

Négyzet alakú, rövidre zárt lapos tekercs anyaga szupravezető (ellenállása elhanyagolható). A négyzet oldalélei  $l$  hosszúak, egy-egy oldalának tömege  $m$ . A tekercs, amelynek induktivitása  $L$ , súrlódásmentesen elfordulhat a négyzet alsó, vízszintes oldala körül.

Kezdetben a tekercs függőlegesen, labilis egyensúlyi helyzetben áll a földi nehézségi erőterben. Ezután egy olyan homogén mágneses mezőt alkalmazunk, hogy a tekercsre ható  $\mathbf{B}$  mágneses indukció vektor nagysága állandó, iránya függőleges legyen. Ekkor a tekercsben nem folyik áram.

Ezután a tekercs felső végét kicsiny  $v_0$  sebességgel meglökjük. Körbefordul-e a tekercs, vagy ha nem, akkor milyen határok között fog mozogni?

**Megoldás.** Az alapvető összefüggés, melyből ennek a feladatnak a megoldásánál kiindulhatunk, a dinamikának az alaptörvénye, amely merev testeknek rögzített tengely körüli forgására vonatkozik:

$$\Theta\beta = \sum M,$$

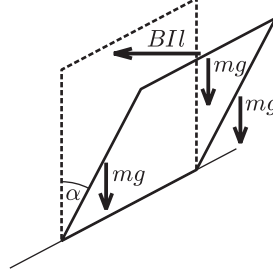
vagyis a test  $\Theta$  tehetetlenségi nyomatékának és  $\beta$  szöggyorsulásának szorzata a testre ható erők forgatónyomatékainak összegével egyenlő.

A feladat szempontjából lényegtelen, hogy a „lapos tekercs” hány menetes, ezért a továbbiakban azt egy keretnek (1 menetes tekercsnek) tekintjük (3. ábra). Az ábrán felrajzoltuk azokat az erőket, amelyek akkor hatnak a keretre, amikor az már  $\alpha$  szögben kilendült eredeti függőleges helyzetéből. Az oldalakra ható  $mg$  nehézségi erő tovább akarja forgatni a keretet, a felső oldalra ható  $BIl$  erő vízszintes irányú (a többi oldalon ható mágneses erőknek nincs forgatónyomatéka, így ezekkel nem kell törődnünk). Mivel a keretben folyó áram az elektromágneses indukció miatt lép fel, ezért – Lenz törvénye szerint – a felső oldalon ható erő visszafelé akarja forgatni a keretet. A hozzá tartozó erőkar  $l \cos \alpha$  nagyságú, tehát:

$$\Theta\beta = mgl \sin \alpha + 2mg \frac{l}{2} \sin \alpha - BI l \cdot l \cos \alpha.$$

Ebben az egyenletben

$$\Theta = ml^2 + 2 \cdot \frac{1}{3} ml^2 = \frac{5}{3} ml^2.$$



3. ábra

Hogyan határozhatjuk meg az  $I$  indukált áram nagyságát? A tekercsben most kétféle okból lép fel indukált feszültség. Az egyik ok, hogy vezető mozog a mágneses térben. Ennek megfelelően az indukált feszültség nagysága Neumann törvénye szerint

$$U_1 = Blv \cos \alpha.$$

A másik ok az, hogy az  $L$  induktivitású tekercsben változik az áram, ezért a fellépő önindukciós feszültség

$$U_2 = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

A kettő előjeles összege adja  $IR$ -et a lassan változó áramokra is igaz Kirchhoff-féle huroktörvény szerint. Mivel a tekercs anyaga most szupravezető, ezért  $R = 0$ , tehát

$$Bl \frac{\Delta s}{\Delta t} \cos \alpha - L \frac{\Delta I}{\Delta t} = 0.$$

Ha ebből akarjuk  $I$ -t kifejezni, akkor ( $\Delta s = l\Delta\alpha$  behelyettesítése után) integrálnunk kell az egyenletet. Ennek a matematikai műveletnek a megkerülésével is eljuthatunk azonban a helyes összefüggéshez, ha azt vesszük figyelembe, hogy a keret  $A = l^2$  nagyságú keresztmetszetén áthaladó teljes fluxus (amely a külső mágneses tértől származó fluxus és az önindukciós fluxus összege) állandó kell maradjon:

