket az 1-es színnel, PC-t és PD-t pedig a 2-es és a 3-as színnel. A G' jó színezése miatt egyszínű kör csak P-n keresztül haladhatna, és csak a P-ből kiinduló két egyszínű élen, AP-n és PB-n keresztül. Akkor azonban G' is tartalmazna 1-es színű kört az AB élen keresztül.

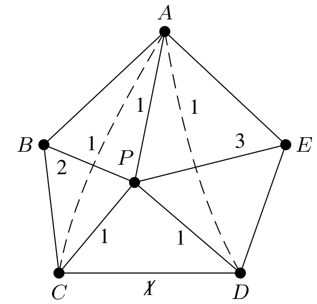


9. ábra

III. eset: P ötödfokú. Legyenek a P-ből kiinduló élek a körüljárás sorrendjében PA, PB, PC, PD és PE. Ha az AB, BC, CD, DE és EA élek valamelyike nem szerepelne G-ben, akkor húzzuk be. (Ez lehetséges, mert például ha AB nem szerepel, akkor az A és B pontokat összeköthetjük az AP és PB élekhez elég közel.) Ha ezt a bővített gráfot jól színezzük, az az eredeti gráfnak is egy jó színezését adja. A továbbiakban feltehetjük tehát, hogy az AB, BC, CD, DE és EA élek szerepelnek a gráfban.

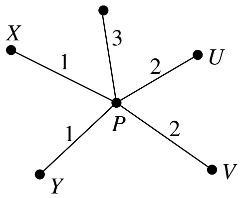
Ezután megmutatjuk, hogy a P és a belőle induló élek elhagyása után az $ABCDE$ ötszögnek meghúzható két, egy csúcsból induló átlója. Ha egyik átló sem szerepel G-ben, akkor behúzhatjuk AC-t és AD-t az AP és PC, illetve AP és PD élekhez elég közel. Az új élek csak a PB és PE élt metszik, így a keletkező G' gráf síkra rajzolható. Ha például a BE él szerepel G-ben, akkor a BEP háromszög elválasztja A-t C-től és D-től, így G-ben nem szerepelhet sem az AC, sem az AD él. Húzzuk meg ezeket az előbbi módon, majd hagyjuk el P-t a belőle induló élekkel együtt, így most is síkra rajzolható G' gráfot kapunk. Az indukciós feltevés szerint G' jól színezhető (*9. ábra*).

Színezzük jól a G' gráfot. Ha a színezésben AC és AD ugyanolyan, mondjuk 1-es színű, akkor G-nek a G'-ben is szereplő élei színét megtartva színezzük az AP, CP és DP éleket 1-es színnel, a BP és EP éleket 2-es, illetve 3-as színnel (*10. ábra*). Ha az így kapott gráfban van egyszínű kör, akkor az ismét csak 1-es színű lehet, P-n keresztül halad az AP és PC, az AP és PD vagy pedig a CP és PD éleken keresztül. Ezekben az esetekben viszont G' is tartalmaz egyszínű kört az AC, az AD, illetve a CA és AD éleken keresztül. A továbbiakban ezért feltesszük, hogy AC és AD színe különböző: 1-es, illetve 2-es.

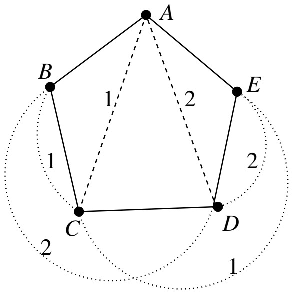


10. ábra

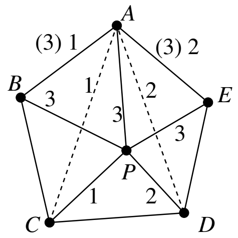
Hagyjuk el az AC és AD átlókat, és vizsgáljuk meg, hogy az ötszög csúcspárjai milyen színű utakkal köthetők össze. Ha létezik két olyan csúcspár: X, Y és U, V, amelyek közül X és Y nem köthető össze 1-es, U és V pár pedig nem köthető össze 2-es színnel, akkor színezzük ki PX-et és PY-t 1-es színnel, PU-t és PV-t 2-es színnel, a P-ből kiinduló ötödik élt pedig 3-as színnel (*11. ábra*). Ezzel a G gráf egy jó színezését kapjuk.



11. ábra



12. ábra

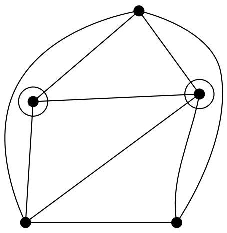


13. ábra

Mivel az AC él 1-es színű volt, A és C nem köthető össze 1-es színnel; hasonlóképpen A és D nem köthető össze 2-es színnel. Ha a B, D, E csúcsok közül valamelyik kettő nem köthető össze 2-es színnel, akkor azt a kettőt U, V-nek, A, C-t pedig X, Y-nak választva, az előbbiek szerint G-nek egy jó színezését nyerjük. Ha viszont B, D és E összeköthető 2-es színnel, akkor A nem köthető össze B-vel és E-vel 2-es színű úton, mert akkor A és D is összeköthető lenne 2-es színnel. Hasonlóképpen feltehetjük, hogy a B, C és E csúcsok összeköthetők 1-es színnel, míg az A csúcs nem köthető össze a B és E csúcsokkal 1-es színű úton sem (*12. ábra*).

Az A csúcs tehát nem köthető össze a B, és E csúcsokkal sem 1-es, sem 2-es színű úton. Ebből következik, hogy az AB és AE élek színe 3-as, és az A, B, E csúcsok között csak ezek az élek alkotnak 3-as színű utat. Színezzük át AB-t 1-esre, AE-t pedig 2-esre. Ezzel a változtatással nem keletkezhet egyszínű kör. Ezután színezzük ki a PA, PB és PE éleket 3-asra, a PC és PD eleket pedig 1-esre, illetve 2-esre (*13. ábra*). Ha lenne egyszínű kör, akkor az csak P-n keresztül haladhatna, és csak 3-as színű lehetne, és azt jelentené, hogy az A, B és E csúcsok közül valamelyik kettő között még egy 3-as színű út halad, ami ellentmondás.

Ezzel minden $n+1$ csúcsú gráfra igazoltuk az állítást.



14. ábra

Megjegyzések. 1. Az, hogy a teljes ötszög nem síkra rajzolható, például a következőképpen mutatható meg: Kössük össze a pontokat valamilyen sorrendben egymást nem metsző élekkel. A keletkező ötszög belsejében is, rajta kívül is csak két-két pontpárt köthet össze él, ezek a megmaradó csúcspárt elválasztják egymástól (*14. ábra*).

2. Síkra rajzolható gráfok a síkot lapokra bontják, ezekhez hozzávéve a gráfon kívüli tartományt is. Ha a gráf összefüggő, akkor a lapok l, az élek $é$ és a csúcsok c száma között fennáll az Euler-féle $l-é+c=2$ összefüggés. Ha a csúcsok száma legalább 3, akkor egy lapnak legalább 3 oldala van, másrészt minden él két lapnak oldala, így $3l \leqslant 2é$. Ezt az Euler-tételbe helyettesítve az $é \leqslant 3c-6$ egyenlőtlenség adódik. Ha minden csúcs legalább 6-odfokú lenne, akkor – mivel minden él két csúcshoz tartozik –, $é \geqslant c$ teljesülne.

3. Könnyen igazolható, hogy ha egy k csúcsú gráf nem tartalmaz kört, akkor legfeljebb $k-1$ éle van. Ha azt vizsgáljuk, hogy egy tetszőleges G gráf élei mikor színezhetők ki 3 színnel úgy, hogy ne legyen benne egyszínű kör, akkor szükséges, hogy tetszőleges k pozitív egészre G bármely k csúcsa között legfeljebb $3k-3$ él haladjon. Ez a feltétel gyengébb, mint a síkra rajzolhatóság, és be lehet bizonyítani, hogy nemcsak szükséges, hanem elégséges is.

Surányi János,
Kós Géza,
Ujváry-Menyhárt Zoltán

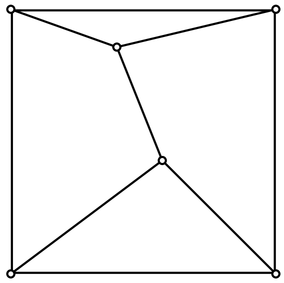
Rúd-csukló szerkezetek

A minden irányú elfordulást megengedő csuklókkal összekapcsolt merev rudakat rúd-csukló szerkezetnek nevezzük. Egy rúd-csukló szerkezet merev, ha bármely két csukló (nemcsak a rudakkal összekötöttek) távolsága állandó marad a szerkezet csuklóinak bármely folytonos mozgatása során. Például egy „négyzet” nem merev a síkban, mert „rombusszá” deformálható. Ha egyik átlójával bővítjük a négyzetet, akkor a síkban egy merev szerkezetet kapunk.

A merevségi vizsgálatoknál a dimenzió is fontos tényező, hiszen az átlójával bővített négyzet a síkban merev, de a térben nem, ugyanis az átló körül az átlón kívüli csúcsok egymástól függetlenül elfordulhatnak.

Egy c darab csuklót tartalmazó szerkezet merevségének szükséges feltétele, hogy a rudak r száma legalább $2c-3$ legyen a síkban, és legalább $3c-6$ a térben. A síkban vegyünk egy háromszöget, amelynek oldalai a szerkezet rúdjainak, csúcsai pedig a szerkezet csuklóinak felelnek meg. Ez a szerkezet merev, és természetesen kielégíti a szükséges feltételt. Egy merev szerkezethez mereven csatlakoztathatunk egy újabb csuklót legalább két rúddal, így a szerkezet rúdjainak száma legalább 2-vel nő minden újabb csukló hozzávételével, tehát a szükséges feltétel érvényben marad. Hasonlóan támaszthatjuk alá a szükséges feltételt térben is. Ez a meggondolás azonban nem bizonyító erejű, hiszen az említett iterációval nem juthatunk el minden merev szerkezethez, például az *1. ábrán* látható szerkezethez sem. A szükséges feltétel korrekt bizonyítása megtalálható a cikk végén említett könyvben.

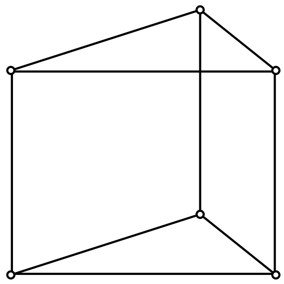
Ha egy szerkezet merev, és rúdjainak száma a síkban több, mint $2c-3$, illetve térben több, mint $3c-6$, akkor található olyan rúd, amelyet elhagyva a szerkezetből, az továbbra is merev marad. Azokat a merev szerkezeteket, amelyekből már nem hagyható el további rúd úgy, hogy a szerkezet még merev maradjon, minimális merev szerkezeteknek nevezzük. Természetesen a minimális merev szerkezetekben az élszám $2c-3$ a síban, illetve $3c-6$ a térben. A továbbiakban csak ilyen minimális merev szerkezetekkel foglalkozunk, és csak a síkban,



1. ábra

Tekintsünk olyan síkbeli szerkezeteket, amelyeknek rúdjai és csuklói kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egy térbeli konvex poliéder éleinek és csúcsainak. A síkbeli szerkezetnek így megfeleltetett térbeli poliédereket nevezzük megfelelő konvex poliédereknek. A következő meglepő állítás kapcsolatot teremt síkbeli minimális szerkezetek merevsége és térbeli konvex poliéderek élhálózatának síkbeli vetülete között.

Egy minimális síkbeli szerkezet akkor és csak akkor merev, ha a szerkezet rajza nem állítható elő egy térbeli megfelelő konvex poliéder élhálózatának vetületeként. Az *1. ábrán* látható szerkezet rajza nem állítható elő mint egy térbeli konvex poliéder síkbeli vetülete, mivel egyébként a háromszögek közelebbi csuklóit összekötő rúdnak megfelelő poliéderél egyenese a másik négy csúcshoz tartozó lapot két pontban is metszené. A *2. ábrán* található szerkezet rajza viszont egy háromszög alapú hasáb vetületeként előáll, ezért ez a szerkezet nem merev.

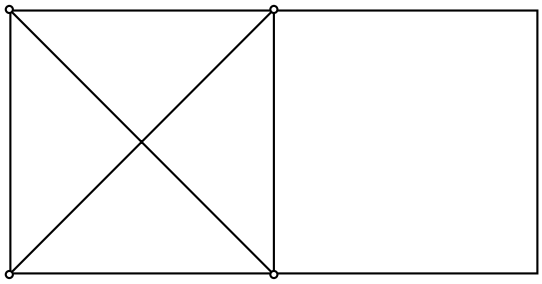


2. ábra

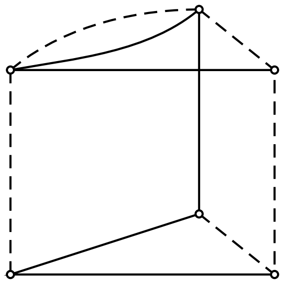
Az előző tételt használva egy szerkezet merevségének igazolásához meg kell mutatnunk, hogy nincs olyan konvex poliéder, amely élhálózatának vetülete az adott szerkezet rajzával azonos lenne. Ez általában nem könnyű probléma.

Feleltessünk meg egy szerkezetnek egy gráfot úgy, hogy a gráf csúcsai felelnek meg a szerkezet csuklóinak, és két csúcs között akkor és csak akkor van él, ha a szerkezet megfelelő csuklói között van rúd. Így minden szerkezethez tartozik egy gráf, de egy gráfhoz több szerkezet is tartozhat. Ezek között lehetnek merevek és nem merevek is, ilyen szerkezetet látunk az *1.* és a *2. ábrán.* Nyilvánvalóan a két szerkezet gráfja azonos, azonban az *1. ábrán* látható szerkezet merev, a *2. ábrán* látható nem. Ha a *2. ábrán* látható szerkezet rúdjainak hosszát „kissé” megváltoztatjuk, akkor merev szerkezethez jutunk. Nevezzük ezért az ilyen tulajdonságú szerkezeteket generikusan merevnek.

Ha egy gráfnak megfelelő valamely szerkezet generikusan merev, akkor a gráfnak megfelelő összes generikus szerkezet generikusan merev lesz. Egy gráf akkor merev, ha van legalább egy megfelelő generikusan merev szerkezete. Ezért az *1.* és a *2. ábrán* látható szerkezetek gráfja merev.



3. ábra



4. ábra

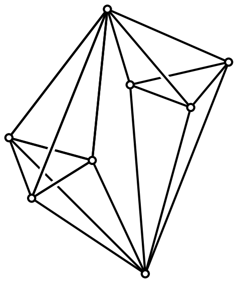
G. Laman talált először szükséges és elégséges feltételt gráfok síkbeli merevségére. Egy $2c-3$ élt tartalmazó gráf akkor és csak akkor merev, ha bármely részgráfja legfeljebb $2c'-3$ élt tartalmaz, ahol c' a részgráf csúcsainak számát jelöli. Előző gráfunkról tehát eldönthetjük, hogy merev-e, ha ellenőrizzük, hogy a részgráfokban nincs-e több él, mint $2c'-3$. Nevezzük ezt Laman-féle feltételnek. A *3. ábrán* egy olyan szerkezetet látunk, amelyhez tartozó gráf egy részgráfjában, nevezetesen a bal oldali négy csuklónak és a köztük levő rudaknak megfelelő részgráfjában, a Laman-féle feltétel nem teljesül, ezért ez a gráf nem merev, és a szerkezet sem merev. Annak eldöntése, hogy a gráf merev-e, exponenciális számú lépést igényelne a Laman-féle feltétel alkalmazásával, hiszen minden részgráfot meg kell vizsgálnunk.

Lovász László és *Y. Yemini* eremény polinomiális számú lépésben tudja eldönteni egy gráfról a síkbeli merevséget. A tétel megértéséhez szükséges a következő definíció: Egy összefüggő gráf feszítőfája egy olyan fa gráf, amelynek csúcsai megegyeznek a gráf csúcsaival, élei pedig a gráf élei közül valók. Lovász és Yemini tétele:

Egy $2c-3$ élt tartalmazó gráf akkor és csak akkor merev, ha bármely élét megduplázva az így kapott gráfnak van két feszítőfája, amelyek közös élt nem tartalmaznak.

