1998-ban a lineáris programozás témakörével szeretnénk megismertetni olvasóinkat. Megértéséhez elegendők a középiskolai matematikai ismeretek. Bevezetőként újra közöljük – kissé rövidített formában – Prékopa Andrásnak a Középiskolai Matematikai Lapokban 1979-ben megjelent cikkét.

Lineáris programozás

A lineáris programozás egy alkalmazott matematikai tudományág, amely a geometriára, az algebrára, a kombinatorikára, a numerikus módszerekre, a függvénytanra és a számítástechnikára támaszkodik. Egzakt matematikai megfogalmazása a következő.

A lineáris programozás feladata

Lineáris egyenlőtlenségekből és lineáris egyenlőségekből álló feltételeknek eleget tevő $x_1, \ldots, x_n$ rendezett szám n-esek közül ki kell választanunk olyan rendezett szám n-est, amelyre egy előírt lineáris (első fokú) függvény a lehető legnagyobb, illetve a lehető legkisebb értéket veszi fel. Előfordulhat, hogy feltételeink ellentmondásosak, továbbá az is, hogy van ugyan a feltételeknek eleget tevő rendezett szám n-es, ám nincs véges nagyságú szélsőérték. E két esetben a gyakorlati feladatot rosszul fogalmaztuk meg. Ez a tény az esetek nagy részében nem dönthető el ránézéssel, hanem csak a megoldási módszer alkalmazása során tűnik ki. Ezért a feltételek összeférhetőségének és a véges szélsőérték létezésének az eldöntését is a lineáris programozás feladatához soroljuk.

Néhány lineáris programozásra vezető gyakorlati feladat

Szendvicskészítés. Egy társasági összejövetelre szendvicseket készítünk, mégpedig két fajtát. Ezek egy-egy darabja az alábbi összetételű:

I. fajta	II. fajta
2 dkg vaj	1 dkg vaj
2 dkg sonka	3 dkg sonka
3 dkg franciasaláta	2 dkg sajt
1 szelet kenyér	1 szelet kenyér

Kenyér van otthon bőven, ám a további összetevők mennyisége már korlátozott. Rendelkezésünkre áll:

50 dkg vaj
80 dkg sonka
60 dkg franciasaláta
40 dkg sajt

Célunk az, hogy a lehető legtöbb szendvicset készítsük. Ha x_1, illetve x_2 jelöli az egyes szendvicsfajtákból készítendő mennyiséget, akkor feladatunk a következő:

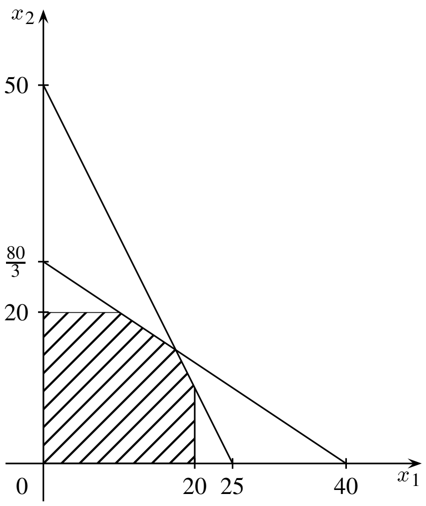
maximalizálandó (x_1+x_2),

feltéte, hogy
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leqslant 50,\\ 2x_1 + 3x_2 &\leqslant 80,\\ 3x_1 \phantom{{}+3x_2} &\leqslant 60,\\ 2x_2 &\leqslant 40,\\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

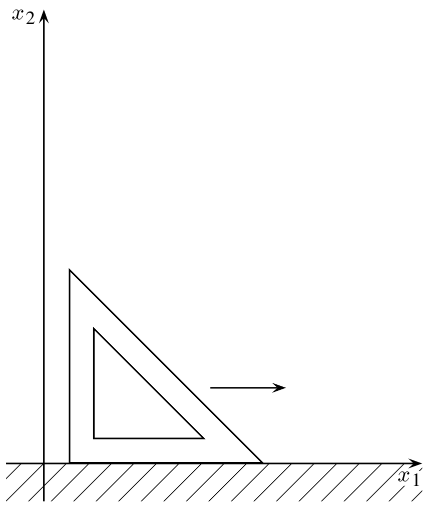
A feladat megoldását grafikusan a következő módon végezhetjük el. Az *1. ábrán* a vonalkázott sokszög jelenti a sík azon pontjainak összességét, amelyek eleget tesznek a feladat feltételeinek. Ezek közül a legnagyobb x_1+x_2 összeget szolgáltató pontot a következő módon választhatjuk ki: egy egyenlőszárú derékszögű háromszög alakú vonalzót végigcsúsztatunk egy másik vonalzón, amely az x_1 tengellyel egybeesik – a *2. ábrának* megfelelő módon –, majd megállunk akkor, amikor a vonalzó átfogójának és a vonalkázott sokszögnek még van közös pontja, de a vonalzó akármilyen kis továbbhaladása esetén ilyen közös pont már nincs. Esetünkben ez az eljárás egyetlen pontot eredményez, amely a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 50,\\ 2x_1 + 3x_2 &= 80 \end{aligned}$$

egyenesek metszéspontja. Innen adódik, hogy a legnagyobb x_1+x_2 összeget akkor kapjuk, amikor[1] $x_1 = 17.5$ és $x_2 = 15$.



1. ábra



2. ábra

[1] A programozási nyelvekben elterjedt szokás szerint a számok tizedestört felírásában *tizedespontot* és nem tizedesvesszőt használunk.

Az eredeti gyakorlati feladat megoldását csak közelítőleg kaptuk meg, hiszen 17.5 nem egész szám, fél szendvicset pedig nem készítünk. Van módszerünk arra is, hogy az x_1, x_2 ismeretlenekkel kapcsolatos fenti feltételeken kívül még ezekre az egész értékűség követelményét is előírva, megoldjuk a feladatot. Ezzel a bonyolultabb kérdéssel e helyen nem foglalkozunk. Megjegyezzük, hogy az egész értékűség természetesen nem minden lineáris programozási feladatban jogos követelmény, és még ha jogos is, elhanyagolhatjuk, ha nem tartjuk lényegesnek a meghatározandó darabszámok ily módon adódó csökkenését vagy túllépését.

Ha az eredeti feladattal kapcsolatban az egész értékűséget megkívánjuk, akkor – amint az az előbbi grafikus módszerrel könnyen adódik – három, ugyanazt a maximumot szolgáltató megoldást nyerünk. Ezek a következők:

$$x_1 = 18, \qquad x_2 = 14,$$
$$x_1 = 17, \qquad x_2 = 15,$$
$$x_1 = 16, \qquad x_2 = 16.$$

Optimális termelési terv készítése. Egy teherautókat gyártó vállalat egyéves termelési tervet készít. Meg kell határozni, hogy ötféle autótípus mindegyikéből mennyit gyártsanak egy év folyamán. A gyárnak van két nagyobb üzemegysége: a karosszériaüzem és a motorüzem, továbbá öt kisebb szerelőcsarnoka, mindegyik autótípus számára egy-egy. A karosszéria- és a motorüzem egy időben csak egy-egy autótípushoz gyárt karosszériát, illetve motort; be kell osztani tehát, hogy az egy év időt hogyan használják fel az öt autótípus számára. A szerelőcsarnokok egymás munkáit nem tudják átvállalni.

Ha a karosszériaüzem csak egy autótípushoz gyártana karosszériát, akkor 10 000 db legyártásához rendre 1, 1.4, 2, 0.8 és 2.2 évre volna szükség.

Ha a motorüzem csak egy autótípushoz gyártana motort, akkor 15 000 db legyártásához rendre 1, 1.6, 3, 1 és 2.6 évre volna szüksége.

Az öt szerelőcsarnok kapacitása évente 7500, 5000, 1000, 9000, illetve 3000 autó összeszerelése.

Végül megadjuk, hogy az egyes autótípusok egy-egy darabjának eladása révén a gyár tiszta haszna száz dolláros egységekben kifejezve 35, 45, 50, 30, illetve 40 egység.

Nem törődve azzal, hogy az autók száma csak egész szám lehet, feladatunkat az alábbi módon fogalmazzuk meg:

$$\begin{array}{ll}
\text{maximalizálandó} & (35x_1 + 45x_2 + 50x_3 + 30x_4 + 40x_5), \\
\text{feltéve, hogy} & x_1 + 1.4x_2 + 2x_3 + 0.8x_4 + 2.2x_5 \leqslant 10\,000 \\
 & x_1 + 1.6x_2 + 3x_3 + x_4 + 2.6x_5 \leqslant 15\,000 \\
 & x_1 \leqslant 7000 \\
 & x_2 \leqslant 5000 \\
 & x_3 \leqslant 1000 \\
 & x_4 \leqslant 9000 \\
 & x_5 \leqslant 3000 \\
 & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0,\ x_5 \geqslant 0.
\end{array}$$

A lineárás programozási feladat megoldása

A lineáris programozási feladat megoldására mind a mai napig a Dantzig által 1951-ben közölt módszert alkalmazzák leginkább[2]. Ennek egy egyszerű variánsát fogjuk ismertetni.

A feladat feltételeinek eleget tevő $x_1, \ldots, x_n$ rendezett szám n-eseket *megengedett megoldásoknak* nevezzük. A továbbiakban feltesszük, hogy feladatunk olyan alakú, hogy csupán az $x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$ feltételekben áll egyenlőtlenség, az egyéb feltételekben pedig egyenlőség, közelebbről: lineáris egyenlőség. A szendvicses feladat numerikus megoldása előtt majd példát mutatunk arra, hogy mi módon lehet a feladatot a most említett, ún. kanonikus (egységesített) alakra hozni, ha az eredetileg nem volt ilyen. Még azt is feltesszük, hogy az egyenlőséges feltételek ún. *kifejezett alakúak* bizonyos „változókra" nézve, amin azt értjük, hogy mindegyik egyenlőséges feltételben van olyan változó, amely a többiekben nem szerepel (másképpen kifejezve: a többiekben zéró együtthatóval szerepel). Ilyen pl. az alábbi feltételrendszer:

$$
\begin{aligned}
10 - x_1 \qquad\qquad\quad - 3x_4 + 2x_5 &= 0,\\
15 \qquad - x_2 \qquad - 4x_4 + x_5 &= 0,\\
16 \qquad\qquad - x_3 + 3x_4 - 6x_5 &= 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

amely kifejezett az x_1, x_2, x_3 változókra nézve. A kifejezett változókat más néven *bázisváltozóknak* is nevezzük. Még azt is feltesszük, hogy ha a bázisváltozóktól különböző többi változó helyébe zérót helyettesítünk, akkor az egyenlőségekből a bázisváltozók számára automatikusan adódó értékek nemnegatívak. A fenti példában pontosan ez a helyzet, ugyanis x_4 és x_5 helyébe zérót téve, az $x_1 = 10$, $x_2 = 15$, $x_3 = 16$ adódik.

Ha a kanonikus alakú feladat eredetileg nem ilyen, akkor is ilyen alakúra hozható, feltéve, hogy egyáltalán van megengedett megoldáa, amint azt a későbbiekben megmutatjuk.

Most egy olyan feladattal foglalkozunk, amelyben maximumot keresünk. A minimum-feladat erre visszavezethető, ha a minimalizálandó kifejezést (-1)-gyel megszorozzuk. A maximalizálandó kifejezést *célfüggvénynek*, a legnagyobb célfüggvényértéket adó megengedett megoldást – ha ilyen egyáltalán van – *optimális megoldásnak* nevezzük. Általában, ha egy halmaz minden eleméhez egyértelműen hozzárendelünk egy számot, akkor ezt a hozzárendelést *függvénynek* nevezzük. Most a feltételek által meghatározott $x_1, \ldots, x_n$ rendezett szám n-esek mindegyikéhez rendelünk hozzá egy-egy számot, ily módon alkotjuk meg a célfüggvényt. Például az (1) és az alábbi

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0,\ x_5 \geqslant 0 \tag{2}$$

nemnegativitási feltételeknek eleget tevő x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 rendezett számötösökön értelmezhetjük az alábbi célfüggvényt:

$$z = -6x_1 - x_2 + 5x_3 - 25x_4 + 37x_5. \tag{3}$$

[2] A cikk első, 1979-es megjelenése óta természetesen több más módszert is kidolgoztak, de ezek ismertetésére itt nem térünk ki.

Az (1) egyenlőségekből az x_1, x_2, x_3 változók számára adódó kifejezéseket (3) jobb oldalán a megfelelő helyekre behelyettesítve a célfüggvényre olyan alak adódik, amelyben x_1, x_2, x_3 már nem (vagy ha úgy tetszik, zéró együtthatóval) szerepel, mégpedig:

$$z = 5 + 7x_4 - 6x_5. \tag{4}$$

Azt a feladatot, amelyben a (4) célfüggvény maximalizálandó az (1) és a (2) feltételek mellett, az alábbi alakban írjuk fel:

$$\begin{array}{ll}
\text{maximalizálandó} & 5 - (0{\cdot}x_1 + 0{\cdot}x_2 + 0{\cdot}x_3 - 7x_4 + 6x_5) = z, \\
\text{feltéve, hogy} & 10 - (\;x_1 \qquad\qquad\qquad\quad + 3x_4 - 2x_5) = 0, \\
(5) & 15 - (\qquad\quad x_2 \qquad\quad + 4x_4 - \;\; x_5) = 0, \\
 & 16 - (\qquad\qquad\qquad x_3 - 2x_4 + 6x_5) = 0, \\
 & x_1 \geqslant 0,\;\; x_2 \geqslant 0,\;\; x_3 \geqslant 0,\;\; x_4 \geqslant 0,\;\; x_5 \geqslant 0.
\end{array}$$

A feladatot a konstansok és az együtthatók alábbi táblázatából egyértelműen rekonstruálhatjuk:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z	5	0	0	0	-7	6
x_1	10	1			3	-2
x_2	15		1		4	-1
x_3	16			1	-2	6

1. tábla

A táblában a zérók kiírása vagy elhagyása tetszés szerint történhet. A tábla bal oldalon a kifejezett változókat és a célfüggvény függő változóját írjuk fel, a tábla tetején pedig felsoroljuk valamennyi változót. Most két tételt említünk meg, amelyeket a lineáris programozási feladat megoldásakor használunk fel.

1. tétel. Ha a tábla felső sorában álló számok – az elsőt nem számítva – mind nemnegatívak, akkor a kifejezett változókat a mellettük álló konstansokkal, a többi változót 0-val egyenlővé téve, a feladat optimális megoldását nyerjük.

A tétel igaz voltát az (5) feladat egy módosítottján szemléltetjük. A módosítás abban áll, hogy az x_4 együtthatóját a célfüggvényben megváltoztatjuk, -7 helyett 7-et írunk a zárójelen belül, miáltal az új célfüggvény a következő lesz:

$$z = 5 - 7x_4 - 6x_5.$$

Minthogy $x_4 \geqslant 0$, $x_5 \geqslant 0$, azonnal adódik, hogy $z \leqslant 5$; és a $z = 5$ célfüggvényértéket valóban megkapjuk, ha $x_4 = x_5 = 0$, továbbá $x_1 = 10$, $x_2 = 15$, $x_3 = 16$.

2. tétel. Ha a tábla felső sorában – az első számot nem számítva – van olyan negatív szám, hogy az alatta álló számok mind nempozitívak, akkor a célfüggvény nem korlátos felülről, azaz akármilyen nagy számnál nagyobb értéket felvesz alkalmas megengedett megoldás esetén.

Ezt a tételt is az (5) feladat egy módosítottján szemléltetjük. A módosítás most abban áll, hogy az első és a második egyenlőséges feltételben a zárójelen belül x_4 együtthatóját 3 helyett (-3)-ra, illetve 4 helyett (-4)-re változtatjuk. Az így nyert feladatban válasszunk egy tetszőleges x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 megengedett megoldást; x_4-et növelve, az egyenlőségek érvényben tarthatók az x_1, x_2, x_3 bázisváltozók értékeinek alkalmas megválasztásával, miközben a nem bázisváltozók értékét nem változtatjuk (most az x_5 tartozik ebbe a kategóriába). Eközben a célfüggvény értéke minden határon túl nő, vagyis tényleg nem korlátos felülről.

A fenti két tételben két különböző típusú tábláról van szó. Van egy harmadik típus is, amelyben a felső sorban – az első számot kihagyva – van negatív szám, és az alatta álló számok között van legalább egy pozitív. Mindegyik tábla a három kategória valamelyikébe tartozik. Az (5) feladathoz tartozó *1. tábla* a harmadik csoportba tartozik.