$$BA \sin \alpha - LI = \text{állandó}.$$

Az állandó értéke  $LI_0 = 0$ , hiszen a kezdeti ( $\alpha = 0$ -hoz tartozó)  $I_0$  áram nulla volt. A fenti egyenletből már kifejezhetjük  $I$ -t:

$$I = \frac{Bl^2}{L} \cdot \sin \alpha.$$

$B$ ,  $l$  és  $L$  adott állandók,  $I$  tehát  $\sin \alpha$ -val arányos mennyiség. Erre a felismerésre még szükségünk lesz, de mielőtt diszkutálni kezdjük a feladatot, gondoljuk át, milyen fizikai törvényt, összefüggést használhatunk még fel a megoldás során!

Szükségünk lehet energetikai megfontolásra. Írjuk fel a munkatételt (a kinetikai energia tételét)! Eszerint

$$\Delta E_{\text{mozg.}} = \sum W,$$

vagyis

$$\frac{1}{2}\Theta\omega^2 - \frac{1}{2}\Theta\omega_0^2 = mgl(1 - \cos \alpha) + 2mg\frac{l}{2}(1 - \cos \alpha) - \frac{1}{2}LI^2.$$

(A jobb oldalon az utolsó tag az önindukcióból származó  $U_{\text{ind.}} = -L \cdot \Delta I / \Delta t$  feszültség  $U_{\text{ind.}} I \Delta t$  munkavégzését fejezi ki.) A fenti összefüggéshez „energiatételként” is eljuthatunk, amely szerint

$$\sum E = \text{állandó}, \quad \text{vagyis} \quad \sum E_{\text{kezdeti}} = \sum E_{\alpha},$$

tehát

$$\frac{1}{2}\Theta\omega_0^2 = \frac{1}{2}\Theta\omega^2 - 2mgl(1 - \cos \alpha) + \frac{1}{2}LI^2.$$

Most kezdjük a diszkusszióhoz! Vizsgáljuk meg először azt az esetet, amikor a meglökéssel adott  $v_0$  sebesség kicsi, és emiatt a kilendülési  $\alpha$  szög is olyan kicsi, hogy megengedhető a  $\sin \alpha \approx \alpha$  és  $\cos \alpha \approx 1$  közelítés. Ekkor a forgómozgás dinamikai egyenlete:

$$\Theta\beta = 2mgl\alpha - BI^2,$$

az áram pedig így függ  $\alpha$ -tól:

$$I = \frac{Bl^2}{L} \alpha.$$

Behelyettesítve  $I$  kifejezését a dinamikai egyenletbe:

$$\Theta\beta = 2mgl\alpha - \frac{B^2l^4}{L} \alpha = - \left( \frac{B^2l^4}{L} - 2mgl \right) \alpha.$$

Látjuk, hogy a  $\beta$  szöggyorsulás az  $\alpha$  szögmeghosszossággal arányosnak adódik. Tudjuk, hogy a  $\beta = -\Omega^2\alpha$  típusú összefüggés harmonikus rezgésre vezet, mégpedig olyanra, aminek  $\Omega$  a körfrekvenciája, vagyis a feltételezett esetben olyan harmonikus rezgő „lengésbe” kezd a tekercs, amelynek periódusideje  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$  lesz.  $\Theta = \frac{5}{3}ml^2$  behelyettesítése után kapjuk:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{5}{3 \left( \frac{B^2l^2}{mL} - 2\frac{g}{l} \right)}}.$$