Az 1. és a 2. ábrán látható szerkezetek gráfjának egy élét megduplázva kapjuk a *4. ábrán* látható két, közös élt nem tartalmazó feszítőfát.

A térben a $3v-6$ pontú merev gráfokra *teljesül*, hogy a részgráfok legfeljebb $3v'-6$ élt tartalmaznak, viszont a megfordítás már nem. Az *5. ábrán* látható térbeli szerkezet rendelkezik a szükséges feltételekkel, de a szerkezet nem merev, ugyanis a két banánszerű szerkezet egymástól függetlenül az érintési pontjaik által meghatározott egyenes körül szabadon foroghat. Térbeli szerkezetek gráfjaira a merevség jól ellenőrizhető jellemzése még nyitott probléma. A térbeli szerkezetek merevségének tárgyalása szintén megtalálható a cikk végén található irodalomban.



5. ábra

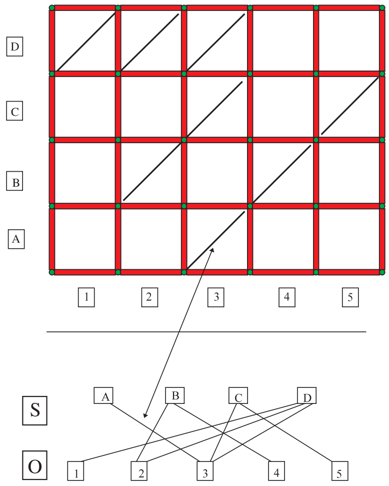
A. L. Cauchy mondott ki konvex poliéderekre merevséggel kapcsolatos tételt. Tekintsük a poliéder lapjait merev lemezeknek, és azokat az éleik mentén zsanérszerűen rögzítve képzeljük el a poliédert. Ha a poliéder lapjai merevek, és a poliéder konvex, akkor a poliéder merev.

Rúd-csukló szerkezetként előállítva egy konvex poliédert, a lapok merevségét csak háromszöglapok esetén garantálhatjuk. Ezért Cauchy tétele rúd-csukló szerkezetekre átfogalmazva a következő lenne:

A háromszöglapú konvex poliéderek, mint rúd-csukló szerkezetek, merevek a térben.

Évszázados probléma volt, hogy a konvexitás feltétele elhagyható-e Cauchy tételében. Sokáig és sokan azt hitték, hogy a konvexség feltétele elhagyható, de a válasz nemleges. *R. Conelly* talált először olyan poliédert, amely nem konvex és nem merev. Ilyen poliédert láthatunk a hátsó borító ábráján. Ez egy olyan háromszöglapú test, amelynek csúcsaiba csuklókat, éleire rudakat helyezve egy nem merev szerkezethez jutunk. Az ábra két szélén levő gúla-szerű szerkezetek hosszú nyíllal jelölt csúcsait egyesítve a szerkezet szívószálakon átbújtatott cérnák segítségével elkészíthető, ha van hozzá türelmünk és kitartásunk. Az azonosan jelölet rudak hosszát a keretezett számok jelölik. A szaggatott nyíl irányában a felső csúcs mozgatható.

A generikus szerkezetekkel ellentétben vizsgálhatunk olyan szerkezeteket is, amelyek nagyszámú, azonos hosszúságú rúdból állnak. Ilyenek például a rácsszerű szerkezetek. A síkbeli rácsszerű szerkezetek közül az $n \times m$-es négyzetrácsokkal foglalkozunk részletesebben. Természetesen ezek nem merevek a síkban, merevítésükhöz további rudakra van szükség. Merevségen most nem a generikus merevséget, hanem az eredeti definíció szerintit értjük, hiszen azt szeretnénk most kihasználni, hogy a csuklók és a rudak helyzete speciális. A merevítéshez szükséges további rudakat a négyzetek átlóiba tesszük, és átlós merevítőnek nevezzük. Készítsük el egy átlós merevítőket tartalmazó négyzetrács szerkezet merevítés-gráfját, ez egy páros gráf lesz, amelynek két pontosztályát S-sel és O-val jelöljük. A négyzetrács sorai feleljenek meg az S osztálynak, oszlopai az O osztálynak; ha van átlós merevítő az i-edik sor j-edik oszlopában, akkor legyen él az i és j pontok között a merevítés-gráfban (*6. ábra*).



6. ábra

Négyzetrácsok átlós merevítésére ad szükséges és elégséges feltételt *E. D. Bolker* és *H. Crapo* következő tétele:

Átlóival merevített négyzetrács szerkezet a síkban akkor és csak akkor merev, ha a merevítés-gráfja összefüggő.

Ennek a tételnek a segítségével a merevítés-gráf ismeretében lineáris időben eldönthető, hogy a négyzetrács szerkezet merev-e. Hasonló tétel kockarácsra térben nem ismert.

Aki a téma iránt érdeklődik, bővebb irodalomjegyzéket találhat A. Recski: *Matroid Theory and its Applications in Electric Network Theory and in Statics,* Akadémiai Kiadó, Budapest and Springer, Berlin (1989) c. könyvében.

Recski András
Budapesti Műszaki Egyetem
Nagy Gyula
Ybl Miklós Műszaki Főiskola

Optimalizálási feladatok dualitása

Egy geometriai feladatpár

Legyen adva az S síkon három pont, A, B és C, melyek egy hegyesszögű háromszöget alkotnak. A pontokkal kapcsolatban két feladatot fogalmazunk meg, és célunk a két feladat kapcsolatának vizsgálata.

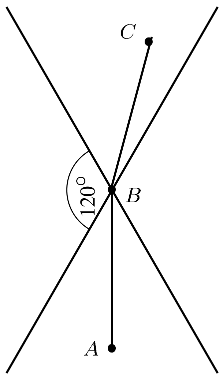
1. feladat: Keresendő az a D pont, amelynek össztávolsága az adott pontoktól, azaz az $\overline{AD}+\overline{BD}+\overline{CD}$ összeg, minimális. A feladat formálisan az alábbi módon írható le:

$$\min_{D\in S} \overline{AD}+\overline{BD}+\overline{CD}. \tag{1}$$

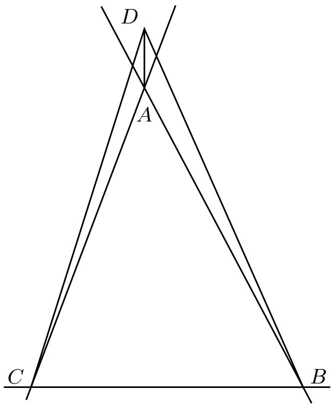
2. feladat: Fektessünk át az A, B, C pontokon egy-egy egyenest úgy, hogy a keletkező $A'B'C'$ háromszög szabályos legyen. Keresendő az összes ilyen háromszög közül az, amelyiknek legnagyobb a magassága. Jelölje $h(A'B'C')$ a háromszög magasságát. Ekkor a feladat formálisan felírva a következő:

$$\max_{A'B'C' \text{ szabályos } \triangle} h(A'B'C'). \tag{2}$$

Megjegyezzük, hogy nem teljesen nyilvánvaló, hogy a feladatoknak van optimális megoldása, azaz van olyan D pont, illetve $A'B'C'$ háromszög, amelyre a keresett magasság maximális, illetve minimális, de az optimális megoldások létezését be fogjuk bizonyítani.



1. ábra



2. ábra

Tegyük fel, hogy az $ABC\triangle$ legkisebb szöge, ha több ilyen is van, akkor az egyik ilyen, a B csúcsnál van. Vegyünk fel az A ponton keresztül egy olyan e egyenest, amelynek B és C ugyanazon az oldalán fekszik. Ez lesz az $A'B'C'\triangle$ első oldalegyenese. Ekkor egyértelműen meghatározott az a két, e_1 és e_2 egyenes, amely keresztül megy a B

ponton, és az e egyenessel 60 fokos szöget zár be. Azt állítjuk, hogy az A és C pont a két egyenes közül legalább az egyik esetében az egyenes ugyanazon oldalán fekszik, megengedve azt is, hogy A és C rajta legyen az egyenesen. Ha ugyanis nem így volna, akkor A és C az e_1 és e_2 által alkotott két csúcsszögpár egyikének két különböző szögtartományának belsejében volna, ami azt jelenti, hogy az ABC szög nagyobb 60 foknál, ami lehetetlen, hiszen így az $ABC\triangle$ szögeinek összege nagyobb volna 180 foknál (*1. ábra*). A keresett $A'B'C'\triangle$ második oldalegyenesének e_1 és e_2 közül azt választjuk tehát, amelynek ugyanazon oldalán fekszik A és C. Ekkor a háromszög harmadik, C-n keresztül menő egyenese egyértelműen meghatározott. Mivel a kiindulásul szolgáló e egyenest végtelen sokféleképpen lehet felvenni, ezért a (2) feladatban a maximumot egy végtelen halmazon keressük.

Az $ABC\triangle$ oldalegyenesei hét részre osztják fel az S síkot. A háromszög maga egy ezek közül, három egy-egy szöge csúcsszögének szögtartománya, míg további három szögeinek szögtartományából az a rész, amely a háromszögön kívül fekszik. Tegyük fel, hogy a D pont az A csúcsnál fekvő szög csúcsszögének tartományában van (*2. ábra*). Ekkor a BAD szög legalább akkora, mint a BAC szög kiegészítő szöge, tehát a BAD szög tompa szög. Innen az adódik, hogy a $BAD\triangle$ BD oldala nagyobb, mint a BA oldal. Hasonlóképp a CAD háromszögben CA rövidebb, mint CD. Tehát a D pont helyett előnyösebb az A pontot választani, hiszen $\overline{AA}+\overline{BA}+\overline{CA}=\overline{BA}+\overline{CA}<\overline{AD}+\overline{BD}+$ $+\overline{CD}$. Tegyük most fel, hogy a D pont az A csúcsnál fekvő szög szögtartományának a háromszögön kívül eső részében van. Legyen E az AD szakasz metszéspontja a BC oldallal. Az AEB és AEC szögek közül az egyik legalább derékszög. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ez az AEB szög. Tehát a CED szög is legalább derékszög, így a $CED\triangle$ leghosszabb oldala CD. Innen már megmutatható, hogy az E pont jobb választás, mint D. Ugyanis $\overline{AD}+\overline{BD}+\overline{CD}=\overline{AE}+\overline{ED}+\overline{BD}+\overline{CD}>$ $\overline{AE}+\overline{ED}+\overline{BD}+\overline{CE}>\overline{AE}+\overline{EB}+\overline{CE}$. Az utolsó lépésben az $EBD\triangle$-re vonatkozó $\triangle$-egyenlőtlenséget használtuk fel. Tehát az 1. feladathoz tartozó optimális D pontot az $ABC\triangle$-ben kell keresni.

Az alábbiakban bebizonyítunk két tételt a feladatpárra vonatkozóan. A tételek tipikusak abban az értelemben, hogy valahányszor dualitásról beszélünk valamely feladatpár esetén, akkor ugyanilyen szerkezetű tételeket igyekszünk bizonyítani.

1. tétel: Legyen az $ABC\triangle$ hegyesszögű, és ennek egy tetszőleges pontja D. Legyen $A'B'C'$ egy tetszőleges olyan szabályos háromszög, amelynek oldalegyenesei átmennek az A, B és C pontokon. Jelölje $h(A'B'C')$ a háromszög magasságát. Ekkor

$$h(A'B'C') \leqslant \overline{AD}+\overline{BD}+\overline{CD}. \tag{3}$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az A, B, C pontok rendre a $B'C'$, $C'A'$ és $A'B'$ oldalakon vannak.

A szabályos háromszög területét egyértelműen meghatározza a magassága, minél nagyobb a magasság, annál nagyobb a terület. Az $A'B'C'\triangle$-et a D pont az $A'B'D$, $B'C'D$ és $C'A'D$ háromszögekre bontja, tehát az előbbi területe az utóbbiak területeinek összege. A DC, DA és DB szakaszok legalább akkorák, mint az utóbbi háromszögek magasságai. Felhasználva, hogy az $A'B'C'\triangle$ szabályos, területére a következő becslést kapjuk.

$$T_{A'B'C'\triangle}=\frac{1}{2}\overline{A'B'}h(A'B'C') \leqslant \frac{1}{2}\overline{A'B'}(\overline{AD}+\overline{BD}+\overline{CD}).$$

Innen $\overline{A'B'}$-vel való osztás útján adódik az állítás.

2. tétel: Legyen az $ABC\triangle$ hegyesszögű az S síkon. Legyen $A'B'C'$ egy tetszőleges olyan szabályos háromszög, amelynek oldalegyenesei átmennek az A, B és C pontokon. Jelölje $h(A'B'C')$ a háromszög magasságát. Ekkor

$$\max_{A'B'C' \text{ szabályos}\triangle} h(A'B'C') = \min_{D\in S} \overline{AD}+\overline{BD}+\overline{CD}. \tag{4}$$

Bizonyítás: A fentiek szerint elegendő csak a háromszögbe eső D pontokat vizsgálni. Az előző tételből következik, hogy ha találunk egy $\hat{D}$ pontból és egy $\hat{A}'\hat{B}'\hat{C}'\triangle$-ből álló párt, amelyre $h(\hat{A}'\hat{B}'\hat{C}')=\overline{A\hat{D}}+\overline{B\hat{D}}+\overline{C\hat{D}}$ teljesül, akkor a $\hat{D}$ pont az 1. feladatnak, az $\hat{A}'\hat{B}'\hat{C}'$ háromszög a 2. feladatnak optimális megoldása. Ugyanis a (3) egyenlőtlenséget alkalmazva az adott esetre azt kapjuk, hogy bárhogy is válasszuk meg a $\hat{D}$ pontot és az $\hat{A}'\hat{B}'\hat{C}'$ háromszöget, a háromszög magassága nem lehet nagyobb, mint $\overline{A\hat{D}}+\overline{B\hat{D}}+$ $+\overline{C\hat{D}}$. Tehát ha egyenlő vele, akkor a lehető legnagyobb, azaz maximális. Hasonlóan okoskodva az $\overline{A\hat{D}}+\overline{B\hat{D}}+\overline{C\hat{D}}$ összeg esetében azt kapjuk, hogy ha az egyenlőség teljesül, akkor az összeg értéke a lehető legkisebb, azaz minimális. Ilyen pár pedig létezik, válasszuk ugyanis a $\hat{D}$ pontnak azt, ahonnan az $ABC\triangle$ mindhárom oldala 120 fok alatt látszik. (Ez a pont megkapható, mint az AB és AC oldalak fölé írt megfelelő látókörök metszéspontja.) Az $A'B'C'\triangle$-et pedig azok az egyenesek alkotják, amelyek az AD, BD, CD szakaszokra rendre az A, B, C pontokban merőlegesek. Ezért felhasználva a háromszög szabályos voltát nyerjük, hogy

$$T_{A'B'C'\triangle}=\frac{1}{2}\left(\overline{A'B'}\times\overline{CD}+\overline{B'C'}\times\overline{AD}+\overline{C'A'}\times\overline{BD}\right)=\frac{1}{2}\overline{A'B'}\left(\overline{CD}+\overline{AD}+\overline{BD}\right).$$

Másfelől tudjuk, hogy

$$T_{A'B'C'\triangle}=\frac{1}{2}\overline{A'B'}h(A'B'C').$$

A két egyenlőtlenséget egybevetve azonnal adódik a kívánt állítás.