Ekkor eljárásunk a következő: a bázisváltozók valamelyikét megszüntetjük mint bázisváltozót, helyette egy olyan változó, mely eddig nem volt bázisváltozó, azzá válik. Az új bázisváltozó céljára minden olyan változó megfelel, amelynek a célfüggvényben a kerek zárójelen belüli együtthatója negatív. Ezek közül tetszőlegesen kiválasztunk egyet *bejövő* változó gyanánt; ám a *kimenő* változó meghatározása már nem tetszőleges. Ezt úgy kell megválasztanunk, hogy a célfüggvényben szereplő konstans lehetőleg növekedjék, de legalábbis ne csökkenjen, a feltételek konstansai pedig maradjanak nemnegatívak az új bázisváltozk esetében. Mindkét célt elérjük, ha vesszük azokat az egyenlőséges feltételeket, amelyekben a bejövő változó – zárójelen belüli – együtthatója pozitív, majd meghatározzuk mindegyik ilyen egyenlőségen belül a konstans tag és a bejövő változó együtthatójának a hányadosát és amelyik egyenlőség esetében ez a hányados a legkisebb, annak a bázisváltozója lesz a kimenő változó. Ezek után az előbbi módon kiválasztott egyenlőséges feltételt a bejövő változó együtthatójával végigosztjuk, majd a célfüggvényből és a többi egyenlőséges feltételből ugyanezt a változót kiküszöböljük az új bázisváltozóhoz tartozó egyenlőséges feltétel alkalmas konstansszorosainak hozzáadásával. Megjegyzendő, hogy az új feltételek a régiekkel egyenértékűek, a célfüggvény pedig semmit nem változik értékében, csak alakjában, hiszen csupán zérót adtunk hozzá.

Bár a fentiek alapján nagyjából világos, hogy hogyan nyerjük az új táblát a régiből, a teljesség kedvéért ezt a szabályt röviden összefoglaljuk. Ha az x_k változó bejön a bázisba, x_j pedig kimegy a bázisból, akkor:

az új táblában x_k sorát úgy nyerjük, hogy a régi táblában az x_j-nek megfelelő sort végigosztjuk azzal az elemével, amelyik az x_k oszlopában áll;

az új tábla minden egyéb sorát úgy származtatjuk, hogy a neki megfelelő, régi táblabeli sor x_k oszlopában álló elemével az új tábla x_k-nak megfelelő sorát elemenként végigszorozzuk, majd az így kapott sort elemenként levonjuk a régi táblabeli sorból.

Alkalmazzuk a fent leírt lépést az (5) feladatra. Csak egy negatív szám van a tábla felső sorában az utolsó öt pozícióban, ez x_4-hez tartozik, tehát x_4 bejön. Minthogy

$$\min(10/3, 15/4) = 10/3$$

és a minimumot az első egyenlőséges feltételben kapjuk, ezért x_1 a kimenő bázisváltozó. Az új feladatot szükségtelen kiírni, elég az új tábla megadására szorítkozni, ez pedig a következő:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z	85/3	7/3	0	0	0	4/3
x_4	10/3	1/3	0	0	1	−2/3
x_2	5/3	−4/3	1	0	0	5/3
x_3	68/3	2/3	0	1	0	14/3

2. tábla

Minthogy a felső sor utolsó öt pozíciójában minden szám nemnegatív, optimális megoldáshoz jutottunk, amely a következő:

$$x_1 = x_5 = 0, \qquad x_4 = 10/3. \qquad x_2 = 5/3, \qquad x_3 = 68/3.$$

Ezt a módszert nevezik Dantzig módszerének.

Ha Dantzig módszerének végrehajtása során a tábla bal felső sarkában álló szám állandóan növekszik, akkor soha nem térhet vissza a bázisváltozók egy olyan összessége, amely korábban már szerepelt. A kifejezett változók ugyanis a teljes táblát és így a bal felső sarokban álló elemet is egyértelműen meghatározzák. Minthogy pedig csak véges sok különböző módon lehet a kifejezett változókat kiválasztani, az eljárásnak véges sok lépés után be kell fejeződnie, vagy az 1. vagy a 2. tételnek megfelelő tábla elérésével. Ha a 2. tételnek megfelelő táblához jutunk, akkor nyilván rosszul fogalmaztuk meg az eredeti gyakorlati feladatot, ahhoz kell tehát visszatérnünk.

Most a *szendvicskészítés* példájának megoldását mutatjuk be. Az eredeti feladat négy egyenlőtlenséges feltételéhez *segédváltozókat* vezetünk be úgy, hogy a négy feltétel mindegyikében egyenlőség álljon fenn. Az új feladat a következő:

$$\begin{array}{ll}
\text{maximalizálandó} & (x_1 + x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6),\\
\text{feltéve, hogy} & 2x_1 + x_2 + x_3 = 50,\\
(6) & 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 80,\\
 & 3x_1 + x_5 = 60,\\
 & 2x_2 + x_6 = 40,\\
 & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0,\ x_5 \geqslant 0,\ x_6 \geqslant 0.
\end{array}$$

E feladatnak nyilván akkor és csak akkor van megengedett megoldása és véges optimuma, ha az eredeti feladatnak, és az optimumértékek (a célfüggvények értékei az optimális megoldásokon) egyenlők. Segédváltozóinknak „fizikai” jelentést is tulajdoníthatunk. Ezek megadják a megmaradó vaj, sonka, franciasaláta és sajt mennyiségét. Segédváltozóink még abban is segítenek bennünket, hogy máris van egy kifejezett változó rendszerünk.

A (6) feladatot előbb az (5) feladatnak megfelelő alakra hozzuk:

$$\begin{array}{ll}
\text{maximalizálandó} & 0 - (-x_1 - x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6) = z,\\
\text{feltéve, hogy} & 50 - (\,2x_1 + x_2 + x_3\,) = 0,\\
(7) & 80 - (\,2x_1 + 3x_2 + x_4\,) = 0,\\
 & 60 - (\,3x_1 + x_5\,) = 0,\\
 & 40 - (\,2x_2 + x_6) = 0,\\
 & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0,\ x_5 \geqslant 0,\ x_6 \geqslant 0.
\end{array}$$

Az ehhez tartozó tábla, majd a megoldási módszer alkalmazása révén adódó további táblák a következők:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
z	0	-1	-1	0	0	0	0
x_3	50	2	1	1	0	0	0
x_4	80	2	3	0	1	0	0
x_5	60	$\boxed{3}$	0	0	0	1	0
x_6	40	0	2	0	0	0	1

1. tábla

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
z	20	0	-1	0	0	$1/3$	0
x_3	10	0	$\boxed{1}$	1	0	$-2/3$	0
x_4	40	0	3	0	1	$-2/3$	0
x_1	20	1	0	0	0	$1/3$	0
x_6	40	0	2	0	0	0	1

2. tábla

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
z	30	0	0	1	0	$-1/3$	0
x_2	10	0	1	1	0	$-2/3$	0
x_4	10	0	0	-3	1	$\boxed{4/3}$	0
x_1	20	1	0	0	0	$1/3$	0
x_6	20	0	0	-2	0	$4/3$	1

3. tábla

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
z	$65/2$	0	0	$1/4$	$1/4$	0	0
x_2	15	0	1	$-1/2$	$1/2$	0	0
x_5	$15/2$	0	0	$-9/4$	$3/4$	1	0
x_1	$35/2$	1	0	$3/4$	$-1/4$	0	0
x_6	10	0	0	1	-1	0	1

4. tábla

Az optimális megoldás a következő: $x_1 = 17.5$, $x_2 = 15$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 7.5$, $x_6 = 10$. Eszerint a vajat és a sonkát teljesen felhasználjuk, franciasalátából marad 7.5 dkg, sajtból pedig 10 dkg.

Vegyük észre, hogy az egymást követő táblák tetején mindig az összes változó szerepel ugyanabban a sorrendben, míg az bal oldalon a bejövő változó mindig a kimenő változó helyére kerül, a többi változó azonban helyben marad.

A lexikografikus módszer

Az előző szakaszban tárgyalt megoldási módszer esetében nincs garanciánk arra, hogy véges sok lépéssel eljutunk az 1. vagy a 2. tételnek megfelelő állapothoz. Ismeretesek olyan példák, amelyekben néhány lépés után visszajutunk ugyanazokhoz a bázisváltozókhoz, amelyekből kiindultunk. Azt mondjuk, hogy ekkor az eljárás ciklizál. A későbbiekben ismertetni fogjuk Beale [1] példáját, amely megmutatja, hogy a ciklizálás lehetséges, előbb azonban a ciklizálás elkerülésére vonatkozó módszert tárgyaljuk. A módszer lényegében Charnes-tól származik, ám annak egy elegánsabb változata.

A ciklizálásra akkor kerülhet sor, amikor a kimenő változó meghatározása nem egyértelmű, mert a megalkotott hányadosok minimuma több sor esetében is fellép. Ilyen esetben a következő táblában a bal oldalon álló oszlopban legalább egy zérus keletkezik. Az ezt követő táblában a bal felső sarokban álló elem biztosan változatlan marad, és ha ez sorozatosan előfordul, fennáll a ciklizálás veszélye.

Mielőtt a módszert ismertetnénk, bevezetjük a *lexikografikusan pozitív* (*L-pozitív*) rendezett szám n-es fogalmát. Minthogy n értéke a tárgyalás során mindig ismert lesz, és a rendezett szám n-eseink egymás mellé egy sorban elhelyezett számokból állnak majd, elég lesz egyszerűen csak *L-pozitív* sorokról beszélni. Egy sort akkor nevezünk L-pozitívnak, ha az elemek között van zérustól különböző, és balról jobbra haladva az első nem zérus elem pozitív. Ilyen pl. az alábbi, öt elemből alkotott sor:

$$(0, 0, 2, -10, 0),$$

viszont nem ilyen az alábbi:

$$(-2, 100, 0, 1, 4).$$

Ha két egyenlő számú elemből alkotott sor esetében az elsőből a másodikat elemenként levonva L-pozitív sort kapunk, akkor azt mondjuk, hogy az első lexikografikusan nagyobb, mint a második. Például a

$$(-2, 3, 1, 4, 5)$$

sor lexikografikusan nagyobb, mint az alábbi

$$(-2, 2, 8, 5, -4),$$

ugyanis az elemenként vett különbség a

$$(0, 1, -7, -1, 9)$$

L-pozitív sort eredményezi.

Egy kifejezett alakú lineáris programozási feladathoz tartozó táblát *lexikografikusan pozitívnak (L-pozitívnak)* nevezünk, ha annak második és ez alatti összes többi sora L-pozitív. Ebben a cikkben az eddig felírt valamennyi tábla L-pozitív.

A ciklizálás elkerülésére vonatkozó ún. *lexikografikus szabály (L-szabály)* a bejövő változó ismeretében mindig egyértelműen dönt a bal szélső kimenő változó felől. A bejövő változóra vonatkozó szabály változatlan, tetszés szerint választhatunk egy negatív elemet a felső sorban, a bal szélső elemtől eltekintve. A kiválasztott elemnek megfelelő változó bejön. Ezután a táblában a most kiválasztott elem alatti pozitív (zérus nem lehet!) elemekkel rendre elosztjuk azokat a sorokat, amelyekben ezek a pozitív elemek állnak (vigyázzunk, a teljes sorokat kell osztani, a bal szélső elemek most nem hagyhatók el!), majd vesszük az így kapott sorok közül azt, amelyik a lexikografikusan legkisebb. Az ennek a sornak megfelelő változó fog kimenni, ezt nevezzük L-szabálynak.

Az L-szabállyal kapcsolatban megemlítjük, hogy véges sok különböző, de ugyanannyi elemből álló sor között mindig van egy és csakis egy lexikografikusan legkisebb, ami azt jelenti, hogy ezt a továbbiak akármelyikéből elemenként levonva, mindig L-pozitív sort kapunk. Ennek az állításnak a belátását az olvasóra bízzuk. A mi vizsgálatainkban csakis olyan tábla fordul elő, amelynek a második és ez alatti sorai páronként nem arányosak, ugyanis ha x_i kifejezett változó, akkor abban a sorban, amely x_i mellett van, található egy 1-es olyan helyen, hogy annak oszlopában minden egyéb elem zérussal egyenlő.

Az L-szabály alkalmazásakor megkívánjuk, hogy L-pozitív táblából induljunk ki. Ez könnyen elérhető, ha változóinkat átszámozzuk oly módon, hogy a bázisváltozók az elsők legyenek, tehát m számú bázisváltozó esetén éppen $x_1, \ldots, x_m$ legyenek azok. Ez esetben ugyanis a bal oldalon a bázisváltozók melletti számok közül ha egyesek zérussal egyenlők is, soraikban az első nem zérus elem (+1)-gyel lesz egyenlő, tehát a tábla L-pozitív lesz.

Könnyen belátható, hogy ha L-pozitív táblából indulunk ki, és a kimenő változó meghatározására mindig az L-szabályt alkalmazzuk, akkor minden további tábla L-pozitív lesz, a legfelső sor pedig állandóan lexikografikusan növekszik. Ezt nemsokára Beale példáján szemléltetjük, ahonnan az állítás általános érvénye világosan látszik majd. Most csupán leszögezzük, hogy a legfelső sor állandó L-növekedése miatt egyetlen bázisváltozó-rendszer sem térhet vissza (mert akkor a legfelső sor is visszatérne, ám egy sor nem lehet egyenlő egy nála lexikografikusan nagyobb sorral), ahonnan következik, hogy véges sok lépés után az eljárás véget ér vagy az 1., vagy a 2. tételnek megfelelő állapot elérésével. Ezt az eredményt tételszerűen is megfogalmazzuk az alábbi módon:

3. tétel. A lexikografikus módszer véges sok lépéssel véget ér.

Most pedig bemutatjuk *Beale* példáját. Előbb a lexikografikus módszert alkalmazzuk, hogy lássunk erre vonatkozó példát. Azután pedig megmutatjuk, hogy az eljárás ciklizálhat, amennyiben csupán az előző szakaszban ismertetett módszert alkalmazzuk. A lineáris programozási feladat (az általunk megkívánt alakban) a következő:

$$\begin{array}{ll}
\text{maximalizálandó} & 0-(0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3-3/4\cdot x_4+20\cdot x_5-1/2\cdot x_6+6x_7)=z,\\
\text{feltéve, hogy} & 0-(\,x_1 + \qquad\qquad\quad + 1/4x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7)=0,\\
 & 0-(\qquad x_2 \qquad + 1/2x_4 - 12x_5 - 1/2x_6 + 3x_7)=0,\\
 & 1-(\qquad\qquad x_3 \qquad\qquad\qquad + x_6 \quad)=0,
\end{array}$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0,\ x_5 \geqslant 0,\ x_6 \geqslant 0,\ x_7 \geqslant 0.$$

Az ehhez a feladathoz tartozó tábla a következő:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
z	0	0	0	0	$-3/4$	20	$-1/2$	6
x_1	0	1	0	0	$1/4$	-8	-1	9
x_2	0	0	1	0	$\boxed{1/2}$	-12	$-1/2$	3
x_3	1	0	0	1	0	0	1	0

1. tábla

A felső sorban $(-3/4)$-et kiválasztva, alatta két helyen találunk pozitív számot, ezek: $1/4$ és $1/2$. Azt a sort, amelyikben $1/4$ áll, végigosztjuk $1/4$-del, azt a sort pedig, amelyikben $1/2$ áll, végigosztjuk $1/2$-del. Ilyenformán az alábbi sorokat kapjuk:

$$\begin{aligned}&(0,\ 4,\ 0,\ 0,\ 1,\ -32,\ -4,\ 36),\\&(0,\ 0,\ 2,\ 0,\ 1,\ -24,\ -1,\ 6).\end{aligned}\tag{8}$$

Minthogy a két sor közül az alsó lexikografikusan kisebb, ezért x_2 megy ki. Helyébe x_4 jön be.

Lássuk most egy kicsit részletesebben, hogy miért növekszik a felső sor lexikografikusan, és miért lesz L-pozitív az új tábla. Az új felső sort úgy kapjuk meg, hogy a mostani felső sorból levonjuk x_2 sorának a $(-3/4)/(1/2)$ számmal elemenként vett szorzatát, azaz hozzáadjuk a felső sorhoz x_2 sorának $3/2$-szeresét. Minthogy x_2 sora L-pozitív, ebből azonnal adódik, hogy a felső sort ezáltal lexikografikusan megnöveltük.

