**2. feladat. Lézeres Doppler-hűtés és optikai szirupok**

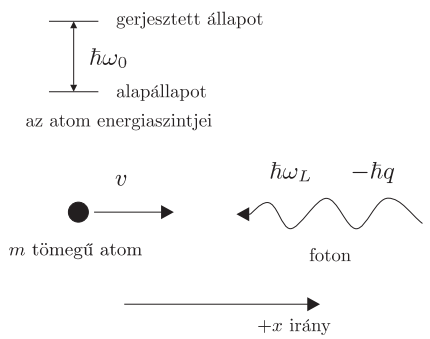
Ennek a feladatnak az a célja, hogy egyszerű elméleti megfontolással megértsed a „lézeres hűtés” és az „optikai szirup” jelenségeket. Ez azt jelenti, hogy semleges atomok (általában alkáli fémek) nyalábját egymással szemben haladó, azonos frekvenciájú lézersugarakkal hűtjük. Ezért kapott 1997-ben fizikai Nobel-díjat S. Chu, P. Phillips és C. Cohen-Tannoudji.

A hátsó belső borító jobb felső képe nátrium atomokat ábrázol (a fényes pont középen), melyek három, egymásra merőleges lézersugár-pár kereszteződésében vannak csapdázva. A csapda területét szokás „optikai szirup”-nak („optical molasses”) nevezni, mivel a disszipatív optikai erő a szirupon áthaladó testekre ható viszkózus erőre emlékeztet.

Ebben a feladatban egy foton és egy atom egyszerű kölcsönhatását és a disszipációs mechanizmust fogod vizsgálni egy dimenzióban.

**I. rész: A lézeres hűtés alapjai**

Tekints egy $m$ tömegű atomot, amely a $+x$ irányban, $v$ sebességgel mozog. Az egyszerűség kedvéért vizsgáld a problémát egy dimenzióban, azaz ne foglalkozz az $y$ és $z$ irányokkal (*4. ábra*). Az atomnak két belső energiaszintje van. Az alapállapot energiáját nullának tekintjük, a gerjesztett állapot energiája pedig $\hbar\omega_0$, ahol $\hbar = h/2\pi$. Az atom kezdetben alapállapotban van. Egy lézersugár, melynek a laboratórium koordináta-rendszerében mért körfrekvenciája $\omega_L$, a $-x$ irányban halad, és ütközik egy atommal. Kvantummechanikai szempontból a lézersugár nagyszámú egyforma fotonból áll, melyek energiája $\hbar\omega_L$ és impulzusa $-\hbar q$. A fotont elnyelheti egy atom, amely azt később spontán kibocsátja; ez a kibocsátás (emisszió) azonos valószínűséggel történhet a $+x$ és a $-x$ irányban. Mivel az atom nemrelativisztukus sebességgel mozog, $v/c \ll 1$ (ahol $c$ a fénysebesség). Vedd figyelembe azt is, hogy $\hbar q/mv \ll 1$, azaz az atom impulzusa sokkal nagyobb egy foton impulzusánál. A válaszaidban mindkét mennyiségnek csak az elsőrendű (lineáris) tagjait vedd figyelembe.




*4. ábra.* Egy $m$ tömegű, $v$ sebességű, a $+x$ irányban haladó atom, amely egy $\hbar\omega_L$ energiájú és $-\hbar q$ impulzusú fotonnal ütközik. Az atomnak két belső állapota van $\hbar\omega_0$ energiakülönbséggel

Feltételezd, hogy a lézer $\omega_L$ körfrekvenciája úgy van hangolva, hogy a mozgó atom rendszeréből nézve rezonanciában van az atom belső átmenetével. Válaszolj a következő kérdésekre:

**1. Elnyelés (abszorpció)**

**1.a.** Add meg a foton elnyelésének (abszorpciójának) rezonanciafeltételét!

**1.b.** Add meg az atom $p_\mathrm{a}$ impulzusát az elnyelés után, a laboratórium rendszeréből nézve!

**1.c.** Add meg az atom $\varepsilon_\mathrm{a}$ teljes energiáját az elnyelés után, a laboratórium rendszeréből nézve!

**2. Egy foton spontán kibocsátása (emissziója) a $-x$ irányban**

Az ütköző foton elnyelődése (abszorbciója) után valamennyi idővel az atom egy fotont bocsáthat ki (emittálhat) a $-x$ irányban.

**2.a.** Add meg a kibocsátott foton $\varepsilon_\mathrm{f}$ energiáját a $-x$ irányú emissziós folyamat után, a laboratórium rendszeréből nézve!