Duális feladatpárok általában

A fentiekben egy minimalizálási és egy maximalizálási feladatból álló párt láttunk. Összefoglaló néven mindkettő optimalizálási feladat. Egy optimalizálási feladat mindig valamilyen matematikai objektumokra vonatkozik. Ezek az 1. feladat esetében pontok, a 2. feladatnál háromszögek voltak. Az optimalizálási feladat két részből áll: egyrészt feltételekből, amelyeket a feladatban szereplő objektumoknak ki kell elégíteni, másrészt egy célfüggvényből, amely értékeli az objektumokat. A feladat abban áll, hogy a feltételeket kielégítő objektumok közül a célfüggvény szerinti legjobbat találjuk meg, ha ilyen egyáltalán létezik, és legalább egyet, ha több legjobb is létezik. Az utóbbi esetben természetesen mindegyik legjobbhoz ugyanaz a célfüggvényérték tartozik. A feltételeket kielégítő objektumokat *megengedett megoldásoknak*, a legjobbakat pedig *optimális megoldásoknak* nevezzük. Az 1. feladat esetén a megengedett megoldások azok a pontok voltak, amelyek az $ABC\triangle$-gel egy síkban fekszenek, a 2. feladatban pedig azok a háromszögek, amelyek szabályosak, és oldalegyeneseik átmennek az A, B, C pontokon. Az optimális megoldás az 1. feladat esetén az a pont, amelynek az össztávolsága az A,

B, C pontoktól a legkisebb, a 2. feladatban pedig az a háromszög, amelynek magassága a legnagyobb.

Első tételünk azt mondta ki, hogy a minimalizálási feladat bármely megengedett megoldásához tartozó ezen feladatbeli célfüggvényérték legalább akkora, mint a maximalizálási feladat bármely megengedett megoldásához tartozó célfüggvényérték az utóbbi feladatban. Ha egy maximalizálási-minimalizálási feladatpárra egy ilyen állítás teljesül, akkor a maximalizálási feladatot *primál*, feladatnak, a minimalizálásit pedig a *duálisának* mondjuk, a tételt pedig *gyenge dualitási tételnek* nevezzük. Innen természetesen azonnal következik, hogy a minimalizálási feladat célfüggvénye legalább akkora, mint a maximalizálási feladaté. *Erős dualitási tételről* akkor beszélünk, ha azt is sikerül bebizonyítani, hogy az optimális célfüggvényértékek egyenlők. Esetünkben ez volt a 2. tétel. Ha egy feladatpárra csak a gyenge dualitási tétel igaz, de az erős nem, azaz van olyan eset, amikor a minimalizálási feladat célfüggvénye határozottan nagyobb, mint a maximalizálási feladaté, akkor *dualitási gyepűről* beszélünk. Az alábbiakban mindkettőre látunk példát.

A lineáris programozás esete

Egy vándorköszörűs járja az utcákat, ahol munkája akad, ott megáll és elvégzi azt. Így óránként 200 forintos keresetre tesz szert átlagosan, meglehetősen nagy biztonsággal. Egyszer odamegy hozzá egy ember, és azt mondja, hogy bérbe veszi a köszörűt. Alkudozni kezdenek a bérleti díjon. A köszörűsnek nyilván nem éri meg kevesebbért kiadni a szerszámát, mint 200Ft óránként, hiszen akkor jövedelme csökkenne. 200 forintnál többért természetesen megéri neki, hiszen úgy még több jövedelemre tesz szert, mint eddig. De még 200 forintért is megéri, hiszen a jövedelme akkor nem nő, hanem ugyanannyi marad, de magának nem kell dolgoznia. A bérlő viszont minél olcsóbban szeretné a köszörűt bérbevenni. Azt nem tudjuk, hogy milyen módszerrel akarja a szerszámot felhasználni, de bárhogy is tegye, a tényleges jövedelme, feltéve, hogy egyéb kiadása nincs, a bevétel és a bérleti díj különbsége lesz. Csak akkor tud valódi haszonra szert tenni, ha ügyesebb, mint a köszörűsünk, és többet keres óránként 200 forintnál. Azt látjuk tehát, hogy a 200Ft-os bérleti díj az, amin az üzlet megköttetik, ha megköttetik, mert a bérlő viszont lealkudhatja ennyire az árat, a köszörűsnek viszont legalább ennyit kell kérnie, de ennyiért még mindig megéri bérbeadni a szerszámot.

Nézzük meg a bérbeadás kérdését most egy bonyolultabb helyzetben. Egy gyár optimális gyártási tervét kell meghatározni egy bizonyos időszakra. Tegyük fel, hogy a gyárban összesen m gép van. Ismert a gyár ezen gépeinek kapacitása az adott időszakban, pontosabban szólva az az időtartam, amennyit legfeljebb dolgozhatnak. Ez gépenként különböző lehet, mert egyes gépeket különböző ideig kell karbantartani, hogy a meghibásodást megelőzzék, más gépeknek a személyzete szabadságra megy, stb. Jelölje az $1, 2, \ldots, m$ gépek kapacitását $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Tegyük fel továbbá, hogy a gyárban n terméket állítanak elő. A gépek és a termékek kapcsolatát az fejezi ki, hogy egy termék egy egységének gyártása az egyes gépeken mennyi ideig tart. Az $1, 2, \ldots, n$ termékek esetén jelölje $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ azt az időtartamot, amit egységnyi termék gyártása az első gépen igényel. A második gép esetében ugyanezeket a mennyiségeket jelölje a_{21}, $a_{22}, \ldots, a_{2m}$, és így tovább, az m-edik gép esetén legyenek ezek az időtartamok a_{m1}, $a_{m2}, \ldots, a_{mn}$. Végezetül feltesszük, hogy ismert, hogy az $1, 2, \ldots, n$ termékek egy egységén mennyi a haszon, melyet rendre $c_1, c_2, \ldots, c_n$ jelöl. Feladatunk meghatározni, hogy mit gyártson az üzem úgy, hogy minden gép el tudja látni a rá váró feladatokat, azaz a legyártandó termékek ne kívánjanak több időt tölteni rajta összesen, mint a kapacitása az adott időszakban, és a vállalat haszna maximális legyen. Az egyes temékekből gyártandó, egyelőre még ismeretlen, mennyiségek legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ez azt jelenti például, hogy az első termékből legyártandó teljes mennyiség a harmadik gépen $a_{31}x_1$ időt fog eltölteni. Ha a harmadik gépre az összes ilyen mennyiséget összegezzük, akkor kapjuk meg, hogy a termelési terv szerint a harmadik gépnek mennyit kellene dolgoznia, és ez nem lehet több, mint a gép kapacitása. Természetesen ennek nemcsak a harmadik gépre kell teljesülnie, hanem valamennyi gépre. Így a következő feltételekhez jutunk:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leqslant b_2 \\ &\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqslant b_m. \end{aligned} \tag{5}$$

A változók értéke negatív nem lehet, mert ez azt jelentené, hogy valamelyik terméket nem gyártjuk, hanem vásároljuk. Ezt formálisan kifejezve kapjuk, hogy

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots x_n \geqslant 0. \tag{6}$$

Mivel a második termék egy egységén c_2 a nyereségünk, ezért, ha a gyártott mennyiség x_2, akkor ezen a terméken a nyereség c_2x_2 lesz, a teljes nyereség pedig az ilyen tagok összege. Tehát a célfüggvényünk

$$\max\left(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n\right) \tag{7}$$

lesz.

Az a feladat, amely az (5) és (6) feltételek mellett a (7) célfüggvény optimalizálását jelenti, egy lineáris programozási probléma.

Valaki ajánlatot tesz a gyár tulajdonosának, hogy bérbe veszi az üzemet. Hogy létrejön-e az üzlet, még nem tudjuk, de egy dolog biztos: a tulajdonos vagy minden gépet bérbe ad vagy egyet sem. Az alku most akörül folyik, hogy az egyes gépek bérleti díja mennyi legyen. Tegyük fel, hogy az egyelőre még ismeretlen bérleti díjak az 1, 2, $\ldots$, m gépek esetén időegységenként $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

A tulajdonosnak akkor éri meg bérbe adni az üzemet, ha olyan bérleti díjakat kap, hogy ezzel jobban jár, mintha akármelyik termékét gyártaná. Nézzük például az első terméket. Ennek egy egységén c_1 a haszon, és ennek legyártásához $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}$ egységnyi időket használ fel, melyekért rendre $a_{11}y_1, a_{21}y_2, \ldots, a_{m1}y_m$ bérleti díjakat kap. Tehát az utóbbiak összegének legalább akkorának kell lennie, mint c_1. Hasonló igaz a többi gépre is. Innen az

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m &\geqslant c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m &\geqslant c_2 \\ &\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m &\geqslant c_n \end{aligned} \tag{8}$$

feltételeket kapjuk. A változók most sem lehetnek negatívak, hiszen ez azt jelentené, hogy valamelyik gép kölcsönzéséért nemhogy nem kap a tulajdonos pénzt, hanem egyenesen neki kell fizetnie:

$$y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0, \ldots y_m \geqslant 0. \tag{9}$$

(8) és (9) a bérbeadás feltétele. A bérlő nem tud a maga szempontjából jobb díjat elérni, mintha ezen feltételek mellett minimalizálja az összdíjat, azaz megkeresi a

$$\min\,(b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_my_m) \tag{10}$$

célfüggvény optimális értékét, tehát neki akkor éri meg bérbevenni a gyárat, ha azt olyan ügyesen tudja felhasználni, hogy ennél nagyobb hasznot tud elérni.

A (8)–(10) feladat ismét egy lineáris programozási feladat. Ezt nevezzük az (5)–(7) feladat *duáljának*. Magának az (5)–(7) problémának *primál* feladat a neve. Vegyük szemügyre a két feladatot formálisan. Az (5) egyenlőtlenségrendszer baloldán az együtthatókat soronként felírva az alábbi, úgynevezett mátrixot kapjuk:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Ebből úgy kapjuk meg a (8) feltételrendszer baloldalának mátrixát, hogy tükrözzük a főátlóra, azaz a bal felső sarokból induló azon „vonalra”, amely azokból az együtthatókból áll, melyek két indexe egyenlő:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ & & \ldots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Ami a primál feladatban a célfüggvény volt, az a duáljában az egyenlőtlenségek jobboldala és viszont. Amikor az (5)–(7) feladatot bevezettük, akkor az a_{ij} együttható jelentése az volt, hogy a j termék egy egysége mennyi időt tölt az i gépen. Természetes volna tehát azt gondolni, hogy az ilyen együtthatók nem lehetnek negatívak. Hasonló vonatkozik a b_i, c_j mennyiségekre is, hiszen például mi értelme volna egy olyan terméket gyártani, amin negatív nyereség, magyarul veszteség keletkezik. Mi azonban most eltekintünk ezektől a megfontolásoktól, és megengedjük, hogy a feladatokban szereplő mennyiségek tetszőleges valós számok legyenek. Még ebben az esetben is igaz azonban mind a gyenge, mind az erős dualitási tétel:

3. tétel: Tegyük fel, hogy az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ értékek kielégítik az (5) és (6) feltételeket, hasonlóképpen az $y_1, y_2, \ldots, y_m$ értékek pedig a (8) és (9) egyenlőtlenségeket. Ekkor

$$c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \leqslant b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_my_m. \tag{13}$$

Bizonyítás: Mivel az $y_1, y_2, \ldots, y_m$ nem lehetnek negatívak, ezért szabad velük az (5) egyenlőtlenségeket rendre beszorozni, majd az így kapott egyenlőtlenségeket összeadni. Így azt kapjuk, hogy

$$\begin{gathered} y_1(a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n)+\ldots+y_m(a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n)= \\ =\sum_{i=1}^m y_i\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}x_jy_i \leqslant b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_my_m. \end{gathered} \tag{14}$$

Ugyanígy beszorozhatjuk a (8) egyenlőtlenségeket rendre a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mennyiségekkel és a keletkező egyenlőtlenségeket összegezhetjük:

$$\begin{aligned} &x_1(a_{11}y_1+\ldots+a_{m1}y_m)+\ldots+x_n(a_{1n}y_1+\ldots+a_{mn}y_m)= \\ &=\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_jy_i \geqslant c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n. \end{aligned} \tag{15}$$

Innen a kívánt egyenlőtlenség azért következik, mivel (14) és (15) baloldala megegyezik.

Köztudott*, hogy egy lineáris programozási feladat három osztályba eshet: (i) egyáltalán nincs megengedett megoldása, (ii) van megengedett megoldása, de a célfüggvénye nemkorlátos, azaz ha $\mathbf{x}$ jelöli az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ értékekből álló n-est, akkor létezik megengedett megoldásoknak egy olyan $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots\}$ végtelen sorozata, hogy $\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n} c_jx_j^k = =\infty$, (iii) a feladatnak van optimális megoldása. A gyenge dualitási tételből következik, hogy amennyiben a primál feladat nemkorlátos, akkor a duál feladatnak nem lehet megengedett megoldása. Ha ugyanis volna, akkor a célfüggvény ehhez tartozó értéke köteles volna legalább akkora lenni, mint az előbb említett határértékbeli sorozat valamennyi tagja, az pedig lehetetlen. Az erős dualitási tétel csak a (iii) esetre vonatkozhat, és a következőt állítja:

4. tétel: Ha a primál feladatnak van optimális megoldása, akkor van optimális megoldása a duál feladatnak is, és a két feladat optimális célfüggvényértékei egyenlők. .

A tétel bizonyítása túllépi a jelen dolgozat kereteit, ezért elhagyjuk.

A kritikus út módszere

A lineáris programozás dualitási tételeinek nagyon sok fontos speciális esete van. Ezek közül több anélkül bizonyítható, hogy hivatkozni kellene a lineáris programozásra. Egy ilyen, építő vállalatok, nagy berendézeseket (pl. hajó, vonat, daru) gyártó üzemek napi gyakorlatában használt feladatról lesz szó.

Egy ház építését vesszük példának. Ez számos különböző tevékenységből áll. Ezek közül egyeseknek meg kell előzni másokat. Nyilvánvaló, hogy az alapok kiásása megelőzi például a falak felhúzását, a vízvezetékek szerelését. A tevékenységek halmazát jelölje V. Ha a és b két tevékenység, azaz a, $b \in V$, akkor három eset lehetséges: (i) az a tevékenységnek már be kell fejeződnie, amikor a b tevékenységhez hozzákezdünk, másképpen kifejezve a *megelőzi* b-t, (ii) az a és b tevékenység nincs hatással egymásra, (iii) b megelőzi a-t.

Persze például az alapok kiásása és a vízvezeték szerelése között számos tevékenység van, amit szintén el kell végezni. Azt mondjuk, hogy az a tevékenység *közvetlenül megelőzi* a b-t, ha nincsen olyan c tevékenység, amit a megelőz, és ami viszont megelőzi b-t. Jelölje N azon rendezett (a, b) párok halmazát, ahol a közvetlenül megelőzi b-t. Ekkor a az előzmény, b az „utózmány”. Célunk az, hogy a ház a lehető legrövidebb idő alatt elkészüljön. Ehhez természetesen ismerni kell az egyes tevékenységek elvégzéséhez szükséges időt, amit az a tevékenység esetén c_a jelöl.

* l. pl.: Prékopa András: Lineáris programozás, KÖMAL, 1998/1. sz.