A lexikografikus növekedés abból adódik, hogy a negatív $-3/4$ áll a felső sorban a sarokelem felett. Ha a sarokelem oszlopában máshol negatív szám állna, akkor az új táblában ugyanezen megfontolás alapján a megfelelő sor lexikografikusan megnőne, tehát az új táblában ez a sor L-pozitív maradna. Ez az eset most nem fordul elő, csak a teljesség kedvéért említjük.

Ha a sarokelem oszlopában valamelyik szám 0, akkor az a sor, amelyikben ez a 0 áll, nem változik. Eszerint ez a sor is L-pozitív marad. Esetünkben ilyen az x_3 változó sora.

Az új táblában x_4 sora oly módon kapható meg a régi táblabeli x_2-höz tartozó sorból, hogy ezt $1/2$-del végigosztjuk. Az új sor tehát L-pozitív.

Végül ami x_1 sorát illeti az új táblában, ez éppen az L-szabály alkalmazása miatt lesz L-pozitív. Ugyanis x_1 új sora egyenlő az alábbival:

$$\begin{aligned}&(0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1/4,\ -8,\ -1,\ 9)-(1/4)/(1/2)(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1/2,\ -12,\ -1/2,\ 3)=\\&\quad=(0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1/4,\ -8,\ -1,\ 9)-(1/2)(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1/2,\ -12,\ -1/2,\ 3),\end{aligned}$$

ez pedig L-pozitív, minthogy (8)-ban a felső és az alsó sor különbsége L-pozitív. (Amikor valamely sor zárójele elé egy számot írunk, ez azt jelenti, hogy a sor minden eleme ezzel a számmal végigszorzandó.) Ezek után a második tábla a következő:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
z	0	0	3/2	0	0	2	−5/4	21/2
x_1	0	1	−1/2	0	0	−2	−3/4	15/2
x_4	0	0	2	0	1	−24	−1	6
x_3	1	0	0	1	0	0	$\boxed{1}$	0

2. tábla

Vegyük észre, hogy a felső sor lexikografikusan nagyobb, mint az *1. tábla* felső sora. A *2. táblában* az L-szabály nem jut szerephez, mert egyedül x_6 jöhet be, és egyedül x_3 mehet ki. A harmadik és egyben az optimális megoldást szolgáltató tábla így alakul:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
z	5/4	0	3/2	5/4	0	2	0	21/2
x_1	3/4	1	−1/2	3/4	0	−2	0	15/2
x_4	1	0	2	1	1	−24	0	6
x_6	1	0	0	1	0	0	1	0

3. tábla

Az optimális megoldás tehát a következő: $x_1=3/4$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=1$, $x_5=0$, $x_6=1$, $x_7=0$.

A ciklizálás lehetőségét az alábbi táblák sorozata mutatja:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
z	0	0	0	0	−3/4	20	−1/2	6
x_1	0	1	0	0	$\boxed{1/4}$	−8	−1	9
x_2	0	0	1	0	1/2	−12	−1/2	3
x_3	1	0	0	1	0	0	1	0

1. tábla

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
z	0	3	0	0	0	−4	−7/2	33
x_4	0	4	0	0	1	−32	−4	36
x_2	0	−2	1	0	0	$\boxed{4}$	3/2	−15
x_3	1	0	0	1	0	0	1	0

2. tábla

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
z	0	1	1	0	0	0	−2	18
x_4	0	−12	8	0	1	0	$\boxed{8}$	−84
x_5	0	−1/2	1/4	0	0	1	3/8	−15/4
x_3	1	0	0	1	0	0	1	0

3. tábla

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
z	0	−2	3	0	1/4	0	0	−3
x_6	0	−3/2	1	0	1/8	0	1	−21/2
x_5	0	1/16	−1/8	0	−3/64	1	0	$\boxed{3/16}$
x_3	1	3/2	−1	1	−1/8	0	0	21/2

4. tábla

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
z	0	−1	1	0	−1/2	16	0	0
x_6	0	$\boxed{2}$	−6	0	−5/2	56	1	0
x_7	0	1/3	−2/3	0	−1/4	16/3	0	1
x_3	1	−2	6	1	5/2	−56	0	0

5. tábla

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
z	0	0	−2	0	−7/4	44	1/2	0
x_1	0	1	−3	0	−5/4	28	1/2	0
x_7	0	0	$\boxed{1/3}$	0	1/6	−4	−1/6	1
x_3	1	0	0	1	0	0	1	0

6. tábla

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
z	0	0	0	0	−3/4	20	−1/2	6
x_1	0	1	0	0	1/4	−8	−1	9
x_2	0	0	1	0	1/2	−12	−1/2	3
x_3	1	0	0	1	0	0	1	0

7. tábla

Induló bázisváltozók keresése

A szendvicskészítés példájában könnyű volt induló bázisváltozókat találni. A bevezetett segédváltozók megfeleltek e célra. Nem mindig van ilyen könnyű dolgunk. Ha a (6) feladatban a jobb oldalon akár csak egy szám is negatív volna, máris bajban volnánk, hiszen kikötöttük, hogy a nem bázisváltozókat zérussal egyenlővé téve, a bázisváltozók számára adódó értékek nemnegatívak legyenek.

Az induló bázisváltozók keresésének általános módszere az ún. *kétfázisú módszer*. Olyan feladatból indulunk ki, amelyben a változók nemnegativitási feltételein kívül minden további feltétel egyenlőséges. Ilyen pl. az alábbi feladat:

$$\begin{array}{ll}
\text{maximalizálandó} & (x_1+3x_2+4x_3+5x_4)\\
\text{feltéve, hogy} & x_1+2x_2+3x_3+2x_4=7,\\
(9) & 4x_1+6x_2+2x_3+x_4=10,\\
 & x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\ x_4\geqslant 0.
\end{array}$$

A kétfázisú módszer *első fázisában* önkényesen bevezetünk minden egyenlőséges feltételhez a bal oldalon egy további változót, ezeket *mesterséges változóknak* nevezzük. Ezután előírjuk, hogy ezek is nemnegatívak legyenek, és megfogalmazzuk azt a feladatot, amely a mesterséges változók összegének minimalizálásában áll, vagy ami ugyanaz, maximalizálandó a mesterséges változók összegének (-1)-szerese. A fenti feladat esetében ily módon a következőkre jutunk:

$$\begin{array}{ll}
\text{maximalizálandó} & (-x_5-x_6),\\
\text{feltéve, hogy} & x_1+2x_2+3x_3+2x_4+x_5=7,\\
(10) & 4x_1+6x_2+2x_3+x_4+x_6=10,\\
\end{array}$$
$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\ x_4\geqslant 0,\ x_5\geqslant 0,\ x_6\geqslant 0,$$

ahol x_5 és x_6 a mesterséges változók. E feladat megoldása:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
z	-17	-5	-8	-5	-3	0	0
x_5	7	1	2	3	2	1	0
x_6	10	4	$\boxed{6}$	2	1	0	1

1. tábla

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
z	$-11/3$	$1/3$	0	$-7/3$	$-5/3$	0	$4/3$
x_5	$11/3$	$-1/3$	0	$\boxed{7/3}$	$5/3$	1	$-1/3$
x_2	$5/3$	$2/3$	1	$1/3$	$1/6$	0	$1/6$

2. tábla

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
z	0	0	0	0	0	1	1
x_3	11/7	−1/7	0	1	5/7	3/7	−1/7
x_2	8/7	5/7	1	0	−1/14	−1/7	3/14

3. tábla

Optimális megoldáshoz és egyben új bázisváltozókhoz érkeztünk. A *3. tábla* alapján a feladat egyenlőséges feltételeinek új, a korábbiakkal egyenértékű alakja a következő:

$$\begin{aligned} 11/7-(-1/7x_1 \quad &+x_3+\ 5/7x_4+3/7x_5-\ 1/7x_6)=0,\\ 8/7-(\ 5/7x_1+x_2 \quad &\quad -1/14x_4-1/7x_5+3/14x_6)=0. \end{aligned} \tag{11}$$

Ha itt x_5 és x_6 helyébe zérót helyettesítünk, akkor a (9) feladat egyenlőséges feltételével egyenértékű feltételeket kapunk, amelyek kifejezettek az x_2, x_3 változókra nézve. Ezzel az első fázis véget ér, következik a *második fázis.* Ez abban áll, hogy a (11) feltételekből ily módon nyert feltételekhez hozzávesszük a nemnegativitási feltételeket, továbbá az eredeti célfüggvényt és megoldjuk a feladatot. A második fázis feladatának alakja tehát:

$$\begin{array}{ll} \text{maximalizálandó} & 68/7-(\ 4/7x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3-33/14x_4)=z \\ \text{feltéve, hogy} & 11/7-(-1/7x_1 \quad + x_3 + \quad 5/7x_4)=0, \\ & 8/7-(\ 5/7x_1+\ x_2 \quad - \ 1/14x_4)=0, \\ & x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\ x_4\geqslant 0. \end{array}$$

A második fázis egy lépésben befejeződik, az optimális megoldás:

$$x_1=0,\quad x_2=13/10,\quad x_3=0,\quad x_4=11/5.$$

Az eredeti változókat a mesterséges változókkal szemben *„fizikai változóknak”* is szokás nevezni.

A kétfázisú módszerrel kapcsolatban még a következőket fontos tudni.

Ha az első fázis befejeződik és az optimumérték 0-tól különbözőnek adódik, akkor ez azt jelenti, hogy az eredeti feladatnak nincs megengedett megoldása.

Ha az első fázis végén az optimumérték 0-val egyenlő, de marad mesterséges változó a bázisváltozók között, akkor az utolsó táblában a bal oldali oszlopban a mesterséges változók melletti számok szükségszerűen 0-val egyenlők. Ilyenkor először is a bázison kívüli mesterséges változókat a feladatból egyszerűen elhagyjuk. A bázisban bennmaradt mesterséges változókat pedig megpróbáljuk egymás után fizikai változókra kicserélni. A csere után ezeket a mesterséges változókat is egyszerűen elhagyjuk majd. Ha pl. az első fázis végén a bázison kívüli x_6, x_7, x_8 mesterséges változók elhagyása után az alábbi feltételekre jutottunk:

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+x_3 \qquad\qquad &=6,\\ -x_1+5x_2 \quad +x_4 \qquad &=8,\\ 4x_1-9x_2 \qquad +x_5 \quad &=9,\\ x_1-4x_2 \qquad\qquad +x_9 &=0, \end{aligned}$$

ahol x_9 a bázisban bennmaradt mesterséges változó, akkor a legalsó sor segítségével elimináljuk pl. x_1-et a felső három sorból. Ezáltal x_9 kimegy a bázisból, x_1 pedig bejön. Ilyen csere csak akkor nem volna lehetséges, ha az utolsó sorban x_1 és x_2 együtthatói zéróval lennének egyenlők. Képzeljük el, hogy ez következett be. Ekkor azt a konzekvenciát vonjuk le, hogy az eredeti, mesterséges változókkal még el nem látott feladatban az utolsó feltétel az első három feltétel alkalmas konstansszorosainak összegeként áll elő, vagyis az utolsó feltétel felesleges. Általában, ha az x_r mesterséges változó nem távolítható el a bázisból egy fizikai változó behozatalával, akkor az eredeti feladatban felesleges az a feltétel, amelyhez az x_r-et vezettük be. Az első fázis végén tehát a felesleges egyenlőségeket is felfedezzük.

Prékopa András

Egy érdekes számelméleti tétel

Pósa Lajos tanár úr szakkörén kaptam a következő feladatot: Osszuk fel a természetes számok halmazát két olyan diszjunkt részhalmazra, hogy az egyikben ne legyen végtelen számtani sorozat, a másikban pedig ne legyen három tagú számtani sorozat. A feladatra létezik egyszerű és viszonylag kevés matematikai ismeretet igénylő konstrukció, de én egy másik úton indultam el, amelyiken nem lehet eljutni az egyszerű megoldáshoz. Megpróbáltam egy olyan természetes számokból álló halmazt létrehozni, amelyben nincs három tagú számtani sorozat, de bármely egész számokból álló végtelen számtani sorozatból tartalmaz legalább egy elemet. Ha ilyen halmaz létezik, ekkor ez a halmaz és komplementerhalmaza kielégíti a feladat követelményeit, mert ha a komplementerhalmaz tartalmazna egy végtelen számtani sorozatot, akkor a konstruált halmazunkban nem lenne egy elem sem ebből a végtelen számtani sorozatból. Hosszas próbálkozások után eljutottam egy olyan halmazhoz, amelyben a 4^n+n alakú számok vannak, ahol n tetszőleges pozitív egész. Amikor megpróbáltam bizonyítani, hogy ez a konstrukció megfelel a feltételeknek, egy érdekes – számomra eddig ismeretlen – számelméleti tételt találtam, amit be is bizonyítottam:

Tétel. Minden a, $c>4$ és $b\geqslant 0$ adott számok esetén megoldható az alábbi kongruencia:

$$a^x+x\equiv b \pmod{c}.$$

(Ez a tétel azért érdekes számomra, mert állítása egyszerű, és nincs különösebb feltétel az adott számokra. Számelméleti tételeknél általában szokott valami olyan feltétel lenni az adott számokra, hogy kettő közülük relatív prím, vagy hogy közülük kettő legnagyobb közös osztójának többszöröse egy harmadik. Ennél a tételnél nincs ilyen feltétel.)

Bizonyítás. Az a^n mértani sorozat elemeinek c-vel való osztási maradéka egy idő után ciklikus, mert egy szám a-szorosának maradéka csak a szám maradékától függ. Legyen a ciklus hossza (ahány szám ismétlődik) d. Ekkor

$$a^{i+dk}\equiv a^i \pmod{c}$$

minden k és elég nagy i pozitív egészre. Legyen e a d-nek és c-nek a legnagyobb közös osztója. Ebből következik, hogy d többszörösei minden e-vel osztható maradékot felvesznek modulo c. Belátjuk, hogy $c > e$. Az biztos, hogy e nem lehet nagyobb, mint c, hiszen osztója. Tegyük fel, hogy $c = e$. Ekkor d többszöröse c-nek. Mivel a^n-nek c-vel való osztási maradékai a cikluson belül nem lehetnek egyenlőek (különben rövidebb lenne a ciklus), azért a ciklus hossza legfeljebb c (ennyi maradék van). Tehát $c = d$. Így valamilyen n-re c osztója a^n-nek, mert minden maradék benne van a ciklusban. Ez azt jelenti, hogy az összes ennél nagyobb a-hatvány osztható c-vel. Tehát $d = c = 1$.

Az állítást c szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Az állítás nyilvánvalóan igaz, ha $c = 1$. Feltesszük, hogy $c > 1$, és minden c-nél kisebb egészre igaz az állítás. Tehát e-re is, mert $c > 1$ esetén $c > e$. Tehát léteznek olyan elég nagy $n_0, n_1, n_2, \ldots, n_{e-1}$ számok, hogy

$$a^{n_i} + n_i \equiv i \pmod{e}$$

minden $i = 0, 1, 2, \ldots, e-1$-re (annyira, hogy közülük a legkisebbnél már elkezdődik a^n ciklusa modulo c. Ilyen van, mert indukciós feltevésünk szerint végtelen sok, tehát tetszőlegesen nagy n_i is van). Ebből következik, hogy

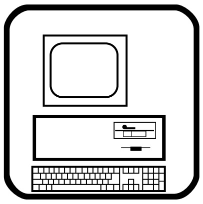
$$a^{n_i + kd} + n_i + kd \equiv a^{n_i} + n_i + kd \pmod{c}$$

minden pozitív k egészre,

$$a^{n_i} + n_i \equiv el + i$$

valamilyen l pozitív egészre, mert e osztója c-nek; és kd felvesz minden e-vel osztható maradékot modulo c. Ekkor $a^{n_i+kd} + n_i + kd$ előállít minden $em + i$ alakú maradékot modulo c, ahol m tetszőleges nemnegatív egész, és k végigfut a nemnegatív egészeken. Mivel i végigfut a $0; 1; 2; \ldots; e-1$ számokon, azért $a^n + n$ előállít minden c-vel való osztási maradékot. Tehát az $a^x + x \equiv b \pmod{c}$ kongruencia megoldható minden a, b és $c > 0$ nemnegatív egészre. Ezzel az állítást igazoltuk.

Zábrádi Gergely
Győr, Révai Miklós Gimnázium, 10. o.t.



Kutatások az Ericsson Traffic Laboratóriumban

Hogyan működhet egy Internetes video-szerver?

Az Ericsson Traffic Laboratórium a távközlési világcég forgalomanalízissel és hálózatszimulációval kapcsolatos kutatásokat folytató részlege.

