

## 2. feladat. Lézeres Doppler-hűtés és optikai szirupok

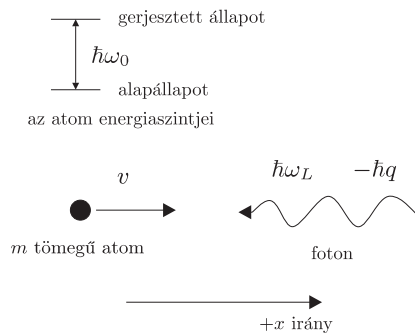
Ennek a feladatnak az a célja, hogy egyszerű elméleti megfontolással megértsed a „lézeres hűtés” és az „optikai szirup” jelenségeket. Ez azt jelenti, hogy semleges atomok (általában alkáli fémek) nyalábját egymással szemben haladó, azonos frekvenciájú lézersugarakkal hűtjük. Ezért kapott 1997-ben fizikai Nobel-díjat S. Chu, P. Phillips és C. Cohen-Tannoudji.

A hátsó belső borító jobb felső képe nátrium atomokat ábrázol (a fényes pont középen), melyek három, egymásra merőleges lézersugár-pár kereszteződésében vannak csapdázva. A csapda területét szokás „optikai szirup”-nak („optical molasses”) nevezni, mivel a disszipatív optikai erő a szirupon áthaladó testekre ható viszkózus erőre emlékeztet.

Ebben a feladatban egy foton és egy atom egyszerű kölcsönhatását és a disszipációs mechanizmust fogod vizsgálni egy dimenzióban.

### I. rész: A lézeres hűtés alapjai

Tekints egy  $m$  tömegű atomot, amely a  $+x$  irányban,  $v$  sebességgel mozog. Az egyszerűség kedvéért vizsgálj a problémát egy dimenzióban, azaz ne foglalkozz az  $y$  és  $z$  irányokkal (4. ábra). Az atomnak két belső energiaszintje van. Az alapállapot energiáját nullának tekintjük, a gerjesztett állapot energiája pedig  $\hbar\omega_0$ , ahol  $\hbar = h/2\pi$ . Az atom kezdetben alapállapotban van. Egy lézersugár, melynek a laboratórium koordináta-rendszerében mért körfrekvenciája  $\omega_L$ , a  $-x$  irányban halad, és ütközik egy atommal. Kvantummechanikai szempontból a lézersugár nagyszámú egyforma fotonból áll, melyek energiája  $\hbar\omega_L$  és impulzusa  $-\hbar q$ . A foton elnyelheti egy atom, amely azt később spontán kibocsátja; ez a kibocsátás (emisszió) azonos valószínűséggel történhet a  $+x$  és a  $-x$  irányban. Mivel az atom nem-relativisztikus sebességgel mozog,  $v/c \ll 1$  (ahol  $c$  a fénysebesség). Vedd figyelembe azt is, hogy  $\hbar q/mv \ll 1$ , azaz az atom impulzusa sokkal nagyobb egy foton impulzusánál. A válaszaidban mindkét mennyiségnek csak az elsőrendű (lineáris) tagjait vedd figyelembe.



4. ábra. Egy  $m$  tömegű,  $v$  sebességű, a  $+x$  irányban haladó atom, amely egy  $\hbar\omega_L$  energiájú és  $-\hbar q$  impulzusú fotonnal ütközik. Az atomnak két belső állapota van  $\hbar\omega_0$  energiakülönbséggel

Feltételezd, hogy a lézer  $\omega_L$  körfrekvenciája úgy van hangolva, hogy a mozgó atom rendszeréből nézve rezonanciában van az atom belső átmenetével. Válaszolj a következő kérdésekre:

#### 1. Elnyelés (abszorpció)

1.a. Add meg a foton elnyelésének (abszorpciójának) rezonanciafeltételét!

1.b. Add meg az atom  $p_a$  impulzusát az elnyelés után, a laboratórium rendszeréből nézve!

1.c. Add meg az atom  $\varepsilon_a$  teljes energiáját az elnyelés után, a laboratórium rendszeréből nézve!

#### 2. Egy foton spontán kibocsátása (emissziója) a $-x$ irányban

Az ütköző foton elnyelődése (abszorpciója) után valamennyi idővel az atom egy fotont bocsáthat ki (emittálhat) a  $-x$  irányban.

2.a. Add meg a kibocsátott foton  $\varepsilon_f$  energiáját a  $-x$  irányú emissziós folyamat után, a laboratórium rendszeréből nézve!