1. példa: Különösen családi ház építésénél fordul elő, hogy az egész ház elkészítését részfeladatokra bontják fel, és a leendő tulajdonos mindig azt a már elvégezhető részfeladatot csináltatja meg, amire pénze van. Tekintsük most egy ilyen részfeladatot, nevezetesen a gáz bevezetését az utca alatt található csőből egy kisebb átmérőjű, föld alatt vezetett csövön keresztül a házba. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy ez a részfeladat mindössze a következő tevékenységekből áll: előkészítés (s), a cső elhelyezéséhez szükséges árok kiásása (a), a cső szerelése (c), szigetelés (g), a cső leeresztése az árokba (l), a vezeték bekötése (k), a vezeték próbája (p), az árok befedése (b). Zárójelben mindenütt az a betű áll, amivel az alábbiakban az adott tevékenységre hivatkozunk. A tevékenységek elvégzéséhez szükséges időket, az egyes tevékenységek közvetlen előzményeit és az egyes tevékenységek megkezdésének ütemezését az alábbi táblázat foglalja össze. A tevékenységek ütemezését alább elemezzük.

tevékenység	elvégzés ideje	előzmény	kezdet időpontja	befejezés időpontja
s	1	–	0	1
a	10	s	1	11
c	3	s	1	4
g	4	c	4	8
l	2	a, g	11	13
k	1	l	13	14
p	1	k	14	15
b	2	p	15	17

Tegyük fel, hogy a tevékenységeket megkezdésük után megszakítás nélkül folyamatosan végezzük. Ütemezzük az s tevékenységet a képzeletbeli 0 időpontra, így s az 1 időpontban fejező-dik be. Ennél előbb sem a, sem c nem kezdődhet el. Ha mindkettőt valóban megkezdjük ekkor, úgy a a 11, c a 4 időpontban fejeződik be. A 4 időpontban azonnal hozzáfoghatunk a g tevékenységhez, és az a 8 időpontban ér véget. Ekkor azonban a még hátralévő tevékenységek, azaz l, k, p, b, egyike sem kezdődhet el, mert mindegyiknek van egy-egy olyan előzménye, ami még nem készült el. Ez a helyzet a 11 időpontban változik, amikor a elkészül, és így hozzáfoghatunk l-hez. A továbbiakat a táblázatunk tartalmazza, amiből kiderül, hogy a teljes szereléshez 17 időegység szükséges.

A gyakorlatban egy ház felépítése vagy egy nagyobb szerelési munka sok száz vagy ezer tevékenységből állhat, és ennek a nyomonkövetése kézzel már igen nehézkes. Ezért célunk egy olyan módszer kifejlesztése, amely számítógéppel végezhető.

Az a_1, a_2, $\ldots$, a_k tevékenységeket *útnak* mondjuk, ha (a_1, a_2), (a_2, a_3), $\ldots$, $(a_{k-1}, a_k) \in N$. Ha a_1, a_2, $\ldots$, a_k út, és még az is teljesül, hogy $a_1 = a_k$, akkor az utat körnek nevezzük. Első megállapításunk éppen az, hogy tevékenységekből nem lehet kört alkotni. Hiszen ekkor a_2-t nem lehet elkezdeni amíg a_1-et be nem fejeztük, a_3-at, amíg a_2-t be nem fejeztük, és így tovább, egészen addig, hogy $a_k = a_1$-et sem lehet elkezdeni addig, amíg a_{k-1} nincs kész, azaz a tevékenységek körben várnának egymásra, semelyikhez sem lehetne hozzákezdeni.

Feltesszük továbbá, hogy létezik egy s kezdeti tevékenység, egy első kapavágás, aminek minden más tevékenységet meg kell előznie, és egy t befejező tevékenység, a kulcsátadás, aminek minden más tevékenységet követnie kell.

Ütemezni fogjuk a tevékenységek megkezdését. Az s kezdeti tevékenységet a képzeletbeli 0 időpontra tesszük. Általában az a tevékenység megkezdésének időpontját $\mu(a)$ jelöli. Ha a közvetlenül megelőzi b-t, akkor b megkezdését csak olyan időpontra lehet ütemezni a megkezdéséhez viszonyítva, hogy legyen elegendő idő a teljes elvégzésére. Így az alábbi feltételeket kapjuk:

(16) $$\mu(s)=0$$

(17) $$\text{minden } (a,b)\in N \text{ esetén } \mu(a)+c_a \leqslant \mu(b).$$

Amikor a t tevékenységhez hozzákezdünk a $\mu(t)$ időpontban, akkor már minden más tevékenységnek be kellett fejeződnie. Tehát a ház a kulcsátadás befejezésével, a $\mu(t)+c_t$ időpontban ér véget. Ez az érték nem más, mint az úgynevezett *teljes átfutási idő*, vagyis az az idő, ami az építés megkezdésétől annak teljes befejezéséig eltelik. Célunk tehát ennek minimalizálása. Így a célfüggvény

(18) $$\min \mu(t)+c_t$$

lesz. A c_t érték konstans, ezért elhagyható volna, hiszen az optimális megoldást nem befolyásolja, de a későbbiekben szükségünk lesz rá. Most egy minimalizálási feladatot fogalmaztunk meg, ami az eddigiek szerint a duális feladat. Meg kell adni tehát a primál feladatot is.

Tegyük fel, hogy P egy, a fenti értelemben vett út, amely az a_1, a_2, ..., a_k tevékenységekből áll. A P út *hosszának* a $\gamma(P)=c_{a_1}+c_{a_2}+\ldots+c_{a_k}$ mennyiséget nevezzük. A primál feladat a leghosszabb s-ből t-be vezető út megkeresése. Formálisan

(19) $$\begin{gathered}\max \gamma(P)\\ P=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\} \text{ út}\\ s=a_1 \text{ és } t=a_k.\end{gathered}$$

5. tétel: Legyen μ egy tetszőleges ütemezés, amely eleget tesz a (16)–(17) feltételeknek, $P=\{s=a_1,a_2,\ldots,a_k=t\}$ pedig egy s-ből t-be vezető út. Ekkor

(20) $$\gamma(P) \leqslant \mu(t) + c_t.$$

Bizonyítás: Mivel $a_1=s$, ezért $\mu(a_1)=0$. Így a (17) feltételből következik, hogy $\mu(a_2)\geqslant c_{a_1}$, hiszen a_1 megelőzi a_2-t. Hasonlóképpen a_2 megelőzi a_3-at, ezért $\mu(a_3)\geqslant\mu(a_2)+c_{a_2}\geqslant c_{a_1}+c_{a_2}$. A gondolatmenetet így folytatva kapjuk, hogy $\mu(t)=$ $=\mu(a_k)\geqslant c_{a_1}+c_{a_2}+\ldots+c_{a_{k-1}}$. Itt mindkét oldalhoz hozzáadva a c_t mennyiséget, azonnal adódik a kívánt állítás.

Ez tehát a gyenge dualitási tétel. Az erős dualitási tétel bizonyítása azonnal megadja azt az eljárást, amivel az optimális ütemezést meg lehet határozni.

6. tétel: Létezik egy olyan $\overline{P}$ út s-ből t-be és egy $\overline{\mu}$ ütemezés, hogy $\gamma(\overline{P})=\overline{\mu}(t)+c_t$.

Bizonyítás: Legyen μ egy tetszőleges ütemezés. Azt mondjuk, hogy az $(a,b)\in N$ pár a μ ütemezés szerint *kritikus*, ha $\mu(b)=\mu(a)+c_a$. Tegyük fel, hogy a_1, a_2, ..., a_k

a tevékenységeknek egy olyan sorozata, hogy az (a_1, a_2), (a_2, a_3), $\ldots$, (a_{k-1}, a_k) párok mind kritikusak. Ezért

(21)
$$\mu(a_k) = \mu(a_{k-1}) + c_{a_{k-1}} = \mu(a_{k-2}) + c_{a_{k-2}} + c_{a_{k-1}} = \ldots = \mu(a_1) + c_{a_1} + c_{a_2} + \ldots + c_{a_{k-1}}.$$

Az $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ utat egy a_1-ből a_k-ba vezető *kritikus útnak* nevezzük.

Megadunk egy módszert, ami lépésenként szerkeszti meg az optimális $\overline{\mu}$ ütemezést. Az eljárás feltételezi, hogy létezik a tevékenységeknek egy olyan S halmaza, amelynek az s kezdeti tevékenység eleme, és S minden a elemére teljesül, hogy létezik egy olyan s-ből a-ba vezető út, hogy az ebben az útban szereplő összes tevékenység S eleme, és ez az út egyben $\overline{\mu}$ szerint kritikus. A módszer minden egyes lépése kibővíti az S halmazt egy további tevékenységgel.

Kezdetben az S halmaz álljon egyedül az s kezdeti tevékenységből, és (16) szerint legyen $\overline{\mu}(s) = 0$. Ekkor az S halmazra a mondott követelmények teljesülnek. Jelölje T most azokat a tevékenységeket, amelyek nem tartoznak bele az S halmazba. Azt állítjuk, hogy a T-beli tevékenységek között van olyan, amelynek minden előzménye az S halmazban található. Ha ugyanis ez nem igaz, akkor minden T-beli b tevékenységnek létezik egy T-beli a előzménye. Válasszunk egy tetszőleges T-beli b_0 tevékenységet. Tehát ennek van egy T-beli b_1 előzménye. Hasonlóképpen az utóbbinak van egy T-beli b_2 előzménye, és így folytathatjuk a sort a végtelenségig. Mivel azonban csak véges sok tevékenység van a T halmazban, ezért ebben a sorozatban legalább egy tevékenység ismételten fellép. Ez azonban azt jelenti, hogy a fenti értelemben létezik egy kör, ami ellentmondás.

Legyen most már $b \in T$ az a tevékenység, amelynek minden előzménye az S halmazban található. Jelölje E ezen előzmények halmazát. Legyen

$$\overline{\mu}(b) = \max\left\{\overline{\mu}(a) + c_a \mid a \in E\right\}. \tag{22}$$

Legyen $\overline{a}$ egy olyan tevékenység, amire a (22) egyenlet jobboldalán maximumot kapunk. Ekkor $\overline{\mu}(b) = \overline{\mu}(\overline{a}) + c_{\overline{a}}$, azaz az $(\overline{a}, b)$ pár kritikus. Továbbá létezik s-ből $\overline{a}$-ba vezető kritikus út. Legyen ez $s = a_1$, a_2, $\ldots$, $a_k = \overline{a}$. Ekkor $s = a_1$, a_2, $\ldots$, $a_k = \overline{a}$, b egy s-ből b-be vezető kritikus út. (21) szerint

$$\overline{\mu}(b) = \overline{\mu}(s) + c_{a_1} + c_{a_2} + \ldots + c_{a_k} = c_{a_1} + c_{a_2} + \ldots + c_{a_k}. \tag{23}$$

vagyis a b tevékenységet arra az időpontra ütemeztük, amely megegyezik az s-ből a b-be vezető kritikus út hosszával.

Mindezen műveletek elvégzése után a b tevékenység a T halmazból átkerül az S halmazba. Ez az eljárás nem folytatható akármeddig, mert elfogynak az S halmazon kívüli tevékenységek, azaz végül maga a t befejező tevékenység is az S halmazba fog tartozni. Ekkor $\overline{\mu}(t)$ az s-ből t-be vezető kritikus út hossza lesz tehát, ami ekvivalens az állítással.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a 1. példa számítási módszere azonos a bizonyításban közölt módszerrel. Egyes tevékenységek esetleg később is kezdhetők a számítottnál anélkül, hogy az átfutási idő meghosszabodna. Ilyen volt a példában a c tevékenység. De evvel a módszerrel mindig a lehetséges legkorábbi kezdési időket kapjuk meg. A lehetséges legkésőbbi kezdési időket, amikor az átfutási idő még mindig minimális, akkor kapjuk, ha a módszert a befejező tevékenységből visszafelé haladva fordított irányban végezzük el.

A Lagrange duál feladat

Bonyolultabb problémák esetén egy primál feladathoz több különböző duális feladatot is be lehet vezetni. Az egyik leggyakrabban használt típust nevezik Lagrange duál feladatnak.

Ha a primál feladatot valamilyen oknál fogva nehéz megoldani, viszont a duál feladatot magát megoldani vagy egy megengedett megoldását megtalálni könnyű, akkor a duál feladat bevezetésével azt nyerjük, hogy kapunk egy könnyen számítható felső korlátot a primál feladat optimális célfüggvényértékére. Éppen ez a helyzet a hátizsák feladat** esetében. Legyen n, b, a_1, a_2, $\ldots$, a_n, c_1, c_2, $\ldots$, c_n pozitív egész. Ekkor a hátizsák feladat

$$\begin{aligned} \max\, & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\ & a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqslant b \\ & x_1, x_2, \ldots, x_n = 0 \text{ vagy } 1. \end{aligned} \tag{24}$$

Legyen λ egy tetszőleges, rögzített nemnegatív valós szám. Tekintsük a

$$\begin{gathered} \max (c_1 - \lambda a_1)x_1 + (c_2 - \lambda a_2)x_2 + \ldots + (c_n - \lambda a_n)x_n + \lambda b \\ x_1, x_2, \ldots, x_n = 0 \text{ vagy } 1. \end{gathered} \tag{25}$$

feladatot. Az utóbbi feladat optimális célfüggvényértéke mindig legalább akkora, mint a hátizsák feladaté, ugyanis

$$\begin{aligned} &(c_1 - \lambda a_1)x_1 + (c_2 - \lambda a_2)x_2 + \ldots + (c_n - \lambda a_n)x_n + \lambda b = \\ &= (c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n) + \lambda(b - a_1x_1 - a_2x_2 - \ldots - a_nx_n). \end{aligned}$$

Ha az x_1, x_2, $\ldots$, x_n értékek kielégítik a hátizsák feladat feltételeit, akkor itt az egyenlőség jobboldalának második tagja két nemnegatív szám szorzata, tehát a teljes kifejezés legalább akkora, mint $(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$, vagyis a hátizsák feladat célfüggvényének értéke az x_1, x_2, $\ldots$, x_n értékek mellett.

A (25) feladatot nagyon egyszerű megoldani, mivel a változók nincsenek közvetlen hatással egymásra, ezért mindegyik értéke úgy választható meg a többitől függetlenül, hogy az a célfüggvény szempontjából a lehető legjobb legyen, vagyis az optimális megoldást a következő képlet adja:

$$\overline{x}_j = \begin{cases} 0 & \text{ha } c_j - \lambda a_j < 0 \\ 0 \text{ vagy } 1 & \text{ha } c_j - \lambda a_j = 0 \\ 1 & \text{ha } c_j - \lambda a_j > 0 \end{cases} \tag{26}$$

Ez vezet oda, hogy más esetekben is érdemes lehet valamely primál feladat helyett a (25) feladat megfelelő változatát megoldani. Most ezt megfogalmazzuk általánosan.

Legyen m és n pozitív egész. Az f és g_1, g_2, $\ldots$, g_m legyenek az x_1, x_2, $\ldots$, x_n változók valós függvényei. Az S halmaz elemei legyenek rendezett szám n-esek. Végül

** A hátizsák feladatot tárgyalja a "Mit tegyünk a hátizsákba, hogyan váltsunk fel pénzt?" c. cikk a KÖMAL 1996/7. és 8. számában.

legyen b_1, b_2, $\ldots$, b_m rögzített valós szám. Primál feladatunk a következő:

$$
\begin{array}{lrl}
 & \max f(x_1,x_2,\ldots,x_n) & \\
 & g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) & \leqslant b_1 \\
(27) & g_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) & \leqslant b_2 \\
 & & \ldots \\
 & g_m(x_1,x_2,\ldots,x_n) & \leqslant b_m \\
 & (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in S. &
\end{array}
$$

Mind a lineáris programozási, mind a hátizsák feladat szerkezete beleillik ebbe az általános keretbe. A lineáris programozási feladat esetén az S halmaz az összes nemnegatív komponensekből álló szám n-es volt. A hátizsák feladatnál pedig az összes olyan, amelyben csak 0 és 1 szerepel. (Az, hogy S rendezett szám n-eseket tartalmaz, a következő példával magyarázható el. Tegyük fel, hogy $n=3$, és $(1,2,3)\in S$ de $(3,2,1)\notin S$. Ekkor az $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ értékek a feladat egy megengedett megoldását adják, feltéve, hogy ezeket behelyettesítve az egyenlőtlenségekbe, azokat kielégítik. Azonban az $x_1=3$, $x_2=2$, $x_3=1$ értékek akkor sem adnak megengedett megoldást, ha velük az egyenlőtlenségek teljesülnek, mivel ez az értékrendszer nincs benne az S halmazban, vagyis amikor $x_1=3$, akkor nem lehet $x_2=2$ és egyidejűleg $x_3=1$.)