A laboratórium által vizsgált hálózatok lefedik a távközlés egész területét, például a laboratórium vizsgál telefon-, mobil- és adathálózatokat (mint amilyen a nagy ütemben terjedő Internet is).

Ezek a hálózatok különféle technológiára épülnek, és az általuk nyújtott szolgáltatások is nagyon különfélék, pl. hang, video, adat; ebből adódóan a felmerülő problémák köre is rendkívül széles. A problémák egy részét meg lehet fogni matematikai eszközökkel, pl. gyakran használjuk a valószínűségelméletet, gráfelméletet és sok más eszközt is. Egy egyszerű, a laboratórium által is vizsgált problémát mutatunk be az alábbiakban, kissé leegyszerűsítve.

Az adathálózatok, mint amilyen az Internet is, működésükben nagyban különböznek a telefonhálózatoktól. Az adatokat a küldő eszköz ún. csomagokba helyezi bele, amit – mint egy levelet – felcímkéz a fogadó címével. Az így felcímzett csomagot ezután elküldi (pl. egy modemen keresztül) a hálózatba. A hálózat gondoskodik arról, hogy a csomag megérkezzen a címzetthez. A hálózaton belül a különböző irányból érkező csomagok összekeverednek. Nagyon fontos szempont az, hogy minél kisebb legyen a csomagok feltorlódása, illetve elvesztésének valószínűsége. Ez különösen akkor fontos, ha az igénybevett szolgáltatás érzékeny a csomagok gyors átjutására, ilyen pl. az egyre szélesebb körben használt Internet Phone vagy a rádióadásokat is „sugárzó” Real Audio. Az ehhez szükséges minőségi garanciák még nem biztosítottak az Interneten, de kutatása intenzíven folyik sok neves egyetemen és kutatólaboratóriumban. Nézzük meg, hogyan lehet egy ilyen problémát megközelíteni egyszerű valószínűségszámítási eszközökkel.

Tegyük fel, hogy egy Internetes video-szerverhez sok felhasználó kapcsolódik, legyen a számuk N. Ezek a felhasználók filmeket töltenek le a szerverről. A filmek a szerver számítógépén digitálisan kódolva vannak tárolva, mégpedig valamilyen változó adatsebességű kódolással (ilyen pl. az MPEG). Az i-edik videofolyam által igényelt adatsebességet az idő függvényében jelöljük $X_i(t)$-vel, $1 \leqslant i \leqslant N$.

A szerver az Internetre egy C bit/sec sebességű digitális vonallal kapcsolódik, ami egy konstans érték. Adatvesztés akkor léphet fel, ha a t időpillanatban az igények összege meghaladja a kimenő vonal sebességét. Ennek az esetnek a valószínűségét szeretnénk megbecsülni:

$$P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i(t) > C\right) = ?$$

Az elemzés szempontjából egyszerűsítsük le a feladatot.

Tegyük fel, hogy a folyamok ún. be-ki folyamatok, azaz két állapotuk van: az egyikben egységnyi sebességgel adnak (*be*), a másikban hallgatnak (*ki*). Ehhez a két állapothoz valószínűségek rendelhetők: $P(X_i = 1) = p$, ill. $P(X_i = 0) = 1 - p$.

Továbbá tegyük fel, hogy az N videofolyam egymástól függetlennek tekinthető, és a sebességek azonos eloszlásúak. Ekkor egyszerűen felírhatjuk annak a valószínűségét, hogy az N forrás közül egy időben L van *be* állapotban:

$$P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = L\right) = \binom{N}{L} p^L \cdot (1-p)^{N-L},$$

amiből a kívánt valószínűség:

$$P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i > C\right) = \sum_{L=C+1}^{N} \binom{N}{L} p^L \cdot (1-p)^{N-L}.$$

Az eredményt fel lehet használni arra, hogy méretezzük a szükséges vonalat, ha szerenénk ezt a valószínűséget egy adott kis érték alatt tartani. A megoldás rávilágít egy érdekességre: ha ábrázoljuk a szükséges C sebességet, miközben növeljük a videofolyamok számát (N-et) úgy, hogy a „túlfolyás” valószínűségét azonos szinten tartjuk (ε), akkor azt tapasztaljuk, hogy az egy folyamra jutó fajlagos sebességszükséglet (C/N) csökken.

Ezt az eredményt úgy értelmezhetjük, hogy minél több videoforrás van, azok egyre jobban kiegyenlítik egymást, azaz amikor az egyik filmen nagy aktivitású részlet van (X nagy), akkor nagy valószínűséggel lesznek olyan videofolyamok, amelyek viszont kis aktivitásúak (X kicsi). Minél több ilyen folyam van, ez a hatás annál erősebben jelentkezik.

Veres András

Feladat: hova tart az egy forrásra jutó kapacitás (C/N), ha N tart a végtelenbe és ε konstans?

A feladatot beküldők közül a legjobbak az Ericsson különdíjait kapják. A megoldást a kitűzött matematika feladatokkal együtt kérjük postára adni.

Januári szakköri feladatok

Rédei László professzor úr emlékére

1. Igazolja, hogy ha a, b, $c \in \mathbf{R}^+$, akkor

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b} \geqslant a+b+c.$$

2. a) Igazolja, hogy

$$S_n = 1\cdot 2+4\cdot 2^2+7\cdot 2^3+\ldots+(3n-2)\cdot 2^n = 10+(3n-5)\cdot 2^{n+1}.$$

b) Állítsa elő az

$$S'_n = 2\cdot 2+5\cdot 2^2+8\cdot 2^3+\ldots+(3n-1)\cdot 2^n$$

összeget n függvényeként.

3. Igazolja, hogy egy háromszög három oldalának hossza, a, b és c pontosan akkor (akkor és csak akkor) három egymást követő eleme egy számtani sorozatnak, ha

$$ac = 6r\varrho,$$

ahol r a háromszög köré, ϱ a háromszögbe írható kör sugara.

4. Legyenek A, B, C és D a sík (tér) tetszőleges pontjai. Igazolja, hogy

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=0;$

b) ha $AB \perp CD$ és $AD \perp BC$, akkor $CA \perp BD$.

c) Legyen ABC egy síkbeli háromszög. A b) alapján indokolja, hogy a háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást.

Megoldásvázlatok, eredmények az 1997/9 sz. II. mérőlap feladataihoz

1. A szinusztétel szerint $a\sin\beta=b\sin\alpha$, $a\sin\gamma=c\sin\alpha$ és $b\sin\gamma=c\sin\beta$, így igaz az állítás.

2. Az egyenlet $\cos\pi(x-1)^2=\cos\pi(x^2+1)$ alakban írható, hiszen $-\cos\alpha=\cos(\alpha+\pi)$. Ez akkor teljesül, ha

$$\pi(x-1)^2+2k\pi=\pi(x^2+1)\qquad\text{vagy}\qquad\pi(x-1)^2+2n\pi=-\pi(x^2+1),\qquad(k,n\in\mathbf{Z}),$$

azaz $x=k$ vagy $x^2-x+1+n=0$.

Az első esetben a legkisebb pozitív gyök az 1, a legkisebb abszolút értékű negatív gyök a -1; a második esetben $x=\dfrac{1\pm\sqrt{-4n-3}}{2}$, a legkisebb pozitív gyök a 1, a legkisebb abszolút értékű negatív gyök az $\frac{1}{2}\left(1-\sqrt5\right)$; így $x_1=1$, illetve $x_2=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt5\right)$ a kérdéses gyökök.

3. Az egyenlet

$$\left|\sqrt{x+2}+1\right|+\left|\sqrt{x+2}-1\right|=a$$

alakba írható, hiszen a gyökjel alatt $\left(\sqrt{x+2}+1\right)^2$, illetve $\left(\sqrt{x+2}-1\right)^2$ van. $|\sqrt{x+2}+1|=\sqrt{x+2}+1$, mivel $\sqrt{x+2}+1>0$. Az egyenletnek csak olyan megoldása lehet, amelyre $x\geqslant-2$.

Ha $\sqrt{x+2}>1$, azaz $x>-1$, akkor az egyenlet $2\sqrt{x+2}=a$ alakú;

ha $0\leqslant\sqrt{x+2}\leqslant1$, azaz $-2\leqslant x\leqslant-1$, akkor az egyenlet $2=a$ alakú.

Ha $a=1$, akkor az egyenletnek nincs megoldása;

ha $a=2$, akkor a $-2\leqslant x\leqslant-1$ számok a megoldások;

ha $a=4$, akkor a megoldás $x=2$;

ha $a=2\sqrt{x+2}$, akkor az $x\geqslant-1$ számok a megoldások.

4. A huszonnegyedik hónap végére

$$T=5000\cdot1{,}02\frac{1{,}02^{24}-1}{1{,}02-1}\approx155\ 151$$

forint gyűlik össze. Ha ekkor és a továbbiakban is x forintot veszünk ki minden év végén a harminchatodik hónap végéig, és akkor már a bankban nem marad pénz, akkor

$$0=T\cdot1{,}02^{12}-x\cdot\frac{1{,}02^{13}-1}{1{,}02-1},$$

ahonnan
$$x=\frac{T\cdot1{,}02^{12}}{1{,}02^{13}-1}\cdot(1{,}02-1),$$

azaz
$$x=5000\cdot1{,}02^{13}\cdot\frac{1{,}02^{24}-1}{1{,}02-1}\cdot\frac{1{,}02-1}{1{,}02^{13}-1},$$

$$x=5000\cdot1{,}02^{13}\cdot\frac{1{,}02^{24}-1}{1{,}02^{13}-1},$$

ahonnan
$$x\approx13\ 404\text{ forint.}$$

A második év végén, a kivét után 141 747 forintunk lesz a bankban.

5. A feltétel szerint $2b > a$ és $ab = 1$, így az igazolandó egyenlőtlenség a következő alakban írható:

$$\frac{a^2+4b^2-4ab+4ab}{2b-a} \geqslant 4.$$

Tudjuk, hogy ha $x>0$ és $y>0$, akkor $x+y \geqslant 2\sqrt{xy}$.

$$\frac{a^2+4b^2-4ab+4ab}{2b-a} = \frac{(2b-a)^2+4}{2b-a} = 2b-a+\frac{4}{2b-a} \geqslant 2\sqrt{4} = 4.$$

6. Legyen az e egyenes egy pontja $x=u$, $y=-u-1$, az f egyenes egy pontja $x=3t$, $y=-8t+\frac{7}{3}$. A feltétel szerint a $P(1;1)$ pont az EF szakaszt $\left(E(u;-u-1); F\left(3t;-8t+\frac{7}{3}\right)\right)$ $3:2$ arányban osztja, tehát $5=9t+2u$ és $5=-24t+7-2u-2$, ahonnan $u=4$ $(t=-\frac{1}{3})$, tehát $E(4;-5)$, $F(-1;5)$. A keresett EP egyenes egyenlete: $2x+y=3$.

(A P centrumú középpontos hasonlósággal is dolgozhatunk.)

7. Legyen az $x^2-px+q=0$ egyenlet két gyöke x_1 és x_2, az $x^2+(p+4)x-3q=0$ egyenlet két gyöke $3x_1$ és x_3. A gyökök és együtthatók közötti összefüggések szerint

$$\begin{array}{lll} (1) & x_1+x_2=p & \\ (2) & x_1x_2=q, & \end{array} \quad \text{és} \quad \begin{array}{ll} (3) & 3x_1+x_3=-p-4 \\ (4) & 3x_1x_3=-3q, \end{array} \quad \text{és} \quad (5) \quad p^2-4q=9.$$

Az (1) egyenlet 3-szorosából vonjuk ki a (3) egyenletet, majd a (2) háromszorosához adjuk hozzá (4)-et. Ekkor

$$3x_2-x_3=4p+4 \qquad \text{és} \qquad 3x_1(x_2+x_3)=0.$$

Ha $x_1=0$, akkor $q=0$, $p^2=9$, tehát a $q=0$, $p=3$ és a $q=0$, $p=-3$ számpárok megfelelnek.

Ha $x_2+x_3=0$, akkor $4x_2=4p+4$, $x_2=p+1$, ami kielégíti az $x^2-px+q=0$ egyenletet, azaz $(p+1)^2-p(p+1)+q=0$, tehát $q=-p-1$. Ehhez véve az (5) egyenletet: $p^2+4p-5=0$.

Ha $p=1$, akkor $q=-2$, ha $p=-5$, akkor $q=4$. Mind a négy $(p;q)$ számpár megoldás.

(Ha az $x^2-px+q=0$ egyenlet gyökei x_1 és x_2, akkor az $x^2-3px+9q=0$ egyenlet gyökei $3x_1$ és $3x_2$, tehát a másik egyenlettel van közös gyöke.

Észrevehető, hogy az $x^2-px+q=0$ egyenlet diszkriminánsa 5, tehát $x_1=\frac{1}{2}(p+3)$, $x_2= =\frac{1}{2}(p-3)$. E két megjegyzés alkalmazásával is megoldható a feladat.)

8. Az $xy=\frac{1}{2}\left((x+y)^2-x^2-y^2\right)$ azonosság alkalmazásával $xy=\frac{1}{2}\left((2z+1)^2-(z^2+4x)\right)$, $xy=\frac{1}{2}(3z^2+1)$. A $z \mapsto \frac{1}{2}(3z^2+1)$ függvényt kell vizsgálni azzal a feltétellel, hogy teljesülnek az egyenletek, azaz az $x^2-(2z+1)x+\frac{1}{2}(3z^2+1)=0$ egyenlet diszkriminánsa nemnegatív.

Most $D=(2z+1)^2-2(3z^2+1)=1-2(z-1)^2$. $D \geqslant 0$ pontosan akkor, ha $1-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant z \leqslant 1+ +\frac{\sqrt{2}}{2}$. A vizsgálandó függvény ebben az intervallumban szigorúan monoton növekvő, így a minimumát az $x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$, a maximumát az $x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ helyen veszi fel. A minimum értéke $\frac{1}{4}(11-$ $-6\sqrt{2})\approx 0{,}63$, a maximum értéke $\frac{1}{4}(11+6\sqrt{2})\approx 4{,}87$.

Rábai Imre

Matematikai Diáktalálkozó Komáromban

A Szlovákiai Magyar Pedagógusok Szövetségének matematika szakcsoportja 1997. november 14. és 16. között rendezte meg a VII. Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozót Észak-Komáromban. A program előkészítésében a szlovákiai magyar tannyelvű iskolák tanárai vettek részt, fő szervezője Oláh György, az Ipari Középiskola tanára volt. A mintegy 150 meghívott diák – közöttük kárpátaljai és magyarországi középiskolások – vendégként élvezhette a baráti fogadtatást, az érdekes előadásokat és szemináriumokat. A rendezvény célja egyfelől a matematika iránti érdeklődés fokozása, másfelől a tanulmányi versenyekre, felsőfokú továbbtanulásra fölkészülés segítése.

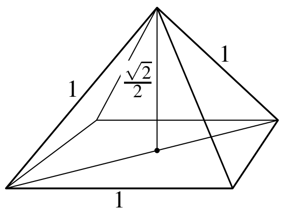
A három nap alatt öt szekcióban 36 előadás hangzott el. Az előadók kiváló matematikatanárok, matematikusok és a tanulmányi versenyeken jól szereplő diákok voltak. A tanulás mellett volt idő városnézésre, múzeumlátogatásra, szakmai, baráti beszélgetésekre, mozira, színházra: egy musical megtekintésére a gyönyörű komáromi Jókai Színházban.

Bogdán Zoltán

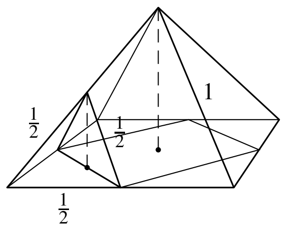
C gyakorlatok megoldása

C. 460. *Egy négyoldalú szabályos gúlából azokkal a síkokkal, amelyek az alaplap egy-egy csúcsából kiinduló éleket felezik, négy kis tetraédert metszettünk le. Mekkora a megmaradó test felszíne és térfogata, ha a gúla mindegyik éle egységnyi?*

Megoldás. A négyoldalú gúla felszíne egy egységoldalú négyzetből és 4 darab egybevágó egységoldalú szabályos háromszögből áll; $F_g = 1 + \sqrt{3}$.



