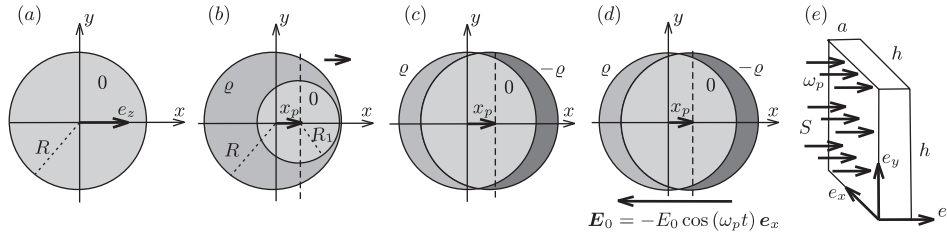


## 2. feladat. Plazmonos gőzfejlesztő készülék

**Bevezetés.** Ebben a feladatban egy hatékony, kísérletileg is működő gőzfejlesztési eljárást fogunk tanulmányozni. Víz és benne eloszlatott, nanométeres méretű, gömb alakú ezüstgolyócskák (literenként csak körülbelül  $10^{13}$  darab) keverékét fókuszált fénynyalábbal világítjuk meg. A fény egy részét a nanogolyócskák elnyelik, így felmelegednek és közvetlen környezetükben gőzt keltenek anélkül, hogy a teljes vízmennyiséget felmelegítenék. A keletkező gőz buborékok formájában távozik a rendszerből. Jelenleg a folyamat még nem minden részletében tisztázott, de a felmelegedés jelensége a fémes nanogolyócskák elektronjainak együttes oszcillációján alapuló fényelnyeléssel magyarázható. A berendezést plazmonos gőzfejlesztőnek nevezzük.



3. ábra. (a) Egy  $R$  sugarú, gömb alakú, semleges nanogolyócska a koordináta-rendszer origójában. (b) A Tömör gömb homogén, pozitív  $\rho$  töltéssűrűséggel (közepesen szürke), benne egy kisebb  $R_1$  sugarú,  $\mathbf{x}_d = x_d \mathbf{e}_x$  vektorral eltolt középpontú, gömb alakú, töltéssemleges tartománnyal (0, halványszürke). (c) A koordináta-rendszer origójában rögzített nanogolyócska pozitív  $\rho$  töltéssűrűségű ezüstionjai (közepesen szürke), és az origóhoz képest  $\mathbf{x}_p$  vektorral eltolt középpontú ( $x_p \ll R$ ), gömb alakú, negatív  $-\rho$  töltéssűrűségű elektronfelhő (sötétszürke). (d) Külső homogén  $\mathbf{E}_0 = -E_0 \mathbf{e}_x$  elektromos tér. Időfüggő  $\mathbf{E}_0$  esetén az elektronfelhő  $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_p/dt$  sebességgel mozog. (e) A  $z$  irányba haladó,  $\omega_P$  körfrekvenciájú,  $S$  intenzitású, monokromatikus fénynyalábbal megvilágított téglalatest alakú ( $h \times h \times a$ ) tartály, benne a vízben eloszlatott nanogolyócskákkal

**Egyetlen, gömb alakú, ezüst nanogolyócska.** Ebben a részfeladatban tekintsünk egy  $R = 10,0$  nm sugarú, gömb alakú ezüst nanogolyócskát, melynek középpontja a koordináta-rendszerünk origójában van rögzítve, ahogy az a 3(a). ábrán látható. Minden bekövetkező mozgás, erőhatás és erőtér párhuzamos a vízszintes  $x$  tengellyel (amely az  $\mathbf{e}_x$  irányvektorral adható meg). A nanogolyócska vezetési elektronjai a golyócska teljes térfogatában szabadon mozoghatnak anélkül, hogy bármelyik ezüstatomhoz kötődnének. Az ezüstatomok pozitív ionokként vannak jelen a golyócskában, mindegyik egy-egy elektronnal járul hozzá a szabad töltéshordozókhoz.

