3. feladat. Miért olyan nagyok a csillagok?

A csillagok forró gázgömbök, melyek ragyogását a belsejükben lezajló magfúzió adja. Leggyakoribb esetben e folyamat során hidrogénből hélium keletkezik. Ebben a problémában klasszikus mechanikai, illetve kvantummechanikai fogalmak, valamint elektrosztatikai, termodinamikai összefüggések segítségével keressük a választ arra a kérdésre, hogy a gázgömbnek miért csak egy bizonyos mérete fölött indul be a fúziós reakció. Sőt, a hidrogén fúziójához szükséges kritikus tömeg és sugár értékét is meghatározzuk. (A Napról, mint csillagról látható kép a hátsó belső borítón jobbra középen.)

Fontos fizikai állandók:
gravitációs állandó: $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^2;
Boltzmann-állandó: $k = 1{,}4 \cdot 10^{-23}$ J K^{-1};
Planck-állandó: $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ m^{2}kg s^{-1};
proton tömege: $m_\mathrm{p} = 1{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg;
elektron tömege: $m_\mathrm{e} = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg;
elemi töltés: $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C;
vákuum permittivitás: $\varepsilon_0 = 8{,}9 \cdot 10^{-12}$ C^{2}N^{-1}m^{-2};
Nap sugara: $R_\mathrm{N} = 7{,}0 \cdot 10^8$ m;
Nap tömege: $M_\mathrm{N} = 2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg.

1. Csillagok központi hőmérsékletének klasszikus becslése

Tegyük föl, hogy a csillagot formáló gáz tiszta ionizált hidrogén, azaz elektronok és protonok azonos arányú keveréke, mely ideális gázként viselkedik. A klasszikus fizika törvényei szerint két proton fúziójához az szükséges, hogy 10^{-15} méternél közelebb kerüljenek egymáshoz, mivel csak ilyen kis távolság esetén válik a rövidtávú magerő meghatározóvá. Azonban ahhoz, hogy ilyen közel kerüljenek egymáshoz, le kell győzniük a Coulomb-taszítást. Tegyük fel, hogy két klasszikus, pontszerű részecskének tekintett proton v_rms nagyságú, egymással ellentétes irányú sebességgel halad egymás felé egy egyenes mentén, és frontálisan ütközik. Itt v_rms a termodinamikai átlagsebesség (sebességnégyzet átlagának a gyöke; az index az angol root-mean-square kifejezésre utal).

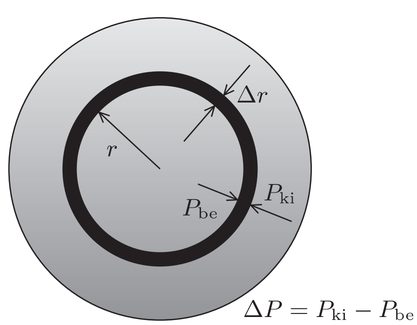
1.a. Határozd meg azt a kritikus T_c hőmérsékletet, amely esetén két ütköző proton közti minimális d_c távolság éppen 10^{-15} m! A keresett értéket, és ebben a feladatban **minden** további számszerű eredményt *két értékes jegyre* adj meg!

2. Annak igazolása, hogy az előző hőmérséklet-becslés hibás

Ahhoz, hogy ellenőrizzük előző becslésünk megbízhatóságát, még egy független módszerre van szükségünk a csillagok központi hőmérsékletének meghatározására. Egy valódi csillag felépítése meglehetősen bonyolult, de néhány egyszerűsítő feltevés használatával a lényeget könnyen megérthetjük. A csillagok egyensúlyban vannak, ami azt jelenti, hogy se nem tágulnak, se nem húzódnak össze, mert a befelé mutató gravitációs erő egyensúlyt tart a kifelé mutató nyomással (*6. ábra*). Egy, a középponttól r távolságban levő gázréteg hidrosztatikai egyensúlyát a

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{G M_r \varrho_r}{r^2}$$

egyenlet fejezi ki, ahol P a gáz nyomása, G a gravitációs állandó, M_r a csillag r sugarú gömbön belül eső részének tömege, ϱ_r pedig a gázréteg sűrűsége.