1. ábra



2. ábra

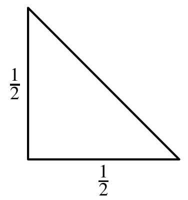
A gúla térfogata: $V_g = \dfrac{A_t \cdot m}{3}$. Az alaplap négyzet, és így $m = \sqrt{1 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $V_g = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

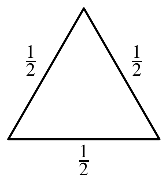
Mivel a gúla szabályos, a levágott kis tetraéderek egybevágók. Határozzuk meg egy kis tetraéder térfogatát. A tetraéder alaplapja $\frac{1}{2}$ befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög, területe: $\frac{1}{8}$, a tetraéder magassága a gúla magasságának a fele: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

A négy kis tetraéder együttes térfogata: $\dfrac{4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{24}$. A maradék test térfogata pedig:

$$\frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{24} = \frac{\sqrt{2}}{8} \text{ térfogategység.}$$

Egy kis tetraéder felszíne egy $\frac{1}{2}$ befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszögből, 2 darab $\frac{1}{2}$ oldalú szabályos háromszögből és egy $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ oldalú háromszögből áll, amely Pitagorasz tételének megfordítása értelmében az elsőként említett egyenlő szárú derékszögű háromszöggel egybevágó. Így





$$t_1 = \frac{1}{8}, \qquad t_2 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{16}.$$

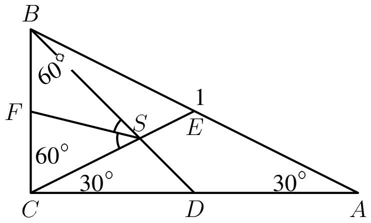
A gúla felszínéből ki kell vonnunk a kis tetraéderek alapcsúcsokban található 3–3 lapjának területösszegét, és ehhez hozzáadnunk a negyedik lapok területösszegét.

A megmaradt test felszíne:

$$F = 1 + \sqrt{3} - \left(4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{16}\right) + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \approx 1{,}866 \text{ területegység.}$$

228 dolgozat érkezett. 5 pontos 124, 4 pontos 2, 3 pontos 49, 2 pontos 13, 1 pontos 36. Hibás 7.

C. 463. *Az ABC derékszögű háromszög AB átfogója egységnyi, A-nál fekvő szöge 30°, súlypontja S. Mekkora részekre osztja a BC befogót a BSC szög szögfelezője?*



Megoldás. Az ABC derékszögű háromszög éppen fele egy $AB=1$ élhosszúságú szabályos háromszögnek, ezért $BC=\frac{1}{2}$, $AC=\frac{\sqrt{3}}{2}$. A CE súlyvonal hossza $\frac{AB}{2}=\frac{1}{2}$, ahonnan $SC=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=$ $=\frac{1}{3}$. A BD súlyvonal hosszát a BCD derékszögű háromszögből Pitagorasz tétele segítségével számolhatjuk ki.

$$BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Innen $BS=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{\sqrt{7}}{6}$.

A BSC háromszögben, az SF szögfelező a közrezáró oldalak arányában osztja a szemközti oldalt, azaz:

$$\frac{BF}{FC}=\frac{BS}{SC}=\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

A kérdéses szakaszok hossza pedig:

$$BF=\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot FC \qquad \text{és} \qquad \frac{\sqrt{7}}{2}FC+FC=\frac{1}{2},$$

ahonnan $FC=\frac{\sqrt{7}-2}{3}$ és $BF=\frac{7-2\sqrt{7}}{6}$.

295 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Robotka Zsolt. 5 pontos 218, 4 pontos 33, 3 pontos 11, 2 pontos 8, 1 pontos 9, 0 opntos 15 dolgozat.

C. 465. *Egy útelágazásnál lévő tanyán három testvér lakik, akik arról híresek, hogy közülük kettő igazmondó, egyikük pedig szeszélyes. Utóbbi néha igazat mond, máskor viszont nem. Egy eltévedt vándor ennek ismeretében a testvérektől kér útbaigazítást. Két kérdést tehet fel egy-egy testvérnek, és az ezekre kapott válaszokból kell megállapítania a helyes utat. Segítsünk neki: mi legyen a két kérdés?*

Szilágyi Judit (Balatonfüred) javaslata alapján

Megoldás. Mindkét kérdést az ott álló 3 testvér bármelyikének felteheti a vándor, de a kérdésre csak az válaszolhat, akinek feltette. A három testvér egymásról tudja, hogy melyikük az igazmondó és melyikük a szeszélyes. Állítsuk valamilyen módon sorba őket, és számozzuk meg 1, 2, 3-mal. Ezután az 1. testvértől a 2.-ra mutatva kérdezze meg a vándor a következőt: Szokott-e ő hazudni? Ha a válasz *nem*, akkor a vándor így okoskodhat:

Ha az 1. testvér szeszélyes volt, akkor a 2., akire rámutattam, *igazmondó*, tehát a válasz nem lehetett hazugság.

Ha az 1., akit kérdeztem igazmondó volt és a szeszélyesre mutattam volna, a válasz nem lett volna nem. Tehát nem válasz esetén a *2. nem lehet szeszélyes*. Így tehát nyugodtan megkérdezhetem tőle, melyik úton juthatok haza.

Ha az 1. testvértől *igen* választ kapott a vándor, akkor a következőket gondolta:

Ha a szeszélyesre mutattam, akkor biztos igaz a válasz, mert az igazmondó adta. A 2. testvér tehát nem megbízható.

Ha az igazmondóra mutattam, az igen válasz csakis akkor lehetséges, ha a szeszélyest kérdeztem, azaz az 1. testvér sem megbízhtó.

Így nem lehet az, hogy igazmondót kérdeztem és igazmondóra mutattam. Az 1., 2. testvér közül valamelyik szeszélyes, így legjobb, ha a 3. testvértől kérek útbaigazítást, hogy melyik úton jutok haza.

Kürthy Gábor (Pápa, Türr I. Gimn., III. o.t.)

166 dolgozat érkezett. 5 pontos 98, 4 pontos 25, 3 pontos 4, 2 pontos 2, 1 pontos 7. Hibás 30.

C. 469. *Egy zeneiskola tanévzáró koncertjén négy hegedűs is szerepelt. Amelyikük éppen nem játszott, a közönség soraiban foglalt helyet. Legalább hány számban léptek fel a hegedűsök, ha mindegyiküknek volt lehetősége bármelyik (hegedűs) társát a nézőtérről figyelni?*

Megoldás. Azt állítjuk, hogy legalább 4 szám szükséges ahhoz, hogy mindegyik hegedűs meghallgassa mindegyik társát a nézőtérről. Először belátjuk, hogy 3 fellépés nem elegendő. Jelöljük a hegedűsöket A, B, C és D-vel. Az nem lehet, hogy minden számban csak egy hegedűs lépjen fel, mert akkor egy kimaradna. Kell tehát, hogy valamelyik számban egyszerre legalább ketten szerepeljenek. Mivel összesen 3 fellépés van, két eset lehetséges:

1. Mindegyik hegedűs egyszer szerepel, és kétszer a nézőtéren ül;

2. Van olyan hegedűs – legyen ez pl. A, aki kétszer szerepel, és egyszer ül a nézőtéren.

Az első esetben:

	1. szám	2. szám	3. szám
szerepel	A	B, C	D
figyel	B, C, D	A, D	A, B, C

Ekkor azonban az a két hegedűs (B és C), amelyik egyszerre lépett fel, nem hallgatta egymást. (S ez nem függ a betűk kiválasztásától).

A második esetben, ha A kétszer szerepel, akkor ő csak egyszer ülhet a nézőtéren. A további két előadás nézőit úgy kell megválasztani, hogy a többiek is legalább egyszer üljenek a nézőtéren. Az nem lehet, hogy csak egy szereplő üljön nézőként, mert csak két további fellépés van, és senki sem ülhet mindkét előadáson, mert akkor a többiek nem láthatnák. Például:

	1. szám	2. szám	3. szám
szerepel	A	A	B, C, D
figyel	B, C	D	A

De B és C ebben az esetben sem hallotta egymást.

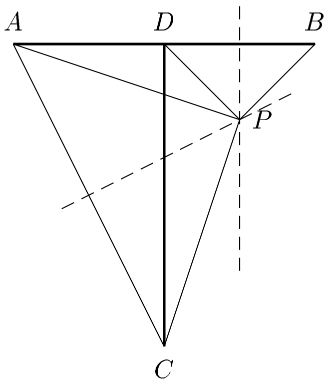
Négy előadás viszont biztosan elégséges, például a következőképpen:

	1. szám	2. szám	3. szám	4. szám
szerepel	A	B	C	D
figyel	B, C, D	A, C, D	A, B, D	A, B, C

Szabó Péter (Szentendre, Ferences Gimn., III. o.t.)

130 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Ábrány Miklós, Andrássy Zoltán, Babos Attila, Bákor Krisztina, Bálint Olivér, Boros M. Mátyás, Fehér Lajos Károly, Gáspár László, Gueth Krisztián, Haskó Gabriella, Horváth 202 Gábor, Horváth 472 András, Horváth 713 György, Jáger Márta, Klausz Zoltán, Kunszenti-Kovács Dávid, Pozsonyi Tamás, Robotka Zsolt, Sarlós Ferenc, Szabó 179 Péter, Taraza Busra, Terpai Tamás, Vágvölgyi Péter, Varga 524 Áron és Végh László. 4 pontos 12, 3 pontos 7, 2 pontos 9, 1 pontos 59. Hibás 18.

C. 471. *A síkon két egyenlő hosszúságú szakasz* T *alakban helyezkedik el. Van-e olyan síkbeli elforgatás, amely az egyik szakaszt a másikba viszi át?*



Megoldás. Jelöljük a szakaszok végpontjait A, B, C, D-vel az *ábra* szerint. A C-t az A-ba vivő forgatás fixpontja az AC szakasz felezőmerőlegesén van. Hasonlóképpen D-t a B-be vivő forgatás fixpontja a BD szakasz felezőmerőlegesén van. Mivel e két felezőmerőleges nem lehet párhuzamos egymással, van egy közös pontjak, P. Azt állítjuk, hogy a P körüli $90°$-os forgatás a CD szakaszt átviszi AB-be.

Az ABP háromszög egybevágó a CDP háromszöggel, hiszen 3 oldaluk hossza megegyezik ($PB = PA$, $PA = PC$, $AB = DC$), s így valóban P körül elforgatva fedésbe hozhatók, s mivel $AB \perp CD$, a forgatás szöge $90°$. Van tehát a síkon olyan pont, amely körül a két egyenlő hosszúságú szakasz egymásba forgatható.

119 dolgozat érkezett. 5 pontos 48, 4 pontos 46, 3 pontos 11, 2 pontos 10, 1 pontos 2. Hibás 22.

C. 472. *Egy gömböt egy síkkal kettészeltünk. Hogyan aránylik egymáshoz a két gömbszelet felszíne, ha ezek együttvéve* 25%*-kal haladják meg az eredeti gömb felszínét?*

Megoldás. A gömb sugarát választhatjuk egységnyinek, mivel csak az arányokat kell meghatároznunk. Egy gömbszelet felszínét a következő képlettel számíthatjuk ki:

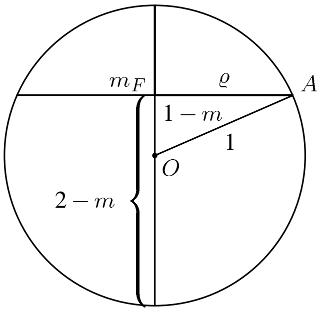
$$A = 2\pi rm + \pi\varrho^2,$$

ahol r a gömb sugara, ϱ a metszett kör sugara és m a gömbszelet magassága. Esetünkben felírhatjuk a következő egyenletet:

$$2\pi m + \pi\varrho^2 + 2\pi(2 - m) + \pi\varrho^2 = \frac{5}{4} \cdot 4\pi. \tag{1}$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket, kapjuk, hogy $2\varrho^2=1$, $\varrho^2=\dfrac{1}{2}$.

Az *ábrán* látható OAF derékszögű háromszögből: $\varrho^2=1-(1-m)^2$. Elvégezve a műveleteket, és a $\varrho^2=\dfrac{1}{2}$ helyettesítést, az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk: $2m^2-4m+1=0$, ahonnan $m=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$; $m_1=$ $=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\approx 1{,}7$ és $m_2=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}2928$.



Mindkét érték megfelelő, a két gömbszelet magasságát adja meg.

A nagyobbik gömbszeletnek a kisebbikhez való aránya:

$$\frac{2\pi m_1+\pi\varrho^2}{2\pi m_2+\pi\varrho^2}=\frac{2\pi\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}+\pi\dfrac{1}{2}}{2\pi\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}+\pi\dfrac{1}{2}}=\frac{\dfrac{\pi(5+2\sqrt{2})}{2}}{\dfrac{\pi(5-2\sqrt{2})}{2}}=\frac{5+2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}}\approx\frac{7{,}8284}{2{,}1715}\approx 3{,}6.$$

132 dolgozat érkezett. 5 pontos 52, 4 pontos 23, 3 pontos 12, 2 pontos 12, 1 pontos 19. Hibás 14.

Matematika feladatok megoldásai

F. 3160. *Legyen* $n\geqslant 2$ *egész. Az* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *pozitív számok összege* 1. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\ldots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}\geqslant\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}.$$

Megoldás. A tetszőleges $x_i<1$-re fennálló

$$\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}=\frac{1-(1-x_i)}{\sqrt{1-x_i}}=\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}-\sqrt{1-x_i}$$

azonosság alkalmazásával a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldala:

$$B=\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\ldots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1-x_2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1-x_n}}\right)-\left(\sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+\ldots+\sqrt{1-x_n}\right).$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint

$$\frac{1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1-x_2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1-x_n}} \geqslant n\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{1-x_1}\cdot\sqrt{1-x_2}\cdot\ldots\cdot\sqrt{1-x_n}}},$$

a számtani és négyzetes közepekre fennálló egyenlőtlenségből pedig:

$$-\left(\sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+\ldots+\sqrt{1-x_n}\right) \geqslant$$
$$\geqslant -n\sqrt{\frac{(1-x_1)+(1-x_2)+\ldots+(1-x_n)}{n}}=-n\sqrt{\frac{n-1}{n}}.$$

Így

$$B \geqslant n\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}}}-n\sqrt{\frac{n-1}{n}} \geqslant$$
$$\geqslant n\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{(1-x_1)+(1-x_2)+\ldots+(x-x_n)}{n}\right)^n}}}-n\sqrt{\frac{n-1}{n}}=n\sqrt{\frac{n}{n-1}}-n\sqrt{\frac{n-1}{n}}=\sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

A jobb oldalt, J-t a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséggel becsülve:

$$\frac{\sqrt{n-1}}{n}J=\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_n}}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}},$$

ezért $J \leqslant \sqrt{\dfrac{n}{n-1}}$, tehát

$$B \geqslant \sqrt{\frac{n}{n-1}} \geqslant J.$$

Egyenlőség – a felhasznált egyenlőtlenségek miatt – pontosan akkor teljesül, ha $x_1=x_2=$ $=\ldots=x_n=\dfrac{1}{n}$.

Szűcs Gábor (Szeged, JATE Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o.t.)

55 dolgozat érkezett. 7 pontos Megyeri Csaba, Pintér Dömötör, 6 pontos Oláh 407 Szabolcs. 5 pontos Baharev Ali, Barát Anna, Bérczi Gergely, Faddi Gábor, Jeszenszky Gyula, Juhász András, Lippner Gábor, Méder Áron, Nagy 111 István, Páles Csaba, Szita István, Szűcs Gábor, Végh László és Zawadowski Ádám. 4 pontot kapott 15, 3 pontot 5, 2 pontot 5, 1 pontot 10, 0 pontot 3 dolgozat.

F. 3161. *Legyen f a nemnegatív valós számokon értelmezett valós értékű függvény. Tegyük fel, hogy $f(x)f(y) \leqslant y^2 f\left(\frac{x}{2}\right)+x^2 f\left(\frac{y}{2}\right)$ teljesül minden nemnegatív x, y-ra, és $|f(x)| \leqslant 1997$ minden $0 \leqslant x \leqslant 1$-re. Bizonyítsuk be, hogy $f(x) \leqslant \dfrac{x^2}{2}$ (minden nemnegatív valós x számra).*

Megoldás. Az $x=y=0$ helyettesítéssel $f^2(0)\leqslant 0$ adódik, azaz $f(0)=0$. Ezek után tételezzük fel, hogy nem igaz a feladat állítása, vagyis létezik olyan pozitív x_0, amelyre $f(x_0)>\frac{x_0^2}{2}$. Legyen $f(x_0)=\frac{x_0^2}{2}\cdot q$; x_0 választása miatt $q>1$.