**2.1. Határozd meg a következő mennyiségeket:** a nanogolyócska  $V$  térfogata és  $M$  tömege; a nanogolyócskában található ezüstionok  $N$  száma és  $\rho$  töltéssűrűsége; valamint a szabad elektronok  $n$  számsűrűsége (koncentrációja), összes  $Q$  töltése és összes  $m_0$  tömege. (0,7 pont)

**Elektromos mező egy töltött gömbön belüli töltéssemleges tartományban.** Ebben a részfeladatban tegyük fel, hogy minden anyag relatív permittivitása  $\varepsilon = 1$ . Homogén  $\rho$  töltéssűrűségű,  $R$  sugarú gömb belsejében  $-\rho$  töltéssűrűség hozzáadásával egy kisebb,  $R_1$  sugarú, töltéssemleges tartományt hozunk létre, melynek középpontja az  $R$  sugarú gömb középpontjához képest  $\mathbf{x}_d = x_d \mathbf{e}_x$  vektorral el van tolva (lásd a 3(b). ábrát).

**2.2. Mutasd meg, hogy a töltéssemleges tartományban az elektromos tér homogén és  $\mathbf{E} = A(\rho/\varepsilon_0) \mathbf{x}_d$  alakú! Határozd meg az  $A$  szorzótényező értékét!** (1,2 pont)

**A kitérített elektronfelhőre ható visszatérítő erő.** A következőkben a szabad elektronok együttes mozgását vizsgáljuk. Ennek érdekében modellezzük a szabad elektronok összességét egyetlen, negatívan töltött, homogén  $-\rho$  töltéssűrűségű,  $\mathbf{x}_p$  középpontú gömbbel, amely az  $x$  tengely mentén mozoghat az origóhoz rögzített középpontú, pozitív töltésű gömbhöz (ezüstionok) képest (lásd a 3(c). ábrát!). Tegyük fel, hogy egy külső  $\mathbf{F}_{\text{külső}}$  erő hatására az elektronfelhő  $\mathbf{x}_p = x_p \mathbf{e}_x$  vektorral elmozdul eredeti helyzetéből, ahol  $x_p \ll R$ . A nanogolyócska – a két szélén megjelenő kicsiny töltéstől eltekintve – a belsejében töltéssemleges marad.

**2.3.  $\mathbf{x}_p$  és  $n$  felhasználásával fejezd ki a következő két mennyiséget:** az elektronfelhőre ható  $\mathbf{F}$  visszatérítő erőt, valamint az elektronfelhő elmozdítása során végzett  $W_{\text{el}}$  munkát. (1,2 pont)

**Ezüst nanogolyócska időben állandó, külső elektromos térben.** Egy nanogolyócskát vákuumban  $\mathbf{E}_0 = -E_0 \mathbf{e}_x$  homogén elektromos térbe helyezünk, melynek hatására az elektronfelhő  $\mathbf{F}_{\text{külső}}$  erőhatást érezve kicsiny  $x_p$  távolsággal elmozdul, ahol  $|x_p| \ll R$ .

**2.4. Határozd meg az elektronfelhő  $x_p$  elmozdulását  $E_0$  és  $n$  felhasználásával! Határozd meg az elmozdulás közben a nanogolyócska közepén átmenő  $(y, z)$  síkon keresztülhaladó  $-\Delta Q$  töltést  $R$ ,  $n$  és  $x_p$  függvényében!** (0,6 pont)

**Az ezüst nanogolyócska helyettesítő kapacitása és induktivitása.** Mind időben állandó, mind változó  $\mathbf{E}_0$  elektromos térben a nanogolyócska modellezhető egy megfelelő elektromos áramkörrel. A helyettesítő képbeli kapacitás meghatározható, ha a  $\Delta Q$  töltés szétválasztásához szükséges  $W_{\text{el}}$  munkát megfeleltetjük egy  $\pm \Delta Q$  töltéssel ellátott kondenzátor energiájának. A töltésszétválasztás a helyettesítő képben  $V_0$  feszültséget eredményez a fegyverzetek között.