6. ábra. A csillagok hidrosztatikai egyensúlyban vannak, a nyomás-változással a gravitáció tart egyensúlyt

A csillag központi hőmérsékletére nagyságrendi becslést kaphatunk, ha a paramétereknek a középpontban és a csillag felszínén felvett értékét használjuk, tehát a következő közelítésekkel élünk:

$$\Delta P \approx P_0 - P_\mathrm{c},$$

ahol P_c a központi, P_0 pedig a felületi nyomás. Mivel $P_\mathrm{c} \gg P_0$, feltehetjük, hogy

$$\Delta P \approx -P_\mathrm{c}.$$

Ugyanezzel a közelítéssel élve, a „rétegvastagságra" az adódik, hogy

$$\Delta r \approx R,$$

ahol R a csillag (teljes) sugara, valamint

$$M_r \approx M_R = M,$$

ahol M a csillag teljes tömege.

A sűrűség közelíthető a középpontban felvett értékével,

$$\varrho_r \approx \varrho_c.$$

Feltehetjük továbbá, hogy a nyomás az ideális gáztörvényből számolható.

2.a. Határozd meg a csillag középpontjában a T_c hőmérsékletet kizárólag a csillag sugarának, tömegének, valamint fizikai állandóknak a segítségével!

A fenti modell teszteléséhez vizsgáljuk meg a kapott eredmény egy egyszerű következményét:

2.b. A 2.a. pontban kapott egyenlőség alapján add meg a vizsgált csillagokra az M/R arány becsült értékét kizárólag fizikai állandók és T_c függvényében!

2.c. A T_c hőmérsékletnek az 1.a. pontban meghatározott értéke alapján határozd meg számszerűen a csillagok M/R arányának jósolt értékét!

2.d. Most számold ki a Nap esetén az $M_{\text{Nap}}/R_{\text{Nap}}$ arányt, és ellenőrizd, hogy ez az érték sokkal kisebb, mint a 2.c. pontban meghatározott érték!

3. Csillagok központi hőmérsékletének kvantummechanikai becslése

A 2.d. pontban talált nagy eltérés azt sejteti, hogy T_c-nek az 1.a. pontban adott becslése nem helyes. Az ellentmondás kvantummechanikai effektusok figyelembevételével oldható fel. Eszerint a protonok hullámként viselkednek, és egyetlen proton a λ_{p} de Broglie-hullámhosszával azonos nagyságrendű területen „van szétkenve". Ez azt jelenti, hogy ha a protonok között elért d_c minimális távolság a λ_{p} hullámhossz közelébe esik, akkor a két részecske kvantummechanikai értelemben „átfedésbe kerül", és így képesek a fúzióra.

3.a. Feltéve, hogy a v_{rms} sebességgel haladó protonok esetén a fúzió feltétele $d_c = \dfrac{\lambda_{\text{p}}}{2^{1/2}}$, határozd meg T_c értékét csupán fizikai állandók segítségével!

3.b. Határozd meg a T_c hőmérsékletre a 3.a. pontban kapott kifejezés numerikus értékét!

3.c. A 3.b. pontban kapott érték valamint a 2.b. pontban levezetett kifejezés segítségével határozd meg az M/R arány becsült numerikus értékét csillagokra! Ellenőrizd, hogy ez az érték közel esik-e a megfigyelésekből származó $M_{\text{Nap}}/R_{\text{Nap}}$ arányhoz!

Valóban, az úgynevezett *fősorozatba* eső csillagok (melyekben hidrogén fúziója zajlik, „normális" csillagok) nagyon tág tömeghatárok között megfelelnek a fenti becslésnek.

