

2. feladat. Van der Waals-állapotegyenlet (összesen 11 pont). Az ideális gázok jól ismert állapotegyenlete ugyan kielégíti a *Clapeyron–Mendelejev-törvényt*, azonban a következő fontos fizikai hatásokat elhanyagolja. Először, a valódi gázcsepp mérete nem nulla; másodsor, a részecskék kölcsönhatnak egymással. Ebben a feladatban mindegyikről egy mól vizet vizsgálunk.

A rész. Reális gáz állapotegyenlete (2 pont). A részecskék véges méretének figyelembevételével a gáz állapotegyenlete

$$p(V - b) = RT,$$

ahol p , V , T rendre a gáz nyomását, moláris térfogatát és hőmérsékletét jelöli, R az univerzális gázállandó, b pedig egy konstans, mely a kizárt térfogatot jellemzi.

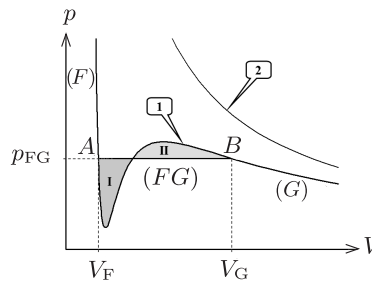
A_1 kérdés (0,3 pont): Becsüld meg a b konstans értékét, és fejezd ki a molekulák d átmérőjével.

A molekulák közti vonzó kölcsönhatás figyelembevételére *van der Waals* a következő állapotegyenletet javasolta, mely jól leírja a közegeket, mind a folyadék, mind a gáz fázisban:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT.$$

Az egyenletben szereplő a egy másik konstans.

Bizonyos T_k kritikus hőmérséklet alatti T hőmérsékletek esetén a (2) egyenlet izotermái a 3. ábra 1. jelű görbéjéhez hasonló, nem monoton függvények. Ezeket van der Waals-izotermáknak nevezzük. Ugyanezen az ábrán a 2. jelű görbe az ideális gáz megfelelő izotermáját mutatja. A valódi izotermák a van der Waals-izotermáktól abban különböznek, hogy az AB szakaszon a nyomás értéke konstans, melyet p_{FG} jelöl. A konstans szakasz a V_F és V_G térfogattal jelölt állapotok között helyezkedik el, ahol a két térfogat rendre a folyadék, illetve a gáz fázis móltérfogatát jelöli. A termodinamika második főtételét felhasználva J. Maxwell megmutatta, hogy a p_{FG} nyomás az az érték, amely mellett az ábrán látható I. és II. területek megegyeznek.



3. ábra. A folyadék–gáz átmenethez tartozó van der Waals-izoterma (1. görbe), valamint az ideális gáz izotermája (2. görbe)

A hőmérséklet növelésével az izotermák AB konstans szakasza egyetlen ponttá zsugorodik össze, amikor a hőmérséklet, illetve a nyomás eléri egy bizonyos T_k , illetve p_k értéket. A p_k és T_k értékeket, melyek kísérletileg nagy pontossággal mérhetők, kritikus értékeknek nevezzük.

A_2 kérdés (1,3 pont): Fejezd ki a van der Waals-egyenletben szereplő a és b paraméter értékét T_k és p_k segítségével.

A_3 kérdés (0,2 pont): Víz esetében $T_k = 647$ K és $p_k = 2,2 \cdot 10^7$ Pa. Add meg víz esetén az $a_{\text{víz}}$ és $b_{\text{víz}}$ paraméterek numerikus értékét.

A_4 kérdés (0,2 pont): Becsüld meg a vízmolekulák $d_{\text{víz}}$ átmérőjét.

B rész. Gáz és folyadék fázis tulajdonságai (6 pont). A feladatnak ebben a részében $T = 100^\circ\text{C}$ hőmérsékletű víz tulajdonságait vizsgáljuk gáz, illetve folyadék fázisban. Jól ismert, hogy ezen a hőmérsékleten a telített vízgőz nyomása $p_{FG} = p_0 = 1,0 \cdot 10^5$ Pa, a víz moláris tömege pedig $\mu = 1,8 \cdot 10^{-2} \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$.

Gáz fázis. Ésszerű feltételezés, hogy gáz halmazállapotában fennáll a $V_G \gg b$ egyenlőtlenség.

B_1 kérdés (0,6 pont): Fejezd ki a V_G térfogatot az R , T , p_0 és a mennyiségek segítségével.

Az ideális gáz állapotegyenletét használva kicsit más V_{G0} móltérfogat adódik, ami jól közelíti a fenti móltérfogatot.

B_2 kérdés (0,3 pont): Határozd meg a gőz móltérfogatának a molekulák közti vonzóerő hatására bekövetkező relatív csökkenését, azaz a

$$\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} = \frac{V_G - V_{G0}}{V_{G0}}$$

mennyiséget.