7. tétel: Legyen λ_1, λ_2, $\ldots$, $\lambda_m \geqslant 0$ rögzített valós szám. Ekkor

$$
\begin{array}{llll}
 & \max f(x_1,x_2,\ldots,x_n) & \leqslant & \max\Big(f(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(b_i-g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\Big) \\
 & g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) & \leqslant b_1 & \\
(28) & g_(x_1,x_2,\ldots,x_n) & \leqslant b_2 & (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in S \\
 & & \ldots & \\
 & g_m(x_1,x_2,\ldots,x_n) & \leqslant b_m & \\
 & (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in S. & &
\end{array}
$$

Megjegyzés: A tétel azt állítja, hogy a primál feladat optimális célfüggvényértéke nem lehet nagyobb, mint egy másik feladaté, amiben az egyetlen feltétel az, hogy $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ szám n-es az S halmaz eleme. A λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_m mennyiségek a Lagrange-szorzók, a jobboldali feladat pedig a (rögzített szorzók melletti) Lagrange-feladat.

Bizonyítás: Ha az x_1, x_2, $\ldots$, x_n értékek kielégítik a primál feladat feltételeit, akkor a jobboldali feladat célfüggvényének második tagja nem lehet negatív, tehát ennek értéke legalább akkora, mint a primál feladat célfüggvényéé.

Innen a következő, úgynevezett Lagrange-duál feladatot lehet kitűzni:

(29)

$$
\min_{\substack{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m):\\ \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\geqslant 0}} \quad \max_{\substack{(x_1,x_2,\ldots,x_n):\\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in S.}} \quad \Big(f(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(b_i-g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\Big)
$$

A λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_m számokat szokás Lagrange-szorzóknak nevezni. A 7. tétel szerint ez a feladat kielégíti azt a követelményt, amit egy duál feladatnak kell. Így a tétel maga nem volt más, mint a gyenge dualitási tétel. A (29) feladat tulajdonképpen az adott módszerrel megkapható legpontosabb, azaz legkisebb, tehát a legjobb felső korlátot határozza meg.

Itt azonban az erős dualitási tétel már nem igaz. Erre példa az alábbi feladat.

$$\begin{aligned}
\max 6x_1 + 5x_2 + \quad 3x_2 & \\
x_1 + x_2 + \quad x_3 & \leqslant 2 \\
x_1 + x_2 - \quad x_3 & \leqslant 1 \\
x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ vagy } 1. &
\end{aligned}$$

Mivel mindhárom változó külön-külön csak két értéket vehet fel, ezért összesen nyolc eset lehetséges. Ebből a nyolcból az első egyenlőtlenség csak azt az esetet zárja ki, amikor mindhárom változó 1, a második meg csak azt, amikor $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 0$. Innen könnyen látható, hogy az optimális megoldás $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Az ehhez tartozó célfüggvényérték 9. A megfelelő Lagrange-feladat rögzített λ_1 és λ_2 mellett

$$\begin{gathered}
\max(6-\lambda_1-\lambda_2)x_1 + (5-\lambda_1-\lambda_2)x_2 + (3-\lambda_1+\lambda_2)x_3 + 2\lambda_1 + \lambda_2 \\
x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ vagy } 1.
\end{gathered} \tag{30}$$

Itt λ_1 és λ_2 valamilyen nemnegatív számok. Ezért a célfüggvényben x_1 együtthatója biztosan nagyobb, mint x_2-é. Ezért a Lagrange-feladatnak semmilyen λ_1 és λ_2 sem lehet olyan optimális megoldása, amelyben $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$. Így összesen hat különböző optimális megoldás lehetséges. Ezeket egyenként végigvizsgálva látható, hogy a feladat célfüggvénye soha nem kisebb, mint 10, azaz fellép a dualitási gyepű. Mi most a hat lehetséges eset közül azt vizsgáljuk meg, amikor $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Ekkor

$$6-\lambda_1-\lambda_2 \geqslant 0, \qquad 5-\lambda_1-\lambda_2 \geqslant 0, \qquad 3-\lambda_1+\lambda_2 \geqslant 0.$$

Az első egyenlőtlenség következik a másodikból, így ezzel külön nem kell foglalkozni. Az x értékek helyére behelyettesítve 1-et, a célfüggvény értéke $14-\lambda_1$ lesz. Tehát ahhoz, hogy a célfüggvény a lehető legkisebb legyen, λ_1-et a lehető legnagyobbra kell választani. Azonban a második és harmadik egyenlőtlenséget összeadva és egyszerűsítve azt kapjuk, hogy $\lambda_1 \leqslant 4$. Tehát ebben az esetben a célfüggvény értéke legalább 10. Hasonlóan elemezhető a további öt eset. Mindig azt kapjuk, hogy a Lagrange-feladat optimális célfüggvényértéke legalább 10. Tehát a Lagrange-duál feladatée is, amely nem más, mint megkeresni λ_1 és λ_2 azon értékét, amire a (30) feladat optimális célfüggvényértéke minimális.

Megjegyezzük, hogy egyes esetekben, például amikor a (27) probléma egy lineáris programozási feladat, igaz az erős dualitási tétel is.

Vizvári Béla
Eötvös Loránd Tudományegyetem,
Operációkutatási Tanszék

Egy érdekes számelméleti tétel – helyesen

Múlt havi számunkban a 16. oldalon sajtóhibával jelent meg Zábrádi Gergely tétele. Helyesen:

Tétel: Minden a, $c > 0$ és $b \geqslant 0$ adott *egész* számok esetén *végtelen sok megoldása van* az alábbi kongruenciának:

$$a^x + x \equiv b \pmod{c}$$

A 16–17. oldalon közöltek bizonyítják ezt a tételt.

A szerk.

Mérőlap felvételire készülőknek III.

Marót Rezső tanár úr emlékére

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$5^x \cdot 2^{\frac{x}{x-1}} = 100.$$

2. Igazolja, hogy ha egy háromszögben

$$\frac{a-b}{a} = 1 - 2\cos\gamma,$$

akkor a háromszög egyenlő szárú.

3. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{x^2}{\left(2-\sqrt{x+4}\right)^2} > x+6.$$

4. Állapítsa meg, hogy az alábbi kifejezések a változók mely értékeinél veszik fel a legnagyobb értéküket. Számítsa ki ezt a legnagyobb értéket.

a) $$\frac{4\sqrt{2}+2}{2^{x-1}+2^{2-x}+1};$$

b) $$\frac{32}{(3-x+\lg 2y)^2+x^4-2x^2+17}.$$

5. Egy számtani sorozat differenciája $\frac{1}{2}$. Az első n tag összege $\frac{75}{2}$, az első $n+3$ tag összege 63. Mekkora n értéke, és mennyi a sorozat első tagja?

6. Oldja meg az egész számokból álló számhármasok halmazán a következő egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} x^2-y^2-z^2 &= 1,\\ y+z-x &= 3. \end{aligned}$$

7. A k kör érinti az x tengelyt, valamint az $(x-17)^2+(y+17)^2=100$ egyenletű kört az $x_0=11$ abszcisszájú pontjában. Írja fel a k kör egyenletét.

8. Az m valós paraméter értékétől függően hány különböző valós gyöke van a következő egyenletnek?

$$x^4+2(m^2-5)x^2+m^4-10m^2+7$$

Nemzetközi „Kenguru” találkozó Budapesten

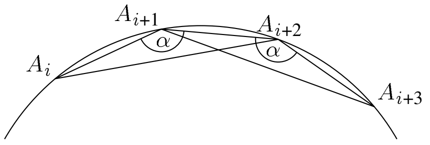
Több hónapos előkészület után 1997. november 6-án a Kenguru Határok Nélkül Szervezet képviselőit, 16 nemzet 35 matematikusát láttuk vendégül a 97-es Budapesti Kenguru Találkozón. Valamikor Ausztráliából indult útjára ez a tesztverseny, amely abban tér el a Magyarországon hagyományos versenyektől, hogy csak a végeredményt értékeli, így nincs tekintettel a megoldás menetére. Később a franciák Kenguru Matematika Verseny néven meghonosították Európában is. Ma már a világ 20 országában az év ugyanazon napján és ugyanazon órájában 1 200 000 gyerek írja meg a korosztályának megfelelő feladatsort. Magyarországon először 1994-ben volt Kenguru verseny, 1995 óta a 14–18 év közötti középiskolások versenyének szervezését és a lebonyolítását a Zalai Matematikai Tehetségekért Alapítvány vállalta. A Batthyány Lajos Gimnázium matematikatanárai és egész nevelőtestülete szívvel, lélekkel végzi, illetve támogatja a szervezéssel járó munkát. 95-ben 6000, 96-ban 9000 résztvevőnk volt. Szeretnénk, ha évről-évre többen és többen kapcsolódnának be a versenybe. A több éves versenymúltra visszatekintő országokban rendkívül népszerű a verseny. Franciaországban 606 000, Lengyelországban 199 000, Csehországban 188 000 résztvevő volt az elmúlt évben. Nemcsak a legtehetségesebb matematikus jelöltek versenyeznek, a humán érdeklődésű gyerekek is szívesen oldják meg a kenguru verseny feladatait. A mostani találkozó célja a tavalyi verseny értékelése, és az 1998-as verseny előkészítése volt. A találkozó szervezését az alapítvány vállalta, amelyet Dr. Pintér Ferenc, a kuratórium titkára, Lábodi Gyöngyi, Zsovár Anita és Erdős Gábor, a Batthyány Lajos Gimnázium tanárai képviseltek. A különböző országokból érkezett feladatsorokból Dr. Pelikán József, az Eötvös Loránd Tudományegyetem adjunktusa és kollégái állítottak össze egy javaslatot. A háromnapos együttlét lehetőséget adott a jövő évi feladatok kiválasztására, a Kenguru Határok Nélkül Szervezet működési szabályának megbeszélésére, és a versennyel kapcsolatos tapasztalatok összegyűjtésére. A nyári diákcserék is szóba kerültek. Így 1998 májusában a verseny eredményhirdetésén az értékes könyvjutalmak mellett lengyelországi és erdélyi utakon kívül párizsi utat is kisorsolhatunk.

A verseny időpontja: 1998. március 20. 10^{h}.

Zsovár Anita, **Lábodi Gyöngyi**
Zalai Matematikai Tehetségekért
Alapítvány, Nagykanizsa

Matematika gyakorlatok megoldásai

Gy. 3122. *Igaz-e, hogy ha egy körbe írható* 1997 *oldalú sokszög minden szöge egyenlő, akkor a sokszög szabályos?*



1. ábra

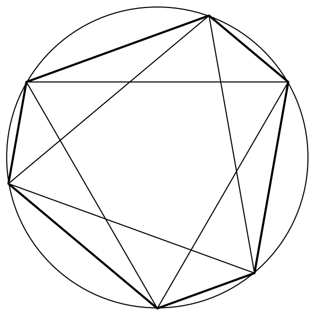
Megoldás. Megmutatjuk, hogy az állítás igaz. Jelöljük a sokszög csúcsait A_1, A_2, …, A_{1997}-tel, a csúcsoknál lévő szöget pedig α-val. Az A_iA_{i+2} húr az A_{i+1} csúcsból α szögben látszik ($i = 1, 2, \ldots, 1997$, az indexeket modulo 1997 számolva), A_{i+1} mindig a rövidebbik A_iA_{i+2} íven van, mert α tompaszög, ezért az A_iA_{i+2} húrok mind egyenlő hosszúságúak, és a rövidebb A_iA_{i+2} körívek is mind egyenlő hosszúságúak. A továbbiakban $\overset{\frown}{PQ}$-val jelöljük a kör P és Q pontjai által meghatározott rövidebb körív hosszát.

Mivel $\overset{\frown}{A_1A_3} = \overset{\frown}{A_2A_4}$, azért a hosszabbik A_1A_3 és A_2A_4 ívek is egyenlő hosszúságúak, vagyis

$$\overset{\frown}{A_3A_4} + \overset{\frown}{A_4A_5} + \ldots + \overset{\frown}{A_{1996}A_{1997}} + \overset{\frown}{A_{1997}A_1} = \\ = \overset{\frown}{A_4A_5} + \ldots + \overset{\frown}{A_{1997}A_1} + \overset{\frown}{A_1A_2},$$

amiből kapjuk, hogy $\overset{\frown}{A_3A_4} = \overset{\frown}{A_1A_2}$. Az ennek megfelelő egyenlőséget a hosszabbik A_iA_{i+2} és $A_{i+1}A_{i+3}$ ívekre felírva kapjuk, hogy

$$\overset{\frown}{A_{i+2}A_{i+3}} = \overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$$



2. ábra

minden i-re, vagyis minden második rövid ív hossza megegyezik. De mivel páratlan sok rövid ívünk van, ez egyúttal azt is jelenti, hogy minden rövid ív hossza megegyezik. Ebből viszont következik, hogy a körbe írható sokszögünk minden oldala egyenlő hosszúságú, tehát a sokszög szabályos.

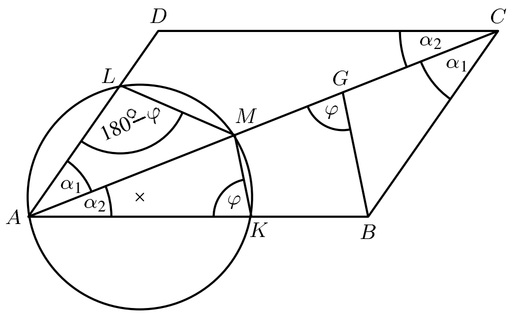
Megjegyzés. A bizonyításunk minden körbe írható páratlan oldalú sokszög esetén alkalmazható. Páros oldalú sokszög esetén viszont feltételeinkből nem következik a szabályosság. A legegyszerűbb ellenpélda egy téglalap, de ellenpélda a *2. ábrán* látható hatszög is, általában pedig egy olyan $2n$-szög, amit úgy kapunk, hogy egy szabályos n-szöget a középpontja körül $\frac{180^\circ}{n}$-nél kisebb szöggel elforgatunk, majd pedig tekintjük az eredeti sokszög és az elforgatottja csúcsai által meghatározott konvex sokszöget.

170 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 85, 4 pontot 17, 3 pontot 11, 2 pontot 10, 1 pontot 32, 0 pontot 15.

Gy. 3132. *Az $ABCD$ paralelogramma A csúcsán átmenő kör a paralelogramma AB és AD oldalait a K és L pontokban, az AC átlót pedig az M pontban metszi. Mutassuk meg, hogy*

$$AB \cdot AK + AD \cdot AL = AC \cdot AM.$$

Megoldás. Legyen $AKM\sphericalangle = \varphi$. Mivel $AKML$ húrnégyszög, azért $ALM\sphericalangle = 180^\circ - \varphi$, továbbá $LAM\sphericalangle = LKM\sphericalangle < \varphi$ és $KAM\sphericalangle = KLM\sphericalangle < 180^\circ - \varphi$. A paralelogramma szemközti oldalai párhuzamosak, ezért $DAC\sphericalangle = ACB\sphericalangle$ és $CAB\sphericalangle = ACD\sphericalangle$. Ebből és az előző egyenlőtlenségekből következik, hogy az AC átlónak van egy olyan G belső pontja, amire $AGB\sphericalangle = \varphi$ és $BGC\sphericalangle = 180^\circ - \varphi$. Ekkor viszont az AKM és az



AGB, továbbá az ALM és a CGB háromszögpárok hasonlóak, mert megfelelő szögeik egyenlőek. Hasonló háromszögekben a megfelelő oldalak aránya egyenlő, ezért

$$\frac{AK}{AM}=\frac{AG}{AB} \qquad \text{és} \qquad \frac{AL}{AM}=\frac{CG}{CB}.$$

E két egyenlőségből kapjuk, hogy

$$AB\cdot AK=AG\cdot AM \qquad \text{és} \qquad CB\cdot AL=CG\cdot AM.$$

Ezeket összeadva és felhasználva, hogy $CB=AD$:

$$AB\cdot AK+AD\cdot AL=AG\cdot AM+CG\cdot AM=AC\cdot AM,$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

Tóth Viktória (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., I. o.t.) dolgozata alapján

73 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 53, 4 pontot 3, 3 pontot 1, 0 pontot 16 versenyző.