**2.b.** Add meg a kibocsátott foton $p_\mathrm{f}$ impulzusát a $-x$ irányú emissziós folyamat után, a laboratórium rendszeréből nézve!

**2.c.** Add meg az atom $p_\mathrm{a}$ impulzusát a $-x$ irányú emissziós folyamat után, a laboratórium rendszeréből nézve!

**2.d.** Add meg az atom $\varepsilon_\mathrm{a}$ teljes energiáját a $-x$ irányú emissziós folyamat után, a laboratórium rendszeréből nézve!

**3. Egy foton spontán kibocsátása (emissziója) a $+x$ irányban**

Az ütköző foton elnyelődése (abszorbciója) után valamennyi idővel az atom egy fotont bocsáthat ki (emittálhat) a $+x$ irányban.

**3.a.** Add meg a kibocsátott foton $\varepsilon_\mathrm{f}$ energiáját a $+x$ irányú emissziós folyamat után, a laboratórium rendszeréből nézve!

**3.b.** Add meg a kibocsátott foton $p_\mathrm{f}$ impulzusát a $+x$ irányú emissziós folyamat után, a laboratórium rendszeréből nézve!

**3.c.** Add meg az atom $p_\mathrm{a}$ impulzusát a $+x$ irányú emissziós folyamat után, a laboratórium rendszeréből nézve!

**3.d.** Add meg az atom $\varepsilon_\mathrm{a}$ teljes energiáját a $+x$ irányú emissziós folyamat után, a laboratórium rendszeréből nézve!

**4. Átlagos kibocsátás (emisszió) az elnyelés (abszorpció) után**

A foton spontán kibocsátása egyforma valószínűséggel történhet a $-x$ vagy a $+x$ irányban. Ezt figyelembe véve válaszolj a következő kérdésekre:

**4.a.** Add meg a kibocsátott foton $\varepsilon_\mathrm{f}$ átlagos energiáját az emissziós folyamat után!

**4.b.** Add meg a kibocsátott foton $p_\mathrm{f}$ átlagos impulzusát az emissziós folyamat után!

**4.c.** Add meg az atom $\varepsilon_\mathrm{a}$ átlagos teljes energiáját az emissziós folyamat után!

**4.d.** Add meg az atom $p_\mathrm{a}$ átlagos impulzusát az emissziós folyamat után!

**5. Energia- és impulzusátadás**

Tekints egy teljes egyfotonos elnyelési-kibocsátási (abszorpciós-emissziós) folyamatot, ahogy azt az eddigiekben tárgyaltuk. A lézersugár és az atom között egy eredő átlagos impulzus- és energiaátadás figyelhető meg.

**5.a.** Add meg az atom $\Delta\varepsilon$ átlagos energiaváltozását egy teljes egyfotonos elnyelési-kibocsátási folyamat után!

**5.b.** Add meg az atom $\Delta p$ átlagos impulzusváltozását egy teljes egyfotonos elnyelési-kibocsátási folyamat után!

**6. Energia- és impulzusátadás egy $+x$ irányú lézersugárral**

Tekints most egy olyan lézersugarat, amelynek $\omega_L'$ a körfrekvenciája és a $+x$ irányban halad, miközben az atom szintén a $+x$ irányban halad $v$ sebességgel. Azt feltételezve, hogy az atom belső átmenete és a lézersugár között az atom rendszeréből nézve teljesül a rezonanciafeltétel, válaszolja következő kérdésekre:

**6.a.** Add meg az atom $\Delta\varepsilon$ átlagos energiaváltozását egy teljes egyfotonos elnyelési-kibocsátási folyamat után!

**6.b.** Add meg az atom $\Delta p$ átlagos impulzusváltozását egy teljes egyfotonos elnyelési-kibocsátási folyamat után!

**II. rész: Disszipáció és az optikai szirup alapjai**

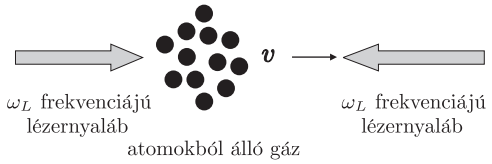
A természetben a kvantumfolyamatokat elkerülhetetlenül bizonytalanság kíséri. Így az a tény, hogy az atom az elnyelés után *véges* idővel bocsát ki egy fotont, azzal a következménnyel jár, hogy a rezonanciafeltétel nem teljesül *egzaktul,* úgy ahogy azt eddig tárgyaltuk. Azaz a lézersugár $\omega_L$ és $\omega_L'$ körfrekvenciája bármilyen értéket felvehet, és az elnyelés (abszorpció) mégis bekövetkezhet. Az elnyelés különböző (kvantum)valószínűséggel történik, és – mint ahogy azt sejteni lehet – a legnagyobb valószínűséggel éppen a rezonanciafeltétel egzakt teljesülésekor. Egy foton elnyelése és kibocsátása között átlagosan eltelő időt a gerjesztett állapot élettartamának nevezzük, és így jelöljük: $\Gamma^{-1}$.