2.b. Add meg a kibocsátott foton  $p_f$  impulzusát a  $-x$  irányú emissziós folyamat után, a laboratórium rendszeréből nézve!

2.c. Add meg az atom  $p_a$  impulzusát a  $-x$  irányú emissziós folyamat után, a laboratórium rendszeréből nézve!

2.d. Add meg az atom  $\varepsilon_a$  teljes energiáját a  $-x$  irányú emissziós folyamat után, a laboratórium rendszeréből nézve!

#### 3. Egy foton spontán kibocsátása (emissziója) a $+x$ irányban

Az ütköző foton elnyelődése (abszorpciója) után valamennyi idővel az atom egy fotont bocsáthat ki (emittálhat) a  $+x$  irányban.

3.a. Add meg a kibocsátott foton  $\varepsilon_f$  energiáját a  $+x$  irányú emissziós folyamat után, a laboratórium rendszeréből nézve!

3.b. Add meg a kibocsátott foton  $p_f$  impulzusát a  $+x$  irányú emissziós folyamat után, a laboratórium rendszeréből nézve!

3.c. Add meg az atom  $p_a$  impulzusát a  $+x$  irányú emissziós folyamat után, a laboratórium rendszeréből nézve!

**3.d.** Add meg az atom  $\varepsilon_a$  teljes energiáját a  $+x$  irányú emissziós folyamat után, a laboratórium rendszeréből nézve!

#### 4. Átlagos kibocsátás (emisszió) az elnyelés (abszorpció) után

A foton spontán kibocsátása egyforma valószínűséggel történhet a  $-x$  vagy a  $+x$  irányban. Ezt figyelembe véve válaszolj a következő kérdésekre:

- 4.a.** Add meg a kibocsátott foton  $\varepsilon_f$  átlagos energiáját az emissziós folyamat után!
- 4.b.** Add meg a kibocsátott foton  $p_f$  átlagos impulzusát az emissziós folyamat után!
- 4.c.** Add meg az atom  $\varepsilon_a$  átlagos teljes energiáját az emissziós folyamat után!
- 4.d.** Add meg az atom  $p_a$  átlagos impulzusát az emissziós folyamat után!

#### 5. Energia- és impulzusátadás

Tekints egy teljes egyfotonos elnyelési-kibocsátási (abszorpciós-emissziós) folyamatot, ahogy azt az eddigiekben tárgyaltuk. A lézersugár és az atom között egy eredő átlagos impulzus- és energiaátadás figyelhető meg.

- 5.a.** Add meg az atom  $\Delta\varepsilon$  átlagos energiaváltozását egy teljes egyfotonos elnyelési-kibocsátási folyamat után!
- 5.b.** Add meg az atom  $\Delta p$  átlagos impulzusváltozását egy teljes egyfotonos elnyelési-kibocsátási folyamat után!

#### 6. Energia- és impulzusátadás egy $+x$ irányú lézersugárral

Tekints most egy olyan lézersugarat, amelynek  $\omega'_L$  a körfrekvenciája és a  $+x$  irányban halad, miközben az atom szintén a  $+x$  irányban halad  $v$  sebességgel. Azt feltételezve, hogy az atom belső átmenete és a lézersugár között az atom rendszeréből nézve teljesül a rezonanciafeltétel, válaszolja következő kérdésekre:

- 6.a.** Add meg az atom  $\Delta\varepsilon$  átlagos energiaváltozását egy teljes egyfotonos elnyelési-kibocsátási folyamat után!
- 6.b.** Add meg az atom  $\Delta p$  átlagos impulzusváltozását egy teljes egyfotonos elnyelési-kibocsátási folyamat után!

### II. rész: Disszipáció és az optikai szirup alapjai

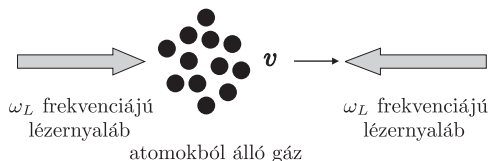
A természetben a kvantumfolyamatokat elkerülhetetlenül bizonytalanság kíséri. Így az a tény, hogy az atom az elnyelés után *véges* idővel bocsát ki egy fotont, azzal a következménnyel jár, hogy a rezonanciafeltétel nem teljesül *egzaktnak*, úgy ahogy azt eddig tárgyaltuk. Azaz a lézersugár  $\omega_L$  és  $\omega'_L$  körfrekvenciája bármilyen értéket felvehet, és az elnyelés (abszorpció) mégis bekövetkezhet. Az elnyelés különböző (kvantum) valószínűséggel történik, és – mint ahogy azt sejtteni lehet – a legnagyobb valószínűséggel éppen a rezonanciafeltétel egzakt teljesülésekor. Egy foton elnyelése és kibocsátása között átlagosan eltelt időt a gerjesztett állapot élettartamának nevezzük, és így jelöljük:  $\Gamma^{-1}$ .