Gy. 3142. *Melyik az a legkisebb* 28*-cal osztható pozitív egész szám, amelynek a* 10*-es számrendszerbeli alakja* 28*-ra végződik, és számjegyeinek összege* 28*?*

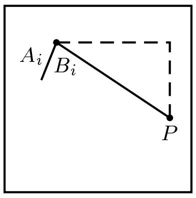
Megoldás. Legyen a keresett szám $100B+28$. Nyilván $100B$ is osztható 28-cal, azaz B osztható 7-tel; továbbá B számjegyeinek összege $28-(2+8)=18$ lévén, B osztható 9-cel is, tehát 63 többszöröse. A 63 néhány többese: 63, $2\cdot 63=126$, $3\cdot 63=189$, ... Látható, hogy ezek közül a legkisebb olyan, amelyben a számjegyek összege 18, a 189. Tehát a feltételeket kielégítő legkisebb szám $189\cdot 100+28=18\,928$.

Gérecz Balázs (Pannonhalma, Bencés Gimn., 9. o.t.)

868 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Buruzs Ádám, Gérecz Balázs, Máthé András. 5 pontot kapott 787, 4 pontot 17, 3 pontot 6, 1 pontot 2, 0 pontot 47 beküldő. Nem versenyszerű 6 dolgozat.

Gy. 3143. *Rajzoljunk a síkra egy sakktáblát. Legyen a fehér mezők középpontja* $A_1, A_2, \ldots, A_{32}$, *a fekete mezők középpontja* $B_1, B_2, \ldots, B_{32}$, P *pedig a sakktábla egy tetszőleges pontja. Bizonyítsuk be, hogy*

$$A_1P^2+A_2P^2+\ldots+A_{32}P^2=B_1P^2+B_2P^2+\ldots+B_{32}P^2. \qquad \textbf{(H)}$$



Megoldás. Egészítsük ki mindegyik PA_i és PB_i szakaszt egy olyan derékszögű háromszöggé, amelynek átfogója az illető szakasz, befogói pedig a sakktábla oldalaival párhuzamosak. Pitagorasz tétele szerint a szakasz négyzete a két („vízszintes”, ill. „függőleges”) befogó négyzetének összege. A sakktábla egy során végighaladva, mindegyik mező középpontja által meghatározott szakasz négyzetének a „függőleges” összetevője ugyanakkora, és ez négyszer fehér, négyszer pedig fekete mezőhöz tartozik. Így a tábla összes mezőjét tekintve, a „függőleges” összetevők négyzetösszege ugyanaz a fehér és a fekete mezők esetében is. Ugyanígy látható be a „vízszintes” összetevők négyzetösszegének egyenlősége is (a megfeleltetést oszloponként végezve).

Hangya Balázs (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.)

302 dolgozat érkezett. 6 pontos Baharev Ali, Bárány Kristóf, Bárány Zsófi, Birkner Tamás, Csiszár Gábor, Hangya Balázs, Iván Szabolcs, Izsák Rudolf, Kiss 345 Gergely, Kovács Erika Renáta, Kunszenti-Kovács Dávid, Lukács László, Mecz Balázs, Pál András, Papp Dávid, Pataki Péter, Poronyi Gábor, Stoll Péter és Végh A. László megoldása. 5 pontot kapott 179, 4 pontot 33, 3 pontot 19, 2 pontot 16, 1 pontot 6, 0 pontot 30 beküldő.

Gy. 3144. *Felírható-e a* $\dfrac{7}{17}$ *szám* $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ *alakban, ahol* a *és* b *pozitív egészek?*

Javasolta: *Sarinay Dávid,* Siófok

I. megoldás. Írjuk a feltételezett $\dfrac{7}{17}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ összefüggést $7ab=17(a+b)$ alakba. Jelölje az a és b legnagyobb közös osztóját d, ekkor $a=dA$, $b=dB$, ahol A és B egymáshoz relatív prím pozitív egészek. Egyenletünk ekkor (a nemnulla d-vel való leosztás után) a $7dAB=17(A+B)$ alakot ölti. Mivel A és B relatív prím, azért A-nak és $(A+B)$-nek sincs 1-nél nagyobb közös osztója, ugyanígy B-nek és $(A+B)$-nek sem. Így AB és $A+B$ is relatív prím; ezért AB csak úgy lehet osztója a $7dAB=17(A+B)$ szorzatnak, ha osztója 17-nek. Ez $AB=1$ vagy $AB=17$ esetén teljesül. Az előbbi esetben $A=B=1$, az utóbbiban például $A=1$, $B=17$, így $7d=34$, ill. $7d=18$. Egyik esetben sem kapunk d-re egész értéket, tehát a kívánt felírása $\dfrac{7}{17}$-nek nem lehetséges.

II. megoldás. A $7ab=17(a+b)$ egyenlet 7-tel szorozva, átrendezve, majd mindkét oldalhoz 17^2-t adva

$$17^2=(7a-17)(7b-17).$$

Mivel 17 prím, ez a $\{(7a-17),(7b-17)\}$ egész számpárra a következő lehetőségeket engedi csak meg (kettejük sorrendjének felcserélésétől eltekintve): $\{-17^2,-1\}$, $\{-17,-17\}$, $\{17^2,1\}$, $\{17,17\}$. Az ezeknek rendre megfelelő értékek a-ra: $\dfrac{17-17^2}{7}$, 0, $\dfrac{17+17^2}{7}$, $\dfrac{17+17}{7}$, amelyek egyike sem pozitív egész.

Pallos Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.)

539 dolgozat érkezett. 7 pontos Deli Lajos és Máthé András, 6 pontots Dombi 870 Tímea, Geröly Péter, Gyenes Zoltán, Horváth 317 Eszter, Kovács Erika Renáta, Pallos Péter és Somlai

Gábor megoldása. 5 pontos 249, 4 pontos 34, 3 pontos 22, 2 pontos 36, 1 pontos 124, 0 pontos 65 dolgozat.

Gy. 3145. *Oldjuk meg az*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{11}}+\frac{1}{x^{13}}\leqslant\frac{7}{x^7}$$

egyenlőtlenséget.

Megoldás. Ha a pozitív szám, akkor a számtani és mértani közép között fennálló egyenlőtlenség szerint

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a^3}+\ldots+\frac{1}{a^{13}}\geqslant 7\sqrt[7]{\frac{1}{a^{1+3+\ldots+13}}}=\frac{7}{a^7},$$

és egyenlőség pontosan akkor van, ha $\frac{1}{a}=\frac{1}{a^3}=\ldots=\frac{1}{a^{13}}$, azaz ha $a=1$. Negatív a-ra az egyenlőtlenség iránya megfordul. Tehát a feladat egyenlőtlenségét az 1 és a negatív számok elégítik ki.

Deli Lajos (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., 9. o.t.)

453 dolgozat érkezett. 7 pontot kapott Deli Lajos, 6 pontot Gelencsér Gábor, Kovács Benedek, Máthé András, Papp Eszter. 5 pontots 199, 4 pontos 56, 3 pontos 24, 2 pontos 46, 1 pontos 38, 0 pontos 81, nem versenyszerű 4 dolgozat.

Matematika feladatok megoldásai

F. 3155. *Legyen p 5-nél nagyobb prímszám. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan a, b pozitív egészek, amelyekre $1<p-a^2<p-b^2$, és $(p-a^2)$ osztója $(p-b^2)$-nek.*

Megoldás. Az $[1^2+1,\ 2^2+2)$, $[2^2+2,\ 3^2+3)$, $[3^2+3,\ 4^2+4)$, $\ldots$ intervallumok valamelyike tartalmazza p-t. Legyen ez az intervallum $[x^2+x,\ (x+1)^2+(x+1))$. Ekkor $x^2+x\leqslant p<(x+1)^2+(x+1)$.

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor $p<x^2+2x$. Ebben az esetben $a=x$ és $b=p-x^2-x$ eleget tesz a feladat feltételeinek: $a=x=x^2+2x-(x^2+x)>p-x^2-x=b$ miatt $1<p-a^2<p-b^2$, továbbá $(p-a^2)$ osztója $(p-b^2)$-nek, mert

$$p-b^2=p-(p-a^2-a)^2=(p-a)^2(-p+a^2+2a+1).$$

Tekintsük ezután az $x^2+2x\leqslant p<(x+1)^2+(x+1)$ esetet. Mivel p 5-nél nagyobb prím, nem lehet $x(x+2)$ és $(x+1)^2$ alakú, így

$$(x+1)^2+1\leqslant p<(x+1)^2+(x+1).$$

Ha $p=(x+1)^2+1$, akkor $a=x$ és $b=1$ megfelel. Ekkor ugyanis $p-a^2=2(x+1)$ és $p-b^2=(x+1)^2$; a p páratlan volta miatt $x+1$ páros, így $(p-a^2)$ osztója $(p-b^2)$-nek.

Ha $(x+1)^2+2 \leqslant p < (x+1)^2+(x+1)$, akkor válasszuk a-t $(x+1)$-nek. Legyen b az a-nak $(p-a^2)$-tel való osztási maradéka, ha a nem osztható $(p-a)^2$-tel, különben pedig legyen $b=p-a^2$. Ekkor

$$b \leqslant p-a^2 < (x+1)^2+(x+1)-(x+1)^2 = a$$

miatt $1 < p-a^2 < p-b^2$; $(p-b^2)$ osztható $(p-a^2)$-tel, mert

$$p-b^2 = p-a^2+(a-b)(a+b),$$

és $a-b$ a b definíciója miatt osztható $(p-a^2)$-tel.

Megjegyzés. A feladat kitűzésében $(p-b^2)$ helyett $(p-b)^2$-et írtunk. A sajtóhibát szerencsére észrevették a megoldók.

30 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Barát Anna, Bérczi Gergely, Hangya Balázs, Horváth
202 Gábor, Juhász András, Lippner Gábor, Mecz Balázs, Méder Áron, Megyeri Csaba, Páles Csaba, Patakfalvi Zsolt, Pintér Dömötör, Szita István, Szűcs Gábor, Terék Zsolt, Terpai Tamás és Zawadowski Ádám. 4 pontos 5, 2 pontos 1, 1 pontos 1, 0 pontos 6 dolgozat.

F. 3162. *Legyen m adott pozitív egész. Keressük meg az $(x^2+y^2)^m=(xy)^z$ egyenlet összes pozitív egész megoldását.*

Megoldás. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint:

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geqslant xy,$$

így $(xy)^z=(x^2+y^2)^m \geqslant 2^m(xy)^m$, $(xy)^{\frac{z-m}{m}} \geqslant 2$; ezért szükségképpen $z>m$. Jelöljük x és y legnagyobb közös osztóját d-vel; $x=ad$ és $y=bd$, ahol a és b relatív prímek. Ezt az eredeti egyenletbe behelyettesítve kapjuk:

$$(a^2d^2+b^2d^2)^m=(abd^2)^z,$$

rendezve

$$(a^2+b^2)^m=(ab)^z d^{2(z-m)}. \tag{1}$$

Tegyük fel, hogy $a \neq 1$, azaz létezik olyan p prím, amely osztja a-t. Ekkor p osztója a fenti egyenlet jobb oldalának, tehát a bal oldalának is. Ez csak úgy lehet, ha p osztója (a^2+b^2)-nek, vagyis p osztója b-nak. Így a-nak és b-nek van közös prímosztója, ez pedig ellentmondás. Innen $a=1$, és hasonlóan bizonyítható, hogy $b=1$.

Ekkor (1) a következőképpen alakul:

$$2^m=d^{2(z-m)}.$$

A d ezért csak 2-hatvány lehet; legyen $d=2^k$. Behelyettesítve: $m=2(z-m)k$, azaz $m=\frac{2k}{1+2k}z$. $2k$ és $1+2k$ relatív prímek, m egész, így $1+2k$ osztja z-t; legyen $z=(1+2k)n$. Ekkor $m=2kn$; tehát a feladatnak csak páros m-re van megoldása, és minden megoldás $x=y=2^k$, $z=(1+2k)n$ alakú, ahol $m=2kn$.

Páles Csaba (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján

57 dolgozat érkezett. 5 pontos Barát Anna, Bérczi Gergely, Brezovich László, Dályay Virág, Dedinszky Zsófia, Devecsery András, Fejérvári Bence, Gál 198 Tamás, Hangya Balázs, Horváth 202 Gábor, Jeszenszky Gyula, Juhász András, Katona Zsolt, Lázár Zsófia, Léka Zoltán, Lippner Gábor, Mátyási István, Méder Áron, Nagy 111 István, Páles Csaba, Patakfalvi Zsolt, Pintér Dömötör, Prause István, Rudolf Gábor, Szabó 997 Péter, Szalai-Dobos András, Szita István, Szűcs Gábor, Terék Zsolt, Terpai Tamás, Varga 524 Áron, Várkonyi Péter, Végh A. László és Zawadowski Ádám megoldása. 4 pontos 5, 3 pontos 2, 2 pontos 2, 1 pontos 5, 0 pontos 9 dolgozat.

F. 3167. *Bizonyítsuk be, hogy ha p páratlan prím, akkor $\binom{2p-1}{p-1}-1$ osztható p^2-tel.*

Megoldás.

$$\binom{2p-1}{p-1}-1=\frac{(p+1)(p+2)\dots(p+p-1)-(p-1)!}{(p-1)!} \tag{1}$$

A feladat állításához elég bizonyítani, hogy (1) számlálója osztható p^2-tel, hiszen ha $(p-1)!\left(\binom{2p-1}{p-1}-1\right)$ osztható p^2-tel, akkor $\binom{2p-1}{p-1}-1$ is, mivel p^2 és $(p-1)!$ relatív prímek. Nézzük tehát (1) számlálójának első tagját:

$$(p+1)(p+2)\dots(p+p-1)=\prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}(p+i)\dots(p+(p-i))=$$
$$=\prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}(2p^2+i(p-i)).$$

Mivel a p^2-tel való oszthatóságot vizsgáljuk, a fenti szorzatnak elég a p^2-tel vett maradékát tekinteni, ez pedig $\prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}i(p-i)=(p-1)!$.

Tehát $(p+1)(p+2)\dots(p+p-1)-(p-1)!$ valóban osztható p^2-tel.

Vaik Zsuzsanna (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján

67 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Barát Anna, Bérczi Gergely, Czirok Levente, Devecsery András, Gál 198 Tamás, Gyenes Zoltán, Hangya Balázs, Hegedűs 396 Péter, Horváth 472 András, Juhász András, Katona Zsolt, Léka Zoltán, Lippner Gábor, Megyeri Csaba, Nagy 111 István, Oláh 407 Szabolcs, Pataki Péter, Pintér Dömötör, Prause István, Rudolf Gábor, Serény András, Szalai-Dobos András, Szita István, Taraza Busra, Vaik Zsuzsanna, Várady Gergő és Várkonyi Péter. 4 pontos 24, 3 pontos 8, 2 pontos 3, 1 pontos 5 dolgozat.

F. 3173. *Bizonyítsuk be, hogy az*

$$x^{2n}-2nx^{2n-1}+2nx^{2n-2}-2nx^{2n-3}+\dots+2nx^2-2nx+1$$

polinomnak nem lehet $2n$ darab pozitív gyöke, ha $n\geqslant 2$.

I. megoldás. Tegyük fel, hogy a polinomnak van $2n$ darab pozitív gyöke: α_1, α_2, $\dots$, α_{2n}. A gyökök és együtthatók közötti összefüggés szerint: $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{2n}=2n$

és $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2n}=1$. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján:

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2n}}{2n}\geqslant\sqrt[2n]{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2n}}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_{2n}$. Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldalának az értéke 1, azért valóban, $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_{2n}=1$.

Ám a feladatbeli polinomnak nem gyöke az 1, hiszen

$$1^{2n}-2n\cdot1^{2n-1}+2n\cdot1^{2n-2}-\ldots+2n\cdot1^2-2n\cdot1+1=2-2n\neq0.$$

Ezzel ellentmondásra jutottunk, tehát a feladat állítását igazoltuk.