A következőt fogjuk belátni:

$$f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{2^n}\right)^2 q^{2^n},\qquad \text{ha}\quad n\in\mathbf{N}. \tag{1}$$

Ez teljes indukcióval igazolható; $n=0$ esetén állításunk triviális. Így már csak azt kell belátnunk, hogy ha $n=k$ esetén igaz az állítás, akkor $n=k+1$ esetén is.

Az indukciós feltevés szerint: $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{x_0^2}{2^k}\right)^2\cdot q^{2^k}$. Négyzetre emelve

$$f^2\left(\frac{x_0}{2^k}\right)\geqslant\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x_0}{2^k}\right)^4 q^{2^{k+1}}. \tag{2}$$

Másrészt az $f(x)f(y)\leqslant y^2 f\left(\frac{x}{2}\right)+x^2 f\left(\frac{y}{2}\right)$ egyenlőtlenségbe $x=y=\frac{x_0}{2^k}$-t helyettesítve kapjuk:

$$f^2\left(\frac{x_0}{2^k}\right)\leqslant 2\cdot\left(\frac{x_0}{2^k}\right)^2 f\left(\frac{x_0}{2^{k+1}}\right),$$

átrendezve:

$$f\left(\frac{x_0}{2^{k+1}}\right)\geqslant\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x_0}{2^k}\right)^{-2}\cdot f^2\left(\frac{x_0}{2^k}\right).$$

(2)-ből viszont így

$$f\left(\frac{x_0}{2^{k+1}}\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{2^k}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x_0}{2^k}\right)^4 q^{2^{k+1}}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x_0}{2^{k+1}}\right)^2 q^{2^{k+1}}.$$

Így $n=k+1$ esetén is fennáll az egyenlőtlenség, ezzel (1)-et igazoltuk.

Válasszuk az n_1, n_2 természetes számokat olyan nagyra, hogy teljesüljön: $\frac{x_0}{2^{n_1}}<1$, $n_2\geqslant n_1$, továbbá $2^{2^{n_2}\log_2 q-2n_2-1}>1997\frac{1}{x_0^2}$. Ezt megtehetjük, mert $\log_2 q>0$, mivel $q>1$. Ekkor $\frac{x_0}{2^{n_2}}\leqslant\frac{x_0}{2^{n_1}}<1$ miatt $f\left(\frac{x_0}{2^{n_2}}\right)\leqslant 1997$. Tehát

$$1997\geqslant f\left(\frac{x_0}{2^{n_2}}\right)\geqslant\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x_0}{2^{n_2}}\right)^2 q^{2^{n_2}}=x_0^2\cdot 2^{2^{n_2}\log_2 q-2n_2-1}>1997.$$

Ezzel ellentmondásra jutottunk, vagyis a feladat állítása igaz.

28 dolgozat érkezett. 5 pontos Barát Anna, Gyenes Zoltán, Hangya Balázs, Juhász András, Lippner Gábor, Méder Áron, Pál András, Pintér Dömötör, Prause István, Szalai-Dobos András, Szita István, Terék Zsolt és Várkonyi Péter megoldása. 4 pontos 8, 2 pontos 4, 1 pontos 1, 0 pontos 2 dolgozat.

F. 3166. *Az* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ *szögekre* $\cos\alpha_1 = \dfrac{1}{p_1}$, $\cos\alpha_2 = \dfrac{1}{p_2}$, $\cos\alpha_3 = \dfrac{1}{p_3}$, $\ldots$, $\cos\alpha_k = \dfrac{1}{p_k}$, *ahol* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *különböző,* 2*-nél nagyobb prímszámok. Mely pozitív egész* n_i *számokra teljesül a*

(1) $$\cos(n_1\alpha_1) + \cos(n_2\alpha_2) + \cos(n_3\alpha_3) + \ldots + \cos(n_{k-1}\alpha_{k-1}) = \cos(n_k\alpha_k)$$

egyenlet?

Vörös Zoltán, Budapest

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy ha n pozitív egész, akkor $\cos n\alpha$ megadható $\cos\alpha$ n-edfokú, egész együtthatós polinomjaként, amelynek főegyütthatója 2^n. Pontosabban az alábbi, ezt tartalmazó állítást fogjuk belátni teljes indukcióval.

Ha n pozitív egész, akkor $\cos(n\alpha) = f_n(\cos\alpha)$, és $\sin(n\alpha) = \sin\alpha g_n(\cos\alpha)$, ahol $f_n(x)$ n-edfokú, $g_n(x)$ pedig $(n-1)$-edfokú egész együtthatós polinom, amelynek főegyütthatója 2^n.

$n=1$-re az $f_1(x) = x$ és $g_1(x) = 1$ választással igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $n = (k-1)$-re igaz, ebből bizonyítjuk az állítást $n = k$-ra:

$$\cos(k\alpha) = \cos\alpha\cos((k-1)\alpha) - \sin\alpha\sin((k-1)\alpha) =$$
$$= \cos\alpha f_{k-1}(\cos\alpha) - \sin^2\alpha g_{k-1}(\cos\alpha) =$$
$$= \cos\alpha f_{k-1}(\cos\alpha) + \cos^2\alpha g_{k-1}(\cos\alpha) - g_{k-1}(\cos\alpha).$$

Ez $\cos\alpha$-nak nyilván n-edfokú polinomja, mert $\cos\alpha f_{k-1}(\cos\alpha)$ és $\cos^2\alpha g_{k-1}(\cos\alpha)$ is az, $g_{k-1}(\cos\alpha)$ foka pedig kisebb, mint n. A polinom főegyütthatója az indukciós feltevés felhasználásával $2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k$. A fenti rekurzióból az is látszik, hogy $f_k(x)$ egész együtthatós.

A $\sin(n\alpha)$-ra vonatkozó állítás másik fele hasonlóan igazolható:

$$\sin(k\alpha) = \cos((k-1)\alpha)\sin\alpha + \cos\alpha\sin((k-1)\alpha) =$$
$$= \sin\alpha(f_{k-1}(\cos\alpha) + \cos\alpha g_{k-1}(\cos\alpha)).$$

A zárójelben lévő összeg $(n-1)$-edfokú egész együtthatós polinom, amelynek főegyütthatója $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$.

A most belátott egyenlőségek segítségével (1) így is írható:

$$f_{n_1}\left(\frac{1}{p_1}\right) + f_{n_2}\left(\frac{1}{p_2}\right) + \ldots + f_{n_{k-1}}\left(\frac{1}{p_{k-1}}\right) = f_{n_k}\left(\frac{1}{p_k}\right).$$

Szorozzuk meg az egyenlőség mindkét oldalát $p_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_k^{n_k}$-nal. Az így kapott egyenlet mindkét oldalán egészekből álló összeg szerepel. Mindkét összeg minden tagja osztható p_1-gyel, kivéve az $f_{n_1}\left(\dfrac{1}{p_1}\right)$ polinom n_1-edfokú tagjának $p_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_k^{n_k}$-szeresét, ami $2^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_k^{n_k}$ az előzőek szerint. Így az egyenlet egyik odala osztható p_1-gyel, a másik nem.

Nincs tehát a feladatnak megfelelő n_1, n_2, $\ldots$, n_k szám k-as.

23 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Gyenes Zoltán, 5 pontot Bérczi Gergely, Juhász András, Lippner Gábor, Megyeri Csaba, Páles Csaba, Prause István, Várkonyi Péter és Végh László. 4 pontos 10, 3 pontos 1, 2 pontos 1, 1 pontos 1 dolgozat.

F. 3168. *Mely kétváltozós valós együtthatós P polinomokra teljesül, hogy*

$$P(X,Y)=P(X+Y,X-Y)?$$

Megoldás. A válasz: a konstans polinomokra. A feltétel szerint ugyanis

$$P(X,Y)=P(X+Y,X-Y)=P\Big((X+Y)+(X-Y),(X+Y)-(X-Y)\Big)=P(2X,2Y).$$

Rögzített t valós paraméterrel legyen $P_t(x)=P(x,tx)$, ekkor

$$P_t(2x)=P(2x,2tx)=P(x,tx)=P_t(x)$$

szerint $P_t(2^kx)=P_t(x)$ minden $k\geqslant 1$ egészre. Legyen például $P_t(1)=c$, ekkor minden ilyen k-ra $P_t(2^k)-c=0$, azaz 1, 2, 2^2, 2^3, $\ldots$ mindegyike gyöke a $P_t(x)-c$ polinomnak. Egy polinomnak azonban csak akkor lehet végtelen sok gyöke, ha a konstans nulla polinom, azaz ha $P_t(x)$ konstans polinom minden t valós paraméterre. Hasonlóan kaphatjuk, hogy $Q_t(x)=P(tx,x)$ is konstans minden t-re. Így tetszőleges x, y valós számokra $y=tx$ vagy $x=ty$ (alkalmas t-vel), tehát

$$P(x,y)=P_t(x)=P_t(0)=P(0,0)\quad\text{vagy}\quad P(x,y)=Q_t(y)=Q_t(0)=P(0,0),$$

azaz P konstans polinom.

Megjegyzés. 1. A közölt megoldás tényként kezeli, hogy ha egy valós változós polinom minden helyettesítési értéke ugyanaz, akkor a polinom konstans, azaz minden valódi x-hatvány együtthatója 0. Ez az egyváltozós esetben abból következik, hogy egy nem konstans egyváltozós polinomnak csak véges sok gyöke lehet. Ezután már belátható a megfelelő állítás kétváltozós polinomokra is, felhasználva, hogy minden ilyen $f(x,y)$ polinom felírható

$$f_k(y)x^k+f_{k-1}(y)x^{k-1}+\ldots+f_1(y)x+f_0(y)$$

alakban, ahol f_0, f_1, $\ldots$, f_k egyváltozós polinomjai y-nak. (Ugyanis rögzítve y-t, kapjuk, hogy

$$f_k(y)=f_{k-1}(y)=\ldots=f_1(y)=0,$$

és mivel ez minden y-ra igaz, f_{k-1}, $\ldots$, f_1 mindegyike azonosan nulla; így ha $f(x,y)$ minden helyettesítési értéke ugyanaz, akkor $f(x,y)=f_0(y)$ alakú, és használjuk az egyváltozós polinomokra már belátott állítást.)

2. Az ismertetett megoldás kiindulópontjául szolgált $P(X,Y)=P(2X,2Y)$ azonosságot a $P(X,Y)=P\left(\frac{X}{2},\frac{Y}{2}\right)$, ill. az ebből adódó $P\left(\frac{X}{2^k},\frac{Y}{2^k}\right)=P(X,Y)$ alakban használva kapjuk, hogy minden x, y számpárra (a kétváltozós $P(x,y)$ függvény folytonossága miatt) $P(X,Y)=$ $=\lim\limits_{k\to\infty}P\left(\frac{X}{2^k},\frac{Y}{2^k}\right)$, ami viszont éppen a $P(X,Y)$ kifejezés konstans tagja, hiszen a $P(X,Y)=$ $\sum a_{ij}X^iY^j$ alakban mindegyik $a_{ij}\left(\frac{X}{2^k}\right)^i\left(\frac{Y}{2^k}\right)^j$ tag értéke 0-hoz tart, ha $k\to\infty$ és $i+j>0$.

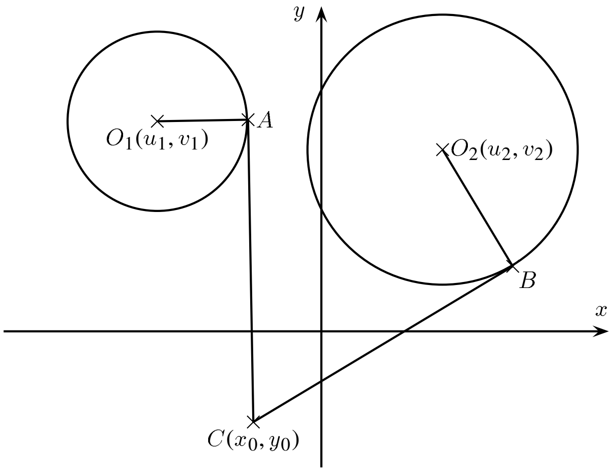
Lippner Gábor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.)

3. Azok, akik minden bizonyítás vagy hivatkozás nélkül használták a kétváltozós polinomokra, hogy csak véges sok gyökük lehet, illetve hogy folytonosak, nem kaptak maximális pontszámot.

43 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Lippner Gábor, 5 pontot kapott Gyenes Zoltán, Lukács László, Megyeri Csaba, Szalai-Dobos András, Szűcs Gábor, Terpai Tamás és Végh László. 4 pontos 11, 3 pontos 14, 2 pontos 1, 1 pontos 5, 1 pontos 4 dolgozat.

F. 3181. *Mutassuk meg, hogy a* **Gy. 3139.*** *gyakorlat feltételeinek megfelelő valamennyi C csúcs egy egyenesre illeszkedik.*

I. megoldás. A két kört egy koordináta-rendszerbe helyezzük. Használjuk az *ábra* jelöléseit. Az O_1 középpontú k_A kör egyenlete: $(x-u_1)^2+(y-v_1)^2=r^2$, a k_B kör egyenlete: $(x-u_2)^2+(y-v_2)^2=R^2$. Mivel az ABC háromszög szabályos, $AC=BC$. Írjuk fel ezután az AC és BC négyzetét:



(1)
$$AC^2=O_1C^2-r^2=(x_0-u_1)^2+(y_0-v_1)^2-r^2,$$
$$BC^2=O_2C^2-R^2=(x_0-u_2)^2+(y_0-v_2)^2-R^2,$$

Mivel $AC=BC$, (1)-ből következik:

$$x_0^2+2x_0u_1+u_1^2+y_0^2-2v_1y_0+v_1^2-r^2=x_0^2-2x_0u_2+u_2^2+y_0^2-2y_0v_2+v_2^2-R^2,$$

amiből

(2)
$$2y_0(v_2-v_1)=2x_0(u_1-u_2)+u_2^2+v_2^2-u_1^2-v_1^2+r^2-R^2,$$

ahol $v_2-v_1\neq 0$, $u_1-u_2\neq 0$. (2)-ből láthatjuk, hogy minden $C(x_0;y_0)$ egy lineáris egyenletet elégít ki, ami azt jelenti, hogy a C pontok egy egyenesen vannak. Ez akkor is így

* **Gy. 3139.** Adottak az egymáson kívül elhelyezkedő k_A és k_B körök. Szerkesszünk olyan ABC szabályos háromszöget, amelynek A csúcsa a k_A, B csúcsa a k_B körön van, továbbá az AC egyenes a k_A-nak, BC pedig a k_B-nek érintője.

van, ha az ABC háromszög nem szabályos, de $AC = BC$. (2)-ből leolvasható a szóban forgó egyenes iránytangense. Ennek és az O_1O_2 egyenes iránytangenségek szorzata -1. Ez azt jelenti, hogy a C pontokat tartalmazó egyenes merőleges az O_1O_2-re.

Pintér Dömötör (Szombathely, Nagy L. Gimn., IV. o.t.)

II. megoldás. A C pontból a két körhöz húzott érintőszakaszok hossza egyenlő. Ezért a C pontok illeszkednek a két kör hatványvonalára.

41 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Szabó 130 Gábor. 5 pontot kapott Baharev Ali, Barát Anna, Bérczi Gergely, Boros M. Mátyás, Csiszár Gábor, Dályay Virág, Dedinszky Zsófia, Deli Lajos, Devecsery András, Fazekas Borbála, Fejérvári Bence, Gyenes Zoltán, Győri Nikolett, Hangya Balázs, Horváth 472 András, Juhász András, Katona Zsolt, Lázár Zsófia, Léka Zoltán, Lippner Gábor, Megyeri Csaba, Nagy 111 István, Páles Csaba, Papp Dávid, Pesti Kata, Pintér Dömötör, Rudolf Gábor, Szalai-Dobos András, Szita István, Szűcs Gábor, Taraza Busra, Terék Zsolt, Terpai Tamás, Vaik Zsuzsanna, Vajda István, Várady Gergő, Várkonyi Péter és Végh László. 1 pontos 1, 0 pontos 1 dolgozat.

F. 3183. *Egy konvex poliéder minden lapja vagy ötszög, vagy hatszög, és minden csúcsából pontosan három él indul ki. Hány ötszög lapja van a testnek? Adjunk példát ilyen testre.*

Rudolf Gábor, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o.t.