Tekintsünk egy  $N$  atomból álló, a laboratórium koordinátarendszeréhez viszonyítva *nyugalomban* lévő atomhalmazt, és egy rá eső  $\omega_L$  körfrekvenciájú lézersugarat. Az atomok folyamatosan fotonokat nyelnek el és bocsátanak ki, úgy, hogy átlagosan  $N_g$  atom van gerjesztett állapotban (és így  $N - N_g$  atom alapállapotban). Kvantummechanikai számítás eredményeként adódik, hogy:

$$N_g = N \frac{\Omega_R^2}{(\omega_0 - \omega_L)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2},$$

ahol  $\omega_0$  az atomi átmenet rezonancia-körfrekvenciája, és  $\Omega_R$  az úgynevezett Rabi-frekvencia;  $\Omega_R^2$  arányos a lézersugár *intenzitásával*. Láthatod, hogy ez az érték – ahogy már említettük – akkor is különbözik nullától, ha  $\omega_0$  nem egyezik meg a lézersugár  $\omega_L$  körfrekvenciájával. Az előbbi eredményt úgy is kifejezhetjük, hogy időegységenként bekövetkező elnyelési-kibocsátási (abszorpciós-emissziós) folyamatok száma  $N_g\Gamma$ .

Tekintsd az *5. ábrán* látható fizikai elrendezést, ahol két szemben haladó lézersugár egymással *azonos*, de amúgy *tetszőleges*  $\omega_L$  körfrekvenciával ütközik az  $N$  atomból álló,  $+x$  irányban  $v$  sebességgel mozgó gáznak.



*5. ábra.* Két szemben haladó lézersugár egymással *azonos*, de amúgy *tetszőleges*  $\omega_L$  körfrekvenciával ütközik az  $N$  atomból álló,  $+x$  irányban  $v$  sebességgel mozgó gáznak

#### 7. A lézer által az atomnyalábra kifejlesztett erő

**7.a.** Az eddigi információk alapján határozd meg azt az erőt, amit a lézersugár kifejleszt az atomnyalábra! Használd ki, hogy  $mv \gg \hbar q$ .

**8. Kissebességű határeset.** Most tételezd fel, hogy az atomok sebessége elég kicsi ahhoz, hogy az erő a  $v$  sebesség első rendű tagjával közelíthető.

**8.a.** Határozd meg a 7.a. feladatban meghatározott erő kifejezését ebben a közelítésben!

Felhasználva ezt az eredményt megkeresheted annak a feltételét, hogy a lézersugár az atomnyalábot gyorsítja, lassítja, illetve nem hat rá.

**8.b.** Add meg annak a feltételét, hogy az erő pozitív (gyorsítja az atomokat)!

**8.c.** Add meg annak a feltételét, hogy az erő nulla!

**8.d.** Add meg annak a feltételét, hogy az erő negatív (lassítja az atomokat)!

**8.e.** Most tedd fel, hogy az atomok  $-v$  sebességgel mozognak (a  $-x$  irányban). Add meg annak a feltételét, hogy az erő lassítsa az atomokat!

**9. Optikai szirup.** Negatív erő esetében egy disszipatív súrlódó erőt kapunk. Tedd fel, hogy kezdetben, amikor  $t = 0$ , a gáz atomjai  $v_0$  sebességgel mozognak.

**9.a.** Kissebességes közelítésben határozd meg az atomok sebességét azután, hogy a lézersugarak  $\tau$  ideje be vannak kapcsolva.

**9.b.** Most tételezd fel, hogy a gáz atomjai kezdetben  $T_0$  hőmérsékleten termikus egyensúlyban vannak. Határozd meg a  $T$  hőmérsékletet azután, hogy a lézersugarak  $\tau$  ideje be vannak kapcsolva.

(A modell azonban nem teszi lehetővé tetszőlegesen kicsi hőmérséklet elérését.)