Tekintsünk egy $N$ atomból álló, a laboratórium koordinátarendszeréhez viszonyítva *nyugalomban* lévő atomhalmazt, és egy rá eső $\omega_L$ körfrekvenciájú lézersugarat. Az atomok folyamatosan fotonokat nyelnek el és bocsátanak ki, úgy, hogy átlagosan $N_\mathrm{g}$ atom van gerjesztett állapotban (és így $N-N_\mathrm{g}$ atom alapállapotban). Kvantummechanikai számítás eredményeként adódik, hogy:

$$N_\mathrm{g} = N\frac{\Omega_R^2}{(\omega_0-\omega_L)^2+\frac{\Gamma^2}{4}+2\Omega_R^2}\,,$$

ahol $\omega_0$ az atomi átmenet rezonancia-körfrekvenciája, és $\Omega_R$ az úgynevezett Rabi-frekvencia; $\Omega_R^2$ arányos a lézersugár *intenzitásával.* Láthatod, hogy ez az érték – ahogy már említettük – akkor is különbözik nullától, ha $\omega_0$ nem egyezik meg a lézersugár $\omega_L$ körfrekvenciájával. Az előbbi eredményt úgy is kifejezhetjük, hogy időegységenként bekövetkező elnyelési-kibocsátási (abszorpciós-emissziós) folyamatok száma $N_\mathrm{g}\Gamma$.

Tekintsd az *5. ábrán* látható fizikai elrendezést, ahol két szemben haladó lézersugár egymással *azonos,* de amúgy *tetszőleges* $\omega_L$ körfrekvenciával ütközik az $N$ atomból álló, $+x$ irányban $v$ sebességgel mozgó gáznak.




*5. ábra.* Két szemben haladó lézersugár egymással *azonos,* de amúgy *tetszőleges* $\omega_L$ körfrekvenciával ütközik az $N$ atomból álló, $+x$ irányban $v$ sebességgel mozgó gáznak

**7. A lézer által az atomnyalábra kifejtett erő**

**7.a.** Az eddigi információk alapján határozd meg azt az erőt, amit a lézersugár kifejt az atomnyalábra! Használd ki, hogy $mv \gg \hbar q$.

**8. Kissebességű határeset.** Most tételezd fel, hogy az atomok sebessége elég kicsi ahhoz, hogy az erő a $v$ sebesség első rendű tagjával közelíthető.

**8.a.** Határozd meg a 7.a. feladatban meghatározott erő kifejezését ebben a közelítésben!

Felhasználva ezt az eredményt megkeresheted annak a feltételét, hogy a lézersugár az atomnyalábot gyorsítja, lassítja, illetve nem hat rá.

**8.b.** Add meg annak a feltételét, hogy az erő pozitív (gyorsítja az atomokat)!

**8.c.** Add meg annak a feltételét, hogy az erő nulla!

**8.d.** Add meg annak a feltételét, hogy az erő negatív (lassítja az atomokat)!

**8.e.** Most tedd fel, hogy az atomok $-v$ sebességgel mozognak (a $-x$ irányban). Add meg annak a feltételét, hogy az erő lassítsa az atomokat!

**9. Optikai szirup.** Negatív erő esetében egy disszipatív súrlódó erőt kapunk. Tedd fel, hogy kezdetben, amikor $t = 0$, a gáz atomjai $v_0$ sebességgel mozognak.

**9.a.** Kissebességes közelítésben határozd meg az atomok sebességét azután, hogy a lézersugarak $\tau$ ideje be vannak kapcsolva.

**9.b.** Most tételezd fel, hogy a gáz atomjai kezdetben $T_0$ hőmérsékleten termikus egyensúlyban vannak. Határozd meg a $T$ hőmérsékletet azután, hogy a lézersugarak $\tau$ ideje be vannak kapcsolva.

(A modell azonban nem teszi lehetővé tetszőlegesen kicsi hőmérséklet elérését.)