Megoldás. Legyen a poliéder ötszöglapjainak száma n, a hatszöglapok száma pedig k. Euler ismert tétele szerint minden konvex poliéderre $l+c=e+2$, ahol l a lapok, c a csúcsok, e pedig az élek száma. A tétel alapján próbálunk n-re becslést adni. Mivel mindegyik csúcsból 3 él indul ki, a csúcsok száma $\frac{5n+6k}{3}$. Minden él két laphoz tartozik, ezért az élek száma $\frac{5n+6k}{2}$. Az Euler tételt alkalmazva:

$$n+k+\frac{5n+6k}{3}=\frac{5n+6k}{2}+2, \qquad \text{amiből} \quad n=12.$$

Ilyen test pl. a dodekaéder, ekkor a hatszögek száma nulla, vagy az a poliéder, amelyet a szabályos ikozaéder csúcsainak „lemetszésével” kapunk. Ha ez a lemetszés úgy történik, hogy minden csúcs levágásakor egy szabályos ötszög, a lapokból pedig szabályos hatszög keletkezik, akkor ez a test „felfújva” a focilabda, amelyről a közelmúltban a KöMaL-ban is olvashattunk. (Ábráját lásd az 1996/4. sz. hátsó borítóján.) Ilyen térbeli szerkezetűnek képzelik el a szén nemrég felfedezett 3. allotróp módosulatát, a C_{60}-at. A feladatban szereplő poliédernek megfelelő térbeli szerkezetű a többi fullerén is.

Deli Lajos (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., 8. o.t.)

Megjegyzés. Juhász András (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o.t.) ötszöglapok helyett m-szögekre is megvizsgálta a feladatot, és megállapította, hogy csak $m<6$-ra létezhet a keresett poliéder. Az $m=4$ esetre példa lehet a kocka vagy a hatszögalapú hasáb, az $m=3$ esetre pedig a tetraéder. Azt is megállapította, hogy ha egy poliéder minden csúcsából 3 él indul ki, akkor nem lehet minden lapja hat vagy annál több oldalú.

67 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Juhász András. 5 pontos 60, 4 pontos 1, 3 pontos 1, 2 pontos 1, 1 pontos 3 dolgozat.

Nehezebb matematika feladatok megoldása

N. 137. a) *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges* k *pozitív egészhez léteznek olyan* $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ *pozitív egész számok, amelyekre* $1 \leqslant i,\ j \leqslant k,\ \ i \neq j$ *esetén* $a_i - a_j \mid a_i^{1997}$.

b) *Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan* $c > 0$ *valós szám, hogy tetszőleges, a fenti feltételeket kielégítő* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *számokra* $a_k > 2^{ck}$.

Megoldás. a) Legyen A az $1, 2, \ldots, k$ számok legkisebb közös többszöröse, és legyen $a_i = i \cdot A$ minden i-re. Ekkor $i \neq j$ esetén $a_i - a_j = (i-j)A \mid A^2 \mid a_i^{1997}$, tehát ez a konstrukció megfelelő.

b) Az állítás $k = 1$ esetén az $a_1 = 1$ ellenpélda miatt nem igaz, de $k \geqslant 2$ esetén igaz, ezt bizonyítjuk be. Legyen először $k \geqslant 4$, és tekintsünk egy tetszőleges, $\frac{k}{2}$-nél nem nagyobb p prímet. Két különböző a_i és a_j nem adhatja ugyanazt a 0-tól különböző maradékot p-vel osztva, mert $a_i \equiv a_j \pmod p$ esetén $p \mid a_i - a_j \mid a_i^{1997}$. Ebből következik, hogy a p-vel nem osztható a_i-k száma legfeljebb $p-1$, és a p-vel osztható a_i-k száma legalább $k - p + 1 \geqslant \left[\frac{k+1}{2}\right]$.

Tekintsük a $B = a_1 a_2 \ldots a_k$ szorzatot. Az előbbiek szerint ha $p < \frac{k}{2}$ prím, akkor B osztható $p^{\left[\frac{(k+1)}{2}\right]}$-vel, ezért

$$a_k > B^{\frac{1}{k}} \geqslant \left(\prod_{p<\frac{k}{2}} p^{\left[\frac{(k+1)}{2}\right]}\right)^{\frac{1}{k}} \geqslant \left(\prod_{p<\frac{k}{2}} p\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De ismeretes (lásd megjegyzésünket), hogy létezik olyan pozitív c_0 konstans, amelyre tetszőleges $x \geqslant 2$ esetén $\prod\limits_{p \leqslant x} p > 2^{c_0 x}$, ezért $a_k > 2^{\frac{1}{4} c_0 k}$.

Ha $k = 2$ vagy $k = 3$, akkor $a_k \geqslant 2 > 2^{\frac{1}{4}k}$. A c számnak ezért választhatjuk $\frac{1}{4}c_0$ és $\frac{1}{4}$ közül a kisebbet.

Megjegyzés. A prímszámtétel egyik formája azt mondja ki, hogy

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sum\limits_{p \leqslant x} \log p}{x} = 1,$$

vagy másképpen, tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra, ha x elég nagy,

$$e^{(1-\varepsilon)x} < \prod_{p \leqslant x} p < e^{(1+\varepsilon)x}.$$

Ennél valamivel gyengébb alsó és felső becslést be lehet bizonyítani viszonylag egyszerű, elemi úton. *Szalay Mihály:* Számelmélet (Tankönyvkiadó, 1991.) c. könyvének 143–146. oldalain megtalálható többek között annak bizonyítása, hogy $n \geqslant 5$ esetén

$$\prod_{n<p\leqslant 2n} p > \frac{2^{2n}}{(2n)^{\sqrt{n}}} \cdot 4^{-\frac{2n}{3}} = \frac{2^{\frac{2}{3}2n}}{(2n)^{\sqrt{2n}}}.$$

Ebből következik, hogy $\prod\limits_{p\leqslant x} p > 2^{(\frac{2}{3}-\varepsilon)x}$, ha x elég nagy.

Az idézett könyv 140. oldalán megtalálható 3.2. tétel szerint $\prod\limits_{p\leqslant x} p < 4^x$. Ebből nem nehéz bebizonyítani, hogy az első megoldásban szereplő A szám nem nagyobb, mint $4^{(1+\varepsilon)k}$, és így a b) állítás a konstanstól eltekintve éles.

11 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Frenkel Péter, Gerbitz Róbert, Lukács László és Pap Gyula. 3 pontos 1, 2 pontos 6 dolgozat.

N. 140. *Az $a_1 < a_2 < \ldots < a_9$ pozitív egészekre teljesül, hogy a belőlük készíthető (legalább egy, legfeljebb kilenc különböző tagból álló) összegek mind különbözők. Bizonyítsuk be, hogy $a_9 > 100$.*

Megoldás. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben $a_9 \leqslant 100$.

Legyen S azoknak a legfeljebb öttagú összegeknek a halmaza, amelyek az a_1, a_2, $\ldots$, a_8 számokból készíthetők, és nem kisebbek a_4-nél. A legfeljebb öttagú összegek száma $\binom{8}{1} + \ldots + \binom{8}{5} = 218$, ezek közül azok lehetnek kisebbek a_4-nél, amelyekben csak a_1, a_2 vagy a_3 szerepel, összesen 7 darab. Tehát $|S| \geqslant 211$.

A legnagyobb összeg $a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 < a_4 + 4a_9$, ezért mindegyik összeg az $I = [a_4; a_4 + 4a_9 - 1]$ intervallumba esik. Az $|S| > 2a_9$ egyenlőtlenség alapján S-nek létezik három olyan eleme, amelyek a_9-cel osztva ugyanazt a maradékot adják. Mivel azonban I bármely két elemének különbsége kisebb $4a_9$-nél, a három elem közül kettő különbsége pontosan a_9. Ez azonban ellentmondás, mert a kisebbik összeghez a_9-et adva a nagyobbikat kapjuk.

Kun Gábor (Budapest, Piarista Gimn., III. o.)

Megjegyzések. 1. Egy kis számolással ellenőrizhető, hogy az a_1, a_2, $\ldots$, a_9 számokból legalább 376 darab olyan összeg készíthető, amely biztosan $a_1 + a_4 + a_5$ és $a_1 + a_4 + a_5 + a_7 + a_8 + a_9$ közé esik. Ebből azonnal következik, hogy $a_7 + a_8 + a_9 \geqslant 375$ és $a_9 \geqslant 126$. Ez az eredmény még mindig messze van a lehetséges legjobbtól.

2. Többféle módszerrel, például az előző pontbeli ötlet általánosításával igazolható, hogy

ha az $a_1, a_2, \ldots, a_9$ számokból készíthető összegek mind különbözők, akkor $a_n > c\frac{2^n}{\sqrt{n}}$. Az is könnyen látható, hogy a 2-hatványok sorozatára teljesül a feltétel.

Erdős Pál azt sejtette, hogy megfelelő pozitív c konstanssal $a_n > c2^n$. Ennek bizonyításáért vagy megcáfolásáért 300 dollárt ajánlott fel. A probléma jelenleg még megoldásra vár.

5 dolgozat érkezett. A feladatot egyedül Kun Gábor oldotta meg (5 pont). 4 versenyző nem kapott pontot.

N. 142. *Legyen n pozitív egész. Igazoljuk, hogy minden valós együtthatós polinom felírható n darab polinom n-edik hatványának előjeles összegeként.*

Pap Gyula (Debrecen, Fazekas M. Gimn., IV. o.t.)

Megoldás. Elég ha az x polinomot felírjuk n darab polinom n-edik hatványának előjeles összegeként, mert ha az $f_1, f_2, \ldots, f_n$ polinomokra

$$\pm(f_1(x))^n \pm (f_2(x))^n \pm \ldots \pm (f_n(x))^n = x,$$

akkor x helyére egy tetszőleges $g(x)$ polinomot helyettesítve

$$(f_1(g(x)))^n + (f_2(g(x)))^n + \ldots + (f_n(g(x)))^n = g(x).$$

Definiáljuk a következő polinomsorozatot:

$$h_0(x) = x^n, \qquad h_{k+1}(x) = h_k(x) - h_k(x-1).$$

Ezeknek a polinomoknak két tulajdonságára lesz szükségünk:

(a) Tetszőleges k nemnegatív egészre

$$h_k(x) = \binom{k}{0}x^n - \binom{k}{1}(x-1)^n + \binom{k}{2}(x-2)^n - + \ldots + (-1)^k\binom{k}{k}(x-k)^n =$$

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(x-j)^n;$$

(b) $0 \leqslant k \leqslant n$ eseten h_k foka $n-k$ és főegyütthatója $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$.

Mindkét állítást indukcióval bizonyíthatjuk. A $k=0$ esetben mindkettő triviális.

Ha valamely k-ra (a) igaz, akkor igaz $k+1$-re is, mert

$$h_{k+1}(x) = h_k(x) - h_k(x-1) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(x-j)^n - \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(x-j-1)^n =$$

$$= \binom{k}{0}x^n + \sum_{j=1}^{k}(-1)\left(\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1}\right)(x-j)^n - (-1)^k\binom{k}{k}(x-k-1)^n =$$

$$= \sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}(x-j)^n.$$

Ha a (b) állítás teljesül valamely $0 \leqslant k < n$-re, azaz

$$h_k(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} + a_{n-k-1}x^{n-k-1} + \dots + a_1x + a_0,$$

akkor

$$h_{k+1}(x) = h_k(x) - h_k(x-1) = n(n-1)\dots(n-k+1)\left(x^{n-k} - (x-1)^{n-k}\right) +$$
$$+ a_{n-k-1}\left(x^{n-k-1} - (x-1)^{n-k-1}\right) + \dots a_1(x - (x-1)) + (a_0 - a_0).$$

Könnyű ellenőrizni, hogy x^{n-k} kiesik, és x^{n-k-1} együtthatója $n(n-1)\dots(n-k)$.

A $k = n-1$ esetben speciális esetként azt kapjuk, hogy

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n-1}{j}(x-j)^n$$

egy lineáris polinom, felírható $Ax + B$ alakban, ahol $A \neq 0$. Legyen

$$f_j(x) = \sqrt[n]{\binom{n-1}{j}}\left(\frac{x-B}{A} - j\right);$$

ezzel a választással

$$(f_0(x))^n - (f_1(x))^n + - \dots + (-1)^{n-1}(f_{n-1}(x))^n =$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1}(-a)^j\binom{n-1}{j}\left(\frac{x-B}{A} - j\right)^n = A\frac{x-B}{A} + B = x.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

A feladatra 6 versenyző küldött be dolgozatot. 5 pontot kapott Bérczi Gergely, Braun Gábor, Frenkel Péter, Lippner Gábor, Mátrai Tamás és Pap Gyula.

N. 143. *Van-e olyan pozitív egész n, amelyre $2^n - 1$ összes prímosztója kisebb, mint $2^{\frac{n}{1997}}$?*

Megoldás. Megmutatjuk, hogy végtelen sok ilyen n létezik.

Legyen tetszőleges pozitív egész k-ra f_k az a polinom, amelynek gyökei a primitív k-adik komplex egységgyökök, főegyütthatója pedig 1. (Ezt a polinomot hívják a k-adik körosztási polinomnak. Az $f_1(x)$ polinomot $x-1$-nek definiáljuk.)

Az f_k polinomoknak két fontos tulajdonságára lesz szükségünk:

(1) f_k egész együtthatós;

(2) Tetszőleges k pozitív egészre $\prod_{d|k} f_d(x) = x^k - 1$.

Először a (2) tulajdonságot bizonyítjuk. Mindkét oldalon a polinomok főegyüttható-ja 1, ezért elég azt igazolnunk, hogy ugyanazok a gyökeik is. A jobb oldalon álló $x^k - 1$

polinom gyökei a k-adik komplex egységgyökök (mindegyik egyszeres gyök). Tekintsünk egy ε n-edik egységgyököt. Azt kell belátnunk, hogy ε a bal oldalon szereplő tényezők közül pontosan egynek gyöke. Az f_k polinomok definíciója szerint egyetlenegy olyan d pozitív egész létezik, amelyre ε gyöke f_d-nek: a legkisebb olyan szám, amelyre $\varepsilon^d=1$. Könnyű meggondolni, hogy azok az m számok, amelyekre $\varepsilon^m=1$, d többszörösei; speciálisan n többszöröse d-nek. Az f_d polinom tehát szerepel (2) bal oldalán.

Az (1) tulajdonságot teljes indukcióval igazolhatjuk, a (2) tulajdonság felhasználásával. $k=1$-re az állítás igaz. Ha $f_1, \ldots, f_{k-1}$ mind egész együtthatós, akkor (2) alapján

$$f_k(x)=\frac{x^k-1}{\prod\limits_{d|k,\, d<k} f_d(x)}.$$

A számláló és a nevező is egész együtthatós, továbbá a nevező főegyütthatója 1. Ebből a jól ismert polinomosztási algoritmus alapján következik, hogy a két polinom hányadosa, $f_k(x)$ is egész együtthatós.

Keressük ezután az n számot $q_1q_2\ldots q_s$ alakban, ahol $q_1, q_2, \ldots, q_s$ az első s darab 1997-nél nagyobb prímszám. A (2) tulajdonság szerint

$$2^n-1=\prod_{d|n} f_d(2),$$

és az (1) tulajdonság miatt a jobb oldalon mindegyik tényező egész. Ha mindegyik abszolút értéke kisebb lenne $2^{\frac{n}{1997}}$-nél, kész volnánk.

Ha d egy valódi osztója n-nek, azaz $d<n$, akkor $2^d-1=\prod\limits_{\delta|d} f_\delta(2)$, emiatt $f_d(2)$ osztója 2^d-1-nek, ezért $|f_d(2)|\leqslant 2^d-1<2^{\frac{n}{1997}}$.

Azt kell tehát csak megvizsgálnunk, hogy $|f_n(2)|<2^{\frac{n}{1997}}$ teljesül-e. Legyenek az n-edik primitív egységgyökök $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\varphi(n)}$. Ekkor

$$|f_n(2)|=\prod_{j=1}^{\varphi(n)}|2-\varepsilon_j|<3^{\varphi(n)}.$$

Ha sikerülne n-et úgy választani, hogy $3^{\varphi(n)}<2^{\frac{n}{1997}}$, azaz $\dfrac{\varphi(n)}{n}<\dfrac{1}{1997\cdot\log_2 3}$ teljesüljön, kész volnánk.