A kilendülés maximális szöge:

$$\alpha_{\text{max}} = \frac{v_0}{\Omega l} = \frac{v_0 T}{2\pi l}.$$

A periódusidőre kapott kifejezést figyelmesen megvizsgálva felvetődik a kérdés: nem állhat ott a gyökjel alatt negatív szám? Mi van akkor, ha  $\frac{B^2l^2}{mL} < 2\frac{g}{l}$ ? Elég gyenge mágneses tér, kicsiny  $B$  esetén ez bizonyára előfordulhat! Visszatérve a dinamikai egyenlethez, azt látjuk, hogy ilyenkor  $\beta$  a  $0 < \alpha < 180^\circ$  intervallumon mindig pozitív marad, akármilyen kicsiny is a kezdeti  $v_0$  érték. Sejthető, hogy ilyenkor nem lesz maximális kilendülési szög, hanem a lebillenő tekercs egyre nagyobb szögsebességgel forog, s végül átlendül, átfordul a legalsó helyzetén és szépen visszatér a  $v_0/l$  szögsebességű kezdőállapotba. Vagyis folyton-folyvást forogni fog, sose áll meg, mert szupravezető, s így nem disszipálódhat az energia. (Persze még kisugárzódhat, ez további megfontolásokat igényel...)

Vizsgáljuk meg most azt az esetet, amikor  $v_0$  akármekkora lehet! Vajon milyen feltételek teljesülése esetén áll meg és fordul vissza valahonnan a tekercs, és mikor fog folyamatosan egyirányban forogni?

Mi a megállás feltétele? Ehhez szükségünk lesz az energetikai megfontolásra:

$$\frac{1}{2}\Theta\omega^2 = \frac{1}{2}\Theta\omega_0^2 + 2mgl(1 - \cos \alpha) - \frac{1}{2}LI^2.$$

Keressük a megálláshoz,  $\omega = 0$ -hoz tartozó  $\alpha$  szöget:

$$0 = \frac{1}{2}\Theta\omega_0^2 + 2mgl(1 - \cos \alpha) - \frac{1}{2}LI^2.$$

Írjuk be ide is az áram szögfüggését:

$$0 = \frac{1}{2}\Theta\omega_0^2 + 2mgl(1 - \cos\alpha) - \frac{1}{2}\frac{B^2l^4}{L}\sin^2\alpha.$$

Felhasználva, hogy  $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ , jól látszik, hogy  $\cos\alpha$ -ra kaptunk egy másodfokú egyenletet, ami lényegében ilyen alakú:  $a\cos^2\alpha + b\cos\alpha + c = 0$ , és aminek megoldása:

$$\cos\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A meglökött tekercs tehát akkor áll meg valahol, ha a fenti másodfokú egyenletnek van valós megoldása, és ez a megoldás abszolút értékben nem nagyobb 1-nél (hiszen egy szög koszinuszáról van szó).

Teljesülnie kell tehát a következő két feltételnek:

$$(1) \quad b^2 - 4ac \geq 0,$$

$$(2) \quad \left| \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right| \leq 1.$$

Mindez, átfordítva a feladat paramétereire, a következő feltételekhez vezet:

$$\frac{B^2l^2}{mL} \geq 2\frac{g}{l},$$

$$v_0 \leq v_{0\max} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{3}{5}mL\left(\frac{B^2l^2}{mL} - 2\frac{g}{L}\right)}.$$

Ezek teljesülése esetén áll meg valahol a tekercs. A megállási szög koszinuszára kapjuk:

$$\cos\alpha_{\max} = \frac{2mgL}{B^2l^3} + \sqrt{\left(1 - \frac{2mgL}{B^2l^3}\right)^2 - \frac{5mL}{3B^2l^4}v_0^2}.$$

(A gyökjel előtt azért választottuk a pozitív előjelet, mert az felel meg nagyobb  $\cos\alpha$ -nak, tehát kisebb  $\alpha$  szögnek. A tekercs nyilván ott áll meg, ahol *először* teljesül a megállás  $\omega = 0$  feltétele.) A megoldásból látszik, hogy minél nagyobb a meglökés  $v_0$  sebessége, annál kisebb lesz  $\cos\alpha_{\max}$  értéke, vagyis annál nagyobb  $\alpha_{\max}$  szögnél áll meg a tekercs, ahogy azt vártuk is.