II. megoldás. *Surányi László:* Algebra című könyvének a 144. oldalán található 22. feladat állítása alapján, ha egy n-edfokú valós együtthatós polinomnak n valós gyöke van, akkor együtthatóira fennáll a $2a_{n-1}\cdot a_{n-3}\leqslant a_{n-2}^2+2a_na_{n-4}$ egyenlőtlenség. (x^i együtthatója a_i.) Ez a feladatbeli polimonra triviálisan nem teljesül, így a polinomnak még $2n$ darab valós gyöke sincs.

Lippner Gábor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján

50 dolgozat érkezett. 7 pontos kapott Lippner Gábor, 6 pontos Juhász András, Pintér Dömötör, Terék Zsolt és Terpai Tamás megoldása. 5 pontot kapott Baharev Ali, Barát Anna, Dályay Virág, Dedinszky Zsófia, Devecsery András, Gerbicz Róbert, Helesfai Gábor, Jakabfy Tamás, Kraft Nikoletta, Léka Zoltán, Lichteckert Zoltán, Méder Áron, Megyeri Csaba, Nyul Gábor, Oláh 407 Szabolcs, Páles Csaba, Papp Dávid, Prause István, Rudolf Gábor, Szalai-Dobos András, Székelyhidi Gábor, Szita István, Várkonyi Péter, Végh László és Zawadowski Ádám. 4 pontos 10, 3 pontos 3, 2 pontos 4, 1 pontos 1, 0 pontos 2 dolgozat

F. 3178. *Bizonyítsuk be, hogy az $x^{4n}+x^{3n}+x^{2n}+x^n+1$ polinom pontosan akkor osztható $x^4+x^3+x^2+x+1$-gyel, ha n nem osztható 5-tel.*

Megoldás. Jelölje kn 5-tel való osztási maradékát a_k, és legyen $kn=5b_k+a_k$ ($k=1, 2, 3, 4$).

$x^{kn}-a^{a_k}$ osztható $(x^4+x^3+x^2+x+1)$-gyel, mivel

$$x^{kn}-x^{a_k}=a^{a_k}\cdot(x^{5b_k}-1)=x^{a_k}\cdot(x^5-1)\cdot(x^{5(b_k-1)})+x^5(b_k-2)+\ldots+x^{5\cdot0})=$$
$$=x^{a_k}\cdot(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot\left(x^{5(b_k-1)}+x^{5(b_k-2)}+\ldots+x^{5\cdot0}\right).$$

Ennek alapján

$$x^{4n}+x^{3n}+x^{2n}+x^n+1-x^{a_4}-x^{a_3}-x^{a_2}-x^{a_1}-1$$

osztható $(x^4+x^3+x^2+x+1)$-gyel.

Ha n nem osztható 5-tel, akkor az a_1, a_2, a_3, a_4 számok valamilyen sorrendben megegyeznek az 1, 2, 3, 4 számokkal. Így $x^{4n}+x^{3n}+x^{2n}+x^n+1-x^4-x^3-x^2-x-1$ osztható $(x^4+x^3+x^2+x+1)$-gyel, s ez a kívánt oszthatósággal ekvivalens.

Ha n osztható 5-tel, akkor az a_1, a_2, a_3, a_4 számok mindegyike 0, így az $x^{4n}+x^{3n}+x^{2n}+x^n-4$ polinom osztható $(x^4+x^3+x^2+x+1)$-gyel. Ezért az $x^{4n}+$ $+x^{3n}+x^{2n}+x^n+1$ polinom nem osztható $(x^4+x^3+x^2+x+1)$-gyel.

43 dolgozat érkezett. 7 pontot kapott Nagy 111 István, 6 pontot Terpai Tamás. 5 pontot kapott Barát Anna, Bérczi Gergely, Bíró Márton, Dályay Virág, Devecsery András, Fejérvári Bence, Gyenes Zoltán, Győri Nikolett, Györkei Györgyi, Hangya Balázs, Jeszenszky Gyula, Juhász András, Katona Zsolt, Keszegh Balázs, Lázár Zsófia, Léka Zoltán, Lippner Gábor, Méder Áron, Megyeri Csaba, Mizda Roland, Naszvadi Péter, Oláh 407 Szabolcs, Páles Csaba, Pintér Dömötör, Prause István, Szabó 997 Péter, Székelyhidi Gábor, Szilágyi Judit, Szita István, Szűcs Gábor, Vaik Zsuzsanna, Várkonyi Péter és Végh László. 4 pontos 3, 3 pontos 1, 2 pontos 1, 1 pontos 2, 0 pontos 1 dolgozat

Nehezebb matematika feladatok megoldása

N. 144. *Legyen n tetszőleges pozitív egész. Mutassuk meg, hogy $2\cdot(3n)!$ osztható $n!(n+1)!(n+2)!$-sal.*

I. megoldás. Megmutatjuk, hogy $2\cdot(3n)!$ prímtényezős felbontásában bármelyik prímszám legalább akkora kitevővel szerepel, mint $n!(n+1)!(n+2)!$ felbontásában.

Felhasználjuk azt a Legendre-tól származó tételt, miszerint $k!$ prímtényezős felbontásában egy tetszőleges p prímszám kitevője

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left[\frac{k}{p^\alpha}\right]=\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{k}{p^2}\right]+\left[\frac{k}{p^3}\right]+\dots\,.$$

Az összegnek csak az első $\left[\log_p n\right]$ tagja nem 0, elég az összeget idáig felírni.) A tétel és bizonyítása megtalálható pl. Erdős–Surányi: *Válogatott fejezetek a számelméletből* c. könyvének 29. oldalán (XII. tétel).

A tételt alkalmazva a $k=n$, $k=n+1$, $k=n+2$ és $k=3n$ esetekre, azt kell igazolnunk, hogy tetszőleges $p>2$ esetén

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^\alpha}\right]+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left[\frac{n+1}{p^\alpha}\right]+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left[\frac{n+2}{p^\alpha}\right]\leqslant\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left[\frac{3n}{p^\alpha}\right],\tag{1}$$

illetve $p=2$ esetén

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^\alpha}\right]+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left[\frac{n+1}{2^\alpha}\right]+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left[\frac{n+2}{2^\alpha}\right]\leqslant 1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left[\frac{3n}{2^\alpha}\right].\tag{2}$$

Az $[x]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]=[3x]$ azonosság alapján tetszőleges $p^\alpha\geqslant 3$-ra

$$\left[\frac{n}{p^\alpha}\right]+\left[\frac{n+1}{p^\alpha}\right]+\left[\frac{n+2}{p^\alpha}\right]\leqslant\left[\frac{n}{p^\alpha}\right]+\left[\frac{n}{p^\alpha}+\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{n}{p^\alpha}+\frac{2}{3}\right]=\left[\frac{3n}{p^\alpha}\right],$$

továbbá az $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$ azonosság felhasználásával

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{2}\right]=n+\left[\frac{n}{2}\right]+1=\left[\frac{3n}{2}\right]+1.$$

Ezekből az egyenlőtlenségekből (1) és (2) azonnal következik.

II. megoldás. Felhasználjuk, hogy ha p, q és r nem-negatív egész számok, akkor $\frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$ egész. (Például p darab A, q darab B és r darab C betűből $\frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$ féle szó készíthető.)

Könnyű ellenőrizni, hogy

$$\frac{2\cdot(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}=\frac{(3n)!}{n!^3}+17\frac{(3n)!}{(n-1)!^2(n+2)!}-7\frac{(3n+1)!}{(n-1)!n!(n+2)!}+\frac{(3n+1)!}{(n-1)!(n+1)!^2}.$$

A jobb oldalon mindegyik tag egész.

Megjegyzések. 1. Az első megoldás gondolatmenetét követve igazolható, hogy tetszőleges k és n pozitív egészekre $1!\cdot 2!\cdot\ldots\cdot(k-1)!\cdot(kn)!$ osztható $n!\cdot(n+1)!\cdot\ldots\cdot(n+k-1)!$-sal.

2. A $\frac{2\cdot(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}$ számnak (és az általánosabb $\frac{1!\cdot 2!\cdot\ldots\cdot(k-1)!\cdot(kn)!}{n!\cdot(n+1)!\cdot\ldots\cdot(n+k-1)!}$-nak) vannak kombinatorikus jelentétesei is. Ezzel kapcsolatban lásd az **N. 163.** feladatot.

39 dolgozat érkezett. 6 pontos Kun Gábor megoldása, 5 pontot kapott Baharev Ali, Bérczi Gergely, Boros M. Mátyás, Gerbicz Róbert, Gyenes Zoltán, Hegedűs Péter, Hesz Zoltán, Horváth 202 Gábor, Hubenkó Elemér, Juhász András, Katona Zsolt, Kiss 246 Tamás, Léka Zoltán, Lippner Gábor, Lukács László, Mecz Balázs, Naszódi Gergely, Pap Júlia, Papp Dávid, Pataki Péter, Székelyhidi Gábor, Szigel Gábor, Szűcs Gábor, Terpai Tamás, Tóth 235 Ádám, Végh A. László, Zábrádi Gergely és Zawadowski Ádám. 4 pontot kapott Hesz Gábor. 2 pontos 2, 0 pontos 7 dolgozat.

N. 148. *Adott a síkon $n\geqslant 3$ páronként különböző pont. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható közülük három különböző: A, B és C, amelyekre*

$$1\leqslant\frac{AB}{AC}<\frac{n+1}{n-1}.$$

Javasolta: *Pap Gyula,* Debrecen

Megoldás. Legyen P és Q két olyan pont, amelyre a $PQ=d$ távolság maximális. Osszuk a maradék pontokat két csoportba aszerint, hogy P-hez vagy Q-hoz vannak közelebb. (Ha egy pont P-től és Q-tól ugyanolyan távolságra van, akkor tetszés szerint bármelyik csoportba tehetjük.)

Legyen a Q-hoz közelebbi pontok száma k. Nyilván feltehetjük, hogy ez a nagyobbik csoport, vagyis $k\geqslant\frac{n}{2}$. Állítsuk sorba a Q-hoz közelebbi pontokat a P-től való távolság szerint; legyenek a pontok R_1, R_2, $\ldots$, $R_k=Q$, ahol $PR_1\leqslant PR_2\leqslant\ldots\leqslant PR_k=d$.

Ha $PR_1 \leqslant \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{d}{2}$, akkor a háromszög-egyenlőtlenségből $QR_1 \geqslant PQ - PR_1 \geqslant \geqslant \left(1-\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{d}{2}$, és e két egyenlőtlenségből $1 \leqslant \dfrac{PR_1}{QR_1} \leqslant \dfrac{n+1}{n-1}$, vagyis az $A=P$, $B=R_1$, $C=Q$ pontok megfelelőek. A továbbiakban feltesszük tehát, hogy $PR_1 > \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{d}{2}$.

Ha valamelyik $1 \leqslant i < k$-ra $PR_{i+1} \leqslant \dfrac{n+1}{n-1}PR_i$, akkor szintén készen vagyunk, mert az $A=R_{i+1}$, $B=P$, $C=R_i$ pontokra teljesül a feltétel.

Mivel

$$\frac{PR_2}{PR_1}\cdot\frac{PR_3}{PR_2}\cdot\ldots\cdot\frac{PR_k}{PR_{k-1}}=\frac{PR_k}{PR_1}<\frac{d}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{d}{2}}=\frac{2}{1+\frac{1}{n}}, \tag{1}$$

elég azt igazolni, hogy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{k-1}\geqslant 2;$$

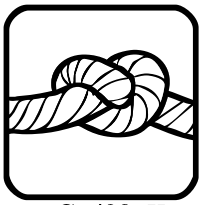
ebből következik, hogy (1) bal oldalán valamelyik tényező értéke legfeljebb $\dfrac{n+1}{n-1}$.

A Bernoulli egyenlőtlenség alapján

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{k-1}\geqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n-1}(k-1)\right)\geqslant$$
$$\geqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n-1}\cdot\frac{n-2}{2}\right)=2+\frac{n-3}{n(n-1)}\geqslant 2.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

4 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Bérczi Gergely és Lukács László, 4 pontot kapott Kun Gábor. 1 pontot kapott 1 versenyző.



A pontversenyben kitűzött C gyakorlatok (493–496.)

C. 493. Keressük meg azokat a négyzetszámokat, amelyeket 11-gyel maradékosan osztva a hányados prímszám és a maradék 4.

C. 494. 1-től kezdve sorban leírjuk a pozitív egész számokat valamely rögzített n-ig. Alájuk ugyanezeket a számokat írjuk, csak fordított sorrendben. Képezzük az egymás alatt lévő számok különbségének abszolút értékét, majd adjuk össze ezeket. Mi lesz az így kapott összeg?

Általános iskolások részére javasolt példák: **C. 493.**, **C. 495.**, **Gy. 3184.**

C. 495. Bizonyítsuk be, hogy ha egy trapéz alapján fekvő szögek nem egyenlők, akkor a kisebbik szög csúcsából kiinduló átló hosszabb, mint a másik átló.

C. 496. Egy szabályos hatszög alapú egyenes hasáb testátlóinak hossza 12 és 13. Mekkora a hasáb térfogata?

❄

Beküldési határidő: 1998. március 16.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest, Pf. 47. 1255

❄

A pontversenyben kitűzött gyakorlatok (3182–3189.) és feladatok (3214–3219.)

Gy. 3182. Legyen az a, b, c, d nemnegatív valós számok összege 1. Bizonyítsuk be, hogy

$$|ab-cd| \leqslant \frac{1}{4}. \tag{1}$$

Javasolta: *Blahota István,* Nyíregyháza

Gy. 3183. Egymást jól ismerő emberek társaságában mindenki vagy mindig igazat mond, vagy mindig hazudik. Egy kerek asztal köré ülve mindenki azt állítja, hogy ő igazmondó, de a tőle k hellyel jobbra ülő hazug. Hányan ülhetnek az asztal körül?

Javasolta: *Bakonyi Gábor,* Budapest

Gy. 3184. Amerikában a hőmérsékletet Fahrenheit fokban mérik. Ez egy egyenletes skála, amelyben a víz fagyáspontja 32 °F és a forráspontja 212 °F.

Valaki megadja a hőmérsékletet egész Fahrenheit fokokra kerekítve, amit mi átváltunk Celsiusra, és utána ismét egész fokokra kerekítünk. Legfeljebb mekkora lehet a kapott értéknek az eredeti hőmérséklettől való eltérése Celsius fokokban?

Javasolta: *Fried Ervin,* Budapest

Gy. 3185. Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ szabályos n-szög csúcsaira valamilyen sorrendben felírjuk az $1, 2, \ldots, n$ számokat.

a) Bizonyítsuk be, hogy a szomszédos számok közti különbségek abszolút értékének összege legalább $2n-2$.

b) Hány olyan elhelyezés van, amelyben a fenti összeg éppen $2n-2$? (**H**)

Gy. 3186. Szerkesszünk háromszöget egyik csúcsából induló magasságának és súlyvonalának hosszából, ha ismerjük a csúcs és a magasságpont távolságát is.

Gy. 3187. Anna és Béla találkozót beszél meg délután 5 és $\frac{1}{2}6$ közöttre. Mi a valószínűsége annak, hogy a korábban érkező nem vár 10 percnél többet a másikra, ha mindketten betartják, amit megbeszéltek?

Gy. 3188. Bizonyítsuk be, hogy bármely tetraédernek van olyan csúcsa, amelybe befutó élekből szerkeszthető háromszög.

Gy. 3189. Forgassunk el egy egységnyi élű kockát egyik testátlója körül 60°-kal. Számítsuk ki az eredeti és az elforgatott kocka közös részének térfogatát! (**H**)

❄

Beküldési határidő: 1998. március 16.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

❄

F. 3214. Aladdin bejárta az egyenlítő minden pontját, hol nyugatra, hol keletre mozogva az egyenlítő mentén, hol pedig átvarázsolva magát a Föld átellenes pontjára. Útja során legfeljebb 19 000 km-t ment nyugatra. Bizonyítsuk be, hogy volt olyan időpont, amikor a keletre és nyugatra megtett utak hosszának különbsége legalább az egyenlítő fele volt.