**2.5a. Fejezd ki a rendszer helyettesítő képének  $C$  kapacitását  $\varepsilon_0$  és  $R$  felhasználásával, és számítsd ki numerikus értékét!** (0,7 pont)

**2.5b.**  $E_0$  és  $R$  felhasználásával fejezd ki azt a  $V_0$  feszültséget, amit a helyettesítő képbeli kondenzátorra kellene kapcsolni ahhoz, hogy  $\Delta Q$  töltése legyen! (0,4 pont)

Időfüggő  $\mathbf{E}_0$  elektromos tér esetén az elektronfelhő mozgásba jön, sebességét jelölje  $\mathbf{v} = v \cdot \mathbf{e}_x$  (lásd a  $\mathcal{B}(d)$ . ábrát!). Ennek következtében az elektronok  $W_{\text{kin}}$  mozgási energiára tesznek szert és a rögzített  $yz$ -síkon átfolyó  $I$  erősségű áramot okoznak. Az elektronfelhő mozgási energiája megfeleltethető egy  $I$  árammal átjárt  $L$  induktivitás energiájának.

**2.6a.** Fejezd ki a  $W_{\text{kin}}$  és  $I$  mennyiségeket  $v$  felhasználásával! (0,7 pont)

**2.6b.** Fejezd ki a helyettesítő képbeli  $L$  induktivitást a golyócska  $R$  sugarának, az elektron  $e$  töltésének és  $m_e$  tömegének, valamint az  $n$  elektronszám-sűrűség felhasználásával, majd számítsd ki numerikus értékét! (0,5 pont)

**Az ezüst nanogolyócska plazmon rezonanciája.** Az eddigiekből következik, hogy az egyensúlyi helyzetéből kitérített, majd elengedett elektronfelhő mozgása egy, a rezonanciafrekvenciával oszcilláló ideális LC-körrel modellezhető. Az elektronfelhő ilyen mozgását plazmon-rezonanciának hívják, a rezgés  $\omega_p$  körfrekvenciája pedig az úgynevezett plazmon-körfrekvencia.

**2.7a.** Határozd meg az elektronfelhő  $\omega_p$  plazmon-körfrekvenciáját az elektron  $e$  töltésének,  $m_e$  tömegének, az  $n$  elektronszám-sűrűség és az  $\epsilon_0$  vákuum-permittivitás felhasználásával! (0,5 pont)

**2.7b.** Számítsd ki  $\omega_p$ -t rad/s egységekben, valamint az  $\omega = \omega_p$  körfrekvenciájú fény  $\lambda_p$  hullámhosszát nm egységekben! (0,4 pont)

**Plazmon frekvenciájú fényvel megvilágított ezüst nanogolyócska.** A feladat további részében a nanogolyócskát  $\omega_p$  plazmon körfrekvenciájú,

$S = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 = 1,00 \text{ MWm}^{-2}$  intenzitású, monokromatikus fényvel világítjuk meg. Mivel a hullámhossz nagy ( $\lambda_p \gg R$ ), tekinthetjük úgy, hogy a nanogolyócska homogén, időben harmonikusan változó  $\mathbf{E}_0 = -E_0 \cos(\omega_p t) \mathbf{e}_x$  elektromos térben helyezkedik el. Az  $\mathbf{E}_0$  tér hatására az elektronfelhő  $\mathbf{x}_p$  középpontja is ugyanazon frekvenciával,  $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_p/dt$  sebességgel, állandó  $x_0$  amplitúdóval rezegni kezd. Az elektronok eme rezgőmozgása a fény elnyeléséhez vezet. A nanogolyócska által befogott energia egy része a golyócska belsejében Joule-hővé alakul, a maradék része pedig szórt fény formájában újra kisugárzódik.

A Joule-hőt a szabad elektronoknak az ezüstionokkal való ritka, véletlenszerű, rugalmatlan ütközései okozzák. Az ütköző elektron a teljes mozgási energiáját elveszíti, ami az ezüstionok rezgéiseivé (azaz hővé) alakul. Az ilyen ütközések közötti átlagos időtartam  $\tau \gg 1/\omega_p$ , ahol ezüst nanogolyócskára számoljunk a  $\tau = 5,24 \cdot 10^{-15}$  s értékkel!