A φ függvény egy jól ismert felírása szerint (lásd pl. *Szalay Mihály:* Számelmélet, 117. old.)

$$\frac{\varphi(n)}{n}=\prod_{j=1}^{s}\left(1-\frac{1}{q_j}\right).$$

Az is ismert (ugyanott, 153. old.), hogy tetszőleges $x \geqslant 2$ valós számra

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right) \leqslant \frac{1}{\sum\limits_{k\leqslant x}\frac{1}{k}} < \frac{1}{\log x}.$$

(A szorzat az x-nél nem nagyobb prímszámokon fut végig.) Ezt $x=q_s$-re alkalmazva

$$\prod_{p\leqslant q_s}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \prod_{p\leqslant 1997}\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdot\prod_{j=1}^{s}\left(1-\frac{1}{q_j}\right) < \frac{1}{\log q_s},$$

vagyis

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{j=1}^{s}\left(1-\frac{1}{q_j}\right) < \frac{1}{\prod\limits_{p\leqslant 1997}\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdot\log q_s}.$$

Ebből látszik, hogy s-et elég nagynak választva $\dfrac{\varphi(n)}{n}$ tetszőlegesen kicsivé tehető.

2 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Bérczi Gergely és Braun Gábor.

N. 145. *Van-e olyan $f(x,y,z)$ valós együtthatós polinom, amely pontosan akkor pozitív, ha az $|x|$, $|y|$, $|z|$ hosszúságú szakaszokból háromszög szerkeszthető?*

Javasolta: *Benkő Dávid,* Budapest

Megoldás. Mutatunk egy ilyen polinomot. Azt állítjuk, hogy az

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z) = \\ &= 2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4 \qquad (1) \end{aligned}$$

polinom megfelelő.

Többek között a polinom második alakjából is látható, hogy értéke nem függ x, y, z előjelétől, hanem csak abszolút értékeiktől. Elég tehát azt igazolni, hogy egy nemnegatív x, y, z számhármasra $f(x,y,z)$ pontosan akkor pozitív, ha az x, y, z hosszúságú szakaszokból háromszög szerkeszthető.

Ha x, y, z egy háromszög oldalai, akkor egyikük sem lehet 0, ezért (1)-ben az $x+y+z$ tényező pozitív, a háromszög-egyenlőtlenség szerint pedig a többi három tényező is; emiatt $f(x,y,z)>0$.

Megfordítva, ha $f(x,y,z)>0$, akkor azt kell igazolnunk, hogy x, y, z egyike sem 0, és teljesül mindhárom háromszög-egyenlőtlenség. Mivel f szimmetrikus a három változóra, feltehetjük, hogy $0\leqslant x\leqslant y\leqslant z$. Ebben az esetben $x+y+z\geqslant 0$, $-x+y+z\geqslant 0$ és $x-y+z\geqslant 0$ triviálisan teljesül, a négy tényező közül legfeljebb csak $x+y-z$ lehetne negatív. Mivel $f(x,y,z)>0$, ez azt jelenti, hogy mind a négy tényező pozitív, vagyis a háromszög-egyenlőtlenségek teljesülnek. Ennek egyik következménye, hogy $x\geqslant x+y-z>0$ miatt x, y, z mindegyike pozitív.

Megjegyzés. A Héron-képletben a négyzetgyök alatti kifejezés lényegében az f polinom:

$$t=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{\frac{1}{16}f(a,b,c)}.$$

Nem nehéz bebizonyítani, hogy konstans szorzótól eltekintve ez az egyetlen negyedfokú polinom, amely a feladat feltételeinek eleget tesz.

28 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Bérczi Gergely, Bujdosó Attila, Devecsery András, Felföldi Zsolt, Gerbicz Róbert, Gyenes Zoltán, Hegedűs 396 Péter, Horváth 202 Gábor, Hubenkó Elemér, Juhász András, Kiss 246 Tamás, Kun Gábor, Lippner Gábor, Lukács László, Naszódi Gergely, Szabó 997 Péter, Székelyhidi Gábor, Szűcs Gábor, Terpai Tamás, Tóth 235 Ádám és Végh A. László. Kissé hiányos (4 pont) Barát Anna dolgozata. 1 pontot kapott 2, 0 pontot 4 versenyző.

A pontversenyben kitűzött C gyakorlatok (489–492.)

C. 489. Jóska és Karcsi kirándulásuk során az erdőből egy olyan műútra érnek, amelyen autóbusz közlekedik. Elhatározzák, hogy buszra szállnak. Jóska a következő megállóhoz igyekszik, Karcsi viszont vissza az előző megállóhoz, mivel az szerinte közelebb van. A buszt mindketten éppen elérik. Igaza volt-e Karcsinak, ha ő 6 km/h, Jóska 4 km/h, az autóbusz 60 km/h sebességgel haladt az úton?

C. 490. Bizonyítsuk be, hogy két páratlan négyzetszám különbsége osztható 8-cal.

Általános iskolások részére javasolt példák: **C. 489.**, **C. 490.**, **Gy. 3179.**

C. 491. Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben legfeljebb egy olyan oldal van, amely a hozzá tartozó magasságnál kisebb.

C. 492. Megmértük egy vízszintes terepen álló torony emelkedési szögeit a torony talppontjától 50 m-re és 100 m-re. A mért szögek összege 45°. Milyen magas a torony?

❄

Beküldési határidő: 1998. február 15.
Cím: KöMaL Szerkesztőség (C gyakorlatok)
Budapest, Pf. 47. 1255

❄

A pontversenyben kitűzött gyakorlatok (3174–3181.) és feladatok (3208–3213.)*

Gy. 3174. Aladár és Bea a következő játékot játsszák: Rajzolnak egy $n \times n$-es négyzetet, vízszintes oldalait piros, a függőlegeseket kék ceruzával. Aladár egy lépés során pirosra fest egy kis négyzetet, ha az még nincs kiszínezve, és legalább egy oldala piros. Bea ugyanezt teszi kékkel. Aladár össze szeretné kötni az alsó és felső oldalt piros mezők élben szomszédos sorozatával. Bea ugyanígy szeretné összekötni a függőleges oldalakat. Az nyer, aki (előbb) el tudja érni a célját. Felváltva lépnek, Aladár kezd. Ha valaki már nem tud lépni, a játék döntetlen. Milyen n-ek esetén van valamelyikőjüknek nyerő stratégiája? (**H**)

Javasolta: *Pap Gyula,* Debrecen

Gy. 3175. Tetszőleges pozitív számokra igazoljuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab} \leqslant \frac{(a-b)^2}{\sqrt{2}(a+b)}. \tag{1}$$

Javasolta: *Czirok Levente,* Szekszárd

Gy. 3176. Az (a_i) sorozatot a következőképpen definiáljuk: $a_1=0$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_n=\max\limits_{1<d<n}\{a_d \cdot a_{n-d}\}$ ($n=4, 5, 6, \ldots$). Határozzuk meg a_{1998} értékét.

Javasolta: *Fried Ervin,* Budapest

Gy. 3177. A Bajnokcsapatok Európa Kupa legjobb 16 csapata közé bejutott két magyar csapat is: a Bolyai TC, és az Eötvös TK. Mi a valószínűsége, hogy egymás ellen játszanak? (A verseny egyenes kiesési rendben folyik; két csapat találkozóján az egyik továbbjut, a másik végleg kiesik.)

Javasolta: *Pataki János,* Duino

---

* Pontversenyen kívül beküldhető a 19. oldalon található feladat.

Gy. 3178. Legalább milyen hosszú egy egységnyi területű háromszög második legnagyobb oldala?

Gy. 3179. Egy tetraéder csúcsait rendre kék, piros, sárga és zöld színűre festettük. A csúcsokat a színnek megfelelő nagy kezdőbetűkkel jelöltük. Ezután kiszíneztük a tetraéder éleit is úgy, hogy azok színe megegyezzen valamelyik végpont színével, és eközben mind a négy színt újra fölhasználtuk. Bizonyítsuk be, hogy van olyan csúcs, amelyből kiinduló élek közül az egyik kék, a másik piros, a harmadik zöld, vagy a másik három pont közötti élek közül az egyik kék, a másik piros, a harmadik zöld.

Gy. 3180. Egy a, b, c oldalú háromszög területe $(a-b+c)(a+b-c)$. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög a oldallal szemközti szöge szögfelezőjének hossza

$$\frac{8}{\sqrt{17}}\frac{bc}{b+c}. \qquad \textbf{(H)}$$

Gy. 3181. Egy szabályos négyoldalú gúla köré írt gömb középpontja egybeesik a beírt gömb középpontjával. Mekkora két szomszédos oldalél szöge?

❄

Beküldési határidő: 1998. február 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

❄

F. 3208. Tegyük fel, hogy az x, y, z pozitív számokra

$$(2) \qquad x^2+xy+y^2=9, \qquad y^2+yz+z^2=16, \qquad z^2+zx+x^2=25.$$

Határozzuk meg $xy+yz+zx$ értékét.

Javasolta: *Horváth Gábor,* Debrecen

F. 3209. Egy n csúcsú összefüggő gráf minden élére egy valós számot írtunk, ezt nevezzük az él értékének. A gráf bármely útjának súlya legyen a benne előforduló legnagyobb értékű él értéke. A gráf bármely x, y csúcsára jelölje $f(x,y)$ az x-ből y-ba vezető legkisebb súlyú út súlyát. Bizonyítsuk be, hogy az f függvény legfeljebb $n-1$ különböző értéket vesz föl.

F. 3210. Lehet-e egy kétváltozós valós együtthatós polinom értékkészlete a nyílt $(0,+\infty)$ intervallum?

F. 3211. Mutassuk meg, hogy ha $n>2$ egész szám, és $\alpha=\dfrac{\pi}{n}$, akkor

$$(3) \qquad \sin\alpha\sin 2\alpha+\sin 2\alpha\sin 3\alpha+\ldots+\sin(n-2)\alpha\sin(n-1)\alpha=\frac{n}{2}\cos\alpha.$$

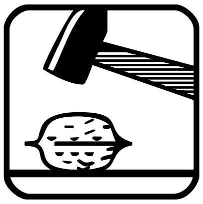
F. 3212. Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja F, az A-hoz tartozó belső szögfelező és BC metszéspontja E, az AFE háromszög köré írt körének és az AB, valamint az AC oldalaknak A-tól különböző metszéspontja pedig B_1 és C_1. Mutassuk meg, hogy $BB_1=CC_1$.

F. 3213. Egy kocka két kitérő élegyenesén mozog egy-egy egységnyi hosszúságú szakasz. A szakaszok melyik helyzetében lesz a végpontjaik által meghatározott tetraéder térfogata maximális?

❄

Beküldési határidő: 1998. február 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

❄



A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (159–162.)

N. 159. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges konvex n-szöget háromszögekre lehet bontani $n-3$ egymást nem metsző átlójával úgy, hogy a sokszögnek egy csúcsa se szerepeljen valamelyik háromszög körülírt körének belsejében.

N. 160. Definiáljuk az (a_n) sorozatot a következőképpen: $a_0=a_1=0$, $a_2=1$, $a_{n+3}=a_{n+1}+1998a_n$. Mutassuk meg, hogy tetszőleges pozitív egész n-re:

$$a_{2n-1}=2a_na_{n+1}+1998a_{n-1}^2. \tag{4}$$

N. 161. Legyenek a p polinom együtthatói legfeljebb 1998 abszolút értékű egész számok, és $p(2000)$ prímszám. Igazoljuk, hogy p nem bontható fel két, legalább elsőfokú egész együtthatós polinom szorzatára.

Javasolta: *Pap Gyula,* Debrecen, *Braun Gábor,* Budapest

N. 162. A G n-pontú teljes gráfot teljes páros gráfok uniójára szeretnénk felbontani úgy, hogy G mindegyik éle pontosan egy páros gráfban szerepeljen. Hány teljes gráfra van ehhez szükség?

❄

Beküldési határidő: 1998. február 15.
Cím: Bolyai János Matematikai Társulat (KöMaL feladatok)
Budapest, Pf. 433. 1371

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 48. No. 1. January 1998)

New exercises for practice (see page 39): **C. 489.** Joe and Charlie went on an excursion. At the end of their hike they arrived at a highway and decided to take a bus. Joe continued to walk forward to the next bus-stop at a speed of 4 km/h, while Charlie assumed that the previous stop was closer by, and thus headed in the opposite direction at a speed of 6 km/h. They each arrived just on time to catch the bus. Find out if Charlie's assumption was right, given that the bus travelled at a speed of 60 km/h. **C. 490.** Prove that the difference between any two odd perfect squares is divisible by 8. **C. 491.** Prove that every triangle has at most one such side which is smaller than the corresponding altitude. **C. 492.** We measure the angles of inclination of a tower, emerging on level ground, at distances of 50 m and 100 m from its base, respectivley. The two measures sum up to 45°. Determine the height of the tower.

New exercieses: Gy. 3174. Ann and Bob play the following game. First they draw an $n \times n$ square and colour its horizontal sides with red and its vertical sides with blue. Ann starts the game and then they move alternately. At each move, Ann (Bob) chooses a small square which is not yet coloured and which already has at least one red (blue) side, and colours it with red (blue). The game ends when either Ann (Bob) connects the horizontal (vertical) sides with a chain of red (blue) fields such that any two consecutive ones share a common edge, in which case she (he) wins the game, or when a player, whose turn it is, cannot move, in which case the game is a draw. Determine those values of n for which one of the two players has a winning strategy. **Gy. 3175.** Let a and b denote positive numbers. Prove inequality (1). **Gy. 3176.** Define a sequence (a_i) by $a_1=0$; $a_2=2$, $a_3=3$ and $a_n=\max\limits_{1<d<n}\{a_d\cdot a_{n-d}\}$ for $n=4, 5, 6, \ldots$. Find a_{1998}. **Gy. 3177.** There are two Hungarian teams, the Bolyai TC and the Eötvös TK, among those qualified for the 16 best teams in the Europe Cup. How likely is that they are going to play against each other? (After each match, one team qualifies for the next round and the other one is eliminated from the contest.) **Gy. 3178.** In a triangle of unit area, what is the smallest possible length of the second largest side? **Gy. 3179.** The vertices of tetrahedron $BRYG$ are coloured with blue, red, yellow and green, respectively. Next, the edges of the tetrahedron are coloured such that all the four colours are used and the colour of each edge agrees with the colour of one of its vertices. Prove that there can be found a vertex such that either the three edges starting at that vertex or the other three edges have the three colours blue, red and green, respectively. **Gy. 3180.** Let a,b,c be the sides of a triangle. Given that the area of the triangle is $(a-b+c)(a+b-c)$, prove that the length of the angle bisector opposite to side a is $(8/\sqrt{17})bc/(b+c)$. **Gy. 3181.** In a right square based pyramid, the centres of the inscribed and circumscribed spheres coincide. Find the angle formed by any two neighbouring lateral edges.

New problems: F. 3208. Given that the positive numbers x,y,z satisfy (2), determine $xy+yz+zx$. **F. 3209.** Consider a connected graph on n vertices and assign a real number to each edge of the graph which is to be called the value of that edge. For any path of the graph, the value of the path is defined as the largest value of any edge along the given path. For any two vertices x,y of the graph, let $f(x,y)$ denote the smallest possible value of a path connecting x with y. Prove that the cardinality of the range of f is not greater than $n-1$. **F. 3210.** Is it possible that the range of a polynomial of real coefficients in two variables is the (open) interval $(0,+\infty)$? **F. 3211.** Let $n>2$ be an integer and $\alpha=\pi/n$. Prove equality (3). **F. 3212.** In a triangle ABC, F denotes the midpoint of side BC and E denotes the common point of BC and the angle bisector starting at A. The circumcircle of triangle AEF intersects sides AB and AC at points B_1 and C_1, respectively. Show that $BB_1=CC_1$. **F. 3213.** Consider two skew lines wich are extensions of two edges of a cube, respectively. A unit segment is placed arbitrarily along each line. In which position of the two segments has the tetrahedron determined by their endpoints a maximum volume?

New advanced problems: N. 159. Prove that every convex n-gon can be dissected, with $n-3$ pairwise non-crossing diagonals, into triangles such that no vertex of the polygon is inside the circumcircle of any triangle. **N. 160.** A sequence (a_n) is defined by $a_0=a_1=0$, $a_2=1$ and $a_{n+3}=a_{n+1}+1998a_n$ for $n\geqslant 0$. Prove that equality (4) holds for every positive integer n. **N. 161.** The coefficients of a polynomial p are integers whose absolute values are not greater than 1998. Given that $p(2000)$ is a prime number, prove that p cannot be written as a product of two polynomials, each of positive degree and of integer coefficients. **N. 162.** The complete graph G on n vertices is to be decomposed as a union of complete bipartite graphs such that each edge of G belongs to exactly one of the bipartite graphs. Find the minimum number of bipartite graphs needed for such a decomposition.