F. 3215. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ valós számok mindegyike nagyobb a k pozitív számnál. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a_1^2}{a_2-k}+\frac{a_2^2}{a_3-k}+\ldots+\frac{a_{n-1}^2}{a_n-k}+\frac{a_n^2}{a_1-k}\geqslant 4kn. \tag{2}$$

Javasolta: *Czirok Levente,* Szekszárd

F. 3216. Igaz-e minden n természetes számra a

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\ldots\sqrt{n}}}}<3 \tag{3}$$

egyenlőtlenség?

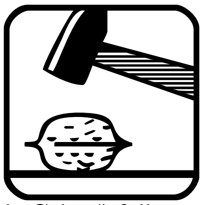
Javasolta: *Róka Sándor,* Nyíregyháza

F. 3217. Egy háromszög súlyvonalainak hossza s_1, s_2 és s_3, egy P pontnak a súlyvonalaktól való távolsága pedig rendre d_1, d_2 és d_3. Mutassuk meg, hogy az s_1d_1, s_2d_2 és s_3d_3 szorzatok közül a legnagyobb egyenlő a másik kettő összegével.

Javasolta: *Kiss János,* Budapest

F. 3218. Az $A_1A_2A_3$ háromszög egy P belső pontjából az A_iA_{i+1} oldalegyenesre bocsátott merőleges talppontja B_i ($i=1, 2, 3$, az indexeket modulo 3 értjük). A $B_1B_2B_3$ háromszögből hasonlóan képezzük a $C_1C_2C_3$, majd abból a $D_1D_2D_3$ háromszöget. Mutassuk meg, hogy a $D_1D_2D_3$ háromszög hasonló az $A_1A_2A_3$ háromszöghöz.

F. 3219. Egy szabályos dodekaéder lapjait kiszíneztük pirossal, kékkel, sárgával és zölddel úgy, hogy bármelyik két szomszédos lap színe különböző. Hány olyan éle van a dodekaédernek, amelyhez csatlakozó két lap közül az egyik kék, a másik pedig zöld?



A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (163–166.)

N. 163. Bizonyítsuk be, hogy n darab **A**, n darab **B** és n darab **C** betű felhasználásával pontosan $\frac{2\cdot(3n)!}{n!\cdot(n+1)!\cdot(n+2)!}$ olyan $3n$ hosszúságú szó készíthető, amelyben tetszőleges $1\leqslant k\leqslant n$ egészre a k-adik **A** betű megelőzi a k-adik **B** betűt, és a k-adik **B** betű megelőzi a k-adik **C** betűt.*

N. 164. Van-e olyan eleme a Fibonacci-sorozatnak, amelynek tízes számrendszerbeli alakja 6 darab 9-es számjegyre végződik?

N. 165. A_0, A_1, A_2, $\ldots$, A_k egy $4n$-elemű halmaz $2n$-elemű részhalmazai. Igazoljuk, hogy közülük valamelyik kettő metszetének elemszáma legalább $\left(1-\frac{1}{k}\right)n$.

Javasolta: *Babai László,* Chicago

N. 166. Adott egy egyenesen négy pont: A, B, C és D. A pontok az egyenesen ebben a sorrendben következnek, és $AB=CD$. Megszerkeszthető-e egyetlen egyenes vonalzóval a BC szakasz felezőpontja?

❄

Beküldési határidő: 1998. március 16.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS

(Volume 48. No. 2. February 1998)

New exercises for practice (see page 100): **C. 493.** Find all perfect squares with the following property: if we divide them by 11, the (partial) quotient is a prime number and the remainder is 4.

C. 494. Write the numbers $1,2,\ldots,n$ in a row, in increasing order. In the next row, write the same numbers in decreasing order. Consider the difference of any two numbers, one of which is lying below the other. Determine the sum of the absolute values of all such differences. **C. 495.** Prove that if the base angles of a trapezoid are not congruent, then the diagonal starting at the

* A feladat az **N. 144.** megoldásához kapcsolódik.

vertex of the smaller angle is longer than the other diagonal. **C. 496.** The diagonals of a regular hexagonal prism have lengths 12 and 13. Calculate the volume of the polyhedron.

New exerciese: Gy. 3182. The non-negative real numbers a,b,c,d add up to 1. Prove inequality (1). **Gy. 3183.** Some people, who know each other very well, are sitting at a round table. Some of them always tell the truth, but the others always lie. Each of them claims that he is veracious, but the kth person sitting on his right hand side is a liar. How many people can be there around the table? **Gy. 3184.** In America, temperature is measured in Fahrenheit degrees. This is a linear scale in which the melting point of ice is taken as 32 degrees (32 $^\circ$F) and the boiling point of water is taken as 212 $^\circ$F. Someone gives us the temperature in Fahrenheit degrees, rounded to the nearest integer degree. We then convert it to the Celsius scale and round it to the nearest integer degree. Express, in centigrades, the maximum possible deviation of the temperature calculated this way from the actual temperature. **Gy. 3185.** The numbers $1,2,\ldots,n$ are assigned, in some order, to the vertices A_1, A_2, $\ldots$, A_n of a regular n-gon. a) Prove that the sum of the absolute values of the differences between adjacent numbers is at least $2n-2$. b) Find the number of arrangements in which the above sum is exactly $2n-2$. **Gy. 3186.** Construct a triangle, given the lengths of an altitude and a median, starting at the same vertex of the triangle, and the distance between that vertex and the orthocentre of the triangle. **Gy. 3187.** Ann and Bob agreed to have a date somewhen between 5 and 5:30 p.m. Assuming that they arrive within the specified interval, find the probability that no one has to wait more than 10 minutes for the other. **Gy. 3188.** Prove that every tetrahedron has a vertex such that the edges starting at that vertex can be rearranged to form a triangle. **Gy. 3189.** Rotate a cube of unit edge by 60° about one of its diagonals. Calculate the volume of the intersection of the rotated cube with the original one.

New problems: F. 3214. Aladdin walked all over the equator in such a way that in each moment he either was moving to the west or was moving to the east or applied some magic trick to get to the opposite point of the Earth. We know that he travelled at most 19000 km's alltogether during his westward moves. Prove that there was a moment when the difference between the distances he had covered moving to the east and moving to the west, respectively, was at least half of the length of the equator. **F. 3215.** We are given real numbers a_1, a_2, $\ldots$, a_n such that each of them is greater than a positive number k. Prove inequality (2). **F. 3216.** Decide, whether inequality (3) holds for every natural number n. **F. 3217.** Let s_1,s_2,s_3 denote the lengths of the medians in a triangle, and let d_1, d_2 and d_3 denote the distances of a point P from the medians, respectively. Prove that one of the products s_1d_1, s_2d_2, s_3d_3 equals the sum of the other two. **F. 3218.** We are given a triangle $A_1A_2A_3$ and a point P inside the triangle. Let B_i, for $i=1,2,3$, denote the foot of the perpendicular from P to line A_iA_{i+1} (indices are taken modulo 3). In a similar manner, we can obtain a triangle $C_1C_2C_3$ from triangle $B_1B_2B_3$, and then triangle $D_1D_2D_3$ from triangle $C_1C_2C_3$. Prove that triangle $D_1D_2D_3$ is similar to triangle $A_1A_2A_3$. **F. 3219.** Each face of a regular dodecahedron is coloured with one of four colours, red, blue, yellow and green, such that adjacent faces have different colours. Find the number of such edges for which one of the two faces incident to the edge is blue and the other one is green.

New advanced problems: N. 163. Consider words of length $3n$ obtained from a three letter alphabet A,B,C according to the folllowing rules. Firstly, each letter has to be used exactly n times. Secondly, for each $1\leqslant k\leqslant n$, the kth letter 'A' has to precede the kth letter 'B', which, in turn, has to precede the kth letter 'C'. Prove that the number of such words is $\dfrac{2\cdot(3n)!}{n!\cdot(n+1)!\cdot(n+2)!}$.* **N. 164.** Is there any number in the Fibonacci sequence whose six last digits (in decimal system) are all 9? **N. 165.** Sets A_0, A_1, A_2, $\ldots$, A_k are subsets, each of size $2n$, of a set of $4n$ elements. Prove that there can be found two of them whose intersection has at least $\left(1-\dfrac{1}{k}\right)n$ elements. **N. 166.** We are given four points on a line in the following order: A,B,C,D. Moreover, we know that $AB=CD$. Is it possible to construct the midpoint of segment BC, if we are only allowed to use a straightedge?

* This problem is related to the solution of Problem **N. 144**.

FELHÍVÁS

Tavalyi pontversenyünk díjazottjai, akik a Téli Ifjúsági Ankéton *nem vették át* könyvjutalmukat, kérjük, jelentkezzenek a szerkesztőségben. (Az át nem vett könyvutalványokat postán kiküldtük.)

Feltalálók Világtalálkozója

1998. március 16–22.

A Magyar Feltalálók Egyesülete a budapesti Olimpiai Csarnokban rendezi meg március 19–22. között a *Feltalálói Olimpiát* (Genius'98), március 21-én szombaton a *Kreativitási Diákolimpiát*, amelyben két korcsoportban versenyeznek a fiatalok.

Március 19. és 22. között minden nap:

- játszóház logikai és más talányos eszközökkel (*Játék–Tanszer Stúdió*)
- barkácsolás különös anyagokból
- szaktanácsadás fiatalok ötleteihez
- tanszerfejlesztők és játékkészítők találkozója
- számítógéphasználat, információcsere.

Internet: **www.inventor.hu**

Az érdeklődőket szeretettel várja a szervezők nevében

Kovács Zoltán

KöMaL CD-ROM akció!

A KöMaL-CD ára 1998. január 1-től 5000 Ft + 12% ÁFA, összesen **5600 Ft**.

Megrendelhető vagy megvásárolható a KöMaL szerkesztőségben:

Budapest, 1088 Rákóczi út 5. II. em. 206. 266-9833/2108

Levelezési cím: Budapest, 1255. Pf. 47.

e-mail: szerk@komal.elte.hu internet: http://www.math.elte.hu/komal

MATEMATIKA és FIZIKA TOTÓ az 1997. évi Téli Ankéton*

1. Egy háromszög oldalaira fennáll: $0 < a \leqslant 1 \leqslant b \leqslant 2 \leqslant c \leqslant 3$. Legfeljebb mekkora lehet a háromszög területe? 1 egység (1); 2 egység (2); 3/2 egység (X).

2. Hol állította fel Kürti Miklós az akkor (1972-ben) milliomod kelvines „világrekordot"? Budapesten (1), Oxfordban (2), Murmanszkban (X).

* A helyes válaszokat a jövő havi számunkban közöljük.

3. Zárt szalagok egy halmazával azt a műveletet végezhetjük, hogy mindegyiket hosszában, a két szélével párhuzamosan elvágjuk. Ha egy Möbius-szalagból indulunk ki, és a műveletet háromszor hajtjuk végre, végeredményként hány szalagot kapunk? 8 szalagot (1); 4 szalagot (2); 1 szalagot (X).

4. Egy kettőscsillag mindkét tagja ugyanakkora tömegű, mint a Nap, távolságuk pedig 1 „csillagászati egység". Mekkora a keringési idejük? Nagyobb, mint 1 év (1). Kisebb, mint 1 év (2), éppen 1 esztendő (X).

5. Egy „négyzetrácsosan" épített városban Téli Ankétot tartanak. Az egyik résztvevő elindul az előadóterem saroképületétől. Először 1, majd 2, utána 3, 4, 5, 6, 7, végül 8 saroknyi útszakaszt tesz meg egyenesen, de olymódon, hogy minden szakasz megtétele után derékszögben elfordul. Visszajuthat-e végül a kiindulási helyére? Nem (1). Igen, méghozzá többféle módon is (2). Igen, de csak egyetlen útvonalon (X).

6. Egy nagyon vékony, magas gyárkéményt az aljánál felrobbantanak, mire az lassan, „méltóságteljesen" eldől. Dőlés közben a kémény mindvégig egyenes marad (1); a kémény eltörik, méghozzá a teljes magasságának bizonyos hányadánál, egy viszonylag jól meghatározott pontjánál (2); eltörik, de a törés helye véletlenszerű (X).

7. Az 1, 2, 3, ..., 1997^{1998} számok között prímből, vagy teljes hatványból van-e több? (Teljes hatvány: 1-nél nagyobb egész szám 1-nél nagyobb egész kitevős hatványa.) Több prím van, mint teljes hatvány (1). Kevesebb prím van, mint teljes hatvány (2). Ugyanannyi van mind a kettőből (X).

8. Egy kiterjedt test (pontrendszer) tömege változhat. Pillanatnyi tömege m, tömegközéppontjának sebessége **v**, gyorsulása **a**, a rendszer impulzusa (lendülete) **I**, a rendszerre ható külső erők eredője **F**. Az $\mathbf{I} = m\mathbf{v}$ és $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ összefüggések közül a (klasszikus, nemrelativisztikus) mechanikában mindkettő biztosan igaz (1), az egyik néha nem teljesül (2), elképzelhető, hogy mindkettő hibás (X).

9. Egy 1998 csúcsú poliédernek hány lapja lehet? Legfeljebb 3992 (1); legfeljebb 4004 (2); lehet több is (X).

10. Egy műanyagflakon alját átfúrtuk és a lyukba egy vékony, hajlékony műanyagcső egyik végét erősítettük. A flakon félig vízzel töltve az asztalon nyugszik, a cső másik vége az asztal melletti szekrényben van, nem látható. Elképzelhető-e, hogy a flakonba még egy kevés vizet öntve a vízszint lesüllyed, ha pedig kimerünk vizet, akkor a vízszint megemelkedik? Igen, miért ne (1). Nem, ez ellenkezik a hatás-ellenhatás törvényével és a hőtan második főtételével (2). Elképzelhető, de csak „irreverzibilisen" (visszafordíthatatlanul) (X).

11. Neutron és antineutron találkozásakor keletkezhetnek-e fotonok? Nem, mert a neutron semleges részecske, és a fotonok a töltött részecskék közötti elektromágneses kölcsönhatás hordozói (1). Igen, de csak páros számú foton keletkezhet (2). Igen, de legalább két fotonnak kell keletkeznie (X).

12. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen felírt 2000 jegyű (pozitiv egész) szám felírható legfeljebb 3 négyzetszám összegeként? Kevesebb, mint $(1/2)^3 = 1/8$ (1); $7/8$ (2); több, mint $5/6$ (X).

13. Mikrohullámú sütőbe (vékonyfalú, elhanyagolható hőkapacitású) pohárban vizet forralunk. Egyik alkalommal félig töltjük a poharat, máskor csak a negyedéig. Mikor forr fel hamarabb a víz? Amikor kevesebb víz van a pohárban, akkor kb. feleannyi idő alatt felforr (1). Nagyjából ugyanannyi idő alatt forr fel a víz mindkét esetben (2). A felforraláshoz szükséges idő és a víz menyisége közötti kapcsolat nem ilyen egyszerű, más adatoktól is függ (X).

13 + 1. Melyik híres irracionális számra utal a következő angol mondat. „How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics." Az aranymetszés arányszámára (1); a Ludolf-féle számra (2); $\sqrt{2}$-re (X).

Téli Ifjúsági Ankét, 1997. december 19–21.

1. kép: A díjkiosztó ünnepség néhány résztvevője: az első sorban *Radnai Gyula*, az ELFT alelnöke, a KöMaL fizika szerkesztőbizottságának vezetője, mögötte a MATFUND Alapítvány Kuratóriumának tagjai, *Benczúr András*, az ELTE TTK dékánja, *Nagy Dénes Lajos*, az ELFT főtitkára és *Tichy Géza* egyetemi tanár. A harmadik sorban ül *Pintér Ferenc* nagykanizsai, a negyedik sor bal szélén *Oláh György* révkomáromi tanár.

2. kép: Ronyecz Andrea és *Ivády Balázs*, a mérési verseny nyertesei „hazavitték” a kupát a kazincbarcikai Ságvári Endre Gimnáziumba.

3. kép: Lippner Gábor (Fővárosi Fazekas M. Gyak. Gimn.) átveszi a díjat *Hermann Pétertől*, a KöMaL matematika szerkesztőbizottságának vezetőjétől.