**2.8a.** Fejezd ki a nanogolyócskában fejlődő Joule-hő keletkezési ütemének (teljesítményének)  $P_{\text{h}\delta}$  időátlagolt értékét és az áramerősség négyzetének  $\langle I^2 \rangle$  időátlagát úgy, hogy a kifejezések expliciten tartalmazzák az elektronfelhő sebesség-négyzetének  $\langle v^2 \rangle$  időátlagát! (1,0 pont)

**2.8b.** Határozd meg a nanogolyócska helyettesítő képeinek ohmikus ellenállását, amely kapcsolatot teremt a fejlődő Joule-hő teljesítménye és az elektronfelhő  $I$  áramerőssége között. Számítsd ki numerikus értékét! (1,0 pont)

A beeső fénynyalábban a rezgő elektronfelhőn való szóródás (újrakibocsátás) következtében valamekkora  $P_{\text{szórt}}$  időátlagolt teljesítmény formájában veszteség lép fel.  $P_{\text{szórt}}$  nagysága függ a szórócentrum  $x_0$  amplitúdójától,  $Q$  töltésétől,  $\omega_p$  körfrekvenciájától, valamint a fény tulajdonságaitól (a  $c$  fénysebességtől és a vákuum  $\epsilon_0$  permittivitásától). E négy változóval kifejezve  $P_{\text{szórt}}$  a következő formulával adható meg:

$$P_{\text{szórt}} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_p^4}{12 \pi \epsilon_0 c^3}.$$

**2.9.**  $P_{\text{h}\delta}$  analógiájára határozd meg a fényszórásnak megfelelő ekvivalens  $P_{\text{szórt}}$  ohmikus ellenállást  $P_{\text{szórt}}$  felhasználásával! Számítsd ki numerikus értékét is! (1,0 pont)

Az előbbieken tárgyalt helyettesítő áramkörti elemeket sorosan  $RLC$ -körbe kapcsolva, majd az áramkört (a beeső fény  $E_0$  térerőssége által meghatározott amplitúdójú)  $V = V_0 \cos(\omega_p t)$  váltakozó feszültségre kapcsolva megkapjuk az oszcilláló térbe helyezett ezüst nanogolyócska modelljét.

**2.10a.** Ismert adatok felhasználásával határozd meg a  $P_{\text{h}\delta}$  és  $P_{\text{szórt}}$  időátlagolt teljesítmény- veszteségek kifejezéseit, valamint az  $\omega = \omega_p$  körfrekvenciájú beeső fény  $E_0$  amplitúdóját! (1,2 pont)

**2.10b.** Határozd meg  $E_0$ ,  $P_{\text{h}\delta}$ , és  $P_{\text{szórt}}$  numerikus értékét! (0,3 pont)

**Gőzfejlesztés fényvel.** Az ezüst nanogolyócskákat  $n_{\text{ng}} = 7,3 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-3}$  koncentrációban elkeverjük vízben, majd a keveréket egy téglatest alakú,  $h \times h \times a = 10 \times 10 \times 10 \text{ cm}^3$  méretű, átlátszó tartályba töltjük, végül a rendszert merőleges beeséssel plazmon frekvenciájú,  $S = 1,00 \text{ MW m}^{-2}$  intenzitású fényvel világítjuk meg (lásd a  $\mathcal{B}(e)$ . ábrát!). A víz hőmérséklete  $T_{\text{h}\delta} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ , és a megfigyelésekkel összhangban feltehetjük, hogy stacionárius állapotban a nanogolyócskák Joule-hője teljes egészében  $T_{\text{g}\delta z} = 110 \text{ }^\circ\text{C}$  hőmérsékletű gőz keletkezésére fordítódik, a teljes víztömeg hőmérsékletének növelése nélkül.

A plazmonos gőzfejlesztő készülék termodinamikai hatásfokát az  $\eta = P_{\text{g}\delta z} / P_{\text{összes}}$  hányadosként definiáljuk, ahol  $P_{\text{g}\delta z}$  az egész tartályban a gőz fejlesztésére fordítódó hőteljesítmény,  $P_{\text{összes}}$  pedig a tartályra eső fény összes teljesítménye.

Bármely kiszemelt nanogolyócskát az idő legnagyobb részében víz helyett gőz veszi körül, ezért tárgyalható úgy, mintha vákuumban helyezkedne el.

**2.11a.** Számítsd ki numerikusan a plazmonos gőzfejlesztő készülék által az időegység alatt előállított vízgőz  $m_{\text{gőz}}$  tömegét a plazmon frekvenciájú,  $S$  intenzitású fénnel való besugárzás folyamán! (0,6 pont)

**2.11b.** Számítsd ki numerikusan a plazmonos gőzfejlesztő készülék  $\eta$  termodinamikai hatásfokát! (0,2 pont)