Ha a rendszer térfogatát V_G alá csökkentjük, akkor a gőz általában elkezd lecsapódni. Azonban ha a gáz igen tiszta, akkor mechanikai szempontból metastabil állapotban is maradhat (ezt túlhűtött gőznek nevezzük). A metastabil állapot végső határa a $V_{G,\min}$ móltérfogat. Állandó hőmérsékleten a túlhűtött gőz létezésének a feltétele:

$$\frac{\Delta p}{\Delta V} < 0.$$

B_3 kérdés (0,7 pont): Add meg egyenlettel, és számold is ki numerikusan, hogy a telített vízgőz térfogata legfeljebb hányadrészt csökkenthető túlhűtéssel, azaz határozd meg a $\frac{V_G}{V_{G,\min}}$ hányadost.

Folyadék fázis. A víz folyékony halmazállapotában a van der Waals-állapotegyenlet használatakor ésszerű feltételezés, hogy a $p \ll a/V^2$ egyenlőség teljesül.

B_4 kérdés (1 pont): Fejezd ki a víz V_F móltérfogatát folyadék halmazállapotban az a , b , R és T mennyiségek segítségével.

Feltételezve, hogy $bRT \ll a$, határozd meg a víz következő jellemzőit. *Ne lepődj meg, ha a kapott értékek némelyike nem egyezik a táblázatokban is megtalálható, jól ismert értékekkel.*

B_5 kérdés (0,3 pont): Fejezd ki a víz ρ_F sűrűségét folyadék fázisban a μ , a , b , R mennyiségek (némelyikének) segítségével, és határozd meg a sűrűség numerikus értékét is.

B_6 kérdés (0,6 pont): Fejezd ki az

$$\alpha = \frac{1}{V_F} \frac{\Delta V_F}{\Delta T}$$

térfogati hőtágulás együtthatót az a , b , R mennyiségekkel, és add meg az együttható numerikus értékét is.

B_7 kérdés (1,1 pont): Fejezd ki a víz (tömegegységre vonatkoztatott) L párolgáshőjét a μ , a , b , R mennyiségek segítségével, és add meg a párolgáshő numerikus értékét.

B_8 kérdés (1,2 pont): Egyetlen molekula vastagságú vízréteget vizsgálva becsüld meg a víz σ felületi feszültségét.

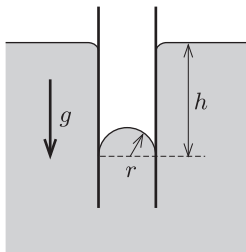
C rész. Folyadék-gáz rendszer (3 pont). A Maxwell-szabály segítségével (a területek egyenlőségét kifejező egyszerű integrálással), a van der Waals-állapotegyenlet felhasználásával valamint a *B részben* alkalmazott közelítések figyelembevételével megmutatható, hogy a telített vízgőz p_{FG} nyomásának a T hőmérséklettől való függése

$$\ln p_{FG} = A + \frac{B}{T}$$

alakú, ahol az A és B konstansok a következőképpen fejezhetőek ki az a és b paraméterekkel:

$$A = \ln\left(\frac{a}{b^2}\right) - 1, \quad B = -\frac{a}{bR}.$$

W. Thomson megmutatta, hogy a telített vízgőz nyomása függ a folyadékfelszín görbületétől is. Tekintsünk ugyanis egy folyadékot, mely nem nedvesíti egy kapilláris cső falát (az illeszkedési szög 180°). Ha a kapillárist a folyadékba merítjük, akkor a folyadékszint a felületi feszültség miatt a csőben lejjebb száll (lásd az 4. ábrát).



4. ábra. A nem nedvesítő folyadékba merülő kapilláris cső

C_1 kérdés (1,3 pont): Fejezd ki a görbült folyadékfelszín fölötti telített vízgőz nyomásának kicsiny Δp_T megváltozását a vízgőz ρ_G sűrűsége, a folyadék ρ_F sűrűsége, a σ felületi feszültség valamint a felszín r görbületi sugarára segítségével.

A B_3 részben vizsgált metastabil állapotot sok kísérleti elrendezésben használják, például az elemi részecskék detektálására szolgáló ködkamrában is. A túlhűtött állapot természeti jelenségeknél is megfigyelhető, például a hajnali harmatképződésnél. A túlhűtött vízgőz folyadékcseppeket formálva csapódik ki. A nagyon kis méretű vízcseppek gyorsan elpárolognak, azonban a kellően nagyok tovább növekedhetnek.

C_2 kérdés (1,7 pont): Tegyük föl, hogy este $t_0 = 20^\circ\text{C}$ hőmérsékleten a levegőben levő vízgőz telített, és hajnalra a környezet hőmérséklete kismértékben, $\Delta t = 5^\circ\text{C}$ -kal csökken. Feltételezve, hogy a pára nyomása nem változik, becsüld meg azt a minimális sugarat, amelynél nagyobb vízcseppek mérete növekszik. Használj a víz felületi feszültségének irodalmi értékét: $\sigma = 7,3 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$.