4. Csillagok tömeg/sugár aránya

Az előző feladatban tapasztalt egyezés azt sejteti, hogy a Nap középponti hőmérsékletének becslésére a kvantummechanikai gondolatmenet helyes.

4.a. Az előző eredményt felhasználva mutasd meg, hogy minden olyan csillag esetén, melyben hidrogén-fúzió zajlik, az M tömeg és R sugár aránya állandó, mely kizárólag univerzális fizikai konstansoktól függ! Határozd is meg ezt az M/R arányt ezekre a csillagokra!

5. A legkisebb csillagok tömege és sugara

A 4.a. pontban kapott eredményből arra következtethetnénk, hogy bármely tömeggel létezhetnek hidrogén-fúziós ciklusban levő csillagok, feltéve, hogy az összefüggés feltétele teljesül. Ez a következtetés azonban helytelen.

A hidrogén-fúziós ciklusban levő csillagokban található gáz ideális gázként viselkedik. Ez azt jelenti, hogy az *elektronok közti* d_{e} tipikus távolság átlagos értéke nagyobb, mint az elektronok λ_{e} de Broglie-hullámhossza. Ellenkező esetben ugyanis az elektronok egy úgynevezett degenerált állapotban lennének, és a csillag másképp viselkedne. Felhívjuk a figyelmet arra a tényre, hogy a vizsgált csillag-típusban levő protonokat és elektronokat másként kezeljük. Protonok esetén a de Broglie-hullámok átfedése *szükséges* ahhoz, hogy a fúzió létrejöhessen, míg elektronok esetén a de Broglie hullámok *nem* fedhetnek át, mert különben az elektronokat nem kezelhetnénk ideális gázként.

A valóságban a csillagok belsejében levő gáz sűrűsége a középpont felé haladva nő. Ennek ellenére ebben a nagyságrendi becslésben tegyük föl, hogy a vizsgált csillag sűrűsége állandó. Ezen kívül felhasználhatjuk, hogy $m_{\text{p}} \gg m_{\text{e}}$.

5.a. Határozd meg az n_{e} átlagos elektronszám-sűrűséget a csillag belsejében!

5.b. Határozd meg az elektronok közti d_{e} tipikus távolságot a csillag belsejében!

5.c. A $d_{\text{e}} \geq \dfrac{\lambda_{\text{e}}}{2^{1/2}}$ feltétel használatával határozd meg egyenlettel a legkisebb olyan csillag sugarát, mely hidrogénfúziós ciklusban lehet! (Ezek az ún. normál csillagok.) Tekintsd úgy, hogy a csillag középpontjában mért hőmérséklet a csillagban bárhol mérhető hőmérséklet tipikus értéke.

5.d. Határozd meg a lehető legkisebb normál csillag sugarának számértékét méterben is és a Nap sugarának (rádiuszának) egységében is!

5.e. Határozd meg a lehető legkisebb normál csillag tömegének számértékét kilogrammban is, és Naptömeg-egységben is!

6. Hélium-fúzió öregebb csillagokban

Ahogy a csillagok öregednek, majdnem az összes magjukban lévő hidrogént héliummá (He) alakították, így a további fénykibocsátás érdekében arra kényszerülnek, hogy elkezdjék a hélium fuzionálását nehezebb elemekké. A hélium mag két protonból és két neutronból áll, így a töltése kétszerese, a tömege kb. négyszerese a protonénak. Láttuk korábban, hogy a proton fúziójának feltétele $d_c = \dfrac{\lambda_\mathrm{p}}{2^{1/2}}$.

6.a. Add meg a megfelelő feltételt a hélium magokra vonatkozóan, és határozd meg a hélium magok $v_\mathrm{rms}(\mathrm{He})$ négyzetes átlagsebességét, valamint a hélium fúzióhoz szükséges $T(\mathrm{He})$ hőmérsékletet!